arXiv:2601.13030v1 [math.LO] 19 Jan 2026

# 完全轨道等价关系与非普适波兰群

LONGYUN DING、RUIWEN LI 和 BO PENG

Abstract. 我们证明，非泛波兰群可以诱导出完备的轨道等价关系，从而回答了 Sabok 在 [4]提出的一个问题。

## 1. Introduction

设 $G$ 是一个以博雷尔方式作用于波兰空间上的波兰群。设 $E_G^X$ 是该作用所诱导的**轨道等价关系** 。换言之，对于 $x,\ y \in X$,

$$xE_G^X y \ \Leftrightarrow\ \exists g \in G\ gx = y.$$

设 $E$ 和 $F$ 分别是波兰空间 $X$ 和 $Y$ 上的两个等价关系。若从 $X$ 到 $Y$ 的博雷尔函数满足：对于任意$x_1,\ x_2 \in X$，都有

$$x_1 E x_2 \text{ if and only if } f(x_1) F f(x_2).$$

我们称 $E$ 可**博雷尔约化**到 $F$，如果存在从 $E$ 到 $F$ 的博雷尔约化，并记作 $E \leq_B F$。

自然会有人问，波兰群 $G$ 的结构与其所诱导的等价关系的复杂度之间有什么联系。当 $G$ 可数时，这种联系已得到广泛研究。例如，若 $G = \mathbb{Z}$，则所有由$G$ 诱导的作用都是超有限的。Gao 和 Jackson [6] 取得了一项重要突破，证明所有由可数阿贝尔群诱导的作用都是超有限的。Weiss 猜想，超有限性适用于所有可数可 amen 群作用。迄今为止，这一猜想仍未解决。

对于每个波兰群 $G$，Becker 和 Kechris [5, 定理 3.3.4] 证明，存在一个由 $G$诱导的最复杂的轨道等价关系，称为**极大 $G$作用**。换言之，存在一个 $G$-作用，使得所有 $G$-作用都可博雷尔约化到它。因此，关于波兰群与其作用之间联系的问题可以改述如下：给定一个波兰群 $G$，它的极大作用在复杂度层级中的位置是什么?

若所有波兰群都能连续嵌入为 $G$的闭子群，则波兰群 $G$ 称为**泛**。如果等价关系 $E$ 属于等价关系类 $\mathcal{C}$，且 $E$ 属于 $\mathcal{C}$，并且 $\mathcal{C}$ 中的所有等价关系都可以博雷尔归约到 $E$，则称等价关系 $E$ 在类 $\mathcal{C}$ 中是**完备**的。完全轨道等价关系确实存在。事实上，根据 Mackey-Hjorth 扩张定理 [5, 定理 3.52]，任意泛波兰群的最大作用都是完全轨道等价关系。在拓扑学和 $C^*$-代数中也有自然的例子（例如参见 [9], [13]）。

自然会有人想问：轨道等价关系的完备性与诱导该等价关系的群的结构之间是否存在联系。

本文探讨 Sabok 在 [4] 中提出的以下问题:

**问题 1.1.** ([4]) 是否存在一个非泛波兰群，它所诱导的轨道等价关系是完备的?

我们肯定地回答这个问题,

**定理 1.2.** 存在一个非泛波兰群，它所诱导的轨道等价关系是完备的。

在 [1], 中，Ding 找到了一个满射普适波兰群的例子。我们注意到，这样的群可以诱导完备的轨道等价关系，并证明该群不是普适的。事实上，Sabok 在 [10], 中提到，一个满射普适但非普适的波兰群可以作为问题 [1] 的例子，但没有给出证明。然而，要证明存在一个非普适的满射普适群，仍需提供证明；在随后的综述 [4] 中，问题 1.1 被列为一个未解问题。

