arXiv:2601.13017v1 [math.CA] 19 Jan 2026

具有指数增长的拉普拉斯算子特征函数的刻画

BASIL PAUL，PRADEEP BOGGARAPU

摘要。1993年，Robert Strichartz证明了拉普拉斯算子的有界特征函数的一种刻画 $\Delta = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ on $\mathbb{R}^d$：若$\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的双向无限函数序列，满足 $\Delta f_k = f_{k+1}$ 且 $\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C$对所有 $k \in \mathbb{Z}$成立，其中 $C > 0$为某个常数，那么 f_0 就是 Δ的特征函数。注意到拉普拉斯算子存在无界特征函数，Howard和Reese将Strichartz定理推广到对至多具有多项式增长的拉普拉斯算子特征函数进行刻画。本文将证明Strichartz定理的一个扩展版本，以刻画具有指数增长的拉普拉斯算子特征函数。

1. 引言

值得注意的是，实数轴上的函数若其所有导数和原函数都一致有界，则它必定是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的线性组合。考虑到这一事实，John Roe [7] 根据导数和原函数的大小，证明了正弦函数 $asin（x+q）$ 的如下刻画。

定理 1.1 (Roe)。设 $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是一个由实变量的实值函数构成的双向无限序列，满足

$$f_{n+1}(x) = \frac{d}{dx} f_n(x).$$

进一步假设存在一个实数 M，使得 $|f_n(x)| \leq M$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in \mathbb{R}.$ 都成立。那么，$f_0(x) = a\sin(x+\phi)$，其中 a 和 ϕ 是某些实常数。

在文章 [3]，中，Ralph Howard 证明了 Roe定理 的一个推广版本，其中证明了界 $|f_n（x）| \leq M$ 可以放宽为 $|f_n（x）| \leq M_n（1+|x|）^m$，且 $m \geq 1$，并且常数只需具有次指数增长。

定理 1.2 (Howard)。 设 $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为定义在实数上的复值函数双向无限序列，满足

$$f_{n+1}(x) = \frac{d}{dx} f_n(x)$$

and 因此存在常数 $M_n \geq 0, \alpha \in [0,1)$，以及非负整数 k，使得 g

$$|f_n(x)| \leq M_n(1+|x|)^{k+\alpha}.$$

If

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{(1+\varepsilon)^n} = 0 \quad for\ all\ \varepsilon > 0$$

and

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{M_{-n}}{(1+\varepsilon)^n} = 0 \quad for\ all\ \varepsilon > 0,$$

then

$$f_0(x) = p(x)e^{ix} + q(x)e^{-ix}$$

其中，$p（x）$ 和 $q（x）$ 是次数至多为 k 的多项式。

2020 数学主题分类。 主要分类：42B10；次要分类：46E10。关键词和短语。 拉普拉斯算子，球面傅里叶变换，特征函数，欧氏球面函数。

设 $\Delta = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 是作用于 $\mathbb{R}^d$ 上的拉普拉斯算子。1993年，Robert Strichartz [8] 研究了 Roe定理 [7]，的 d 维推广，其中将 $\frac{d}{dx}$ 替换为作用于$\mathbb{R}^d$上的拉普拉斯算子，并得到了特征值为 $\alpha > 0$ 的拉普拉斯算子的有界特征函数的刻画。

定理1.3 (Strichartz)。 设$\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的满足 $\Delta f_k = \alpha f_{k+1}$ 的双向无限函数序列，其中 $\alpha>0$，对所有 $k \in \mathbb{Z}$均成立。如果$\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}$均成立，其中$C > 0$，则 $\Delta f_0 = \alpha f_0$。

Strichartz还指出，上述结果可以推广到 L^p 范数，其中$p > \frac{2d}{d-1}$ 取代了 L^∞ 范数。同时，注意到拉普拉斯算子存在无界特征函数，Howard和Reese [2] 将上述定理推广为刻画至多具有多项式增长的拉普拉斯算子特征函数。

定理1.4 (Howard和Reese)。 设 $a \geq 0$，且$\{f_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的满足以下条件的复值函数双向无限序列

$$\Delta f_k = f_{k+1}$$

and

$$|f_k(x)| \leq M_k(1+|x|)^a \tag{1}$$

其中常数 M_k 具有次线性增长:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{M_k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{M_{-k}}{k} = 0$$

于是 $\Delta f_0 = f_0$。

在同一篇文章中， [2], 作者提到，要刻画具有指数增长的拉普拉斯算子的特征函数是多么困难，而这正是本工作的主要动机。作为此类特征函数的例子，考虑两类重要函数：第一类称为欧几里得球函数，记作 ϕ_λ，定义如下:

$$\phi_\lambda(x) = \int_{S^{d-1}} e^{i\lambda x.\omega} d\sigma(\omega)$$

其中 $d\sigma$是单位球面 S^{d-1}上的归一化表面测度， $\lambda \in \mathbb{C}$；第二类定义为 $E_\zeta(x) = e^{i\zeta\cdot x}$，其中 $\zeta = (\zeta_1、.....、\zeta_d) \in \mathbb{C}^d$。可以验证，对于 $\lambda \in \mathbb{C}$和$\zeta \in \mathbb{C}^d$，这两类函数都是具有指数增长的拉普拉斯算子的特征函数，即它们满足:

$$|\phi_\lambda(x)| \leq e^{|\mathrm{Im}(\lambda)||x|} \text{ and } |E_\zeta(x)| \leq e^{|\mathrm{Im}(\zeta)||x|}.$$

但是，如果 $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$ 且 $\mathrm{Im}(\zeta) = (\mathrm{Im}(\zeta_1) ....., \mathrm{Im}(\zeta_d)) \neq 0$，它们就不满足定理1.4中提到的条件 (1)。

具体而言，我们的目标是确定一列双向无限的复值函数$\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上是否满足条件 $\Delta f_k = \alpha f_{k+1}$ 和

$$|f_k(x)| \leq Me^{a|x|}, \tag{2}$$

对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，若条件成立，则 f_0 是 Δ的特征函数。

在验证上述目标之前，我们必须先了解函数空间 X_a中拉普拉斯算子的点谱，其中

$$X_a = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} |\ |f(x)| \leq Me^{a|x|}\}.$$

对于固定的 $a > 0$。正是在这一背景下，我们运用一个关键观察：对于 |， $\phi_\lambda \in X_a$ $\mathrm{Im}(\lambda)| \leq a$；并且对于任意满足 $\Delta f = \lambda^2 f$ 的函数 $f \in X_a$，则 $|\mathrm{Im}(\lambda)| \leq a$（见命题 2.2）。因此，我们将看到，拉普拉斯算子在 X_a 上的点谱恰为 $\Lambda(\Omega_a)$，其中 Λ 表示映射 $\lambda \mapsto \lambda^2$，而 Ω_a 表示复条带

$$\{\lambda \in \mathbb{C} || \mathrm{Im}(\lambda)| \leq a\}.$$

此外，通过常规计算可知， $\Lambda(\Omega_a)$的边界 $\partial\Lambda(\Omega_a)$是一条由$\{\lambda = s+it | t^2 = 4a^2(s+a^2)\}$给出的抛物线，见图 1。考虑到拉普拉斯算子点谱的几何结构，我们旨在刻画与任意复特征值对应的、具有指数增长的拉普拉斯算子特征函数。

