arXiv:2601.13016v1 [math.QA] 19 Jan 2026

扭量子仿射代数上的半无限 Lakshmibai-Seshadri 路径与零级极端权模

Shohei Adachi、Hayato Koike

摘要

本文研究扭仿射李代数上的零级极值权模。为此，我们引入与零级占优整权 λ 相关联的半无限 Lakshmibai– Seshadri 路径。随后我们证明，形状为 λ 的半无限 LS 路径集合 B_2^{∞} LS(λ)，作为晶体，与相应的零级极值权模 $V(\lambda)$ 的晶体基 $\mathcal{B}(\lambda)$ 同构。

目录

1 引言 **2**

2 基本记号 **3**

3 回顾 [5]中的论证 **4**

3.1 半无限LS路径的定义.4 3.2 B_2^{∞} LS(λ)上的晶体结构.5 3.3 同构定理.6

—

4 扭曲情形的论证概要 8

5 扭曲仿射型的半无限 Lakshmibai-Seshadri 路径 9

5.1 Lakshmibai–Seshadri 路径.9 5.2 扭曲仿射根数据和 Peterson 陪集代表元 . . 11 5.2.1 对偶非扭曲类型.12 5.2.2 类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ .13 5.2.3 Peterson 陪集代表元.14 5.3 半无限 Lakshmibai-Seshadri 路径.15 5.4 B_2^{∞} LS(λ)的晶体结构.15

—

6 同构定理的证明 16

6.1 一些技术引理.16 6.2 对偶非扭曲类型的子引理 3.3.4 的证明.18 6.3 类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 的子引理 3.3.4 的证明 .19

A 量子 Bruhat 图与量子 LS 路径。21A.1 对偶非扭曲类型的量子 Bruhat 图与 QLS 路径.22 A.2 类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 的量子 Bruhat 图与 QLS 路径.26

1 引言

在 [7], Kashiwara 引入了可对称化 Kac–Moody 代数的量子化泛包络代数上的极值权模 $V(\lambda)$，并证明其晶体基$\mathcal{B}(\lambda)$ 的存在性。我们关注当李代数为仿射型且极值权 λ 为零级时，极值权模 $V(\lambda)$ 的晶体基$\mathcal{B}(\lambda)$ 的结构。

设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的仿射 Kac–Moody 李代数。当仿射李代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为非扭化型时，Ishii、Naito 和 Sagaki [5] 引入了半无限 Lakshmibai–Seshadri 路径（简称 LS 路径），作为$\mathcal{B}(\lambda)$ 的组合模型。事实上，他们证明，对于 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 的任意零级占优整权 λ，形状为 λ 的半无限 LS 路径集合 $\overset{\infty}{2}$ LS(λ) 具有晶体结构，并且作为晶体与$\mathcal{B}(\lambda)$ 同构。对于类型$A_{2\ell}^{(2)}$，Nomoto[14] 引入了半无限 LS 路径，并证明了相同的结果。

本文旨在将他们的结果推广到一般扭曲仿射型。也就是说，对于 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于一般扭曲型的情形，我们引入半无限 LS 路径，这是一种带有晶体结构的路径模型。我们还证明，对于 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 的任意零级占优整权 λ，$\mathcal{B}(\lambda)$ 与形状为 λ 的半无限 LS 路径集合 $\overset{\infty}{2}$ LS(λ) 同构为晶体。

根据本文的结果，自然可以预期，Demazure 子模的分次特征可以用非对称 Macdonald 多项式来描述。沿着这一思路，与 Demazure 子模 $V_x^{\pm}(\lambda)$ 对应的 $\mathcal{B}_x^{\pm}(\lambda)$ 在 $\mathcal{B}(\lambda)$ 中的子集，应当可以实现为形状为 λ 的半无限 LS 路径集合 $\overset{\infty}{2}$ LS(λ) 的一个子集。从这一视角来看，以量子 LS 路径阐释 Ram–Yip 公式，或可进一步揭示分次特征与 Macdonald 多项式之间的关系。若这一结果得以确立，便可在扭仿射型的情形下得到 [12] 的一个类似结果。

本文组织如下。在第 §2 节中，我们固定仿射根数据的记号。在第 §3 节中，我们回顾半无限 LS 路径的定义、$\overset{\infty}{2}$ LS(λ) 上的晶体结构，以及 [5] 中给出的非扭曲仿射型的同构定理证明。在第 §4 节中，基于第 §3 节回顾的材料，我们概述主要结果的证明。我们证明，只需建立约化引理（引理 5.4.1 和引理 5.4.2）以及关于平移路径的条件（子引理 3.3.4），即可证明本情形中的同构定理。在第 §5 节中，我们回顾 Littelmann [11], 引入的 LS 路径，并描述扭曲仿射型的根数据以及 Peterson 陪集代表元。我们还解释对偶非扭化类型与非扭化类型之间的对应关系，以及类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 与类型 $D_{\ell+1}^{(2)}$ 之间的对应关系。此外，我们证明约化

引理，重述 [5, §4]，中的命题，并在扭曲仿射情形下赋予集合 $\overset{\infty}{2}$ LS(λ) 晶体结构。在第 §6 节中，我们证明子引理 3.3.4，并完成同构定理的证明。证明分别针对对偶非扭曲类型和类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 展开。后一种情形更为复杂，这是由于 $\langle \alpha_\ell^\vee, \varpi_\ell \rangle = 2$。通过限制出现在满足长度条件（6.3.1）的 a-链中的正实根的可能形式，可以证明该子引理。该条件源自量子 Bruhat 图。最后，在第 §A 节中，我们回顾量子 Bruhat 图和量子 LS 路径的定义，并解释它们与半无限 Bruhat 图之间的关系。

2 基本记号

本节回顾仿射根数据，并固定本文所用的记号。

设 X_{af} 为仿射型广义 Cartan 矩阵，其指标集为 I_{af}，基数为 $\ell+1$。设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}} = \mathfrak{g}(X_{\mathrm{af}})$ 为与 X_{af} 相关联的仿射 Kac-Moody 代数。设 $\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}$ 为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 的 Cartan 子代数。典范配对记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}_{\mathrm{af}} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^* \to \mathbb{C}$。将 $\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*$ 上的不变双线性形式记为 $(\cdot,\cdot) : \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^* \times \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^* \to \mathbb{C}$，其归一化方式如 [1, §2.1] 所述。设 $\{\alpha_i\}_{i\in I_{\mathrm{af}}} \subset \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*$ 和 $\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I_{\mathrm{af}}} \subset \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}$ 分别为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 的单根集和单余根集。我们按 [1, §2.1] 的方式为单根编号。于是，在 $X_{\mathrm{af}} = A_{2\ell}^{(2)}$ 的情形下，我们选取最长的根作为仿射单根 α_0。需要指出的是，在 $A_{2\ell}^{(2)}$ 型中，我们对仿射顶点 0 的选择不同于 [6, §4.8、TABLE Aff 2] 和 [14] 中的选择。令 $I := I_{\mathrm{af}} \setminus \{0\} = \{1, \dots, \ell\}$。设 X 为以 I 为指标的 X_{af} 的主子矩阵；X 是有限型广义 Cartan 矩阵。设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(X) \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为与 X 相关联的 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 的有限维单李子代数，$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数。令 $Q := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ 和 $Q^\vee := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ 分别为根格和余根格。令 $\delta := \sum_{i\in I_{\mathrm{af}}} a_i \alpha_i$ 和 $K := \sum_{i\in I_{\mathrm{af}}} a_i^\vee \alpha_i^\vee$ 分别为零根和典范中心元，其中 a_i 和 $a_i^\vee$ 分别为 X_{af} 和 ${}^tX_{\mathrm{af}}$ 的标号。注意，在所有情形下 $a_0 = 1$，并且

$$a_0^\vee = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{\mathrm{af}} \neq A_{2\ell}^{(2)}, \\ 2 & \text{if } X_{\mathrm{af}} = A_{2\ell}^{(2)}. \end{cases}$$

我们设

$$(\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*)^0 := \{\Lambda \in \mathfrak{h}_{\mathrm{af}} \mid \langle K, \Lambda \rangle = 0\};$$

我们有 $(\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*)^0 = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{C}\alpha_i \oplus \mathbb{C}\delta$。令 $\mathbf{cl} : (\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*)^0 \twoheadrightarrow (\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*)^0/\mathbb{C}\delta \cong \mathfrak{h}$ 为典范投影。取积分权格 $P_{\mathrm{af}} := \bigoplus_{i\in I_{\mathrm{af}}} \mathbb{Z}\Lambda_i \oplus \mathbb{Z}\delta \subset \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*$，其中 Λ_i 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 对于 $i \in I_{\mathrm{af}}$ 的第 i 个基本权，也就是说，对所有 $j \in I_{\mathrm{af}}$，$\langle \alpha_j^\vee, \Lambda_i \rangle = \delta_{ij}$。对于 $i \in I$，我们定义第 i 个零级基本权 $\varpi_i \in P_{\mathrm{af}}$ 如下：当 $X_{\mathrm{af}} \neq A_{2\ell}^{(2)}$ 时，令

$$\varpi_i := \Lambda_i - a_i^\vee \Lambda_0 \quad \text{for } i \in I.$$

当 $X_{\mathrm{af}} = A_{2\ell}^{(2)}$ 时，令

$$\varpi_i \coloneqq \begin{cases} \Lambda_i - \Lambda_0 & \text{if } i \neq \ell, \\ 2\Lambda_\ell - \Lambda_0 & \text{if } i = \ell. \end{cases}$$

我们注意到$\langle K,\ \varpi_i \rangle = 0$ 对于 $i \in I$。我们设

$$P_+^0 \coloneqq \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_i \subset (\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*)^0.$$

对于 $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P_+^0$，我们设 $J_\lambda \coloneqq \{i \in I \mid m_i = 0\} \subset I$。

令 $W_{\mathrm{af}} \coloneqq \langle s_i \mid i \in I_{\mathrm{af}} \rangle \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*)$为（仿射）魏尔群，其中$s_i = s_{\alpha_i}$ 是关于 α_i的简单反射。设 $W \coloneqq \langle s_i \mid i \in I \rangle \subset W_{\mathrm{af}}$，也就是说，$W$ 是 $\mathfrak{g}$的魏尔群。令 $e \in W_{\mathrm{af}}$ 为单位元，$\ell : W_{\mathrm{af}} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为长度函数。

令 Δ_{af} 为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 的实根集合，Δ_{af}^+ 为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$的正实根集合。设 $\Delta := \Delta_{\mathrm{af}} \cap Q$，它是 $\mathfrak{g}$的根系；并设 $\Delta^+ \coloneqq \Delta \cap \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$，它是 Δ的正根集合。用 $s_\beta \in W_{\mathrm{af}}$表示关于 $\beta \in \Delta_{\mathrm{af}}$ 的反射。

对于 $J \subset I$，我们设

$$Q_J \coloneqq \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}\alpha_j, \quad Q_J^\vee \coloneqq \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}\alpha_j^\vee, \quad Q_J^{\vee,+} \coloneqq \sum_{j \in J} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_j^\vee,$$
$$\Delta_J \coloneqq \Delta \cap Q_J, \quad \Delta_J^+ \coloneqq \Delta_J \cap \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i, \quad W_J \coloneqq \langle s_j \mid j \in J \rangle.$$

令 W^J 表示 W/W_J 的最短长度陪集代表元集合。由 [2,§2.4] 可知

$$W^J = \{w \in W \mid w\alpha \in \Delta^+ \text{ for all } \alpha \in \Delta_J^+\}.$$

对于 $w \in W$，$\lfloor w \rfloor = \lfloor w \rfloor^J \in W^J$ 表示陪集 $wW_J \in W/W_J$ 的最短长度陪集代表元。

3 对 [5] 中论证的回顾

为了详细说明构造和证明上的差异，我们先简要但充分地回顾 Ishii–Naito–Sagaki[5] 的工作。

3.1 半无限LS路径的定义

令 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为非扭曲仿射型。对于 $x \in W_{\mathrm{af}}$，$x = wt_\xi \in W \ltimes Q^\vee$ 的半无限长度定义为

$$\ell^{\frac{\infty}{2}}(x) := \ell(w) + 2\langle \xi, \rho \rangle, \tag{3.1.1}$$

其中 $\rho := (1/2)\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$。令 $J\subset I$ 和 $(W^J)_{\mathrm{af}}$ 为 J 的 Peterson 陪集代表元（定义见 [5, §2.3]）。我们在集合 $(W^J)_{\mathrm{af}}$ 上引入一种 $\Delta^+{}_{\mathrm{af}}$ 标记的有向图结构，其边定义如下：

$$x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$$

使得 $s_\beta x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$ 和 $\ell^\infty_2(s_\beta x) = \ell^\infty_2(x)+1$ 满足 $x\in(W^J)_{\mathrm{af}}$ 和 $\beta\in\Delta^+{}_{\mathrm{af}}$。

我们将此图记为 $^\infty_2\mathrm{BG}^J$。

定义 3.1.1（a 形状为 λ 的链）。设 $\lambda\in P^0_+$，$x,y\in(W^{J_\lambda})_{\mathrm{af}}$，且 $a\in(0,1]_{\mathbb{Q}} := (0,1]\cap\mathbb{Q}$。一条有向路径

$$x = y_0 \xrightarrow{\beta_1} y_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_k} y_k = y$$

从 x 到 y 的 $^\infty_2\mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 中的路径，若满足以下条件，则称为一条从 x 到 y 的 a-形状为 λ 的链：

$$a\langle\beta_m^\vee, y_{m-1}\lambda\rangle\in\mathbb{Z}$$

对所有 $1\le m\le k$ 均成立。

定义 3.1.2（半无限 LS 路径）。形状为 λ 的半无限 *LS* 路径是一个二元组 $\eta=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a})$：

$$\boldsymbol{x}: x_1,\dots,x_s,\quad \boldsymbol{a}: 0=a_0<a_1<\cdots<a_s=1$$

分别属于集合 $(W^{J_\lambda})_{\mathrm{af}}$ 和 $(0,1]_{\mathbb{Q}}$，且存在一条形状为 λ、从 x_{m+1} 到 x_m 的 a_m 链，其中 $1\le m<s$。令 $^\infty_2\mathrm{LS}(\lambda)$ 表示所有形状为 λ 的半无限 LS 路径的集合。