## 2. Preliminaries

本节讨论由 [1] 和 [3] 构造满射普适波兰群的方法及相关结果。

设 $X$ 为非空集合，令 $X^{-1}=\{x^{-1}:\ x\in X\}$ 是 $X$ 的一个不交副本，取 $e\notin X\cup X^{-1}$。记 $X\cup X^{-1}\cup\{e\}$ 为 $X$。对于 $\overline{x}\in X$，$(x^{-1})^{-1}$ 表示 $x$，而 $e^{-1}$ 表示 $e$。

我们将 $X$ 上非空字的集合记为 $W(X)$，也就是说，$W(X)=X^{<\omega}\setminus\{\emptyset\}$。对于 $\overline{w}\in W(X)$，$|w|$ 是 $w$ 的长度。若一个字 $w\in W(X)$ 满足：$w=e$ 或存在 $w=x_0\cdots x_n$ 使得 $n\geq 0$，并且对每个 $0\leq i\leq n$ 都有 $x_i\neq e$，对每个 $0\leq i\leq n-1$ 都有 $x_i\neq x_{i+1}^{-1}$，则称其为不可约字。我们将 $W(X)$ 中不可约字的集合记为 $F(X)$。对于字 $w\in W(X)$，$w$ 的约化字是通过以下步骤得到的不可约字：反复将 $w$ 中出现的任意 $xx^{-1}$ 替换为 $e$，其中 $x\in X$；并从任何形如 $w_1ew_2$ 的项中消去 $e$，其中 $w_1$ 和 $w_2$ 至少有一个非空。注意，$w\in W(X)$ 的约化字与消去 $e$ 或将 $xx^{-1}$ 替换为 $e$ 的顺序无关。将 $w\in W(X)$ 的约化字记为 $w'$，则 $w'\in F(X)$。对于 $u$、$v\in F(X)$，令 $u\cdot v=(u^\frown v)'$，则 $(F(X),\cdot)$ 是一个群，称为 $X$ 上的自由群。$F(X)$ 的中性元是 $e$。

为了在 $F(X)$ 上定义一个度量，首先假设 $X$ 是一个度量空间，其度量为 $d\leq 1$，也就是说，对于每个 $x,\ y\in X$，都有 $d(x,\ y)\leq 1$。我们可以通过定义将 $d$ 扩展到 $\overline{X}$

$$d(x^{-1},y^{-1})=d(x,y),\quad d(x^{-1},y)=d(x,e)=d(x^{-1},e)=1$$

对于每个 $x,\ y\in X$ 都成立。接下来，要在 $F(X)$ 上定义一个度量，我们还需要一些概念。

**定义 2.1**。（Ding-Gao，[2], [5, 定义 2.3。2]）对于 $m,\ n\in\mathbb{N}$ 和 $m\leq n$，$\{m,\dots,n\}$ 上的一个双射 $\theta$ 若满足以下条件，则称为**匹配**

(1) $\theta^2=\mathrm{id}$；(2) 不存在满足 $i<j<\theta(i)<\theta(j)$ 的 $i,\ j\in\{m,\dots,n\}$。

[1]事实上，作者是在这项工作完成后才发现这一点的

**定义 2.2** (Ding-Gao, [3])。令 $\mathbb{R}_+$ 为非负实数集。函数 $\Gamma: X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是 $X$ 上的**尺度**，若对任意 $x \in X$和 $r \in \mathbb{R}_+$，以下条件成立

(i) $\Gamma(e,r) = r$， $\Gamma(x,r) \geq r$；(ii) $\Gamma(x,r) = 0$ 当且仅当 $r = 0$；(iii) $\Gamma(x, \cdot)$ 关于第二个变量是单调递增函数；(iv) $\lim_{r\to 0}\Gamma(x,r) = 0$。

如果对任意 $x \in X$ 和 $r \in \mathbb{R}_+$ 都取 $\Gamma(x,r) = r$，那么 $\Gamma$ 是 $X$ 上的一个尺度，我们称其为 $X$ 上的**平凡**尺度。