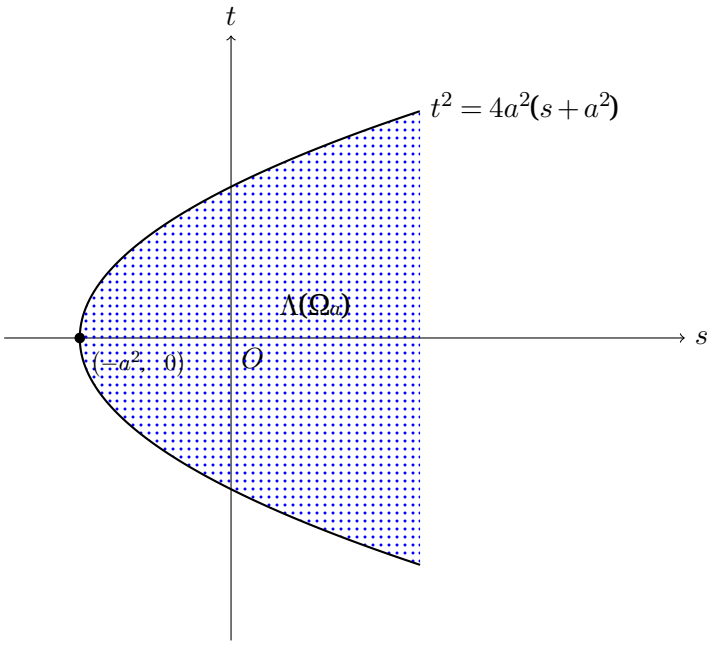


图 1。 X_a上 Δ 的点谱。

对于任意满足 $\mathrm{Im}(\lambda_0) \neq 0$且 $a_{\lambda_0} = |\mathrm{Im}(\lambda_0)|$的 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，容易看出 $\lambda_0^2 \in \partial\Lambda(\Omega^{a_{\lambda_0}})$。我们对与复特征值 λ_0^2 对应、具有指数增长的拉普拉斯算子特征函数给出了如下刻画。

定理 1.5. 对于任意满足 $\mathrm{Im}(\lambda_0) \neq 0$ 的 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，令 $N(\lambda_0)$ 表示在点 λ_0^2 处绘制于抛物线 $\partial\Lambda(\Omega_{|\mathrm{Im}(\lambda_0)|})$ 上的外法线。令 $z_0 \in N(\lambda_0)$ 和 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为定义在 $\mathbb{R}^d$ 上、满足以下条件的双向无限函数序列

(1) $(\Delta - z_0 I)f_k = Af_{k+1}$，其中某个 $A \in \mathbb{C}$ 非零；以及 *(2)* $|f_k(x)| \leq Me^{|\mathrm{Im}(\lambda_0)||x|}$，其中常数为 $M > 0$，且对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ 均成立。

则以下断言成立。

(a) 若 $|A| = |{\lambda_0}^2 - z_0|$，则 $\Delta f_0 = {\lambda_0}^2 f_0$。*(b)* 若 $|A| < |{\lambda_0}^2 - z_0|$，则对所有 $k \in \mathbb{Z}$，有 $f_k = 0$。*(c)* 存在满足条件 *(1)* 和 *(2)* 的解，但当 $|A| > |{\lambda_0}^2 - z_0|$ 时，它们不是 Δ 的特征函数。

此外，作为 Roe定理 1.1 和 Howard 定理 1.2 的推广，我们将证明以下结果；该结果是对指数函数的一种 Roe 型刻画。

定理 1.6。 对于任意满足 $\mathrm{Im}(\lambda_0) \neq 0$ 的 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上并满足下列条件的双向无限序列函数：

(1) 对某个非零 $A \in \mathbb{C}$，若 $(\frac{d}{dx} - i\lambda_0 + \alpha)f_k = Af_{k+1}$，则有 $\begin{cases} \text{；若 } \mathrm{Im}(\lambda_0) > 0 \, (\frac{d}{dx} - i\lambda_0 - \alpha)f_k = Af_{k+1}, \text{ 则} \\ \text{有 } \mathrm{Im}(\lambda_0) < 0; \end{cases}$ *(2)* $|f_k(x)| \leq Me^{|\mathrm{Im}(\lambda_0)||x|}$，其中 $M > 0$ 为常数，且对每个 $x \in \mathbb{R}$ 均成立。

于是，以下结论成立。

(a) 若 $|A| = |\alpha|$，则 $\frac{d}{dx} f_0 = i\lambda_0 f_0$。即 $f_0\ (x) = e^{i\lambda_0 x}$。*(b)* 若 $|A| < |\alpha|$，则对所有 $k \in \mathbb{Z}$，$f_k = 0$。

(c) 当 $|A| > |\alpha|$ 时，存在满足条件 *(1)* 和 *(2)* 的解，但它们不是 $\frac{d}{dx}$ 的特征函数。 —

在阐明我们的目标之后，我们的策略是对上述结果提出一个一般形式，从而使这些结果具有重要意义。本文的组织结构如下。我们将在第 2 节中专门建立必要的框架并证明我们的主要结果。特别地，我们将定义一个 ***Schwartz*型空间** $S^a(\mathbb{R}^d)$ 及其相应的对偶空间，即所有 型指数型温和分布所组成的空间，并依据经典情形对其定义进行调整。众所周知，正如第 2.2 小节中所定义的，球面傅里叶变换是从 $S^a(\mathbb{R}^d)$ 中所有径向函数组成的空间到带状区域 Ω_a 上无穷远处快速衰减的所有偶全纯函数组成的空间之间的拓扑同构。此外，该同构也可以扩展到相应的对偶空间。利用这一点，我们将证明一个 Strichartz定理的版本，用于刻画拉普拉斯算子的指数型缓增特征分布。随后，通过证明具有指数增长的函数确实是 a 型指数型温和分布，即可得到定理 1.5。我们的主要定理的证明密切遵循 M. Naik 和 R. Sarkar [5] 所采用的方法，用于刻画黎曼对称空间上非紧型、实秩一的拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征函数。最后，在第 3 节中，我们将通过建立一个 Roe 型刻画来结束本文，刻画常微分算子 $\frac{d}{dx}$ 的指数型缓增特征分布，具体如定理 3.1 所示，由此可推出定理 1.6。

—

2. 拉普拉斯算子的指数型缓增特征分布的刻画

2.1. **框架设定**。

2.1.1. ***Schwartz*型空间** $S^a(\mathbb{R}^d)$ **和** $H_e(\Omega_a)$。:

我们将如下引入一个***Schwartz*型空间**。给定一个实数 $a \geq 0$，令 $S^a(\mathbb{R}^d)$ 表示由所有满足下列条件的 C^∞ 函数构成的空间:

$$\gamma_{m,\alpha}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} e^{a|x|}(1+|x|)^m |D^\alpha f(x)| < \infty$$

对每个非负整数 m 以及所有多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$，其中

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_d}^{\alpha_d}}.$$

注意，当 $a = 0$ 时，上述空间与标准 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 重合。令$S^a_{rad}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $S^a(\mathbb{R}^d)$ 中所有径向函数构成的空间。现在定义带状区域 $\Omega_a = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(\lambda)| < a\}$。令 $H_e(\Omega_a)$ 表示 Ω_a 上所有偶全纯函数构成的集合，这些函数在 Ω_a 的闭包上连续，并且对所有非负整数 m 以及所有多重指标 α

$$\mu_{m,\alpha}(\phi) = \sup_{\lambda\in\Omega_a} (1+|\lambda|)^m \left| \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^\alpha \phi(\lambda) \right| < \infty.$$

可以看出，对于由半范数族 $\{\gamma_{m,\ \alpha}\}$ 和 $\{\mu_{m,\ \alpha}\}$ 分别诱导的拓扑，空间 $S^a(\mathbb{R}^d)$ 和 $H_e(\Omega_a)$ 都是 Fréchet空间。现在，对于任意函数 $f \in S^a_{rad}(\mathbb{R}^d)$，我们定义 f 的球面傅里叶变换为

$$\mathcal{H}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi_\lambda(x)dx.$$

众所周知，$\mathcal{H} : S^a_{rad}(\mathbb{R}^d) \to H_e(\Omega_a)$ 是一个拓扑同构，参见 [1, 定理 2.1]。利用经典傅里叶反演公式，我们可以证明

$$\mathcal{H}^{-1}\phi(x) = \int_0^\infty \phi(\lambda)\phi_\lambda(x)\lambda^{d-1}d\lambda.$$

2.1.2. 球面傅里叶变换向相应对偶空间的延拓 $S^a(\mathbb{R}^d)'$ 和 $H_e(\Omega_a)'$。下文中， $H_e(\Omega_a)'$ 表示 $H_e(\Omega_a)$的对偶空间；对于任意 $S \in H_e(\Omega_a)'$，以及 Ω_a 上任意适当的偶全纯函数 ψ ，我们将 ψS 定义为一个对偶元素，其定义方程为

$$\langle \psi S, \phi \rangle = \langle S, \psi \phi \rangle,$$

对所有 $\phi \in H_e(\Omega_a)$，其中$\langle .,. \rangle$ 表示对偶配对。

现在，我们将 $S^a(\mathbb{R}^d)'$（即 $S^a(\mathbb{R}^d)$ 的对偶空间）称为定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的 a 型指数型温和分布空间。对于任意 $\psi \in S^a(\mathbb{R}^d)$，我们将算子 Δ 在 $T \in S^a(\mathbb{R}^d)'$ 上的作用定义如下：$\langle \Delta T, \psi \rangle = \langle T, \Delta \psi \rangle$。设 T 是一个 a 型指数型温和分布。 T 的球面傅里叶变换记为$\mathcal{H}T$ ，它是定义在 $H_e(\Omega_a)$ 上的线性泛函，定义规则如下：

$$\langle \mathcal{H}T, \phi \rangle = \langle T, \mathcal{H}^{-1}\phi \rangle$$

其中 $\phi \in H_e(\Omega_a), \mathcal{H}^{-1}\phi \in S^a(\mathbb{R}^d)$ 且 $\mathcal{H}(\mathcal{H}^{-1}\phi) = \phi$。

2.1.3. 径向化算子。 对于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的适当函数 f，其径向化 Rf 定义为

$$Rf(x) = \int_{S^{d-1}} f(|x|\omega) d\sigma(\omega)$$

其中 $d\sigma$ 表示 S^{d-1} 上的归一化表面测度。下面来看径向化算子的一些重要性质：

- $$\int Rf(x)g(x)dx = \int f(x)Rg(x)dx,$$
  where $f, g \in S^a(\mathbb{R}^d)$;
- $R(\Delta f) = \Delta(Rf)$.

上述径向化的定义可以扩展到 $T \in S^a(\mathbb{R}^d)'$ ，如下所示。

定义 2.1。 对于任意 $T \in S^a(R^d)'$， T 的径向化按如下规则定义：对所有 $f \in S^a(\mathbb{R}^d)$，$\langle RT, f \rangle = \langle T, Rf \rangle$。因此，若 $T \in S^a(\mathbb{R}^d)'$ 满足 $RT = T$，则称其为径向的。

2.1.4. 平移算子。 给定任意 $y \in \mathbb{R}^d$ 和函数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, ，我们将 f 的平移定义为 $(\ell_y f)(x) = f(x - y)$。对于 $T \in S^a(\mathbb{R}^d)'$ 和 $y \in \mathbb{R}^d$，我们通过以下方式定义平移 $\ell_y T$：

$$\langle \ell_y T, f \rangle = \langle T, \ell_{-y} f \rangle,$$

对每个 $f \in S^a(\mathbb{R}^d)$。

2.1.5. 空间 X_a 中拉普拉斯算子的点谱。 我们来看下面的命题，它是表述主要定理 2.3 的关键要素，因为它揭示了空间 X_a 中拉普拉斯算子的点谱，其中

$$X_a = \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} |\ |f(x)| \leq Me^{a|x|} \}.$$

对于固定的 $a > 0$。

命题　2.2. 设 f是 X_a中的非零函数，且满足 $\Delta f = \lambda^2 f$，则 $|\mathrm{Im}(\lambda)| \leq a$.