3.2 $^\infty_2\mathrm{LS}(\lambda)$ 上的晶体结构

固定一个零级占优整权 $\lambda\in P^0_+$。

定理 3.2.1（**晶体结构**，[5, 定理 3.1.5 (2)]）。$^\infty_2\mathrm{LS}(\lambda)$ 上存在一个规范的晶体结构。

令 $\mathrm{LS}(\lambda)$ 表示形状为 λ 的 *LS* 路径集合，该集合由 Littelmann[11, §4] 定义（定义见第 5.1 节）。在 $^\infty_2\mathrm{LS}(\lambda)$ 上构造根算子 e_i，$f_i (i\in I_{\mathrm{af}})$ 时，以下结果至关重要。

引理 3.2.2（**投影引理**，[5, 命题 3.1.3]）。存在一个满射 $^\infty_2\mathrm{LS}(\lambda)\to\mathrm{LS}(\lambda)$，将 $\eta=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a})$ 映射为 $\eta=(x_1\lambda,\ \dots\dots,\ x_s\lambda;\ a_0,\ \dots\dots,\ a_s)$。

为了证明引理 3.2.2，我们需要关于零级权偏序集 $\mathrm{BG}_0(\lambda)$（定义见第 5.1 节）和 $^\infty_2\mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 的图结构的一些比较结果。例如，有如下结论。

子引理 3.2.3 (**比较引理 1**, [5,注 4.1。3])。 设 $\lambda \in P_+^0$。对于 $x \in (W^{J_\lambda})_{\mathrm{af}}$以及 $i \in I_{\mathrm{af}}$,

$$x \xrightarrow{\alpha_i} s_i x \ in\ {}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda} \Longleftrightarrow \langle \alpha_i^\vee, x\lambda \rangle > 0,$$
$$s_i x \xrightarrow{\alpha_i} x \ in\ {}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda} \Longleftrightarrow \langle \alpha_i^\vee, x\lambda \rangle < 0.$$

更一般的比较结果（[5, 命题 4.2.1]）如下。

引理 3.2.4 (**比较引理 2**）。设 $x \in (W^{J_\lambda})_{\mathrm{af}}$，且 $\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$。那么，$x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$ 属于 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 当且仅当 $x\lambda \xrightarrow{\beta} s_\beta x\lambda$ 属于 $\mathrm{BG}_0(\lambda)$。

这是利用 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 的“菱形引理”（[5, 引理 4.1.4、引理 4.1.5]）证明的。投影引理（引理 3.2.2）可由比较引理 2（引理 3.2.4）立即推出。

我们通过提升 LS(λ) 上的根算子（[5, 定义 3.1.4]），在 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{LS}(\lambda)$ 上定义根算子 e_i, f_i, $i \in I_{\mathrm{af}}$。

为了完成定理 3.2.1 的证明，我们需要证明以下结论。

引理 3.2.5 （**稳定性引理**, [5, 定理 3.1.5 (1)]）。集合 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{LS}(\lambda) \sqcup \{0\}$ 在 e_i、f_i 下稳定。

这是利用结果 [5, 引理 4.1.6] 关于 $a\mathrm{BG}^{\infty}_{2}$ 中的链$^{J_\lambda}$证明的。

—

根据 LS(λ) 上的晶体结构，验证晶体的公理是显而易见的，因此定理 3.2.1 得证。实际上，我们得到一个晶体映射

$${}^{\infty}_{2}\mathrm{LS}(\lambda) \to \mathrm{LS}(\lambda), \tag{3.2.1}$$

其在 [7,§1.5] ([5,备注 4.3.1]) 的意义下是严格的 。

3.3 同构定理

对于 $\lambda \in P_+^0$，令 $V(\lambda)$ 表示量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$上极值权为 λ 的极值权模（关于极值权模的详细定义，见 [7, §3]）。令 $\mathcal{B}(\lambda)$ 为 $V(\lambda)$ 的一个晶体基。

定理 3.3.1 (**同构定理**). 存在一个晶体同构 $\mathcal{B}(\lambda) \cong {}^{\infty}_{2}\mathrm{LS}(\lambda)$ 。

—

令 $u_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)$ 为与 $V(\lambda)$ 的生成元对应的元素，并令$\mathcal{B}(\lambda)^\circ$ 为包含 u_λ 的$\mathcal{B}(\lambda)$ 的连通分支。我们使用 Beck 和 Nakajima 的一个结果 [1], ，该结果建立了如下同构

$$\mathcal{B}(\lambda) \cong \mathrm{Par}(\lambda) \otimes \mathcal{B}(\lambda)^\circ \tag{3.3.1}$$

晶体，其中 Par(λ) 是在[5, (3.2.1)]中定义的某个分拆元组集合（这就是 [1, §4] 中的“$\mathbf{N}^{\mathscr{R}_0}(\lambda)$”）。因此，Par(λ) 参数化了 $\mathcal{B}(\lambda)$ 的连通分支。下面我们研究${}^{\infty}_{2}$ LS(λ) 的连通分支。令 C(${}^{\infty}_{2}$ LS(λ)) 表示 ${}^{\infty}_{2}$ LS(λ) 的连通分支集合。 —

引理 3.3.2 （$\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)$ **的连通分支，** [5, 命题7.2。1]）。存在一个双射

$$\Theta : \mathrm{Par}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{C}(\tfrac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda))$$

在 $\mathrm{Par}(\lambda)$ 与集合 $\mathrm{C}(\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda))$ 之间，该集合由 $\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)$ 的连通分支组成。

在该引理的证明中，证明以下引理至关重要。

引理 3.3.3 (**特殊元素，** [5, 命题 7.1。2])。 $\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)$ 的每个连通分支都包含一个唯一的如下形式的元素

$$(z_{\xi_1} t_{\xi_1}, \ldots, z_{\xi_{s-1}} t_{\xi_{s-1}}, e; a_0, \ldots, a_s), \tag{3.3.2}$$

其中 J_λ-调整元素为 $\xi_1, \ldots, \xi_{s-1} \in Q^\vee$ （定义见 [5, §2。3]）。

对于 $\lambda = \sum_{i\in I} m_i \varpi_i \in P_+^0$ 和 $a \in (0, 1]_{\mathbb{Q}}$，我们定义

$$J^c(\lambda; a) \coloneqq \{i \in J_\lambda^c = I \setminus J_\lambda \mid a m_i \in \mathbb{Z}\}, \tag{3.3.3}$$
$$I(\lambda; a) \coloneqq \{i \in I \mid a m_i \in \mathbb{Z}\} = J_\lambda \sqcup J^c(\lambda; a), \tag{3.3.4}$$

并定义

$$\mathrm{Turn}(\lambda) \coloneqq \left\{ \frac{k}{m_i} \,\middle|\, i \in J_\lambda^c, 0 \le k \le m_i \right\}. \tag{3.3.5}$$

对于子集 $J \subset I$, $[\cdot]_{J^c} \colon Q^\vee = Q_{J^c}^\vee \oplus Q_J^\vee \twoheadrightarrow Q_{J^c}^\vee$ 表示从 $Q^\vee$ 到 $Q_{J^c}^\vee$ 的投影，其核为 $Q_J^\vee$。

引理 3.3.3 的证明利用了 N-重映射 $\sigma_N \colon \frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda) \to \frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)^{\otimes N}$，它定义在 $\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)$ 上，以及下面的引理。

子引理 3.3.4 (**平移路径条件，** [5, 命题 7.1。1])。设 $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Q^\vee$ 是 J_λ-调整的。一个元素

$$\eta = (z_{\xi_1} t_{\xi_1}, \ldots, z_{\xi_s} t_{\xi_s}; a_0, \ldots, a_s) \tag{3.3.6}$$

当且仅当对于所有 $0 \le m \le s$ 和 $[\xi_m - \xi_{m+1}]_{J^c} \in Q^{\vee, J^c, +}_{\lambda(;a_m)} \setminus \{0\}$, $a_m \in \mathrm{Turn}(\lambda)$ ，该元素属于 $\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)$ 。对于所有 $1 \le m \le s-1$。

如果以下两个结果成立，定理 3.3.1 的证明即告完成。

引理 3.3.5 （**恒等分支的识别，** [5,命题 3.2。2]）。存在一个同构

$$\tfrac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)^\circ \cong \mathcal{B}(\lambda)^\circ \tag{3.3.7}$$

晶体。其中， $\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)^\circ$ 是包含 $\eta_e \coloneqq (e; 0, 1) \in$的连通分支$\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)$。

—

该引理的证明分为两个步骤。首先，利用 [1, 备注 4.17]（见 [5, 命题 5.1.1]），我们确定 u_λ 在 W_{af} 对 $\mathcal{B}(\lambda)$ 的作用下的稳定子。其次，在两个 N-重映射 σ_N：$\mathcal{B}(\lambda)^\circ \to (\mathcal{B}(\lambda)^\circ)^{\otimes N}$和 σ_N：$\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda) \to \frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)^{\otimes N}$下，比较根算子在 $u_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)^\circ$和 $\eta_e \in \frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)^\circ$ 上的作用。

引理 3.3.6（**分解定理**，[5, 命题3.2。4]）。存在一个同构

$$\mathrm{Par}(\lambda) \otimes \tfrac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)^\circ \cong \tfrac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda) \tag{3.3.8}$$

的晶体。

现在我们已经得到引理 3.3.2，因此，为了证明此引理，我们需要证明：对于每个元素 $\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{Par}(\lambda)$，都存在一个同构

$$\Theta(\boldsymbol{\rho}) \cong \{\boldsymbol{\rho}\} \otimes \tfrac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)^\circ \tag{3.3.9}$$

的晶体。通过比较根算子在形式为（3.3.2）的特殊元素 $\eta_{\boldsymbol{\rho}} \in \Theta(\boldsymbol{\rho})$，以及在 N 倍映射 σ_N 下作用于 $\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)$ 的元素 $\boldsymbol{\rho}\otimes\eta_e \in \{\boldsymbol{\rho}\} \otimes \frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)^\circ$ 上的作用，可以建立该同构。

定理 3.3.1 的证明如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\lambda) &\cong \mathrm{Par}(\lambda) \otimes \mathcal{B}(\lambda)^\circ \quad \text{(Beck-Nakajima)}\\ &\cong \mathrm{Par}(\lambda) \otimes \tfrac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)^\circ \quad \text{(Lemma 3.3.5)}\\ &\cong \tfrac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda) \quad \text{(Lemma 3.3.6).}\end{aligned}$$

4 扭曲情形的论证概要

为了在扭曲型情形下证明同构定理（定理 3.2.1），我们将遵循 [5] 的思路。我们讨论研究扭曲情形时需要考虑的问题。

首先，我们需要在与扭仿射李代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 相关的仿射魏尔群 W_{af} 上定义半无限长度。我们知道以下对应关系

$$W_{\mathrm{af}} \cong W \ltimes Q$$

根据 [6, 命题 6.5] 以及 [6, §6.7] 中格的列表（另见 (5.2.1)）。

定义 4.0.1（半无限长度）。对于 $x = wt_\xi \in W_{\mathrm{af}} \cong W \ltimes Q$，其中$w \in W$ 且 $\xi \in Q$，我们将 x 的半无限长度 $\ell^{\frac{\infty}{2}}(x)$定义为

$$\ell^{\frac{\infty}{2}}(x) := \ell(w) + 2\langle\rho^\vee, \xi\rangle, \tag{4.0.1}$$

其中 $\rho^\vee := (1/2)\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha^\vee$。

注意，当 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为对偶非扭曲型时，该函数与将 W_{af} 视为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$的对偶李代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$ 的魏尔群时的半无限长度相一致。

定义半无限长度后，∞_2 LS(λ) 的定义与非扭曲型的情形相似。

我们指出，N-重映射 $\sigma_N : \mathcal{B}(\lambda)^\circ \to (\mathcal{B}(\lambda)^\circ)^{\otimes N}$ 在 $\mathcal{B}(\lambda)^\circ$ 上的构造及其性质，基于 Beck–Nakajima [1]和 Naito–Sagaki [13] 关于一般仿射类型的结果。因此，我们可以将 [5, §5]中关于扭曲情形下 N-重映射 $\sigma_N : \mathcal{B}(\lambda)^\circ \to (\mathcal{B}(\lambda)^\circ)^{\otimes N}$ 的论证直接移植过来。此外，由于我们对半无限 LS 路径的定义与 [5]中的定义平行，我们也可以将 [5, §5 和 §7]中关于 N-重映射 $\sigma_N : \infty_2$ LS(λ) $\to \infty_2$ LS(λ)$^{\otimes N}$ 在 ∞_2 LS(λ)上的论证移植到我们的情形。因此，本文省略关于 N-重映射的论证。

根据上一节的回顾和上述注释，我们概述本文结果的证明思路。

关于 ∞_2 LS(λ) 的晶体结构，若 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于对偶非扭曲型，我们将证明约化到其对偶型的情形；若 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于 $A^{(2)}_{2\ell}$ 型，则将证明约化到 $D^{(2)}_{\ell+1}$ 型的情形。具体而言，我们证明零级权偏序集的约化引理（引理 5.4.1）以及半无限 Bruhat 图的约化引理（引理 5.4.2）。由这些约化引理，我们可以在扭曲情形中重现比较引理和 [5, 引理 4.1.6] 。因此，我们得到投影引理和稳定性引理。更多细节见 §5.2 和 §5.4。

