arXiv:2601.13036v1 [math.DG] 19 Jan 2026

四元数斜厄米对称空间的分类

IOANNIS CHRYSIKOS 和 JAN GREGOROVI˘C

Abstract. 我们给出了四元数斜厄米对称空间的完备分类，即那些对任意 $n > 1$ 都具有无挠 SO*($2n$)Sp(1)-结构的对称空间。此外，我们证明，任何齐性四元数斜厄米流形必然是对称空间。

Contents

1. 引言 1
2. 四元数斜厄米对称空间的结构 2
2.1. 对称空间概述 3
2.2. 四元数斜厄米对称空间 4
3. 四元数斜厄米平移对合李代数 5
4. 半单情形下的分类 6
4.1. 半单四元数斜厄米 tiLas 的结构 6
4.2. 半单 qs-H 对称空间的分类 8
5. 非半单情形下的分类 9
6. 齐性无挠 qs-H 结构 19
参考文献 20

1. 引言

本文致力于分类具有不变 SO*(2n) Sp(1)-结构的单连通对称空间，这类空间称为四元数斜厄米对称空间（简称 qs-H 对称空间）。回顾 [CGW22a]，$4n$维流形 M上的 SO*(2n) Sp(1)-结构由一对 (Q,ω) 决定，其中 $Q \subset \mathrm{End}(TM)$ 是 M 上的几乎四元数结构，而 $\omega \in \Lambda^2 T^*M$ 是一个 Q-厄米的非退化二形式，通常称为标量二形式。具有此类 G-结构的流形称为几乎四元数斜厄米流形，简称几乎 qs-H 流形。在无挠（即 1-可积）情形下，省略“几乎”一词，称为四元数斜厄米结构，简称 qs-H 结构。四元数斜厄米对称空间定义为具有四元数斜厄米结构 (Q,ω) 的对称空间，并且每个对称变换都是 (Q,ω) 的四元数斜厄米自同构。在此，四元数斜厄米自同构（简称 qs-H 自同构）是指同时保持 Q 和 ω不变的微分同胚。我们用 $\mathrm{Aut}(M,Q,\omega)$ 表示（几乎）qs-H 流形 (M,Q,ω) 的 qs-H 自同构群。

在这项工作中，我们证明这些对称空间是唯一的齐性 qs-H 流形 s.

定理 1.1. 任意齐性 *qs-H* 流形都是 *qs-H* 对称空间。

此外，我们证明了以下分类定理：

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C10,53C15,53C30,53C35.*Key words and phrases.* 齐性空间，四元数斜厄米对称空间，内合李代数，分类。

定理 1.2。 设 M 是一个 *qs*-厄米对称空间。那么，在覆盖意义下， M 是以下空间之一：

(1) 线性模型 [EH] (参见 [CGW22a，第 2] 节，线性模型的详细信息见 l).
(2) 一个简单对称空间：

$$M_1 = \mathsf{SO}^*(2n+2)/\,\mathsf{SO}^*(2n)\,\mathsf{U}(1)\,,$$
$$M_2 = \mathsf{SU}(2+p,q)/(\mathsf{SU}(2)\,\mathsf{SU}(p,q)\,\mathsf{U}(1))\,,$$
$$M_3 = \mathsf{SL}(n+1,\mathbb{H})/(\mathsf{GL}(1,\mathbb{H})\,\mathsf{SL}(n,\mathbb{H}))\,.$$

(3) A 非半单对称空间 M =G/L 其中 G 和 L 具有 *Levi* 分解 s

$$\mathsf{G} = \mathsf{Sp}(p+1,q) \ltimes \mathsf{R}\,, \quad \mathsf{L} = (\mathsf{Sp}(1)\,\mathsf{Sp}(p,q)) \ltimes \mathsf{K}$$

分别对应可解群 R和K，其中群 R和K 的李代数 $\mathfrak{r}$和 $\mathfrak{k} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{l}$根据 M 的四元数维数 n 为偶数或奇数来指定：

(3a) 当 n 为偶数时，这类对称空间 *G/L* 由满足 $0 \leq p$、$q \leq \frac{n}{2}$和 $0 < p+q \leq \frac{n}{2}$的参数 p、q 分类，参见例 *5.2*。*(3b)* 当 n为奇数时，这类对称空间 *G/L* 由满足 $0 \leq p$、$q \leq \frac{n-1}{2}$ 和 $0 < p+q \leq \frac{n-1}{2}$ 的参数 p、q分类，参见例 *5.3*。