证明。 注意， f 是 Δ的特征函数，这意味着其径向化 Rf 也是 Δ的特征函数，因为 Δ 与径向化 R可交换。设 $Rf(x) = f_0(|x|)$，其中 f_0是定义在 $[0, \infty)$上的函数，则 f_0 满足

$$\frac{d^2 f_0}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{df_0}{dr} + \lambda^2 f_0 = 0. \tag{3}$$

作适当的变量替换，形式为 $f_0(r) = (i\lambda r)^{-\frac{d}{2}+1} u(i\lambda r)$，即可将 (3) 化为如下形式的修正贝塞尔方程

$$r^2 u'' + ru' - \left[r^2 + \left(\frac{d}{2} - 1 \right)^2 \right] u = 0$$

其通解可写为

$$u(r) = AI_\nu(r) + BK_\nu(r) \tag{4}$$

其中， I_ν 和 K_ν 是修正贝塞尔函数，$\nu = \frac{d}{2} - 1$ [更多详情请参阅 [6] 第223–226页]。现在， f_0 在 $r = 0$ 附近有界意味着 u 在 $r = 0$ 处有界，因此$B = 0$ 成立于（4）式中。于是

$$f_0(r) = A(i\lambda r)^{-\nu} I_\nu(i\lambda r).$$

利用 $I_\nu(r)$ 在 $r \to \infty$ 时的渐近行为，我们得到

$$f_0(r) = A(i\lambda r)^{-\nu} \frac{e^{(i\lambda r)}}{\sqrt{2\pi i\lambda r}}[1 + O(1/r)].$$

由于对 $r > 0$， $|f_0(r)| \leq Me^{ar}$，因此必有 $|\mathrm{Im}(\lambda)| \leq a$。

□

鉴于上述命题，可以得出，拉普拉斯算子在 X_a 上的点谱恰为 $\Lambda(\Omega_a)$，其中 Λ 表示映射 $\lambda \mapsto \lambda^2$，而 Ω_a 表示复条带

$$\{\lambda \in \mathbb{C} || \operatorname{Im}(\lambda)| \leq a\}.$$

2.2.拉普拉斯算子的指数型温和特征分布刻画。 在第2.1小节所定义的框架下，我们现在将提出主要结果，即刻画对应于任意复特征值的拉普拉斯算子的指数型温和特征分布。

回顾一下，对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$， $N(\lambda)$ 是抛物线 $\partial\Lambda(\Omega_{a_\lambda})$ 在点 λ^2 处所作外法线上的所有点的集合，其中 $a_\lambda = |\mathrm{Im}(\lambda)|$。采用这些记号，我们将陈述如下定理。

定理 2.3. 对于任意满足 $a = |\operatorname{Im}(\lambda_0)| \neq 0$且 $z_0 \in N(\lambda_0)$的 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，令 $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$为一列类型为 a 的双向无限指数型温和分布，并满足

(1) $(\Delta - z_0 I)T_k = AT_{k+1}$，其中某个 $A \in \mathbb{C}$ 非零；以及 *(2)* 在 $S^a(\mathbb{R}^d)$ 上存在一个半范数 γ 和一个常数 $M > 0$，使得对所有 $f \in S^a(\mathbb{R}^d)$ 以及所有 $k \in \mathbb{Z}$，均有 $|\langle T_k, f\rangle| \leq M\gamma(f)$。

于是，以下断言成立。

(a) 若 $|A| = |\lambda_0^2 - z_0|$，则 $\Delta T_0 = \lambda_0^2 T_0$。*(b)* 若 $|A| < |\lambda_0^2 - z_0|$，则对所有 $k \in \mathbb{Z}$，均有 $T_k = 0$。*(c)* 存在满足条件 *(1)* 和 *(2)* 的解，但当 $|A| > |\lambda_0^2 - z_0|$ 时，它们不是 Δ的特征分布。

证明。 （a）的证明。首先，我们假设 T_k 都是径向的。设 $|A| = |\lambda_0^2 - z_0|$ 和 λ_0^2 满足 $a := \mathrm{Im}(\lambda_0) > 0$。注意，对于 $\lambda \in \Omega_a$，有 $|\Lambda(\lambda) - z_0| \geq |\Lambda(\lambda_0) - z_0|$。我们注意到 $\mathcal{H}(\Delta T) = \lambda^2 \mathcal{H}T$。根据假设，我们得到 $(\Delta - z_0 I)^k T_0 = A^k T_k$，因此 $(\lambda^2 - z_0)^k \mathcal{H}T_0 = A^k \mathcal{H}T_k$。证明分为两个步骤。在步骤（1）中，我们将证明

$$(\lambda^2 - \lambda_0^2)^{N+1} \mathcal{H}T_0 = 0 \tag{5}$$

存在某个 $N \in \mathbb{Z}^+$，或者等价地，$\langle(\lambda^2 - \lambda_0^2)^{N+1}\mathcal{H}T_0, \phi\rangle = 0$ 对每个 $\phi \in H_e(\Omega_a)$ 都成立。因此，任取 $\phi \in H_e(\Omega_a)$，

$$\begin{aligned}
|\langle(\lambda^2 - \lambda_0^2)^{N+1}\mathcal{H}T_0, \phi\rangle| &= |\langle \mathcal{H}T_k, \left(\frac{A}{\lambda^2 - z_0}\right)^k (\lambda^2 - \lambda_0^2)^{N+1}\phi\rangle| \\
&= \left|\left\langle T_k, \mathcal{H}^{-1}\left(\left(\frac{A}{\lambda^2 - z_0}\right)^k (\lambda^2 - \lambda_0^2)^{N+1}\phi\right)\right\rangle\right| \\
&\leq M\gamma\left[\mathcal{H}^{-1}\left(\left(\frac{A}{\lambda^2 - z_0}\right)^k (\lambda^2 - \lambda_0^2)^{N+1}\phi\right)\right] \\
&\leq M'\mu\left[\left(\frac{A}{\lambda^2 - z_0}\right)^k (\lambda^2 - \lambda_0^2)^{N+1}\phi\right]
\end{aligned}$$

其中，半范数 μ 定义为

$$\mu(\phi) = \sup_{\lambda \in \Omega_a^+} \left|\frac{d^\tau}{d\lambda^\tau} P(\lambda)\phi(\lambda)\right|$$

对于某个偶多项式 $P(\lambda)$ 和偶数阶导数 τ，其中 $\Omega_a^+ = \{\lambda \in \Omega_a | \mathrm{Im}(\lambda) \geq 0\}$。令 $N = 6\tau + 1$ 为固定值。此后，我们将使用以下记号。令 F^k 表示该项:

$$\left| \frac{d^\tau}{d\lambda^\tau} P(\lambda) \left(\frac{A}{\lambda^2 - z_0} \right)^k (\lambda^2 - \lambda_0^2)^{N+1} \phi(\lambda) \right|$$

我们打算证明，当 $k \to \infty$ 时，$\sup_{\lambda \in \Omega_a^+} F^k \to 0$，。注意

$$\left| \frac{d^\tau}{d\lambda^\tau} P(\lambda) \left(\frac{A}{\lambda^2 - z_0} \right)^k (\lambda^2 - \lambda_0^2)^{N+1} \phi(\lambda) \right| = \sum_{\substack{l+m+n=\tau \\ l,m,n \in \mathbb{Z}^+}} C_{lmn} \frac{d^l}{d\lambda^l} \left(\frac{A}{\lambda^2 - z_0} \right)^k \times \frac{d^m}{d\lambda^m} (\lambda^2 - \lambda_0^2)^{N+1} \frac{d^n}{d\lambda^n} (P(\lambda)\phi).$$