关于同构定理，我们需要证明的关键结果是恒等分支的识别（引理 3.3.5）和分解定理（引理 3.3.6）。对于引理 3.3.5，除了应分别用 Q 和 $Q^\vee_J$ 替换 $Q^\vee$ 和 $Q^\vee_J$ 之外，我们可以仿照非扭曲型的情形证明 [5, 命题 5.1.1]。证明的其余部分只依赖于 N-重映射理论。因此，我们可以直接得到引理 3.3.5。对于引理 3.3.6，一旦得到子引理 3.3.4，我们就可以利用作用于 ∞_2 LS(λ) 上的 N-重映射 σ_N，建立引理 3.3.2 中的双射 $\Theta : \mathrm{Par}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{C}(\infty_2 \mathrm{LS}(\lambda))$ 以及同构 (3.3.9)。因此，我们只需分别证明对偶非扭曲型情形和 $A^{(2)}_{2\ell}$ 型情形下的子引理 3.3.4。注意，在扭曲型情形下，子引理 3.3.4 的陈述中应分别用 Q 和 $Q^+_{J^c(\lambda; a_m)}$ 替换 $Q^\vee$ 和 $Q^\vee_{J^c}(\lambda; a_m)^+$。特别是，$A^{(2)}_{2\ell}$ 型的情形较为复杂，因为 $\langle \alpha^\vee_\ell, \varpi_\ell \rangle = 2$。证明见 §6。

5 扭仿射型的半无限 Lakshmibai–Seshadri 路径

5.1 Lakshmibai–Seshadri 路径

在本小节中，我们回顾零级权偏序集和 Lakshmibai– Seshadri 路径（简称 LS 路径）的概念。

定义 5.1.1（零级权偏序集）。设 $\lambda \in P_+^0$。对于 $\mu, \nu \in W_{\mathrm{af}}\lambda$，若存在一列 $\mu = \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_k = \nu$，其中各元素属于$W_{\mathrm{af}}\lambda$，以及一列 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$，其中各元素属于 Δ_{af}^+，使得 $\nu_m = s_{\beta_m}\nu_{m-1}$，并且对所有 $m = 1, 2, \ldots, k$ 均有 $\beta_m^\vee, \nu_{m-1} \in \mathbb{Z}_{>0}$，则记 $\mu \leq \nu$。我们称偏序集 $(W_{\mathrm{af}}\lambda, \leq)$ 为形状 λ 的零级权偏序集。若 $\mu \leq \nu$，则 $\mathrm{dist}(\mu, \nu)$ 是所有此类序列 $\mu = \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_k = \nu$ 的可能长度 k 中的最大值。

注 5.1.2. $W_{\mathrm{af}}\lambda$上的关系 $\leq$ 是一个偏序。

定义 5.1.3. 设 $\lambda \in P_+^0$。

(1) 令 $\mathrm{BG}_0(\lambda)$ 为一个图，其顶点集为 $W_{\mathrm{af}}\lambda$，有向边由具有以下形式的正实根标记：

$$\mu \xrightarrow{\beta} \nu$$

使得 $\nu = s_\beta \mu$，$\langle \beta^\vee, \mu \rangle > 0$，且 $\mathrm{dist}(\mu, \nu) = 1$。

(2) 令 $a \in (0, 1]_{\mathbb{Q}}$。一条有向路径

$$\mu = \nu_0 \xrightarrow{\beta_1} \nu_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_k} \nu_k = \nu$$

在 $\mathrm{BG}_0(\lambda)$ 中称为从 μ 到 ν 的 a-链，如果对所有$1 \leq m \leq k$，$a\langle \beta_m^\vee, \nu_{m-1} \rangle \in \mathbb{Z}$。

定义 5.1.4（LS 路径）。设 $\lambda \in P_+^0$。若对于所有 $1 \leq m \leq s-1$，存在一条从 ν_{m+1} 到 $\mathrm{BG}_0(\lambda)$ 中 ν_m 的 a_m-链，则由两列序列 $\pi = (\nu_1 > \cdots > \nu_s;\ 0 = a_0 < \cdots < a_s = 1)$ 组成的序列对，其中 $\nu_1, \ldots\ldots, \nu_s \in W_{\mathrm{af}}\lambda$ 且 $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_s \in \mathbb{Q}$，称为形状为 λ 的 *LS* 路径。令 $\mathrm{LS}(\lambda)$ 表示形状为 λ 的 LS 路径集合。

我们描述 $\lambda \in P_+^0$ 上 $\mathrm{LS}(\lambda)$ 的晶体结构。定义映射 $\mathrm{wt}\colon \mathrm{LS}(\lambda) \to P_{\mathrm{af}}$，其中对于 $\pi \in \mathrm{LS}(\lambda)$，$\mathrm{wt}(\pi) := \sum_{m=1}^{s}(a_m - a_{m-1})\nu_m \in P_{\mathrm{af}}$。

对于 $\pi \in \mathrm{LS}(\lambda)$ 和 $i \in I_{\mathrm{af}}$，在 $[0,1]$ 上定义函数 $H_i^\pi(t)$ 及其最小值如下：

$$\begin{aligned} H_i^\pi(t) &:= \langle \alpha_i^\vee, \pi(t) \rangle \text{ for } t \in [0,1], \\ m_i^\pi &:= \min\{H_i^\pi(t) \mid t \in [0,1]\}. \end{aligned}$$

我们如下定义集合 $\mathrm{LS}(\lambda)$ 上的根算子 e_i，f_i。

定义 5.1.5（根算子）：设 $\pi = (\nu_1, \ldots, \nu_s;\ a_0, \ldots, a_s) \in \mathrm{LS}(\lambda)$。令$\mathbf{0}$表示不包含于 $\mathrm{LS}(\lambda)$ 中的形式元素。

（1）如果 $m_i^\pi = 0$，则 $e_i\pi := \mathbf{0}$。如果 $m_i^\pi < 0$，则令

$$\begin{aligned} t_1 &:= \min\{t \in [0,1] \mid H_i^\pi(t) = m_i^\pi\}, \\ t_0 &:= \max\{t \in [0, t_1] \mid H_i^\pi(t) = m_i^\pi + 1\}. \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

已知 $H_i^\pi(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上严格递减，这一点可由 [5, 注记 2.2.5] 和 [11, 引理 4.5 d)] 得出。此外，根据 t_1 的极小性，存在

$1 \le q \le s$ 使得 $t_1 = a_q$。取满足 $a_{p-1} \le t_0 < a_p$ 的 $1 \le p \le q$。然后，我们定义 $e_i\pi$ 为

$$e_i\pi = (\nu_1, \dots, \nu_p, s_i\nu_p, \dots, s_i\nu_q, \nu_{q+1}, \dots, \nu_s; \\ a_0, \dots, a_{p-1}, t_0, a_p, \dots, a_q = t_1, \dots, a_s).$$

若 $a_{p-1} = t_0$，则删去 ν_p 和 a_{p-1}；若 $s_i\nu_q = \nu_{q+1}$，则删去 ν_{q+1} 和$a_q = t_1$。

(2) 若 $m_i^\pi - H_i^\pi(1) = 0$，则 $f_i\pi := \mathbf{0}$。否则，我们令

$$\begin{aligned} t_0 &:= \max\{t \in [0,1] \mid H_i^\pi(t) = m_i^\pi\}, \\ t_1 &:= \min\{t \in [t_0,1] \mid H_i^\pi(t) = m_i^\pi + 1\}. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

已知 $H_i^\pi(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上严格递增，这一点可由 [5, Remark2.2.5],[11,引理 4.5 d)] 得出。由 t_0 的极大性，存在 $0 \le p \le s-1$ 使得 $t_0 = a_p$。取 $p \le q \le s-1$ 使得 $a_q < t_1 \le a_{q+1}$。然后，我们定义 $f_i\pi$ 为

$$f_i\pi = (\nu_1, \dots, \nu_p, s_i\nu_{p+1}, \dots, s_i\nu_{q+1}, \nu_{q+1}, \dots, \nu_s; \\ a_0, \dots, a_p = t_0, \dots, a_q, t_1, a_{q+1} \dots, a_s),$$

若 $a_{q+1} = t_1$，则删去 ν_{q+1} 和 a_{q+1}；若 $s_i\nu_{p+1} = \nu_q$，则删去 ν_p 和 $a_p = t_0$。

(3) 对所有 $i \in I_{\mathrm{af}}$，我们设定 $e_i\mathbf{0} = f_i\mathbf{0} := \mathbf{0}$。

对于 $\pi \in$LS(λ) 和 $i \in I_{\mathrm{af}}$，我们设定

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\pi) &:= \max\{n \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \mid e_i^n\pi \ne \mathbf{0}\}, \\ \varphi_i(\pi) &:= \max\{n \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \mid f_i^n\pi \ne \mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

命题 5.1.6 (见 [11, §2 和 §4])。LS(λ) 是一个晶体，其权格P_{af} 配备了映射 wt、e_i、f_i、ε_i、φ_i $(i \in I_{\mathrm{af}})$。

5.2 扭曲仿射根数据与 Peterson 的陪集代表元

假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于扭曲型。我们将一个正根 $\theta_s \in \Delta^+$ 定义为

$$\theta_s := \begin{cases} \delta - \alpha_0 & \text{if } \mathfrak{g}_{\mathrm{af}} \text{ is of dual untwisted type,} \\ \dfrac{\delta - \alpha_0}{2} & \text{if } \mathfrak{g}_{\mathrm{af}} \text{ is of type } A_{2\ell}^{(2)}. \end{cases}$$

这是 Δ 的最高短根。对于 $\xi \in Q$，记 $t_\xi \in W_{\mathrm{af}}$ 为相对于 ξ 的平移元素（定义见 [6, §6.5]）。我们有一个群同构

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{af}} &\xrightarrow{\sim} W \ltimes Q \\ s_i &\mapsto s_i \quad (i \in I), \\ s_0 &\mapsto s_{\theta_s} t_{-\theta_s}. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

对于 $\alpha \in \Delta$，我们设

$$c_\alpha \coloneqq \max\left\{1, \frac{(\alpha,\alpha)}{2}\right\},$$

并且对于 $i \in I$， $c_i \coloneqq c_{\alpha_i}$。注意，对于 $w \in W$， $c_{w\alpha} = c_\alpha$ 和 $\alpha \in \Delta$。对于 $\beta \in \Delta_{\mathrm{af}}$，$\beta^\vee$ 表示 β的余根。我们设

$$\Delta_{\mathrm{af}}^\vee \coloneqq \{\beta^\vee \mid \beta \in \Delta_{\mathrm{af}}\},$$
$$\Delta_{\mathrm{af}}^{\vee,+} \coloneqq \{\beta^\vee \mid \beta \in \Delta_{\mathrm{af}}^+\}.$$

5.2.1 对偶非扭曲型。

假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于对偶非扭曲型。也就是说， $X_{\mathrm{af}} = D_{\ell+1}^{(2)}$， $A_{2\ell-1}^{(2)}$， $E_6^{(2)}$ ， $D_4^{(3)}$ 。对于 $\alpha \in \Delta$，我们有

$$c_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha \text{ is a short root in } \Delta, \\ 2 & \text{if } X_{\mathrm{af}} \neq D_4^{(3)} \text{ and } \alpha \text{ is a long root in } \Delta, \\ 3 & \text{if } X_{\mathrm{af}} = D_4^{(3)} \text{ and } \alpha \text{ is a long root in } \Delta. \end{cases}$$

我们知道

$$\Delta_{\mathrm{af}} = \{\alpha + nc_\alpha\delta \mid \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}\},$$
$$\Delta_{\mathrm{af}}^+ = \Delta^+ \sqcup \{\alpha + nc_\alpha\delta \mid \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

我们有

$$s_{\alpha+nc_\alpha\delta} = s_\alpha t_{n\alpha} \tag{5.2.2}$$

对于 $\alpha \in \Delta$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。

对于对偶非扭曲类型，我们考虑仿射李代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$，其根数据与 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 的根数据互为对偶。也就是说， $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee = \mathfrak{g}({}^tX_{\mathrm{af}})$ 是一个非扭曲仿射李代数。我们将与 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$ 相关的对象与 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 相关的对偶对象对应起来。例如，$\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$ 的 Cartan 子代数，$\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I_{\mathrm{af}}}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$ 的单根集合，$\{\alpha_i\}_{i\in I_{\mathrm{af}}}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$的单余根集合， K 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$ 的零根， $\Delta_{\mathrm{af}}^\vee$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$的实根集合。注意，通过这种对应， $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 的最高短根 θ_s 被视为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$ 的最高根的余根。 $W_{\mathrm{af}}^\vee \coloneqq \langle s_i = s_{\alpha_i^\vee} \mid i \in I_{\mathrm{af}}\rangle \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}_{\mathrm{af}})$ 表示 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$ 的（仿射）魏尔群。存在一个群同构 $W_{\mathrm{af}}^\vee \xrightarrow{\sim} W \ltimes Q$，其定义为：对于 $i \in I$ 和 $s_0 \mapsto s_{\theta_s} t_{-\theta_s}$， $s_i \mapsto s_i$。因此，我们得到 W_{af} 与 $W_{\mathrm{af}}^\vee$ 之间的群同构，使得

$$\begin{aligned} \phi : W_{\mathrm{af}} &\to W_{\mathrm{af}}^\vee \\ s_i &\mapsto s_i \quad (i \in I_{\mathrm{af}}). \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

我们指出，

$$\phi(x)\beta^\vee = (x\beta)^\vee \tag{5.2.4}$$

对于 $x \in W_{\mathrm{af}}$ 和 $\beta \in \Delta_{\mathrm{af}}$。

令 $P^\vee_{\mathrm{af}} := \bigoplus_{i\in I_{\mathrm{af}}} \mathbb{Z}\Lambda_i^\vee \oplus \mathbb{Z}K \subset \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}$为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$的积分余权格，并将其识别为 $\mathfrak{g}^\vee_{\mathrm{af}}$的积分权格。这里， $\Lambda_i^\vee \in P^\vee_{\mathrm{af}}$是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$的第 i个基本余权，即对所有 $j \in I_{\mathrm{af}}$，均有 $\langle \Lambda_i^\vee, \alpha_j\rangle = \delta_{ij}$。对每个$i \in I$，我们定义第 i个零级基本余权 $\varpi_i^\vee := \Lambda_i^\vee - a_i\Lambda_0^\vee$。注意，对所有 $i \in I$，均有 $\langle \varpi_i^\vee, \delta\rangle = 0$。令

$$P_+^{0,\vee} := \sum_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i^\vee.$$

5.2.2 $A^{(2)}_{2\ell}$ 型。

设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为 $A^{(2)}_{2\ell}$ 型。我们知道

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{af}} &= \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}\}\\ &\quad \sqcup \{2\alpha + (2n-1)\delta \mid \alpha \text{ is a short root in } \Delta,\, n \in \mathbb{Z}\},\\ \Delta^+_{\mathrm{af}} &= \Delta^+ \sqcup \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}\\ &\quad \sqcup \{2\alpha + (2n-1)\delta \mid \alpha \text{ is a short root in } \Delta,\, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.\end{aligned}$$