对于这两类而言，四元数伪*Kähler*对称空间 $\mathsf{Sp}(p+1,q)/(\mathsf{Sp}(1)\,\mathsf{Sp}(p,q))$是 G/L 的半单因子。

请注意，半单 qs-H 对称空间此前已在 [CGW22a]，中得到分类，该工作建立在 [AC05, G13] 的分类结果之上。在第 4 节中，我们仅通过代数方法重新建立这一分类，该方法仅依赖于对称对的标准理论和扩展 Dynkin 图；更多细节请参见 [H78, CS09] 。事实上，还可以采用一种更为一般的几何方法，从而得到所有 qs-H 对称空间（包括半单 qs-H 对称空间）的分类。该方法基于构造局部无挠 SO*(2n) Sp(1)-结构，由 M. Cahen 和 L. Schwachh¨ofer [CSw09] 导出（另见 [CGW22a, 命题 6.3]）。在第 5 节中，我们确定了这一构造何时给出 qs-H 对称空间，参见命题 5.1。随后，结合定理 5.7 和定理 3.4，便得到 qs-H 对称空间的完整分类（按覆盖计），详见例 5.2–5.6。

在第6 节中，我们证明定理1.1 ，并进一步证明齐性近 qs-H 结构确实存在。特别是，本文所采用的构造给出了内在挠率类型为 $\mathcal{X}_4$ （共形辛结构）的齐性近 qs-H 流形，见例6.2（关于 [CGW22a、CGW22b] 中SO*（2n）Sp（1）结构的内在挠率类型）。

本文的组织如下。在第2 节中，我们回顾关于对称空间的必要预备知识。在第3 节中，我们通过引入四元数斜厄米平移对合李代数的概念，描述与 qs-H 对称空间等价的代数结构。利用这一概念，在第4 节中，我们重新得到半单情形下的分类。最后，在第5 节和第6 节中，我们分别证明定理1.1 和1.2。为简洁起见，需要指出的是，本文不包含关于几乎四元数斜厄米流形的预备知识。读者可以在 [CGW22a、CGW22b], 中找到所有必要的细节， [CCG25]中也有相关内容。

致谢。第一作者感谢捷克资助机构（项目 GA24-10887S）和地平线2020玛丽·居里行动项目 CaLIGOLA（编号 101086123）的支持。他还感谢苏黎世大学数学研究所在2025年冬季学期接待他进行学术访问。第二作者感谢奥地利科学基金（FWF）10.55776/PAT4819724 的支持。

2. The structure of quaternionic skew-Hermitian symmetric spaces

我们的介绍首先简要概述对称空间，为下文的讨论提供相关背景。定义对称空间有许多等价的方式。关于这些方法的综述见 [G12，第 1 节。3] 更多细节还可参见，例如 [H78、B00、KN69]。

2.1. **对称空间概论**。对称空间可以看作一对（M， s），其中 M 是一个连通光滑流形，而 s：$M \times M \to M$ 是一个光滑映射，使得该族

$$\{s_x : M \to M\}_{x \in M}$$

其中 $s_x(y) := s(x, y)$ 对所有 x， $y \in M$ 都是 M 的一个（光滑）对合族，并满足以下性质：

（S1）对所有 $x \in M$， $s_x(x) = x$；（S2）对所有 x， $y \in M$，$s_x \circ s_y \circ s_x = s_{s_x(y)}$；
（S3）对于每个 $x \in M$，存在一个邻域 $U_x \subset M$，使得 x 是 s_x 的唯一不动点。