设 $G$ 是一个拓扑群，并带有相容的左不变度量 $d_G$。定义$\Gamma_G$： $G \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，其定义为

$$\Gamma_G(g,r) = \max\{r, \sup\{d_G(1_G, g^{-1}hg) : d_G(1_G,h) \leq r\}\}.$$

容易看出， $\Gamma_G$ 满足尺度定义中的条件 (i)–(iii)，而条件 (iv) 源于 $d_G$ 的相容性。我们也将 $\Gamma_G$ **称为 上的尺度**。

于是，给定 $X$ 上的一个尺度 $\Gamma$，我们将在 $F(X)$ 上定义一个与 $\Gamma$ 相关的度量。

**定义 2.3** （Ding-Gao， [3]）。设 $\Gamma$ 是 $X$ 上的一个尺度。对于带有 $|w| = l+1$ 且 $\theta$ 是 $\{0,\ldots,l\}$ 上的一个匹配的 $l \in \mathbb{N}$、 $w \in W$（$X$），按 $l$ 归纳定义 $N_\Gamma^\theta$（$w$）如下:

（0）对于 $l = 0$，令 $w = x$ 并定义 $N_\Gamma^\theta$（$w$） $= d$（$e$， $x$）；（1）如果 $l > 0$ 且 $\theta$（0） $= k < l$，令 $\theta_1 = \theta \restriction \{0,\ldots,k\}$、 $\theta_2 = \theta \restriction \{k+1,\ldots,l\}$ 和 $w = w_1^\frown w_2$，其中 $|w_1| = k+1$；定义

$$N_\Gamma^\theta(w) = N_\Gamma^{\theta_1}(w_1) + N_\Gamma^{\theta_2}(w_2);$$

（2）如果 $l > 0$ 且 $\theta$（0） $= l$，令 $\theta_1 = \theta \restriction \{1,\ldots,l-1\}$ 和 $w = x^{-1}w_1y$，其中 $x$， $y \in X$；则 $|w_1| = l-1$。定义

$$N_\Gamma^\theta(w) = d(x,y) + \max\{\Gamma(x, N_\Gamma^{\theta_1}(w_1)), \Gamma(y, N_\Gamma^{\theta_1}(w_1))\}.$$

那么我们取

$$N_\Gamma(w) = \inf\{N_\Gamma^\theta(w^*) : (w^*)' = w,\ \theta\ is\ a\ match\}$$

对于 $w \in F(X)$，我们取

$$\delta_\Gamma(u,v) = N_\Gamma(u^{-1}v)$$

对于 $u$， $v \in F(X)$。

对于度量空间 $(X,\ d)$ 以及 $X$ 上的平凡尺度 $\Gamma_0$，我们称 $F(X)$ 上的 $\delta_{\Gamma_0}$ **格雷夫度量**。

对于 $W(X)$ 中的 $u = x_0\cdots x_n$ 和 $v = y_0\cdots y_n$，令

$$\rho(u,v) = \Sigma_{0\leq i\leq n} d(x_i,y_i).$$

给定 $w = x_0\cdots x_n \in W(X)$ 以及 $\{0,\cdots,n\}$ 上的一个匹配 $\theta$，令

$$x_i^\theta = \begin{cases} x_i, & \theta(i) > i. \\ e, & \theta(i) = i. \\ x_{\theta(i)}^{-1}, & \theta(i) < i. \end{cases}$$

以及 $w^\theta = x_0^\theta\cdots x_n^\theta$。那么我们有

**定理 2.4**。(Ding-Gao, [5, 定理 2.6。5]) 设（$X$, $d$）是一个度量空间, $\Gamma_0$ 是 $X$上的平凡尺度，那么

$$\delta_{\Gamma_0}(w,e)=\min\{\rho(w,w^\theta):\ \theta\ is\ a\ match\}$$

对每个 $w\in F(X)$。

于是我们得到以下定理: [3]

**定理 2.5**。(Ding-Gao, [2, 定理 3。9]) 设$(X,d)$ 是一个度量空间, $\Gamma$ 是 $X$ 上的一个尺度，则 $d_\Gamma$ 是 $\overline{F(X)}$ 上的左不变度量，并且扩展了 $d$。此外, $F(X)$ 在由 $\delta_\Gamma$ 诱导的拓扑下是一个拓扑群。