我们有

$$s_{\alpha+n\delta} = \begin{cases} s_\alpha t_{n\alpha} & \text{if } \alpha \text{ is a long root in } \Delta,\\ s_\alpha t_{2n\alpha} & \text{if } \alpha \text{ is a short root in } \Delta,\end{cases} \tag{5.2.5}$$

$$s_{2\alpha+(2n-1)\delta} = s_\alpha t_{(2n-1)\alpha} \tag{5.2.6}$$

对于 $\alpha \in \Delta$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。

对于 $A^{(2)}_{2\ell}$ 型，我们考虑 $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}} = \mathfrak{g}(D^{(2)}_{\ell+1})$ 这一 $D^{(2)}_{\ell+1}$ 型的仿射李代数。在这种情况下，我们沿用 §2 中的记号，并在与 $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}} = \mathfrak{g}(D^{(2)}_{\ell+1})$ 相关的符号上加波浪号。例如， $\tilde{\varpi}_i$ 表示 $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}}$ 的第 i 个零级基本权，而 $\tilde{P}^0_+$ 表示 $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}}$ 的零级支配权集合。注意， $A^{(2)}_{2\ell}$ 型和 $D^{(2)}_{\ell+1}$ 型具有相同的 Coxeter 图，并且˜具有同构的仿射魏尔群。我们定义映射 $\psi\colon \Delta_{\mathrm{af}} \to \Delta_{\mathrm{af}}$，如下:

$$\begin{aligned}\psi(\alpha + n\delta) &= \alpha + 2n\tilde{\delta},\\ \psi(2\alpha + (2n-1)\delta) &= \alpha + (2n-1)\tilde{\delta}.\end{aligned}$$

˜ ˜在这里，我们将 $\Delta \subset Q$ 与 $\Delta \subset Q$等同起来。注意，通过对这两个根格作此等同，我们有

$$2(\xi, \zeta) = \widetilde{(\xi, \zeta)}$$

$\widetilde{}$ ˜对于 ξ， $\zeta \in Q$。这里，$(\cdot,\ \cdot)$ 表示 $\mathfrak{h}^*_{\mathrm{af}}$ 上的不变双线性形式； $\mathfrak{h}^*_{\mathrm{af}}$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}} = \mathfrak{g}(D^{(2)}_{\ell+1})$ 的 Cartan 子代数的对偶空间。存在一个群同构，定义为

$$\begin{aligned}\psi : W_{\mathrm{af}} &\to \tilde{W}_{\mathrm{af}}\\ s_i &\mapsto s_i \quad (i \in I_{\mathrm{af}}).\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

我们注意到

$$\psi(x)\psi(\beta) = \psi(x\beta) \tag{5.2.8}$$

对于 $x \in W_{\mathrm{af}}$ 和 $\beta \in \Delta_{\mathrm{af}}$。

备注 5.2.1. 类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 与类型 $D_{\ell+1}^{(2)}$之间的识别思路基于 [14, §2]。然而请注意，我们在类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 的 Dynkin 图中对仿射节点 0 的选择与 [14]中的选择相反。

5.2.3 Peterson 陪集代表元

假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为一般扭曲仿射型。下面描述 Peterson 陪集代表元。对于 $J \subset I$，我们定义

$$(\Delta_J)_{\mathrm{af}} \coloneqq \{\beta \in \Delta_{\mathrm{af}} \mid \mathrm{cl}(\beta) \in Q_J\}, \tag{5.2.9}$$

$$(\Delta_J)_{\mathrm{af}}^+ \coloneqq (\Delta_J)_{\mathrm{af}} \cap \Delta_{\mathrm{af}}^+, \tag{5.2.10}$$

$$(W_J)_{\mathrm{af}} \coloneqq W_J \ltimes \{t_\xi \mid \xi \in Q_J^\vee\} = \langle s_\beta \mid \beta \in (\Delta_J)_{\mathrm{af}}^+ \rangle, \tag{5.2.11}$$

$$(W^J)_{\mathrm{af}} \coloneqq \{x \in W_{\mathrm{af}} \mid x\beta \in \Delta_{\mathrm{af}}^+ \text{ for all } \beta \in (\Delta_J)_{\mathrm{af}}^+\}. \tag{5.2.12}$$

引理 5.2.2. (1) 设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为对偶非扭曲型。群同构$\phi\colon\ W_{\mathrm{af}} \to W^{\vee}{}_{\mathrm{af}}$将 $(W^J)_{\mathrm{af}}$映射到 $(W^J)_{\mathrm{af}}^\vee$，其中 $(W^J)_{\mathrm{af}}^\vee$是 $W_{\mathrm{af}}^\vee$和 $J \subset I$的 ***Peterson*** 陪集代表元集合。

(2) 设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$为类型 $A_{2\ell}^{(2)}$。群同构 $\psi\colon\ W_{\mathrm{af}} \to \tilde{W}_{\mathrm{af}}$将 $(W^J)_{\mathrm{af}}$映射到 $(\tilde{W}^J)_{\mathrm{af}}$，其中 $(\tilde{W}^J)_{\mathrm{af}}$是 W_{af} 和 $J \subset I$的 ***Peterson*** 陪集代表元集合。

证明。 由 (5.2.4) 和 (5.2.8) 可得。 □

由此引理和 [16, 讲义 13] （另见 [8, 引理 10.6]），可得以下命题。

命题 5.2.3。 对于所有 $x \in W_{\mathrm{af}}$，存在唯一的元素 $x_1 \in (W^J)_{\mathrm{af}}$以及唯一的元素 $x_2 \in (W_J)_{\mathrm{af}}$，使得 $x = x_1x_2$。

按照命题 5.2.3 中的记号，定义映射 $\Pi^J\colon\ W_{\mathrm{af}} \to (W^J)_{\mathrm{af}}$，使得 $\Pi^J(x) \coloneqq x_1$。

定义 5.2.4。 若元素 $\xi \in Q$ 满足对于所有 $\alpha \in \Delta_J^+$，$\langle \alpha^\vee, \xi \rangle \in \{-1, 0\}$，则称其为 J-调整的 。我们用 $Q^{J\text{-ad}}$ 表示 Q 中 J-调整元素的集合。

通过前面各小小节中说明的对应关系，我们从 [5, 引理 2.3.5]得出以下引理。

引理 5.2.5. (1) 对于所有 $\xi \in Q$，都存在唯一的元素 $\phi_J(\xi) \in Q_J$，使得 $\xi + \phi_J(\xi) \in Q^{J\text{-ad}}$。特别地，$\xi \in Q$ 是 J-调整的，当且仅当 $\phi_J(\xi) = 0$。

(2) 对于所有 $\xi \in Q$，都存在一个元素 $z_\xi \in W_J$，使得 $\Pi^J(t_\xi) = z_\xi t_{\xi+\phi_J(\xi)}$。

(3) 我们有

$$(W^J)_{\mathrm{af}} = \{wz_\xi t_\xi \mid w \in W^J, \xi \in Q^{J\text{-ad}}\}. \tag{5.2.13}$$

对于子集 $J \subset I$, $[\cdot]_{J^c}$： $Q = Q_{J^c} \oplus Q_J^\vee \twoheadrightarrow Q_{J^c}$ 表示从 Q 到 Q_{J^c} 的投影，其核为 Q_J。

推论 5.2.6. 设 $J \subset I$ 和 $\xi, \zeta \in Q^{J\text{-ad}}$。若 $[\xi]_{J^c} = [\zeta]_{J^c}$，则 $\xi = \zeta$

证明. 将 ξ 写作 $\xi = \zeta + (\xi - \zeta)$。由 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$ 和引理 5.2.5(1)，可知 $\phi_J(\zeta) = \xi - \zeta$。由 $\zeta \in Q^{J\text{-ad}}$ 和引理 5.2.5(1)，得$\xi - \zeta = \phi_J(\zeta) = 0$。

□

5.3 半无限 Lakshmibai-Seshadri 路径

假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 是扭曲仿射型。回顾一下，我们在定义 4.0.1 中为扭曲型定义了半无限长度函数。

注 5.3.1. 当 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$为对偶非扭曲型时，对于 $x \in W_{\mathrm{af}}$，有 $\ell^{\frac{\infty}{2}}(x) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(\phi(x))$。

当 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$属于类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 时，对于 $x \in W_{\mathrm{af}}$，有 $\ell^{\frac{\infty}{2}}(x) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(\psi(x))$。

注 5.3.2. 对于 $A_{2\ell}^{(2)}$ 型，Nomoto 已经定义了相同的半无限长度函数（见 [14, 定义 A.2.1]）。

现在，我们可以按照 §3.1 中相同的方式，为扭曲型定义半无限 Bruhat 图、形状为 λ 的 a-链以及半无限 LS 路径。

5.4 $\frac{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)$ 的晶体结构

本节余下部分，我们将说明定理 3.2.1 对扭曲型的证明。如上一节所述，对偶非扭曲型的证明可归约为非扭曲型的证明，而类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 的证明则分别可归约为类型 $D_{\ell+1}^{(2)}$的证明。以下引理是这一归约的关键。

引理 5.4.1. (1) 设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于对偶非扭曲型。设 $\lambda = \sum_{i\in I} m_i\varpi_i \in P_+^0$和 $\lambda^\vee = \sum_{i\in I} m_i\varpi_i^\vee \in P^{0,\vee}_+$。设 $x \in W_{\mathrm{af}}$和 $\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$。 $x\lambda \xrightarrow{\beta} s_\beta x\lambda$ 属于 $\mathrm{BG}_0(\lambda)$ 当且仅当 $\phi(x)\lambda^\vee \xrightarrow{\beta^\vee} s_{\beta^\vee}\phi(x)\lambda^\vee$ 属于$\mathrm{BG}_0(\lambda^\vee)$。

(2) 设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$属于类型 $A_{2\ell}^{(2)}$。设 $\lambda = \sum_{i\in I} m_i\varpi_i \in P_+^0$ 和 $\tilde{\lambda} = \sum_{i\in I} m_i\tilde{\varpi}_i \in \tilde{P}_+^0$。设 $x \in W_{\mathrm{af}}$ 和 $\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$。 $x\lambda \xrightarrow{\beta} s_\beta x\lambda$ 属于$\mathrm{BG}_0(\lambda)$ 当且仅当$\psi(x)\tilde{\lambda} \xrightarrow{\psi(\beta)} s_{\psi(\beta)}\psi(x)\tilde{\lambda}$ 属于$\mathrm{BG}_0(\tilde{\lambda})$。

证明。我们只证明（1）；（2）的证明类似。只需证明以下断言。

断言。设 $\lambda = \sum_{i\in I} m_i\varpi_i \in P_+^0$ 和 $\lambda^\vee = \sum_{i\in I} m_i\varpi_i^\vee \in P^0{}_+^\vee$。对于 x, $y \in W_{\mathrm{af}}$, $x\lambda \le y\lambda$，属于 W_{af} 当且仅当 $\phi(x)\lambda^\vee \le \phi(y)\lambda^\vee$ 属于 $W_{\mathrm{af}}^\vee$。

我们证明"仅当"部分。假设 $x\lambda \le y\lambda$ in W_{af}。根据定义，存在一列正实根 $\beta_1, \dots, \beta_k$，使得

$$\langle \beta_m^\vee, s_{\beta_{m-1}} \cdots s_{\beta_1} x\lambda \rangle > 0$$

for $1 \le m \le k$。因此，我们有 $\mathrm{cl}(x^{-1}s_{\beta_1}\cdots s_{\beta_{m-1}}\beta_m) \in \Delta^+ \setminus \Delta_{J_\lambda}^+$。由于 $J_\lambda = J_{\lambda^\vee}$，我们得到

$$\langle \phi(s_{\beta_{m-1}}) \cdots \phi(s_{\beta_1})\phi(x)\lambda^\vee, \beta_m \rangle > 0$$

for $1 \le m \le k$。因此，我们有 $\phi(x)\lambda^\vee \le \phi(y)\lambda^\vee$。我们可以用同样的方法证明"若"部分。 □

引理 5.4.2. (1) 设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为对偶非扭曲型。设 $J \subset I$。设 $x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$ 和 $\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$。那么，$x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^J$ 当且仅当 $\phi(x) \xrightarrow{\beta^\vee} s_{\beta^\vee}\phi(x)$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J,\vee}$。这里，$\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J,\vee}$ 是关于 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$ 的抛物半无限 *Bruhat* 图。

(2) 设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 的类型为 $A_{2\ell}^{(2)}$。设 $J \subset I$。设 $x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$，且 $\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$。那么，$x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$ 属于 $\overset{\infty}{2}\widetilde{\mathrm{BG}^J}$，当且仅当 $\psi(x) \xrightarrow{\psi(\beta)} s_{\psi(\beta)}\psi(x)$ 属于 $\overset{\infty}{2}\widetilde{\mathrm{BG}_J}$。这里，$\overset{\infty}{2}\widetilde{\mathrm{BG}_J}$ 是类型为 $D_{\ell+1}^{(2)}$ 的抛物半无限 *Bruhat* 图。

证明。我们只证明 (1)；(2) 的证明类似。我们证明此引理的"仅当"部分。假设 $x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^J$。由备注 . . .，我们知道对所有，$\ell^{\overset{\infty}{2}}($ x $=-$ $\ell^{\overset{\infty}{2}}$ ϕ x $x \in W_{\mathrm{af}}$ 5 3 1 $\ell^{\overset{\infty}{2}}$ $s_{\beta^\vee}\phi x$ $=)$ $(\ (\ ))$。因此，我们有 $(\ (\ ))\ell^{\overset{\infty}{2}}(\phi(s_\beta x)) = \ell^{\overset{\infty}{2}}(s_\beta x) = \ell^{\overset{\infty}{2}}(x) + 1 = \ell^{\overset{\infty}{2}}(\phi(x)) + 1$。由引理 5.2.2 及 $s_\beta x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$，我们得到 $\phi(s_\beta x) = s_{\beta^\vee}\phi(x) \in (W^J)_{\mathrm{af}}$。因此，我们有 $\phi(x) \xrightarrow{\beta^\vee} s_{\beta^\vee}\phi(x)$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J,\ \vee}$。同理可证"如果"部分。 □