每个 $s_x : M \to M$ 都称为以 x 为中心的对称变换；“对合”一词表示，对于所有 x、$y \in M$，$s_x(s_x(y)) = y$。注意，第三条公理（$S3$）意味着，对于所有 $x \in M$，点 x 是 s_x 的孤立不动点。设两个对称空间（A， s）和（B， t）分别配有光滑对合族 $\{s_a\}_{a \in A}$ 和 $\{t_b\}_{b \in B}$，则它们之间的一个态射是一个光滑映射 f: $A \to B$，满足对于任意 x、$y \in A$， $f(s_x(y)) = t_{f(x)}(f(y))$。这类态射称为对称态射。对称空间（$M$， $\{s_x\}_{x \in M}$）的自同构群是 M 的所有对称自同构所组成的群，记为 Aut(M， s)。由第二条公理（$S2$）可知，任何以 $x \in M$ 为中心的对称变换 s_x 都是 M 的一个对称自同构，因此，由（ M， s ）的对称变换生成的群自然包含于 Aut(M， s) 中。对称空间（M， s）的对称变换所生成的群中，作用在 M 上且具有传递性的最小子群称为平移群，记为 Tr(M， s) := $\langle s_x \circ s_y : x, y \in M \rangle$。

暂且将这个群记为 G = Tr(M, s)，并固定一个基点 $o \in M$。由于 G 具有传递性，我们有齐性表示 M = G/L，其中 L = $\{g \in$G : $go = o\}$ 是 $o \in M$ 的稳定子。注意，L 是 G 的闭子群。此外，对所有 $g \in$ G，规则 $\sigma(g) := s_o \circ g \circ s_o$ 定义了 G 的一个对合 σ : G $\to$ G，且稳定子 L 满足 (G$^\sigma$)$^0 \subset$ L $\subset$G$^\sigma$，其中 G$^\sigma$ 是由 σ 固定的元素构成的 G 的闭子群，而 (G$^\sigma$)^0 表示其连通分支。反过来，一个连通李群 G 与一个（非平凡）对合自同构 σ : G $\to$G 组成的对 (G σ) 可导出一个对称空间 G/L，其中 L 是任意满足 (G$^\sigma$)$^0 \subset$ L $\subset$ G$^\sigma$ 的子群。此类三元组 (G σ, L) 通常称为对称对，参见例如[B00，第 3] 页。

定义 2.1。有限维平移对合李代数（简称 tiLa）由有限维实李代数 $\mathfrak{g}$ 和李代数对合自同构 σ：$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 构成，并满足以下两个条件：

(1) $\mathfrak{g}$的 Z_2-分次满足

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{l} := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\}, \quad \mathfrak{m} := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = -X\},$$

条件 $\mathfrak{l} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$。
(2) $\mathfrak{g}$ 的非零理想均不包含于 $\mathfrak{l}$中。

给定 tiLa ($\mathfrak{g}, \sigma$)，将 $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$ 按 σ 的 ± 1-特征子空间作分解，称为 $\mathfrak{g}$的典范分解。由于此分解是一个 Z_2-分次，因此关系式 $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$ 和$[\mathfrak{l}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ 也成立。于是， $\mathfrak{l}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的李子代数，而 $\mathfrak{m}$ 是一个 $\mathfrak{l}$-模，对应于一个表示

$$\rho : \mathfrak{l} \to \mathrm{End}(\mathfrak{m})$$

该表示由伴随作用的限制定义。根据定义 2.1中的第二个条件，这是一个忠实表示。此外，我们指出，诱导的 $\mathfrak{l}$-作用于自同态代数 End($\mathfrak{m}$) 上的 $\mathfrak{m}$ 作用可解释为 $\rho(X)A := [\rho(X)\ A]$，对所有 $X \in \mathfrak{l}$以及 $A \in$End($\mathfrak{m}$)。

对于任意对称对 (G σ， L)，其中 G 是平移群，都存在唯一的 tiLa ($\mathfrak{g}$:= Lie(G) σ) 与之对应。这里，我们沿用同一记号 σ 表示李代数层面的诱导对合，并且按照惯例，用 $\mathfrak{g}$ = Lie(G) 表示 G 的李代数。

定理 2.2. ([K65, B00]) *tiLa* ($\mathfrak{g}, \sigma$) 与对称对 (G σ,L)之间存在双射对应，其中 G 是与李代数 $\mathfrak{g}$ 对应的单连通李群，且