将带度量 $\delta_\Gamma$ 的拓扑群 $F(X)$ 记作 $F_\Gamma(X)$。设 $\delta_\Gamma^{-1}(u,v)=\delta_\Gamma(u^{-1},v^{-1})$, 其中 $u,v\in F(X)$, 且 $d_\Gamma=\delta_\Gamma^{-1}+\delta_\Gamma$, 则 $d_\Gamma$是拓扑群 $F_\Gamma(X)$ 上的相容度量。($F_\Gamma(X)$ $d_\Gamma$) 的完备化是一个波兰群，记作 $F_\Gamma(X)$。 [1] 中的主定理指出，这种形式的群可以是一个满射普适群。

我们将贝尔空间 $\omega^\omega$ 记为 $\mathcal{N}$, $d$ 是 $\mathcal{N}$ 上的经典度量，使得$d(x,\ y)=\max\{2^{-n}:\ x(n)\neq y(n)\}$。对于 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{N}_n=\{x\in\mathcal{N}:\forall m\geq n, x(m)=0\},$$

并且 $\mathcal{N}_\omega=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{N}_n$。对于 $x\in\mathcal{N}$, 令

$$\pi_n(x)(m)=\begin{cases}x(m), & m<n.\\ 0, & m\geq n.\end{cases}$$

那么, $\mathcal{N}$ 上的尺度 $\overline{\Gamma}$ 称为**正则的**，如果对于每个 $\overline{x}\in\mathcal{N}$、 $r\in\mathbb{R}_+$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 都有$\Gamma(x,\ r)\geq\Gamma(\pi_n(x)\ r)$。

**定理 2.6**。(Ding-Gao, [1, 例 4。9]) 存在 $\mathcal{N}$ 上的一个正则尺度 $\Gamma$ , 使得 $F_\Gamma(\overline{\mathcal{N}})$ 是一个满射普适波兰群。

[3] 中的下一个定理告诉我们，如何构造一个从$F_\Gamma(X)$到另一个拓扑群的连续同态。

**定理 2.7**。(Ding-Gao, [2, 引理 3。7]) 设 $G$ 是一个拓扑群, $d_G$ 是 $G$上的一个相容的左不变度量。设 $X$上的一个尺度为 $\Gamma$ 。设 $\varphi$: $X\to\overline{G}$ 是一个函数。假设对于任意 $x$、$y\in X$ 和 $r\in\mathbb{R}_+$:

(1) $\varphi(e)=1_G$; $\varphi(x^{-1})=\varphi(x)^{-1}$;

(2) $d_G(\varphi(x)\ \varphi(y))\leq d(x,\ y)$; 以及

(3) $\Gamma_G(\varphi(x)\ r)\leq\Gamma(x,\ r)$。

然后, $\varphi$ 可以唯一延拓为连续群同态 $\Phi$: $F(X)\to G$ , 使得对于任意 $w\in F(X)$

$$d_G(\Phi(w),1_G)\leq N_\Gamma(w)$$

## 3. Proof of the Main Theorem

根据 [1],, 我们可以在 $\mathcal{N}$上固定一个正则尺度 $\Gamma$, 使得 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 是一个满射普适波兰群，并且对于每个 $x\in\mathcal{N}$, $\Gamma(x,\ \cdot)$ 都是连续的。回顾一下, $d_\Gamma=\delta_\Gamma+\delta_\Gamma^{-1}$ 在 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 上；滥用记号，我们也将其在$F_\Gamma(\mathcal{N})$上的延拓记为 $d_\Gamma$。

**引理 3.1.** 每个满射普适波兰群都会诱导一个完备轨道等价关系。

证明。设 $E$ 是由 $H$ 在 $X$ 上的连续群作用所诱导的完备轨道等价关系，其中 $H$ 是一个波兰群， $X$ 是一个波兰空间。对于每个满射普适波兰群 $G$，取 $\pi: G \to X$ 为一个连续满射同态。对于 $g \in G$ 和 $x \in X$，令 $g \cdot x = \pi(g) \cdot x$，这定义了 $G$ 在 $X$ 上的连续群作用，并诱导出 $E$。□