由这些引理，我们可以在扭曲情形下推出比较引理和结果[5, 引理 4.1。6] 因此，我们得到引理 3.2.5 和定理 3.2.1。

6 同构定理的证明

本节分别给出对偶非扭曲类型和类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 下子引理 3.3.4 的证明。

6.1 一些技术引理

引理 6.1.1。设 $J \subset I$。

(1) 设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为对偶非扭曲型。设 $x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$ 和 $\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$ 满足条件 $x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$ 属于 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^J$。那么， β 具有以下两种形式之一： $\beta = \alpha$ 且 $\alpha \in \Delta^+$，或 $\beta = \alpha + c_\alpha \delta$ 且 $\alpha \in -\Delta^+$。此外，若 $x = w z_\xi t_\xi$ 且 $w \in W^J$ 和 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$，则上述两种情形下均有 $w^{-1}\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$。

(2) 设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为 $A_{2\ell}^{(2)}$ 型。设 $x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$ 和 $\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$ 满足 $x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$ 属于 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^J$。那么， β 具有以下形式之一： $\beta = \alpha$，其中 $\alpha \in \Delta^+$；或者 $\beta = \alpha + \delta$，其中有一个长根 $\alpha \in -\Delta^+$；或者 $\beta = 2\alpha + \delta$，其中有一个短根 $\alpha \in -\Delta^+$。此外，若 $x = w z_\xi t_\xi$ 满足 $w \in W^J$ 和 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$，则在上述所有情形中， $w^{-1}\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$。

证明。 由引理 5.4.2 和 [5, 引理 4.2.2]可得。 □

引理 6.1.2. 设 $J \subset I$。

(1) 设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为对偶非扭曲型。对于所有 $i \in J^c := I \setminus J$ 和 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$，存在一个正实根 $\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$，其形式为：

$$\beta = -\gamma + c_\gamma \delta$$

其中 $\gamma \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$ 使得 $[\gamma]_{J^c} = \alpha_i$, $s_\beta z_\xi t_\xi \in (W^J)_{\mathrm{af}}$ 且 $s_\beta z_\xi t_\xi \xrightarrow{\beta} z_\xi t_\xi$ 属于 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^J$。

(2) 设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于 $A_{2\ell}^{(2)}$ 型。对于所有 $i \in J^c := I \setminus J$ 和 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$，存在一个如下形式之一的正实根 $\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$：

$$\beta = -\gamma + \delta \ \ or \ \ -2\gamma + \delta$$

with $\gamma \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$ *such that* $[\gamma]_{J^c} = \alpha_i$, $s_\beta z_\xi t_\xi \in (W^J)_{\mathrm{af}}$ *and* $s_\beta z_\xi t_\xi \xrightarrow{\beta} z_\xi t_\xi$ *in* ${}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^J$.

证明。 假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于对偶非扭曲型。通过 §5.2.1 中提到的识别，我们可以将 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$ 视为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}^\vee$ 的余根格中的一个 J-调整元素。将引理 6.1.3] 应用于 $i \in J^c$ 和 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$，由此可知存在 $\beta^\vee = -\gamma^\vee + K \in \Delta^{\vee,+}{}_{\mathrm{af}}$，满足 $\gamma \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$，使得 $[\gamma]_{J^c} = \alpha_i$, $s_{\beta^\vee} z_\xi t_\xi \in (W^J)_{\mathrm{af}}^\vee$，且 $s_{\beta^\vee} z_\xi t_\xi \xrightarrow{\beta^\vee} z_\xi t_\xi$ 属于 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^{J,\vee}$。因此，我们有 $\beta = -\gamma + c_\gamma \delta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$，根据引理 5.2.2 有 $s_\beta z_\xi t_\xi = \phi^{-1}(\overline{s_{\beta^\vee}} z_\xi t_\xi) \in (W^J)_{\mathrm{af}}$，并且根据引理 5.4.2 有 $s_\beta z_\xi t_\xi \xrightarrow{\beta} z_\xi t_\xi$ 属于 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^J$。

类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 的情形可借助映射 ψ、引理 5.2.2 和引理 5.4.2 化归为类型 $D_{\ell+1}^{(2)}$ 的情形。 □

引理 6.1.3. 设 $J \subset I$、 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$ 和 $\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$。若 $z_\xi t_\xi \xrightarrow{\beta} s_\beta z_\xi t_\xi$ 属于 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^J$，则存在某个 $i \in J^c = I \setminus J$，使得 $\beta = \alpha_i$。

证明。 假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于对偶非扭曲型。由引理 5.4.2，我们有 $z_\xi t_\xi \xrightarrow{\beta^\vee} s_{\beta^\vee} z_\xi t_\xi$ 属于 ${}^{\infty}_{2}\mathrm{BG}^{J,\vee}$。应用 [5, 引理 4.1.7], 可知， $\beta^\vee = \alpha_i^\vee$ 对某个 $i \in J^c = I \setminus J$ 成立，因此 $\beta = \alpha_i$。利用引理 5.4.2，类型为 $A_{2\ell}^{(2)}$ 的情形可归约为 $D_{\ell+1}^{(2)}$ 的情形。

□

6.2 对偶非扭类型的子引理 3.3.4 的证明。

在本小节中，假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于对偶非扭曲型。

子引理 $3\,3\,4$ $\zeta\ \xi\in$ 的证明。.....我们只需证明以下事实。对于,-ad，以及 (,，存在一个从 $z_\zeta t_\zeta$ 到 $z_\xi t_\xi$、形状为 的非零长度 -链，且该链属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda}$，当且仅当 $J^c(\lambda;\ a)\neq\emptyset$ 且 $[\xi-\zeta]_{J_\lambda^c}\in Q^+_{J^c(\lambda;a)}\setminus\{0\}$。

我们证明“若”部分。对于 $\alpha=\sum_{i\in I}k_i\alpha_i\in Q^+:=\sum_{i\in I}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$，令 $\mathrm{ht}(\alpha):=\sum_{i\in I}k_i\geq 0$。证明采用关于 $\mathrm{ht}([\xi-\zeta]_{J_\lambda^c})$ 的归纳法。若 $\mathrm{ht}([\xi-\zeta]_{J_\lambda^c})=1$，则对于某个 $i\in J^c(\lambda;a)$，有 $[\xi-\zeta]_{J_\lambda^c}=\alpha_i$。对 和 应用引理 $6\,1\,2$ ξ i $\beta\in\Delta^+$ $\beta=..$，可知存在 $-\gamma+c_\gamma\delta$ $\gamma\in\Delta^+$ $\Delta^+_{J_\lambda}$ $[\gamma]_{J_\lambda^c}=\alpha_i$ $s_\beta z_\xi t_\xi\in W^{J_\lambda}{}_{\mathrm{af}}$ 一个形如 的$_{\mathrm{af}}$，满足\，使得，( )，且$s_\beta z_\xi t_\xi\xrightarrow{\beta}z_\xi t_\xi$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda}$。由于 $[\gamma]_{J_\lambda^c}=\alpha_i$，我们有 —

$$\langle\gamma^\vee,\lambda\rangle=\langle\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\gamma,\gamma)}\alpha_i^\vee,\lambda\rangle=\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\gamma,\gamma)}.$$

我们还可以从命题 5.1 d)] 得出 $(\alpha_i,\alpha_i)\ (\gamma,\gamma)\in\mathbb{Z}$。由于 $i\in J^c(\lambda;\ a)$,$a\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle\in\mathbb{Z}$，因此我们得到

$$\begin{aligned}a\langle\beta^\vee,s_\beta z_\xi t_\xi\lambda\rangle&=a\langle-\beta^\vee,\lambda\rangle\quad(\text{since } s_\beta\beta=-\beta \text{ and } z_\xi t_\xi\lambda=\lambda-(\xi,\lambda)\delta)\\&=a\langle\gamma^\vee,\lambda\rangle\quad(\text{since }\beta^\vee=-\gamma^\vee+K)\\&=a\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\gamma,\gamma)}\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

因此，边 $s_\beta z_\xi t_\xi\xrightarrow{\beta}z_\xi t_\xi$ 是形状为 λ 的 a-链。由于 $s_\beta=s_\gamma t_{-\gamma}$，我们有 $s_\beta z_\xi t_\xi=s_\gamma z_\xi t_{\xi-z_\xi^{-1}\gamma}\in(W^{J_\lambda})_{\mathrm{af}}$，且 $\xi-z_\xi^{-1}\gamma\in Q^{J_\lambda}$-ad。由于 $[\xi-z_\xi^{-1}\gamma]_{J_\lambda^c}=[\xi]_{J_\lambda^c}-\alpha_i=[\zeta]_{J_\lambda^c}$，由推论 5.2.6 可知 $\xi-z_\xi^{-1}\gamma=\zeta$。因此，由引理 5.2.5(3) 可得 $s_\beta z_\xi t_\xi=\lfloor s_\gamma\rfloor^{J_\lambda}z_\zeta t_\zeta$。因为$[\gamma]_{J_\lambda^c}=\alpha_i$，若取$\lfloor s_\gamma\rfloor^{J_\lambda}$ 的约化表达式 $\lfloor s_\gamma\rfloor^{J_\lambda}=s_{i_1}\cdots s_{i_k}$，则对所有 $1\leq m\leq k$，都有 $i_m\in I(\lambda;\ a)$。我们通过对 m 作反向归纳，证明当 $1\leq m\leq k$ 时 $s_{i_m}\cdots s_{i_k}\in W^{J_\lambda}$。由于 $\lfloor s_\gamma\rfloor^{J_\lambda}\in W^{J_\lambda}$，我们看到 $i_k\notin J_\lambda$，因此 $s_{i_k}\in W^{J_\lambda}$。假设 $s_{i_{m+1}}\cdots s_{i_k}\in W^{J_\lambda}$。那么，当 $\gamma\in\Delta^+_{J_\lambda}$ 时，$s_{i_{m+1}}\cdots s_{i_k}\gamma\in\Delta^+$。由于 $i_k\notin J_\lambda$，我们有 $s_{i_k}\cdots s_{i_{m+1}}\alpha_{i_m}\notin\Delta_{J_\lambda}$。因此，我们得到 $\gamma\neq s_{i_k}\cdots s_{i_{m+1}}\alpha_{i_m}$，进而得到 $s_{i_{m+1}}\cdots s_{i_k}\gamma\neq\alpha_{i_m}$。然后，我们有 $s_{i_m}s_{i_{m+1}}\cdots s_{i_k}\gamma\in\Delta^+$，进而得到 $s_{i_m}s_{i_{m+1}}\cdots s_{i_k}\in W^{J_\lambda}$。这意味着，根据引理 5.2.5(3)，$s_{i_m}\cdots s_{i_k}z_\zeta t_\zeta\in(W^{J_\lambda})_{\mathrm{af}}$。由于 $\lfloor s_\gamma\rfloor^{J_\lambda}=s_{i_m}s_{i_{m+1}}\cdots$ 是 $\lfloor s_\gamma\rfloor^{J_\lambda}$ 的约化表达式，我们有 $\ell^{\overset{\infty}{2}}(\cdots s_{i_k}z_\zeta t_\zeta)\ (\cdots)$ for。因此，我们得到

$$z_\zeta t_\zeta\xrightarrow{\alpha_{i_k}}s_{i_k}z_\zeta t_\zeta\xrightarrow{\alpha_{i_{k-1}}}\cdots\xrightarrow{\alpha_{i_1}}s_{i_1}\cdots s_{i_k}z_\zeta t_\zeta=\lfloor s_\gamma\rfloor^{J_\lambda}z_\zeta t_\zeta=s_\beta z_\xi t_\xi$$

在 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 中。因此，我们在 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 中得到了一个形状为 λ、从 $z_\zeta t_\zeta$ 到 $z_\xi t_\xi$ 的 a-链。假设 $\mathrm{ht}([\xi-\zeta]_{J_\lambda^c})>1$。我们取 $i\in J^c(\lambda;a)$，使得

$[\xi-\zeta]_{J_\lambda^c}-\alpha_i\in Q^+_{J^c(\lambda;a)}$。设 $\xi':=\xi-\alpha_i+\phi_{J_\lambda}(\xi-\alpha_i)\in Q^{J_\lambda\text{-ad}}$。根据归纳假设，存在一个形状为 λ、从 $z_\zeta t_\zeta$ 到 $z_{\xi'}t_{\xi'}$ 的 a-链，以及一个形状为 λ、从 $z_{\xi'}t_{\xi'}$ 到 $z_\xi t_\xi$ 的 a-链。因此，我们在 $\overset{\infty}{2}\mathsf{BG}^{J_\lambda}$ 中得到了一个形状为 λ、从 $z_\zeta t_\zeta$ 到 $z_\xi t_\xi$ 的 a-链。“当且仅当”中的“仅当”部分可以用与 [5, 命题 6.2.2]，相同的方法证明，只需将 [5, 引理 4.1.7] 替换为引理 6.1.3，并将 [5, 推论 4.2.2] 替换为引理 6.1.1。

□

6.3 类型 $A_{2\ell}^{(2)}$ 的子引理 3.3.4 的证明。

在本小节中，假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于类型 $A_{2\ell}^{(2)}$。对于 $\lambda=\sum_{i\in I}m_i\varpi_i\in P_+^0$ 和 $a\in(0,1]_{\mathbb{Q}}$，我们设

$$\overline{J^c(\lambda;a)}:=\{i\in J_\lambda^c\mid a\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle\in\mathbb{Z}\},$$
$$\overline{I(\lambda;a)}:=\{i\in I\mid a\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle\in\mathbb{Z}\}=J_\lambda\sqcup J^c(\lambda;a).$$

注意，由于 $\langle\alpha_\ell^\vee,\lambda\rangle=\overline{2m_\ell,\quad}$ $J^c(\lambda;\ a)\ \subset\ J^c(\overline{\lambda;\ a)}$ 且 $I(\lambda;a)\ \subset I(\lambda;\ a)$。