利用 $\phi \in H_e(\Omega_a)$ 和 $\left| \frac{A}{\lambda^2 - z_0} \right| = \left| \frac{\lambda_0^2 - z_0}{\lambda^2 - z_0} \right| \leq 1$ 这些事实，对于 $\lambda \in \Omega_a^+$，我们可以得到以下两个不等式。

$$F^k(\lambda) \leq C_1 k^\tau \left| \frac{\lambda_0^2 - z_0}{\lambda^2 - z_0} \right|^k |\lambda^2 - \lambda_0^2|^{N+1-\tau} \tag{6}$$

and

$$F^k(\lambda) \leq C_2 k^\tau \left| \frac{\lambda_0^2 - z_0}{\lambda^2 - z_0} \right|^k \tag{7}$$

其中 C_1 和 C_2 为常数。现在我们将选择一个包含 λ_0 且位于 Ω_a^+ 中的紧连通邻域 $\mathcal{U}$，使得对于 $\lambda \notin \mathcal{U}$，有 $\left| \frac{\lambda_0^2 - z_0}{\lambda^2 - z_0} \right| < \frac{1}{2}$。由 (7) 可知，当 $k \to \infty$ 时，$F^k \to 0$ 在 $\Omega_a^+ \backslash \mathcal{U}$ 上一致成立。剩下要证明的是

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{U}} k^\tau \left| \frac{\lambda_0^2 - z_0}{\lambda^2 - z_0} \right|^k |\lambda^2 - \lambda_0^2|^{5\tau+2} \to 0,$$

如 $k \to \infty$。进一步阐述后，我们将看到

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{U}} k^\tau \left| \frac{\lambda_0^2 - z_0}{\lambda^2 - z_0} \right|^k |\lambda^2 - \lambda_0^2|^{5\tau+2} = \sup_{\lambda \in \mathcal{U}} k^\tau \left| \frac{\Lambda(\lambda_0) - z_0}{\Lambda(\lambda) - z_0} \right|^k |\Lambda(\lambda) - z_0 - (\Lambda(\lambda_0) - z_0)|^{5\tau+2} \tag{8}$$

由（8） 并且对图 2 的详细分析表明，我们只需证明 t

$$\sup_{z \in \Gamma} k^\tau \left| \frac{\beta}{z} \right|^k |\beta - z|^{5\tau+2} \to 0$$

其中，Γ 是包含 β 的紧区域，其边界由抛物线弧和垂直线构成，位于过 β 作出的切线且与原点相对的一侧。现在，通过施加适当的旋转，不妨设 β 位于正虚轴上。下面我们将证明，当 $k \to \infty$ 时，对于任意 $\eta > 0$ 和 $\delta > |\beta|$，有 $\sup_{z \in H} k^\tau \left| \frac{\beta}{z} \right|^k |\beta - z|^{5\tau+2} \to 0$，其中 $H = \{z \in \mathbb{C} | -\eta \leq \mathrm{Re}\, z \leq \eta,\ |\beta| \leq \mathrm{Im}\, z \leq \delta\}$。令 $V_k = \{z \in H |\ |\mathrm{Re}(z - \beta)| < k^{-\frac{1}{4}},\ |\mathrm{Im}(z - \beta)| < k^{-\frac{1}{4}}\}$，并令 $V_k^c = H \setminus V_k$。因此可以验证，如果 $z \in V_k^c$，，则 $|z| \geq (|\beta|^2 + k^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$。所以，对于 $z \in V_k^c$，我们有

$$\left| \frac{\beta}{z} \right| \leq \frac{|\beta|}{(|\beta|^2 + k^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \left(1 + \frac{c_1}{\sqrt{k}} \right)^{\frac{-1}{2}}$$

其中 $c_1 = |\beta|^{-2}$。现在利用 H 的紧致性，我们可以看出存在某个常数 c_3,

$$\sup_{z \in V_k^c} k^\tau \left| \frac{\beta}{z} \right|^k |\beta - z|^{5\tau+2} \leq c_3 \left(1 + \frac{c_1}{\sqrt{k}} \right)^{\frac{-k}{2}} \tag{9}$$

如果 $z \in V_k$，那么 $|\text{Re}(z-\beta)| < k^{-\frac{1}{4}}$ 且 $|\text{Im}(z-\beta)| < k^{-\frac{1}{4}}$。因此，我们得到一个常数 c_4，使得

$$\sup_{z\in V_k} k^\tau \left|\frac{\beta}{z}\right|^k |\beta - z|^{5\tau+2} \leq c_4 k^\tau k^{\frac{-(5\tau+2)}{4}} = c_4 k^{\frac{-(\tau+2)}{4}} \tag{10}$$

上述不等式（9）和（10）表明，当 $k \to \infty$ 时 $\sup_{z\in H} k^\tau |\frac{\beta}{z}|^k |\beta - z|^{5\tau+2} \to 0$。因此，我们证明了 $F_k(\lambda) \to 0$ 一致地成立，当 $k \to \infty$ 时。