本节余下部分将证明，定理 2.6 中的群不是普适的。 [1]提到，该群与$S_\infty$的一个 $\mathbf{\Pi}^0_3$ 子群抽象同构，但我们将验证它连续嵌入于一个全不连通拓扑群。

**引理 3.2**。对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $F(\mathcal{N}_n)$ 都是 $F_\Gamma(\mathcal{N})$的离散闭子群。

证明。令 $\Gamma_0$ 为 $\mathcal{N}_n$ 上的平凡尺度。注意，对于每个 $x \neq y \in \mathcal{N}_n$，都有$d(x,y) \geq 2^{-n}$。因此，对于 $u \neq v \in F(\mathcal{N}_n)$，有 $u^{-1}v \neq e$，进而对于每个匹配 $\theta$，都有$\rho(u^{-1}v, (u^{-1}v)^\theta) \geq 2^{-n}$。于是，根据定理 2.4，$\delta_{\Gamma_0}(u,v) = \delta_{\Gamma_0}(u^{-1}v, e) \geq 2^{-n}$。由 [3, 引理 3.6 (i)]， $\delta_\Gamma(u,v) \geq \delta_{\Gamma_0}(u,v)$。所以，对于每个 $u \neq v \in F(\mathcal{N}_n)$， $d_\Gamma(u,v) \geq 2^{-n}$，而 $F(\mathcal{N}_n)$ 是 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 的离散闭子群。

□

我们将带有度量 $\delta_\Gamma$ 的拓扑群 $F(\mathcal{N}_n)$ 记为 $F_\Gamma(\mathcal{N}_n)$。那么，根据引理 3.2，$F_\Gamma(\mathcal{N}_n)$ 是一个离散拓扑空间。

**引理 3.3**。对于任意 $w \in \mathcal{N}$和任意 $r \in \mathbb{R}_+$，我们有 $\Gamma_G(w,r) \leq \Gamma(w,r)$，其中 $G$ 是群 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 连同度量 $\delta_\Gamma$。

证明。根据定义，

$$\Gamma_G(w,r) = \max\{r, \sup\{N_\Gamma(w^{-1}uw) : N_\Gamma(u) \leq r\}\}.$$

我们需要证明，对于任意满足 $N_\Gamma(u) \leq r$ 的 $u \in F_\Gamma(\mathcal{N})$，都有 $N_\Gamma(w^{-1}uw) \leq \Gamma(w,r)$。对于任意 $\epsilon > 0$，根据 $N_\Gamma(u)$ 的定义，存在 $v \in W(\mathcal{N})$，以及在 $\{0, \cdots, |v|-1\}$ 上的一个匹配 $\theta$，使得 $v' = u$且 $N^\theta_\Gamma(v) \leq r + \epsilon$。令 $\eta$ 为 $\{0, \cdots, |v|+1\}$ 上的一个匹配，使得对 $1 \leq i \leq |v|$有 $\eta(0) = |v|+1$且 $\eta(i) = \theta(i-1) + 1$。那么，根据 $N^\eta_\Gamma(w^{-1}vw)$的定义，我们有

$$N_\Gamma(w^{-1}vw) \leq N^\eta_\Gamma(w^{-1}vw) = \Gamma(w, N^\theta_\Gamma(v)) \leq \Gamma(w, r+\epsilon).$$

当 $\epsilon$ 趋于 0 时，由于 $\Gamma(w,\cdot)$ 的连续性，我们有 $N_\Gamma(w^{-1}vw) \leq \Gamma(w,r)$。又因为我们还有 $r \leq \Gamma(w,r)$，因此得到 $\Gamma_G(w,r) \leq \Gamma(w,r)$。□