对于 $\alpha=\sum_{i\in I}k_i\alpha_i\in Q^+:=\sum_{i\in I}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$，我们设

$$\mathrm{supp}(\alpha):=\{i\in I\mid k_i\neq 0\}.$$

子引理 $3\,3\,4$ $\zeta\ \xi\in\ldots$我们只需证明以下事实。Q^{J_λ} $a\in\ 0\ 1]_{\mathbb{Q}}$ 对于 ,-ad 和 (., 从 $z_\zeta t_\zeta$ 到 $z_\xi t_\xi$ 在 $\overset{\infty}{2}\mathsf{BG}^{J_\lambda}$ 中存在一个长度非零、形状为 $\overset{a}{\lambda}$ 的链，当且仅当 $J^c(\lambda;a)\neq\emptyset$ 且 $[\xi-\zeta]_{J_\lambda^c}\in Q^+_{J^c(\lambda;a)}\setminus\{0\}$。

首先，我们证明“若”部分。证明采用关于 $\mathrm{ht}([\xi-\zeta]_{J_\lambda^c})$ 的归纳法。若 $\mathrm{ht}([\xi-\zeta]_{J_\lambda^c})=1$，则对于某个 $i\in J^c(\lambda;a)$，有 $[\xi-\zeta]_{J_\lambda^c}=\alpha_i$。对 ξ 和 i 应用引理 6.1.2，可知存在如下某种形式的 $\beta\in\Delta^+{}_{\mathrm{af}}$ $\beta=-\gamma+\delta$ 或 $-2\gamma+\delta$，其中 $\gamma\in\Delta^+\setminus\Delta^+_{J_\lambda}$，使得 $[\gamma]_{J_\lambda^c}=\alpha_i$, $s_\beta z_\xi t_\xi\in(W^{J_\lambda})_{\mathrm{af}}$，且 $s_\beta z_\xi t_\xi\xrightarrow{\beta}z_\xi t_\xi$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathsf{BG}^{J_\lambda}$。于是，边 $s_\beta z_\xi t_\xi\xrightarrow{\beta}z_\xi t_\xi$ 是一个形状为 λ 的 a-链。事实上，若 $i\neq\ell$ 且 β 具有 $\beta=-\gamma+\delta$ 的形式，注意到 $[\gamma]_{J_\lambda^c}=\alpha_i$，我们有

$$a\langle\beta^\vee,s_\beta z_\xi t_\xi\rangle=a\langle\gamma^\vee,\lambda\rangle=a\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\gamma,\gamma)}=am_i\in\mathbb{Z}$$

由于 α_i 和 γ 是 Δ中的长根。如果 $i\neq\ell$ 和 β 具有 $\beta=-2\gamma+\delta$的形式，则有

$$a\langle\beta^\vee,s_\beta z_\xi t_\xi\rangle=a\langle\frac{1}{2}\gamma^\vee,\lambda\rangle=\frac{1}{2}a\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\gamma,\gamma)}=am_i\in\mathbb{Z}$$

因为 α_i 是 Δ 中的长根，而 γ 是短根。若 $i=\ell$，由于 $[\gamma]_{J_\lambda^c}=\alpha_\ell$ 和 Δ 属于 B_ℓ 型，我们推得 γ 是 Δ 中的短根。因此，$\beta=-2\gamma+\delta$。我们有

$$a\langle\beta^\vee,s_\beta z_\xi t_\xi\rangle=a\langle\frac{1}{2}\gamma^\vee,\lambda\rangle=\frac{1}{2}a\langle\alpha_\ell^\vee,\lambda\rangle\frac{(\alpha_\ell,\alpha_\ell)}{(\gamma,\gamma)}=\frac{1}{2}a\cdot 2m_\ell=am_\ell\in\mathbb{Z}.$$

因此，我们看到边 $s_\beta z_\xi t_\xi \xrightarrow{\beta} z_\xi t_\xi$ 是形状为 λ 的 a-链。“若”部分证明的其余内容与对偶非扭曲类型的情形相同。

接下来，我们证明“仅当”部分。令

$$z_\zeta t_\zeta = y_0 \xrightarrow{\beta_1} y_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_k} y_k = z_\xi t_\xi$$

为 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 中一个形状为 λ、长度为 a 的非零链。由于 $\zeta \neq \xi$，由推论 5.2.6 可得$[\xi - \zeta]_{J_\lambda^c} \neq 0$。将 $0 \leq m \leq k$ 写成 y_m 的形式：

$$y_m = w_m z_{\xi_m} t_{\xi_m}, \quad \text{with } w_m \in W^{J_\lambda} \text{ and } \xi \in Q^{J_\lambda\text{-ad}},$$

由引理 5.2.5，将 $1 \leq m \leq k$ 写成 β_m 的形式，如下所示：

$$\beta_m = w_{m-1}\gamma_m \text{ or } w_{m-1}\gamma_m + \delta \text{ or } 2w_{m-1}\gamma_m + \delta,$$

其中 $\gamma_m \in \Delta^+ \setminus \Delta^+_{J_\lambda}$，由引理 6.1.1(2) 可知。令

$$\begin{aligned} E_B &\coloneqq \{1 \leq m \leq k \mid \beta_m = w_{m-1}\gamma_m\}, \\ E_Q^1 &\coloneqq \{1 \leq m \leq k \mid \beta_m = w_{m-1}\gamma_m + \delta\}, \\ E_Q^2 &\coloneqq \{1 \leq m \leq k \mid \beta_m = 2w_{m-1}\gamma_m + \delta\}, \\ E_Q &\coloneqq E_Q^1 \cup E_Q^2. \end{aligned}$$

于是，我们有

$$\xi - \zeta = \sum_{1 \leq m \leq k} (\xi_m - \xi_{m-1}) = \sum_{m \in E_Q} z_{\xi_{m-1}}^{-1} \gamma_m$$

通过直接计算可得，因此

$$[\xi - \zeta]_{J_\lambda^c} = \sum_{m \in E_Q} [\gamma_m]_{J_\lambda^c} \in Q^+_{J_\lambda^c}.$$

我们可以用命题 6.2.2] 证明~~γ_m~~$\in \Delta_{I(\lambda;a)}$ for $1 \leq m \leq k$，论证与证明 [5, 中的相同。因此，我们有

$$[\xi - \zeta]_{J_\lambda^c} = \sum_{m \in E_Q} [\gamma_m]_{J_\lambda^c} \in Q^+_{\underline{J^c(\lambda;a)}}.$$

当 $m_\ell = 0$ or $a \notin \left\{ \underline{\dfrac{q}{2m_\ell}} \,\middle|\, 1 \leq q \leq 2m_\ell,\ q\text{是奇整数} \right\}$时，我们看到 $J^c(\lambda;\ a) = J^c(\lambda;\ a)$ 且 $I(\lambda;\ a) = I(\lambda;\ a)$，因此断言成立。

我们来证明，当 $m_\ell \neq 0$ 且 $a = \dfrac{q}{2m_\ell}$ 为奇整数 $1 \leq q \leq 2m_\ell$时，$\ell \notin \mathrm{supp}([\xi - \zeta]_{J_\lambda^c})$。取 $m \in E_Q$。注意，Δ 属于类型 B_ℓ。如果 $m \in E_Q^2$,

那么 γ_m 是 Δ 中的短根，$\gamma_m^\vee$ 的形式为 $\gamma_m^\vee = 2\alpha_i^\vee + \cdots + 2\alpha_{\ell-1}^\vee + \alpha_\ell^\vee$，其中 $i \in I$（λ；a），且 $\beta_m^\vee = \frac{1}{2} w_{m-1}\gamma_m^\vee \pm \frac{1}{2} K$。我们看到

$$a\langle \beta_m^\vee, y_{m-1}\lambda\rangle = \frac{q}{2m_\ell}\langle \frac{1}{2}\gamma_m^\vee, \lambda\rangle = \frac{q}{2m_\ell}(m_i + \cdots + m_{\ell-1} + m_\ell) \notin \mathbb{Z}$$

因为 $\mathrm{supp}(\gamma_m) \subset \overline{I(\lambda; a)}$。这与有向路径是形状为 λ 的 a-链这一假设矛盾。因此，$m \in E_Q^1$ and γ_m 是 Δ中的长根。由于 $\ell^{\infty}_{2}(y_m) = \ell^{\infty}_{2}(s_{\beta_m} y_{m-1}) = \ell^{\infty}_{2}(y_{m-1}) + 1$，我们推得 $\ell(\overline{w_m} z_{\xi_m}) = \ell(^{w_{m-1} z_{\xi_{\overline{m}-1}} s_{z_{\xi_m}^{-1}\gamma_m}}) = \ell(w_{m-1} z_{\xi_{m-1}}) + 1 - 2\langle \rho^\vee, z_{\xi_{m-1}}\gamma_m\rangle$（见命题 A.2.5）。因此，$z_{\xi_{m-1}}^{-1}\gamma_m \in \Delta^+$ 应满足条件

$$\ell(s_{z_{\xi_{m-1}}^{-1}\gamma_m}) = 2\langle \rho^\vee, z_{\xi_{m-1}}\gamma_m\rangle - 1. \tag{6.3.1}$$

根据 [3, §1.13] 和 [3, 引理 7.2], , 满足条件 (6.3.1) 的长根 $\alpha \in \Delta^+$ 具有如下形式：$\alpha = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}$，其中 $1 \le i < j \le \ell$，因此我们看到 $\ell \notin \mathrm{supp}(z_{\xi_{m-1}}^{-1}\gamma_m)$；注意，我们将 $\Delta^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$ 视为类型为 C_ℓ 的根系，并在此处将 [3] 中的结果应用于 $\Delta^\vee$。由于 $z_{\xi_{m-1}}^{-1} \in W_{J_\lambda}$，可得 $\mathrm{supp}(\gamma_m) \subset \mathrm{supp}(z_{\xi_{m-1}}^{-1}\gamma_m) \cup J_\lambda$。条件 $m_\ell \neq 0$ 蕴含$\ell \notin J_\lambda$，因此我们有 $\ell \notin \mathrm{supp}(\gamma_m)$。至此，子引理的证明完成。 □

注 6.3.1。等式 (6.3.1) 是量子 Bruhat 图中量子边的条件。详情请参见附录 A。

A 量子 Bruhat 图与量子 LS 路径。

在本附录中，我们将介绍量子 Bruhat 图和量子 LS 路径，并讨论它们与半无限 Bruhat 图和半无限 LS 路径之间的关系。

设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}} = \mathfrak{g}(X_{\mathrm{af}})$ 为一个扭仿射李代数。回顾一下，X 是以 I 和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(X) \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为指标的 X_{af} 的主子矩阵，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(X) \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 的一个有限维单李子代数。令 $\overset{\circ}{\varpi}_i$ 表示 $\mathfrak{g}$ 对于 $i \in I$ 的第 i 个基本权。我们设

$$P^+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\ge 0}\overset{\circ}{\varpi}_i \subset \mathfrak{h}.$$

我们看到 $\mathrm{cl}(P_+^0) \subset P^+$。对于 $\lambda \in P^+$，我们设 $J_\lambda := \{i \in I \mid \langle \alpha_i^\vee, \lambda\rangle = 0\}$。注意，对于 $\lambda \in P_+^0$，$J_\lambda = J_{\mathrm{cl}(\lambda)}$。

对于 $J \subset I$，我们设 $\rho_J^\vee := \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta_J^+} \alpha^\vee$。注意，对于所有 $\xi \in Q_J$，都有 $\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, \xi\rangle = 0$。由 [9, 引理 3.10] 和[5,引理 2.3.7]，我们得到以下引理。

引理 A.0.1。设 $J \subset I$ 和 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$。则，$\ell(z_\xi) = -2\langle \rho_J^\vee, \xi \rangle$。

引理 A.0.2. 设 $J \subset I$、$x \in W_{\mathrm{af}}$ 和 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$。那么，$xz_\xi t_\xi \in (W^J)_{\mathrm{af}}$ 当且仅当 $x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$。

A.1 对偶非扭曲类型的量子 Bruhat 图与 QLS 路径。

在本小节中，假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 属于对偶非扭曲型。对于对偶非扭曲类型，我们有 $\mathrm{cl}(\varpi_i) = \circ\varpi_i$，其中 $i \in I$，且 $\mathrm{cl}(P_+^0) = P^+$。

定义 A.1.1（量子 Bruhat 图）。

（1）设 $J \subset I$。（抛物）量子 Bruhat 图 QBG^J 是一个以 $\Delta^+ \backslash \Delta_J^+$ 标记的有向图，其顶点集为 W^J。对于 $w, v \in W^J$ 和 $\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$，

$$w \xrightarrow{\gamma} v \quad \text{in } \mathrm{QBG}^J$$

若 $v = \lfloor ws_\gamma \rfloor^J$，且以下两个条件之一成立：

(a) $\ell(v) = \ell(w) + 1$, (b) $\ell(v) = \ell(w) - 2\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, \gamma \rangle + 1$.