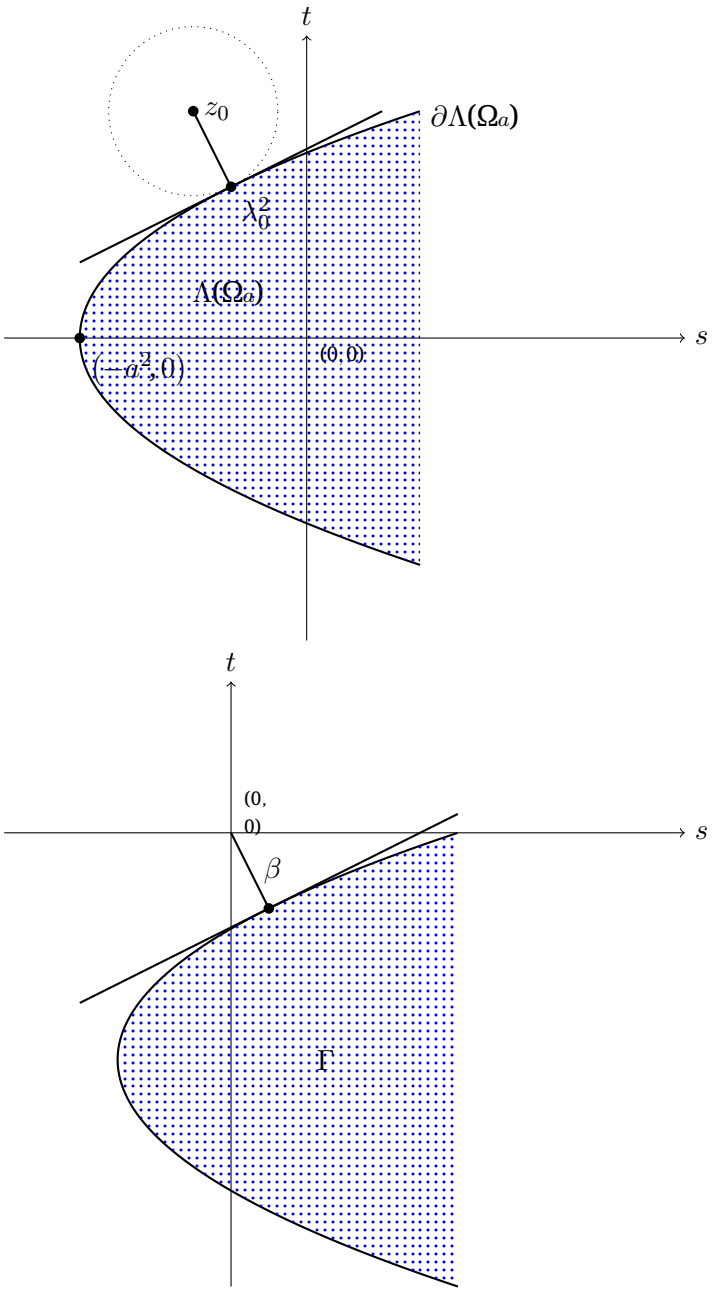


图 2。 Δ 在 X_a 上的点谱及其平移 z_0。

步骤2：现在我们将证明 $N = 0$ 使得 $(\lambda^2 - \lambda_0^2)S_0 = 0$，或者等价地 $(\lambda^2 - z_0)S_0 = (\lambda_0^2 - z_0)S_0$，其中 $S_0 = \mathcal{H}T_0$。由 (5) 可得

$$Span\{S_0, S_1, \ldots\} = Span\{S_0, (\lambda^2 - z_0)S_0, \ldots, (\lambda^2 - z_0)^N S_0\} = Span\{S_0, S_1, \ldots, S_N\}$$

假设 $(\lambda^2-\lambda_0^2)S_0\neq 0$。令 k_0 为满足 $(\lambda^2-\lambda_0^2)^{k_0}S_0\neq 0$ 的最大正整数。则 $k_0\leq N$。令 $S=(\lambda^2-\lambda_0^2)^{k_0-1}S_0\in Span\{S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_N\}$。因此，我们假设 $S=\sum_{j=1}^N a_jS_j$。于是

$$(\lambda^2-\lambda_0^2)^2S=0\quad\text{and}\quad(\lambda^2-\lambda_0^2)S\neq 0. \tag{11}$$

现在，利用 (11) 和二项式展开，我们得到

$$(\lambda^2-z_0)^kS=((\lambda^2-\lambda_0^2)+(\lambda_0^2-z_0))^kS=(\lambda_0^2-z_0)^kS+k(\lambda_0^2-z_0)^{k-1}(\lambda^2-\lambda_0^2)S.$$

因此，对任意 $\phi\in H_e(\Omega_a)$,

$$|\langle(\lambda^2-\lambda_0^2)S,\phi\rangle|\leq\frac{1}{k(\lambda_0^2-z_0)^{k-1}}|\langle(\lambda^2-z_0)^kS,\phi\rangle|+\frac{1}{k}(\lambda_0^2-z_0)|\langle S,\phi\rangle|. \tag{12}$$

考虑

$$\begin{aligned}|\langle(\lambda^2-z_0)^kS,\phi\rangle|&=\left|\left\langle(\lambda^2-z_0)^k\sum_{j=0}^N a_jS_j,\phi\right\rangle\right|=\left|\left\langle\sum_{j=0}^N a_jA^kS_{j+k},\phi\right\rangle\right|\\&=|A|^k\left|\left\langle\sum_{j=0}^N a_jS_{j+k},\phi\right\rangle\right|\leq|\lambda_0^2-z_0|^k\sum_{j=0}^N|a_j|\,|\langle S_{j+k},\phi\rangle|\\&\leq M|\lambda_0^2-z_0|^k\mu(\phi)\sum_{j=0}^N|a_j|.\end{aligned}$$

因此，(12) 和上述不等式意味着，

$$|\langle(\lambda^2-\lambda_0^2)S,\phi\rangle|\leq\frac{M}{k}(\lambda_0^2-z_0)\mu(\phi)\sum_{j=0}^N|a_j|+\frac{1}{k}(\lambda_0^2-z_0)|\langle S,\phi\rangle|,$$

由于当 $k\to\infty$ 时右侧趋于 0，我们得到 $(\lambda^2-\lambda_0^2)^{k_0}S=0$，这与 (11) 中关于 k_0 的假设矛盾。这证明了 $N=0$，因此我们得到 $(\lambda^2-\lambda_0^2)S_0=0$。最后，由球面傅里叶反演可得 $\Delta T_0=\lambda_0^2T_0$。

接下来，我们将证明当 T_k为非径向时的定理。首先我们将看到，给定任意一列满足定理所述条件的非径向指数型缓增分布 T_k，则对于任意 $y\in\mathbb{R}^d$，相应的径向分布序列 $R\ell_yT_k$ 也满足假设。上述观察直接源于 Δ 与径向化和平移可交换这一事实，因此我们有 $\Delta R(\ell_yT_k)=AR(\ell_yT_{k+1})$。还需证明，对于定理假设中的半范数 γ of $S^a(\mathbb{R}^d)$ 以及 $\psi_1\in S^a_{rad}(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle R(\ell_yT_k),\psi_1\rangle|\leq C_yM\gamma(\psi_1).$$

为此，考虑任意的 $\psi\in S^a(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}\gamma(\ell_y\psi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|)^me^{a|x|}D^\alpha\psi(x-y)&\leq\sup_{z\in\mathbb{R}^d}(1+|y|+|z|)^me^{a(|y|+|z|)}D^\alpha\psi(z)\\&\leq(1+|y|)^me^{a|y|}\sup_{z\in\mathbb{R}^d}(1+|z|)^me^{a|z|}D^\alpha\psi(z)\\&\leq C_y\gamma(\psi)\end{aligned}$$

由于对任意 $\psi\in S^a(\mathbb{R}^d)$,都有 $|\langle T_k,\psi\rangle|\leq M\gamma(\psi)$，因此对任意 $\psi_1\in S^a_{rad}(\mathbb{R}^d)$

$|\langle R(\ell_yT_k)\ \psi_1\rangle|=|\langle\ell_yT_k,\psi_1\rangle|=|\langle T_k,\ell_{-y}\psi_1\rangle|\leq M\gamma(\ell_{-y}\psi_1)\ \leq C_{y^{-1}}M\gamma(\psi_1)$。由径向分布的已证结果可知，对每个 $y\in\mathbb{R}^d$，都有 $\Delta R(\ell_yT_0)=\lambda_0^2R(\ell_yT_0)$。再次利用 Δ 与径向化和平移可交换这一事实，对每个 $y\in\mathbb{R}^d$，都有 $R\ell_y(\Delta T_0)=R\ell_y(\lambda_0^2T_0)$。