**引理 3.4**。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，映射 $\pi_n$ 都可以唯一延拓为一个连续群同态 $f_n$，其定义域为 $F_\Gamma(\mathcal{N})$，值域为 $\overline{F_\Gamma(\mathcal{N}_n)}$，且满足 $d(g,h) \geq d(f_n(g)\ f_n(h))$，对每个 $g,h \in F_\Gamma(\mathcal{N})$均成立。

证明。首先，我们证明 $\pi_n$ 可以延拓为一个群同胚 $f_n$，它将 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 映射到 $F_\Gamma(\mathcal{N}_n)$，且满足对每个 $u \in F_\Gamma(\mathcal{N})$，都有 $N_\Gamma(u) \geq N_\Gamma(f_n(u))$。令$\pi_n(e) = e$ 以及 $\pi_n(x^{-1}) = (\pi_n(x))^{-1}$。我们将使用引理 2.7 将 $\pi_n$ 延拓为一个同态。引理 2.7 的条件（1）和（2）由定义可得，条件（3）则由引理 3.3 推出。于是我们得到了这样的延拓 $f_n$。

接下来我们证明， $f_n$可以扩展到 $F_\Gamma(\mathcal{N})$。群 $\overline{F_\Gamma(\mathcal{N})}$是 $F_\Gamma(\mathcal{N})$在度量 $\overline{d_\Gamma}$下的完备化，其中该度量满足：对于每个 $u$， $v \in F_\Gamma(\mathcal{N})$，

$$d_\Gamma(u,v) = \delta_\Gamma(u,v) + \delta_\Gamma(u^{-1}, v^{-1}),$$

并且 $F_\Gamma(\mathcal{N}_n)$ 是 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 的闭子群。我们有

(3.1)
$$d_\Gamma(u,v) = N_\Gamma(u^{-1}v)+N_\Gamma(uv^{-1}) \geq N_\Gamma(f_n(u^{-1}v))+N_\Gamma(f_n(uv^{-1})) \geq d_\Gamma(f_n(u),f_n(v))$$
对每个 $u$, $v \in F_\Gamma(\mathcal{N})$ 都成立。如果 $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 中关于度量 $d_\Gamma$ 的柯西序列，那么 $(f_n(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $F_\Gamma(\mathcal{N}_n)$ 中关于度量 $d_\Gamma$ 的柯西序列。因此， $f_n$ 可以唯一延拓为从 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 到 $F_\Gamma(\mathcal{N}_n)$ 的连续群同态。

最后我们论证，对于这个扩张 $f_n$，对每个 $g,h \in F_\Gamma(\mathcal{N})$，都有 $d(g,h) \geq d(f_n(g)\ f_n(h))$。由 (3.1)，我们知道对每个$g,h \in F_\Gamma(\mathcal{N})$，都有 $d(g,h) \geq d(f_n(g)\ f_n(h))$。由于 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 在 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 中稠密，且 $f_n$ 连续，因此对每个 $g,h \in F_\Gamma(\mathcal{N})$，都有 $d(g,h) \geq d(f_n(g)\ f_n(h))$ □

**定理 3.5.** 存在从 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 到 $\prod_{n\in\mathbb{N}} F(\mathcal{N}_n)$的连续嵌入。 —

证明。设 $f$ 从 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 到$\prod_{n\in\mathbb{N}} F(\mathcal{N}_n)$ 的映射将 $g$映为 $(f_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$，对每个 $g \in F_\Gamma(\mathcal{N})$ 都成立。映射 $f$ 是一个连续同态，我们只需证明它是单射。