我们将满足 (a)（分别地，(b)）的边称为 Bruhat 边（分别地，量子边）。

(2) 设 $\lambda \in P^+$ 且 $a \in (0, 1]_{\mathbb{Q}}$。一条有向路径

$$w = v_0 \xrightarrow{\gamma_1} v_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_k} v_k = v$$

从 w 到 v 的 QBG^{J_λ} 中的路径，若对于 $1 \le m \le k$ 有 $a\langle \gamma_m^\vee, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$，则称为从 w 到 v、形状为 λ 的 a-链。

我们由 [10, 注 3.1.2], [9, §4.3]和 [8, §10] 得到以下引理。

引理 A.1.2. 设 $J \subset I$。

(1) 若 $w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^J$ 是量子 Bruhat 图^{J}中的 *Bruhat* 边，则 $ws_\gamma = \lfloor ws_\gamma \rfloor^J \in W^J$。(2) 若 $w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^J$ 是量子 Bruhat 图^{J}中的量子边，则 $\ell(ws_\gamma) = \ell(w) - 2\langle \rho^\vee, \gamma \rangle + 1$ 且 $ws_\gamma t_\gamma \in (W^J)_{\mathrm{af}}$。

定义 A.1.3（量子 LS 路径）。设 $\lambda \in P^+$。$\eta = (w_1, \ldots\ldots, w_s;\ 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1)$，其中 $w_m \in W^{J_\lambda}$ 对 $1 \le m \le s$ 成立，且 $a_m \in (0, 1]_{\mathbb{Q}}$ 对 $1 \le m \le s-1$ 成立，是一个形状为 λ 的量子 Lakshmibai–Seshadri 路径（QLS 路径），如果 $w_m \ne w_{m+1}$，并且对于所有 $1 \le m \le s-1$，在量子 Bruhat 图$^{J_\lambda}$中，存在一条从 w_{m+1} 到 w_m、形状为 λ 的 a_m-链。$\mathrm{QLS}(\lambda)$ 表示所有形状为 λ 的 QLS 路径的集合。

注 A.1.4。 我们对量子 Bruhat 图的定义不同于 [4, 定义 6.1] 和 [9, §4.3], 中的定义，与 [15, §4.1]和 [14,定义 3.1.2]中的定义相同。请注意，在 [14], 中，量子 Bruhat 图的边以余根标记，而在此处则以根标记。为证明下述命题，我们采用此定义。

命题 A.1.5. 设 $J \subset I$。

(1) 设 $x = wz_\xi t_\xi \in (W^J)_{\mathrm{af}}$，其中 $w \in W^J$且 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$（见引理 *5.2.5(3)*），$\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$，并且 $x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^J$。若 $\beta = w\gamma$ *(* $\beta = w\gamma + c_\gamma\delta$*)* 且 $\gamma \in \Delta^+ \mid \Delta_J^+$，则我们在 量子 Bruhat 图^{J}中有一条 *Bruhat* 边（分别为量子边）。（注意引理 *6.1.1(1)*。）

(2) 设 $w \in W^J$、$\gamma \in \Delta^+ \mid \Delta_J^+$，且 $w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^J$属于 量子 Bruhat 图^J。若此边是 *Bruhat* 边（分别为量子边），则对所有 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$，都有 $wz_\xi t_\xi \xrightarrow{\beta} s_\beta wz_\xi t_\xi$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^J$，其中 $\beta = w\gamma \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$（分别为 $\beta = w\gamma + c_\gamma\delta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$）。

证明。 (1) 根据假设，我们有

$$\ell^{\frac{\infty}{2}}(s_\beta x) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x) + 1. \tag{A.1.1}$$

设 $\beta = w\gamma$满足 $\gamma \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$。则， $s_\beta x = s_{w\gamma} wz_\xi t_\xi = ws_\gamma z_\xi t_\xi$。将 $s_\beta x = ws_\gamma z_\xi t_\xi$ 代入 (A.1.1)，可得

$$\ell(ws_\gamma z_\xi) = \ell(wz_\xi) + 1.$$

由于 $s_\beta x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$，由引理 5.2.5(3)可推得 $ws_\gamma \in W^J$。因此，我们有 $\ell(ws_\gamma z_\xi) = \ell(ws_\gamma) + \ell(z_\xi)$ 且 $\ell(wz_\xi) = \ell(w) + \ell(z_\xi)$。因此可得 $\ell(ws_\gamma) = \ell(w) + 1$。

设 $\beta = w\gamma + c_\gamma\delta$ $\gamma \in \Delta^+ \quad \Delta_J^+$ $s_\beta x = s_{w\gamma} t_{w\gamma} wz_\xi t_\xi$ =满足 \。则（注意 (. .)）。 $ws_\gamma z_\xi t_{\xi + z_\xi^{-1}\gamma}$ 5 2 2 $s_\beta x \in W^J{}_{\mathrm{af}}$ $\xi + z_\xi^{-1}\gamma \in$ 由于 ( )，由引理 . . ( )可推得 $Q^{J\text{-ad}}$ 5 2 5 3 和

$s_\beta x = \lfloor ws_\gamma \rfloor^J z_{\xi + z_\xi^{-1}\gamma} t_{\xi + z_\xi^{-1}\gamma}$。将此代入 (A.1.1)，可得

$$\ell(\lfloor ws_\gamma \rfloor^J) + \ell(z_{\xi + z_\xi^{-1}\gamma}) + 2\langle \rho^\vee, \xi + z_\xi^{-1}\gamma \rangle = \ell(w) + \ell(z_\xi) + 2\langle \rho^\vee, \xi \rangle + 1.$$

由引理 A.0.1，我们有 $\ell(\lfloor ws_\gamma \rfloor^J) = \ell(w) - 2\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, \gamma \rangle + 1$。注意，$\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, z_\xi^{-1}\gamma \rangle = \langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, \gamma \rangle$，因为 $z_\xi^{-1} \in W_J$ 且 $\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, \zeta \rangle = 0$ 对所有$\zeta \in Q_J$都成立。

(2) 假设 $w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^J$ 是量子 Bruhat 图^{J}中的 Bruhat 边。由于 $\ell(ws_\gamma) > \ell(w)$，我们由 [2, 命题 4.4.6] 得出 $\beta = w\gamma \in \Delta^+ \subset \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$。由引理 A.1.2(1) 和引理 5.2.5(3)，我们看到 $ws_\gamma \in W^J$ 和 $s_\beta wz_\xi t_\xi =$

$ws_\gamma z_\xi t_\xi \in (W^J)_{\mathrm{af}}$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\ell^{\frac{\infty}{2}}(s_\beta w z_\xi t_\xi) &= \ell^{\frac{\infty}{2}}(ws_\gamma z_\xi t_\xi) \\
&= \ell(ws_\gamma) + \ell(z_\xi) + 2\langle \rho^\vee, \xi\rangle \quad (\text{since } ws_\gamma \in W^J) \\
&= \ell(w) + 1 + \ell(z_\xi) + 2\langle \rho^\vee, \xi\rangle \\
&\quad (\text{since } w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^J \text{ is a Bruhat edge in } \mathrm{QBG}^J) \\
&= \ell(wz_\xi) + 2\langle \rho^\vee, \xi\rangle + 1 = \ell^{\frac{\infty}{2}}(wz_\xi t_\xi) + 1.
\end{aligned}$$

假设 $w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^J$ 是量子 Bruhat 图^{J}中的一条量子边。令 $\beta = w\gamma + c_\gamma \delta \in \Delta^+_{\mathrm{af}}$。由引理 A.1.2(2) 和引理 A.0.2，可得 $ws_\gamma t_\gamma \in (W^J)_{\mathrm{af}}$且 $s_\beta w z_\xi t_\xi = ws_\gamma t_\gamma z_\xi t_\xi \in (W^J)_{\mathrm{af}}$（注意 (5.2.2)）。由引理 5.2.5(3)，我们推得 $\xi + z_\xi^{-1}\gamma \in Q^{J\text{-ad}}$，且 $s_\beta w z_\xi t_\xi = \lfloor ws_\gamma \rfloor^J z_{\xi + z_\xi^{-1}\gamma} t_{\xi + z_\xi^{-1}\gamma}$。因此，我们看到

$$\begin{aligned}
\ell^{\frac{\infty}{2}}(s_\beta w z_\xi t_\xi) &= \ell^{\frac{\infty}{2}}(\lfloor ws_\gamma \rfloor^J z_{\xi + z_\xi^{-1}\gamma} t_{\xi + z_\xi^{-1}\gamma}) \\
&= \ell(\lfloor ws_\gamma \rfloor^J) + \ell(z_{\xi + z_\xi^{-1}\gamma}) + 2\langle \rho^\vee, \xi + z_\xi^{-1}\gamma\rangle \\
&= \ell(w) - 2\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, \gamma\rangle + 1 \\
&\quad - 2\langle \rho_J^\vee, \xi + z_\xi^{-1}\gamma\rangle \\
&\quad + 2\langle \rho^\vee, \xi\rangle + 2\langle \rho^\vee, z_\xi^{-1}\gamma\rangle \\
&\quad (\text{since } w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^J \text{ is a quantum edge in } \mathrm{QBG}^J \\
&\qquad \text{and Lemma A.0.1}) \\
&= \ell(w) - 2\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, \gamma\rangle + 1 \\
&\quad + \ell(z_\xi) - 2\langle \rho_J^\vee, z_\xi^{-1}\gamma\rangle \\
&\quad + 2\langle \rho^\vee, \xi\rangle + 2\langle \rho^\vee, z_\xi^{-1}\gamma\rangle \quad (\text{by Lemma A.0.1}) \\
&= \ell(w) + 1 + \ell(z_\xi) + 2\langle \rho^\vee, \xi\rangle \\
&\quad + 2\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, z_\xi^{-1}\gamma\rangle - 2\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, \gamma\rangle \\
&= \ell^{\frac{\infty}{2}}(wz_\xi t_\xi) + 1.
\end{aligned}$$

最后一个等式是利用 $z_\xi^{-1} \in W_J$ 以及对所有$\zeta \in Q_J$成立的$\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, \zeta\rangle = 0$得到的。 □

推论 A.1.6. 令 $\lambda \in P_+^0$. 我们有一个映射 $\overset{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda) \Rightarrow \mathrm{QLS}(\mathrm{cl}(\lambda))$，其定义如下：

$$(x_1, \ldots, x_s; a_0, \ldots . a_s) \mapsto (w_1, \ldots, w_s; a_0, \ldots, a_s),$$

其中 $x_m = w_m z_{\xi_m} t_{\xi_m}$ 满足 $w_m \in W^{J_\lambda}$ 且 $\xi_m \in Q^{J_\lambda\text{-ad}}$ 对任意 $1 \le m \le s$ 成立。此外，此映射是满射。

证明。 设 $x = wz_\xi t_\xi, y = vz_\zeta t_\zeta \in (W^J)_{\mathrm{af}}$满足 $w, v \in W^{J_\lambda}$且 $\xi, \zeta \in Q^{J_\lambda\text{-ad}}$，并且 $a \in (0, 1]_{\mathbb{Q}}$。假设存在一个形状为 λ的 a-链

$$x = y_0 \xrightarrow{\beta_1} y_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_k} y_k = y$$

在 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 中。我们将 $y_n \in (W^{J_\lambda})_{\mathrm{af}} (0 \le n \le k)$ 写作 $y_n = v_n z_{\zeta_n} t_{\zeta_n}$，其中 $v_n \in W^{J_\lambda}$ 且 $\zeta_n \in Q^{J_\lambda\text{-ad}}$；将 $\beta_n (1 \le n \le k)$ 写作 $\beta_n = v_{n-1}\gamma_n + p_n c_\gamma \delta$，其中 $\gamma_n \in \Delta^+ \setminus \Delta^+_{J_\lambda}$ 且 $p_n \in \{0, 1\}$（参见引理 5.2.5(3) 和引理 6.1.1(1)）。于是，由命题 A.1.5(1)，我们得到一条有向路径

$$w = v_0 \xrightarrow{\gamma_1} v_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_k} v_n = v$$

在量子 Bruhat 图 $^{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}$中。根据 $\overset{\infty}{2}\ \mathrm{BG}^{J_\lambda}$中形状为 λ 的 a-链的定义，我们有$a\langle \beta_n^\vee, y_{n-1}\lambda\rangle \in \mathbb{Z}$，其中 $1 \le n \le k$。注意到 $\beta_n^\vee = v_{n-1}\gamma_n^\vee + p_n K$，我们看到

$$\begin{aligned} a\langle \beta_n^\vee, y_{n-1}\lambda\rangle &= a\langle v_{n-1}\gamma_n^\vee + p_n K, v_{n-1} z_{\zeta_{n-1}} t_{\zeta_{n-1}} \lambda\rangle \\ &= a\langle v_{n-1}\gamma_n^\vee, v_{n-1}\lambda\rangle \\ &= a\langle \gamma_n^\vee, \lambda\rangle = a\langle \gamma_n^\vee, \mathrm{cl}(\lambda)\rangle \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

因此，量子 Bruhat 图$^{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}$ 中的有向路径是一个形状为 cl(λ) 的 a-链。因此，我们得到映射 $\overset{\infty}{2}\ \mathrm{LS}(\lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{QLS}(\mathrm{cl}(\lambda))$。我们证明这个映射是满射。设 $\eta = (w_1, \ldots, w_s; a_0, \ldots, a_s) \in \mathrm{QLS}(\mathrm{cl}(\lambda))$。我们需要找到元素 $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Q^{J_\lambda}$-ad，使得 $(w_1 z_{\xi_1} t_{\xi_1}, \ldots, w_s z_{\xi_s} t_{\xi_s}; a_0, \ldots, a_s) \in \overset{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda)$。通过对 $1 \le m \le s$ 进行反向归纳来构造它们。对于 $m = s$，令 $\xi_s = 0$。对于 $m < s$，假设存在元素 $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_s (= 0) \in Q^{J_\lambda}$-ad，使得对每个 $m+1 \le q \le s$，在 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 中都存在一条从 $w_{q+1} z_{\xi_{q+1}} t_{\xi_{q+1}}$ 到 $w_q z_{\xi_q} t_{\xi_q}$、形状为 λ 的 a_q-链。由于 $\eta \in \mathrm{QLS}(\mathrm{cl}(\lambda))$，存在一条形状为 cl(λ) 的 a_m-链

$$w_{m+1} = v_0 \xrightarrow{\gamma_1} v_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_k} v_k = w_m \tag{A.1.2}$$

在量子 Bruhat 图$^{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}$中。我们定义 $\beta_n \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$ 作为 $1 \le n \le k$，其定义为

$$\beta_n := \begin{cases} v_{n-1}\gamma_n & \text{if } v_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} v_n \text{ is a Bruhat edge,} \\ v_{n-1}\gamma_n + c_{\gamma_n}\delta & \text{if } v_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} v_n \text{ is a quantum edge,} \end{cases}$$

并通过归纳定义 $\zeta_n \in Q^{J_\lambda\text{-ad}}$ 作为 $0 \le n \le k$，其定义为

$$\zeta_n := \begin{cases} \xi_{m+1} & \text{if } n = 0, \\ \zeta_{n-1} & \text{if } n > 0 \text{ and } v_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} v_n \text{ is a Bruhat edge,} \\ \zeta_{n-1} + z_{\zeta_{n-1}}^{-1}\gamma_n & \text{if } n > 0 \text{ and } v_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} v_n \text{ is a quantum edge.} \end{cases}$$