只需证明，对于任意 $T\in S^a(\mathbb{R}^d)'$，若对所有 $x\in\mathbb{R}^d$ 都有 $R(\ell_xT)=0$，则 T作为分布等于零。事实上，若对所有 $x\in\mathbb{R}^d$ 都有 $R(\ell_xT)=0$，那么对所有 $t>0$ 都有 $\langle\ell_xT,h_t\rangle=0$，其中$h_t$表示热核，它是由 $h_t(x)=\frac{1}{(4\pi t)_{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ 给出的径向函数，其中~~$t>0$~~。

也就是说， $T*h_t \equiv 0$. 但根据分布的意义， $T*h_t \to T$ 当 $t \to 0$ 时成立。因此 $T=0$，从而 $\Delta T_0 = \lambda_0^2 T_0$。

（b）部分的证明。令 $|A| < |\lambda_0^2 - z_0|$。我们已经有 $|\lambda^2 - z_0| \geq |\lambda_0^2 - z_0|$，对每个 $\lambda \in \Omega_a$。此外，对于 $\phi \in H_e(\Omega_a)$，我们还有

$$|\langle \mathcal{H}T_0, \phi\rangle| \leq M\mu\left[\left(\frac{A}{\lambda^2 - z_0}\right)^k \phi\right] \tag{13}$$

但是，对于 $\lambda \in \Omega_a$，

$$\left|\frac{A}{\lambda^2 - z_0}\right| = \left|\frac{A}{\lambda_0^2 - z_0}\right|\left|\frac{\lambda_0^2 - z_0}{\lambda^2 - z_0}\right| < 1$$

因此， $\mu\left[\left(\frac{A}{\lambda^2 - z_0}\right)^k \phi\right] \to 0$，由于 $k \to \infty$，这意味着 $|\langle \mathcal{H}T_0, \phi\rangle| = 0$，对每个 $\phi \in H_e(\Omega_a)$ 均成立。因此 $T_0 = 0$.

（c）部分的证明。考虑 $|A| > |\lambda_0^2 - z_0|$。从几何上可以看出，存在互不相同的 λ'， $\lambda'' \in \Lambda(\Omega_a)$，使得 $|(\lambda')^2 - z_0| = |A| = |(\lambda'')^2 - z_0|$. 现在 $(\lambda')^2 - z_0 = Ae^{i\theta_1}$ 且 $(\lambda'')^2 - z_0 = Ae^{i\theta_2}$ 对于 θ_1， $\theta_2 \in \mathbb{R}$，其中 $\theta_1 \neq \theta_2$。定义

$$T_k = e^{ik\theta_1}\phi_{\lambda'} + e^{ik\theta_2}\phi_{\lambda''}$$

对于 $k \in \mathbb{Z}^+$.，例行计算表明， $T_k \in S^a(\mathbb{R}^d)'$，且 T_k 满足主要定理 2.3 的假设，但 T_0 不是 Δ的特征分布。□

2.3. **定理 1.5 的证明**。在刻画了拉普拉斯算子的特征分布之后，只要我们证明这样的事实，即在 $\mathbb{R}^d$ 上满足性质 $|f(x)| \leq Me^{a|x|}$ 的函数f（其中 $M > 0$为常数，且对每个 $x \in \mathbb{R}^d$均成立）本身是类型为 a的指数型温和分布，那么定理 1.5 的证明就完成了。具体如下。

对于 $g \in S^a(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
|\langle f, g\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx\right| \\
&\leq M\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{(1+|x|)^m e^{a|x|}|g(x)|}{(1+|x|)^m}dx\right) \\
&\leq M'\gamma_{m,0}(g)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|x|)^m}dx\Big).
\end{aligned}$$

上式最后一行中的积分在 $m \geq \frac{d}{2}$ 足够大时是有限的。因此， $f \in S^a(\mathbb{R}^d)'$, 从而定理 1.5 是定理 2.3 的推论。

3. Roe's characterization of exponential function

本节将在我们于第 2 节所确立的相同框架下，证明具有指数增长的普通导数 $\frac{d}{dx}$ 的特征函数的刻画1.6。

现在，为了证明定理 1.6，我们将采用证明定理 1.5 时所用的相同策略。鉴于图 3 所示的 $\frac{d}{dx}$ 在 X_a 上点谱的几何形态，我们首先将为下文给出的、 a 在 $\mathbb{R}$ 上的指数型温和分布，表述定理 1.6 的一个推广版本。

定理 3.1。对于任意满足 $a = |\mathrm{Im}(\lambda_0)| \neq 0$ 的 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，设 $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 a 在 $\mathbb{R}$ 上的双向无限序列，且其中各项均为指数型温和分布，并满足

(1) 存在非零的 $A \in \mathbb{C}$ 和 $\alpha > 0$，使得 $\begin{cases} (\frac{d}{dx} - i\lambda_0 + \alpha)T_k = AT_{k+1}, & \text{若 } \mathrm{Im}(\lambda_0) > 0; \\ (\frac{d}{dx} - i\lambda_0 - \alpha)T_k = AT_{k+1}, & \text{若 } \mathrm{Im}(\lambda_0) < 0; \end{cases}$ *(2)* 在 $S^a(\mathbb{R})$ 上存在一个半范数 γ 和一个常数 $M > 0$，使得对所有 $f \in S^a(\mathbb{R})$ 以及所有 $k \in \mathbb{Z}$，均有 $|\langle T_k, f\rangle| \leq M\gamma(f)$。

那么，以下断言成立。

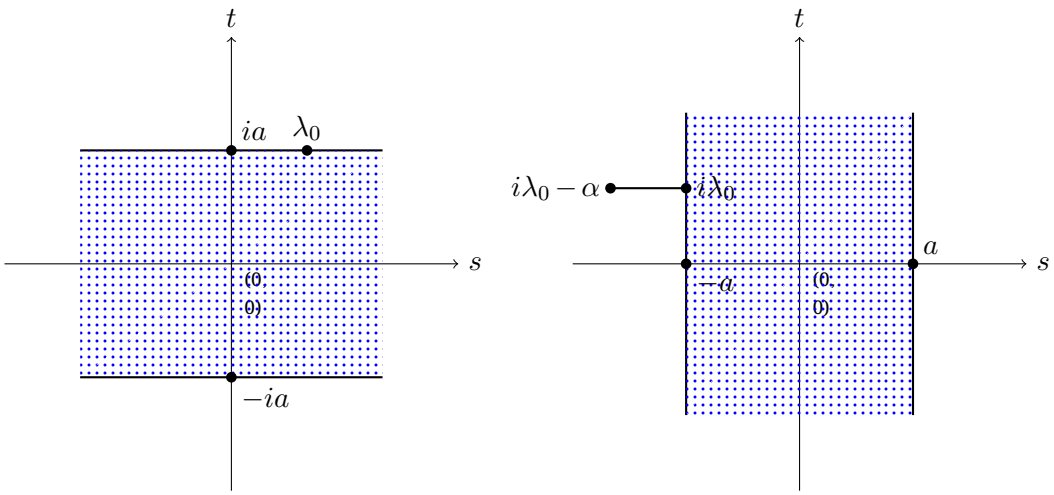


图 3. 带状区域 Ω_a 以及 X_a上的 $\frac{d}{dx}$ 点谱。

(a) 若 $|A|=\alpha$，则 $\frac{d}{dx}T_0 = i\lambda_0 T_0$。**(b)** 若 $|A|<\alpha$，则对所有 $k\in\mathbb{Z}$，$T_k = 0$。**(c)** 存在满足条件 **(1)** 和 **(2)** 的解，但当 $|A|>\alpha$ 时，它们不是 $\frac{d}{dx}$ 的本征分布。