对于 $g \neq h \in F_\Gamma(\mathcal{N})$，令 $0 < \epsilon < d_\Gamma(g,h)/4$。由于 $F(\mathcal{N}_\omega)$ 在 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 中稠密，我们可以取 $u,v \in F(\mathcal{N}_\omega)$，使得 $d_\Gamma(u,g) \leq \epsilon$且 $d_\Gamma(v,h) \leq \epsilon$。存在 $n \in \mathbb{N}$使得 $u,v \in F(\mathcal{N}_n)$，并且由于 $f_n$ 延拓 $\pi_n$，我们有 $f_n(u) = u, f_n(v) = v$。由引理 3.4 可得 $d_\Gamma(f_n(g)\ u) \leq \epsilon$ 且 $d_\Gamma(f_n(h)\ v) \leq \epsilon$，因此
$$d_\Gamma(f_n(g),f_n(h)) \geq d_\Gamma(u,v) - 2\epsilon \geq d_\Gamma(g,h) - 4\epsilon > 0.$$
于是 $f_n(g) \neq f_n(h)$，所以 $f(g) \neq f(h)$，从而 $f$是一个单射。 □

**定理 3.6.** 群 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 不是泛波兰群。

证明。我们证明 $(\mathbb{R},+)$ 与 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 的某个闭子群不同构。若 $(\mathbb{R},+)$ 与 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 的某个闭子群同构，则由定理 3.5，存在从 $(\mathbb{R},+)$ 到$\prod_{n\in\mathbb{N}} F(\mathcal{N}_n)$ 的连续嵌入。拓扑空间 $\mathbb{R}$ 是连通的，但 $\prod_{n\in\mathbb{N}} F(\mathcal{N}_n)$ 是全不连通的，矛盾。

我们还有一种使用定理 3.5 的替代证明。如 [1] 中所述， $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 是 $S_\infty$ 的一个抽象子群。乌雷松空间的等距同构群 Iso(𝕌) 无法连续嵌入到 $F_\Gamma(\mathcal{N})$ 中，因为根据自动连续性， [11, 12] （新证明见 [7, 8] ），Iso(𝕌) 无法作为抽象子群嵌入到 $S_\infty$ 中，因为 Iso(𝕌) 是连通的，而 $S_\infty$ 是全不连通的。□

## References

[1] Longyun Ding。关于满射普适波兰群。 *Advances in Mathematics*，2012年。[2] Longyun Ding 和 Su Gao。格雷夫度量群与可 Polish 化子群。 *Advances in Mathematics* 2007 ，.[3] Longyun Ding 和 Su Gao。自由群上的新度量。 *Topology and its Applications*，2007年。[4] Jerome Buzzi 等。描述集合论与动力系统中的开放问题。 *Arxiv 2305.00248* 2023 ，.[5] Su Gao。 *Invariant descriptive set theory*。CRC Press，2008年。[6] Su Gao 和 Steve Jackson。可数阿贝尔群作用与超有限等价关系。 *Invent. math, Volume 201, pages 309–383*，2015年。[7] Macjel Malicki。丰富泛型的存在及其对齐性度量结构自同构群的影响。 *The Journal of Symbolic Logic. 2016;81(3):876-886. doi:10.1017/jsl.2015.73* 2016 ，.[8] Christian Rosendal 和 Luis Carlos Suarze。自动连续性的若干方面。*arXiv:2406.12143*，2024年。

[9] Marcin Sabok。可分 C*-代数同构问题的完备性。 *Inventions mathematicae* 204 2016 , , .

[10] Marcin Sabok。轨道等价关系。 *Journal of Applied Logics-IfCoLog Journal of Logics and their applications* 2017 , .

[11] Marcin Sabok。等距群的自动连续性。 *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 2019 , .

[12] Marcin Sabok。等距群的自动连续性——勘误。 *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 21(6) 2253-2255* 2021 , , , .

[13] Joseph Zielinski。紧致度量空间之间同胚关系的复杂性。 *Advances in Mathematics*，291，2016年。NANKAI UNIVERSITY*Current address*：南开大学数学科学学院与 LPMC，中国天津 300071 *Email address*： dingly@nankai.edu.cnNANKAI UNIVERSITY*Current address*：南开大学数学科学学院与 LPMC，中国天津 300071*Email address*： rwli@mail.nankai.edu.cnMCGILL UNIVERSITY *Current address*：麦吉尔大学数学与统计学系。加拿大魁北克省蒙特利尔市舍布鲁克西街805号，H3A 2K6*Email address*： bo.peng3@mail.mcgill.ca