于是，由引理 A.1.5(2)，我们得到一条有向路径

$$w_{m+1} z_{\xi_{m+1}} t_{\xi_{m+1}} = v_0 z_{\zeta_0} t_{\zeta_0} \xrightarrow{\beta_1} v_1 z_{\zeta_1} t_{\zeta_1} \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_k} v_k z_{\zeta_k} t_{\zeta_k} = w_m z_{\zeta_k} t_{\zeta_k}$$

在 $\overset{\infty}{-2}\ \mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 中。由于 (A.1.2) 是量子 Bruhat 图$^{J_\lambda}$中形状为 cl(λ) 的 a_m-链，我们推得这是 $\overset{\infty}{2}\ \mathrm{BG}^{J_\lambda}$ 中形状为 λ 的 a_m-链。因此，$\zeta_k \in Q^{J_\lambda\text{-ad}}$ 是 ξ_m 所需的元素。推论得证。 □

注记 A.1.7. 命题 A.1.5 和推论 A.1.6 的证明与 Nomoto [14] 针对 $A^{(2)}_{2\ell}$ 型给出的证明相同（参见 [14, 命题 A.3.5]和 [14, 定理 A.2.5]的证明）。不过，我们在此给出一般扭曲仿射型的证明。

A.2 $A_{2\ell}^{(2)}$ 型的量子 Bruhat 图与 QLS 路径。

在本附录中，设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 为 $A_{2\ell}^{(2)}$ 型。在这种情况下，我们有

$$\mathrm{cl}(\varpi_i) = \begin{cases} \mathring{\varpi}_i & \text{if } i \neq \ell, \\ 2\mathring{\varpi}_\ell & \text{if } i = \ell, \end{cases}$$

对于 $i \in I$ 以及 $\mathrm{cl}(P_+^0) \subsetneq P^+$。

定义 A.2.1。

(1) 设 $J \subset I$。抛物量子 Bruhat 图 $\mathrm{QBG}^J_{A_{2\ell}^{(2)}}$ 是一个以 W^J 为顶点集的 $(\Delta^+ \setminus \Delta_J^+)$-标记有向图。对于 $w,\ v \in W^J$ 和 $\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$，

$$w \xrightarrow{\alpha} v \quad \text{in } \mathrm{QBG}^J_{A_{2\ell}^{(2)}}$$

若 $v = \lfloor ws_\alpha \rfloor^J$ 且满足以下两个条件之一：

(a) $\ell(v) = \ell(w) + 1$, (b) $\ell(v) = \ell(w) - 2\langle \rho^\vee - \rho_J^\vee, \alpha \rangle + 1$.

我们将满足条件 (a)（分别地，(b)）的边称为 Bruhat 边（分别地，量子边）。

(2) 设 $\lambda \in P^+$ 和 $a \in (0,\ 1]_{\mathbb{Q}}$。一条有向路径

$$w = v_0 \xrightarrow{\gamma_1} v_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_k} v_k = v$$

从 w 到 v 的 $\mathrm{QBG}^J_{A_{2\ell}^{(2)}}$ 中的路径是从 w 到 v、形状为 λ 的 a-链，当且仅当边 $v_{m-1} \xrightarrow{\gamma_m} v_m$ 对于 $1 \leq m \leq k$ 满足以下条件：
若该边是 Bruhat 边，则 $a\langle \gamma_m^\vee,\ \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$。若该边是量子边，则

$$\begin{cases} a\langle \gamma_m^\vee, \lambda \rangle \in \mathbb{Z} & \text{if } \gamma_m \text{ is a long root in } \Delta, \\ a\langle \gamma_m^\vee, \lambda \rangle \in 2\mathbb{Z} & \text{if } \gamma_m \text{ is a short root in } \Delta. \end{cases}$$

注记 A.2.2。引理 A.1.2 对 $\mathrm{QBG}^J_{A_{2\ell}^{(2)}}$ 也成立。

定义 A.2.3 （$A_{2\ell}^{(2)}$ 型 QLS 路径）。设 $\lambda \in P^+$。若 $\eta = (w_1,\ \ldots\ldots,\ w_s;\ 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1)$ 满足 $w_m \neq w_{m+1}$，且对于所有 $1 \leq m \leq s-1$，在 $\mathrm{QBG}^{J_\lambda}_{A_{2\ell}^{(2)}}$ 中都存在一条从 w_{m+1} 到 w_m、形状为 λ 的 a_m-链，则称其为形状为 λ 的 $A_{2\ell}^{(2)}$ 型 QLS 路径（或类型为 $A_{2\ell}^{(2)}$ 的 QLS 路径），其中 $w_m \in W^{J_\lambda}$ 对于 $1 \leq m \leq s$，而 $a_m \in (0,\ 1]_{\mathbb{Q}}$ 对于 $1 \leq m \leq s-1$。令 $\mathrm{QLS}^{A_{2\ell}^{(2)}}(\lambda)$ 表示所有形状为 λ 的 $A_{2\ell}^{(2)}$ 型 QLS 路径组成的集合。

注记 A.2.4。 在 [14], 中，Nomoto 引入了图的两种变体：$(\mathrm{QBG}_{b\lambda}^{A_{2n}^{(2)}})^S$([14, 定义 3.1.4]) 和 $((\mathrm{QBG}_{b\lambda}^{\dagger})^{A_{2n}^{(2)}})^S$ ([14, 定义 3.2.3])，并定义了 $A_{2\ell}^{(2)}$ 型 QLS 路径。我们对 $\mathrm{QBG}^J_{A_{2\ell}^{(2)}}$ 中 a-链的定义与前者不同：对于短根（即属于 $2\mathbb{Z}$ 的根），我们将奇偶条件施加于量子边，而在 [14], 中，该条件施加于 Bruhat 边。我们的定义也不同于后者，后者涉及半整数值（$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$）。

–

命题 A.2.5. 设 $J \subset I$。

(1) 设 $x = wz_\xi t_\xi \in (W^J)_{\mathrm{af}}$满足 $w \in W^J$和 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$（见引理 *5.2.5(3)*），$\beta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$，且 $x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^J$。若 $\beta = w\gamma$（$\beta = w\gamma + \delta$ 或$2w\gamma + \delta$）满足 $\gamma \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$，则有一条 ***Bruhat*** 边（分别为量子边） $w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^J$ 属于 量子 Bruhat 图$^J_{A_{2\ell}^{(2)}}$（注意引理 *6.1.1(2)*）。

(2) 设 $w \in W^J$、$\gamma \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$，且 $w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^J$属于 量子 Bruhat 图 $^J_{A_{2\ell}^{(2)}}$。若这条边是 ***Bruhat*** 边，则对所有 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$，有 $wz_\xi t_\xi \xrightarrow{\beta} s_\beta wz_\xi t_\xi$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^J$，其中 $\beta = w\gamma \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$。若这条边是量子边，且 γ 是 Δ中的长根（短根），则对所有 $\xi \in Q^{J\text{-ad}}$，有 $wz_\xi t_\xi \xrightarrow{\beta} s_\beta wz_\xi t_\xi$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^J$，其中 $\beta = w\gamma + \delta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$（分别为 $\beta = 2w\gamma + \delta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$）。

证明。 证明与命题 A.1.5 相同。注意 (5.2.5)、(5.2.6) 和注记 A.2.2。

□

推论 A.2.6。 令 $\lambda \in P_+^0$. 我们有一个映射 $\overset{\infty}{2}\mathrm{LS}(\lambda) \to \mathrm{QLS}^{A_{2\ell}^{(2)}}(\mathrm{cl}(\lambda))$，定义如下:

$$(x_1, \ldots, x_s; a_0, \ldots . a_s) \mapsto (w_1, \ldots, w_s; a_0, \ldots, a_s),$$

其中 $x_m = w_m z_{\xi_m} t_{\xi_m}$ 满足 $w_m \in W^{J_\lambda}$ 且 $\xi_m \in Q^{J_\lambda\text{-ad}}$，对任意 $1 \le m \le s$成立。此外，此映射是满射。

证明。 证明与推论 A.1.6 相同，但需作如下修改。令 $x = wz_\xi t_\xi$ 满足 $w \in W^{J_\lambda}$ 且 $\xi \in Q^{J_\lambda\text{-ad}}$，$\beta = 2w\gamma + \delta \in \Delta^+{}_{\mathrm{af}}$满足 $\gamma \in \Delta^+ \setminus \Delta_{J_\lambda}^+$，并且 $x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$ 属于 $\overset{\infty}{2}\mathrm{BG}^{J_\lambda}$。注意，$\gamma$是 Δ中的一个短根。然后，由命题 A.2.5(1)，我们得到量子 Bruhat 图 $\mathrm{QBG}^{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}_{A_{2\ell}^{(2)}}$ 中的一条量子边 $w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}$。若对于某个 $a \in (0, 1]_{\mathbb{Q}}$，$x \xrightarrow{\beta} s_\beta x$ 是形状为 λ 的 a-链，则

$$\begin{aligned} a\langle \beta^\vee, x\lambda \rangle &= a\langle \frac{1}{2} w\gamma^\vee + \frac{1}{2} K, wz_\xi t_\xi \lambda \rangle \\ &= \frac{1}{2} a\langle \gamma^\vee, \lambda \rangle = \frac{1}{2} a\langle \gamma^\vee, \mathrm{cl}(\lambda) \rangle \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

（注 $\beta^\vee = \frac{1}{2} w\gamma^\vee + \frac{1}{2} K$。）因此，我们有 $a\langle \gamma^\vee, \mathrm{cl}(\lambda) \rangle \in 2\mathbb{Z}$，且由短根 γ 标记的量子边 $w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}$ 是形状为 $\mathrm{cl}(\lambda)$ 的 a-链

在量子 Bruhat 图 $\mathrm{Bru}_{A_{2\ell}^{(2)}}^{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}$ 中。反之，若量子 Bruhat 图 $\mathrm{Bru}_{A_{2\ell}^{(2)}}^{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}$ 中的量子边 $w \xrightarrow{\gamma} \lfloor ws_\gamma \rfloor^{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}$ 满足 $w \in W^{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}$，且短根 $\gamma \in \Delta \setminus \Delta^+_{J_{\mathrm{cl}(\lambda)}}$ 对于某个 $a \in (0,\ 1]_{\mathbb{Q}}$而言是形状为 cl(λ) 的 a-链，则根据命题 A.2.5(2)，我们可推出，对于所有 $\xi \in Q^{J_\lambda\text{-ad}}$，$wz_\xi t_\xi \xrightarrow{2w\gamma+\delta} \lfloor ws_\gamma \rfloor^{J_\lambda} z_{\xi+\underline{z_\xi^{-1}\gamma}} t_{\xi+z_\xi^{-1}\gamma}$ 在 $\frac{\infty}{2}$ Bruhat 图 $^{J_\lambda}$ 中是形状为 λ 的 a-链。 □

致谢。

作者谨向他们的导师 Takeshi Ikeda 致以感谢，感谢他在整个研究过程中给予的有益指导，以及对稿件提出的细致意见。作者还要感谢 Satoshi Naito 对稿件提出的宝贵意见和富有启发性的讨论。最后，作者感谢 Takafumi Kouno 给予的有益讨论。

参考文献

[1] J. Beck 和 H. Nakajima，《量子仿射代数的晶体基与双侧胞腔》，《Duke 数学杂志》**123**（2004），第 2 期，335–402。MR2066942[2] A. Björner 和 F. Brenti，《Coxeter 群的组合学》，《数学研究生教材》第 231 卷，Springer，纽约，2005。MR2133266[3] A. Braverman、D. Maulik 和 A. Okounkov，《Springer 解消的量子上同调》，《数学进展》**227**（2011），第 1 期，421–458。MR2782198[4] F. Brenti、S. Fomin 和 A. Postnikov，《Weyl 群的混合 Bruhat 算子与 Yang-Baxter 方程》，《国际数学研究通知》**1999**（1999），第 8 期，419–441。MR1687323[5] M. Ishii、S. Naito 和 D. Sagaki，《量子仿射代数上零级极端权模的半无限 Lakshmibai-Seshadri 路径模型》，《数学进展》**290**（2016），967–1009。MR3451944[6] V. G. Kac，《无限维李代数》，第三版，剑桥大学出版社，剑桥，1990。MR1104219[7] M. Kashiwara，《修正量子包络代数的晶体基》，《Duke 数学杂志》**73**（1994），第 2 期，383–413。MR1262212[8] T. Lam 和 M. Shimozono，《量子上同调 G/P 与仿射 *Grassmann* 流形的同调，《Acta Mathematica》**204**（2010），第 1 期，49–90。MR2600433[9] C. Lenart、S. Naito、D. Sagaki、A. Schilling 和 M. Shimozono，《Kirillov-Reshetikhin 晶体的统一模型 I：提升抛物量子 Bruhat 图》，《国际数学研究通知》IMRN**2015**（2015），第 7 期，1848–1901。MR3335235[10] C. Lenart、S. Naito、D. Sagaki、A. Schilling 和 M. Shimozono，《量子 Lakshmibai-Seshadri 路径与根算子》，《Schubert 演算——大阪 2012》，2016，267–294 页。MR3644827[11] P. Littelmann，《表示论中的路径与根算子》，《数学年刊》（第二辑）**142**（1995），第 3 期，499–525。MR1356780[12] S. Naito、F. Nomoto 和 D. Sagaki，《在 $t = \infty$ 处将非对称 *Macdonald* 多项式专门化与零级极端权模的 *Demazure* 子模》，《美国数学学会汇刊》**370**（2018），第 4 期，2739–2783。MR3748584[13] S. Naito 和 D. Sagaki，《量子仿射代数上零级极端权模的路径模型》，《国际数学研究通知》**32**（2003），1731–1754。MR1982153

[14] F. Nomoto，量子 *Lakshmibai–Seshadri* 路径与 $t = 0$ 型中 *Macdonald* 多项式的特化 $A_{2n}^{(2)}$，arXiv:1606.01067。[15] D. Orr 和 M. Shimozono，非对称 *Macdonald-Koornwinder* 多项式的特化，《代数组合学杂志》**47**（2018），第 1 期，91–127。MR3757150[16] D. Peterson， G/P 的量子上同调，马萨诸塞州剑桥，1997。