为简洁起见，我们仅给出上述定理证明的前几个步骤，因为其论证思路与定理 2.3 的证明相同。

证明。（a）部分。首先假设分布$\{T_k\}$均为径向的。令 $|A|=|\alpha|$ 和 $a=\mathrm{Im}(\lambda_0)>0$。为了证明 $\frac{d}{dx}T_0 = i\lambda_0 T_0$，我们只需证明 $(i\lambda - i\lambda_0)\mathcal{H}T_0 = 0$。因此，首先必须证明

$$(i\lambda - i\lambda_0)^{N+1}\mathcal{H}T_0 = 0. \tag{14}$$

容易验证，对于任意 $\phi\in H_e(\Omega_a)$，我们有

$$\langle (i\lambda - i\lambda_0)^{N+1}\mathcal{H}T_0, \phi\rangle \le M\mu\left[\left(\frac{A}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right)^k (\lambda-\lambda_0)^{N+1}\phi\right]$$

其中，μ 是由 $\mu(\phi)=\sup_{\lambda\in\Omega_a}|\frac{d^\tau}{d\lambda^\tau}P(\lambda)\phi(\lambda)|$ 定义的半范数，其中某个多项式 $P(\lambda)$。现在，对于固定的 $N=6\tau+1$，记

$$F^k(\lambda) = \left|\frac{d^\tau}{d\lambda^\tau}P(\lambda)\left(\frac{A}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right)^k(\lambda-\lambda_0)^{N+1}\phi\right|.$$

我们的目标是证明，当 $k\to\infty$ 时，$\sup_{\lambda\in\Omega_a}F^k(\lambda)\to 0$。注意

$$\frac{d^\tau}{d\lambda^\tau}\left(P(\lambda)\left(\frac{A}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right)^k(\lambda-\lambda_0)^{N+1}\phi\right) = \sum_{l+m+n=\tau} C_{lmn}\frac{d^l}{d\lambda^l}\left(\frac{A}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right)^k \times \frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda-\lambda_0)^{N+1}\frac{d^n}{d\lambda^n}(P(\lambda)\phi) \tag{15}$$

利用 $\phi\in H_e(\Omega_a)$ 和 $\left|\frac{A}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right| \le 1$（对于 $\lambda\in\Omega_a$）这一事实，我们得到以下两个不等式，其中 C_1 和 C_2 是一些任意常数。

$$F^k(\lambda) \le C_1 k^\tau \left|\frac{\alpha}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right|^k |\lambda-\lambda_0|^{N+1-\tau} \tag{16}$$

$$F^k(\lambda) \le C_2 k^\tau \left|\frac{\alpha}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right|^k \tag{17}$$

现在考虑 Ω_a 中 λ_0 的一个紧连通邻域 $\mathcal{U}$，使得若 $\lambda \notin \mathcal{U}$，则 $\left|\frac{\alpha}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right| < \frac{1}{2}$。由方程 17 可知，$F^k(\lambda) \to 0$ 在 $\Omega_a \setminus \mathcal{U}$ 中一致成立。接下来我们将证明，当 $k \to \infty$ 时，$\sup_{\lambda\in\mathcal{U}} k^\tau \left|\frac{\alpha}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right|^k |\lambda-\lambda_0|^{5\tau+2} \to 0$。由于

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{U}} k^\tau \left|\frac{\alpha}{\lambda-\lambda_0-i\alpha}\right|^k |\lambda-\lambda_0|^{5\tau+2} = \sup_{\lambda\in\mathcal{U}} k^\tau \left|\frac{\lambda_0-(\lambda_0+i\alpha)}{\lambda-(\lambda_0+i\alpha)}\right|^k |[\lambda-(\lambda_0+i\alpha)] - [\lambda_0-(\lambda_0+i\alpha)]|^{5\tau+2},$$

这等价于证明

$$\sup_{z\in\Omega} k^\tau \left|\frac{\beta}{z}\right|^k |\beta-z|^{5\tau+2} \to 0,$$

其中 Ω 是一个包含 β 的矩形紧区域。

剩余的 t 证明（包括 (b) 部分和 (c) 部分）与定理的证明类似 -

rem2.3. □

3.1. 定理 1.6 的证明。 既然我们已经证明，满足以下条件的 $\mathbb{R}$ 上任意函数：$|f(x)| \le Me^{a|x|}$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均成立，都是 $\mathbb{R}$ 上类型为 a 的指数型温和分布，那么显然定理 1.6 是定理 3.1 的直接推论。

Acknowledgment

第一作者谨此感谢印度的 UGC-CSIR 为完成这项工作提供奖学金。

参考文献

[1] Y. Ben Natan, Y. Weit, 关于 上可积调和函数，《函数分析杂志》，150，1997，471-477。[2] Howard, Ralph 和 Reese, Margaret，通过有界性条件刻画特征函数，《加拿大数学通报》，35，1992，204–213。[3] Howard, Ralph，关于 *Roe* 对正弦函数的刻画的注记，《美国数学会会刊》，105，1989，658–663。[4] Kumar, Pratyoosh、Ray, Swagato K. 和 Sarkar, Rudra P.，拉普拉斯-贝尔特拉米算子的几乎 L^p-特征函数的刻画，《美国数学会汇刊》，366，2014，3191–3225。[5] Naik, M.、Sarkar, R. P.，利用傅里叶乘子刻画拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征函数。《函数分析杂志》279，2020。[6] A. V. Nikiforov 和 V.B. Uvarov，数理物理特殊函数：统一导论及其应用，Birkhäuser，1988。[7] Roe, J.，对正弦函数的一种刻画，《剑桥哲学学会数学会刊》，87，1980，69–73。[8] Strichartz, Robert S.，通过有界性条件刻画拉普拉斯算子的特征函数，《美国数学会汇刊》，338，1993年，971–979。

（Basil Paul）BITS Pilani K K Birla Goa 校区数学系，Zuarinagar，南果阿，403 726，果阿，印度电子邮箱：basilpaul9192@gmail.com（Pradeep B.）BITS Pilani K K Birla Goa 校区数学系，Zuarinagar，南果阿，403 726，果阿，印度电子邮箱：pradeepb@goa.bits-pilani.ac.in