L 是 G 的闭连通子群，其李代数为 $\mathfrak{l}$。此外，*an!!!* 单连通对称空间的同构类与 *tiLa* 的同构类之间存在范畴等价。

回顾一下，给定一个带有仿射联络 ∇的光滑连通流形 M，其仿射变换群 Aff(M,∇) 由保持 ∇的微分同胚 $\varphi\colon M\to M$构成，即 $\varphi^*\nabla=\nabla$。仿射对称空间是一个赋有联络 ∇ 的连通流形 M，该联络满足以下性质：对每个点 $x\in M$，都存在一个对合仿射变换 $s_x\in$Aff(M,∇)，它作用于 (M,∇)，且 x 是 s_x的孤立点。显然，对每个$x\in M$，这样的仿射变换 s_x 都是唯一的；并且事实证明，仿射对称空间 (M,∇) 是上文所定义的对称空间 (M,s)。反过来，任何对称空间都是配备其唯一典范联络 ∇^0 的仿射对称空间，该联络在对称变换下保持不变。此外，∇^0 无挠、完备，且其曲率张量 R^0 是 ∇^0-平行的，见 [KN69]。

2.2. **四元数斜厄米对称空间**。对称空间可以赋予关于对称变换不变的各种几何结构。例如，伪黎曼对称空间是一个配备伪黎曼度量 g 的对称空间（M，$\{s_x\}_{x\in M}$），其中每个 s_x 都是 g 的等距变换；复对称空间是一个配备复结构 J 的对称空间，其中每个 s_x 关于 J 都是全纯映射；而辛对称空间是一个配备辛二形式 ω 的对称空间，其中每个 s_x 关于 ω 都是辛映射。本文将研究以下类型的对称空间。

定义 2.3。四元数斜厄米对称空间是指具有四元数斜厄米结构（Q，ω）的对称空间，并且其中每个 s_x 都是（Q，ω）的 qs-H 自同构。

回顾一下，根据 [CGW22a，定理 4.12],，任意几乎 qs-H 流形 (M^{4n},Q,ω) 都存在唯一的最小适配 SO$^*(2n)$ Sp(1)-联络，记作 $\nabla^{Q,\omega}$。由此可知，SO$^*(2n)$ Sp(1)-结构 (Q,ω) 是 1-可积的，当且仅当 $\nabla^{Q,\omega}$ 无挠；关于无挠情形的更多细节，请参见 [CGW22b，命题 2.9]。我们未在定义 2.3 中纳入更一般的近似 qs-H 结构，其原因以及其他相关事实将在以下命题中说明。

命题 2.4. 设 (M,s) 为一个对称空间，并容许一个在对称变换下保持不变的近似四元数斜厄米对称 (Q,ω)。那么，典范联络 ∇^0具有以下性质：

(1) 对于所有的 $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ 和 $x\in M$，都有 $\omega_x(\nabla^0_XY,Z)=\frac{1}{2}X_x(\omega(Y+s_{x_*}Y,Z))$，其中$s_{x_*}=ds_x$。*(2)* 联络 ∇^0 和 $\nabla^{Q,\omega}$ 重合，$\nabla^0=\nabla^{Q,\omega}$，因此，$(Q,\omega)$ 这一对必定是 *1*-可积的。*(3)* 任意 *qs-H* 自同构 $f\in Aut(M,Q,\omega)$ 均满足 $f\circ s_x=s_{f(x)}\circ f$，对所有 $x\in M$ 都成立。*(4)* $\nabla^0=\nabla^{Q,\omega}$ 的线性整体性代数与李子代数 $\mathfrak{l}$ 重合，其中$\mathfrak{g}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$ 为典范分解，即

$$\mathfrak{l}\cong\mathfrak{hol}(\nabla^0)=\{R^0(X,Y)=-\operatorname{ad}_{\mathfrak{m}}([X,Y]):X,Y\in\mathfrak{m}\}\subset\mathfrak{so}^*(2n)\oplus\mathfrak{sp}(1)\,.$$

证明。我们回顾一下，任意 qs-H 变换相对于 SO$^*(2n)$ Sp(1)-联络$\nabla^{Q,\omega}$都是仿射的，见 [CGW22a，命题 5.8]。由于 $\nabla^{Q,\omega}$ 是唯一的，且假设其在对称变换下不变，因此这意味着两个联络 ∇^0 和 $\nabla^{Q,\omega}$ 重合，$\nabla^0=\nabla^{Q,\omega}$。由于 ∇^0 是无挠的，(2) 中的第二个结论由此得出。因此 ω 是辛的，并且 (1) 中给出的表达式可按 [Bℓ98]中的方法证明。(3) 由 $\nabla^0=\nabla^{Q,\omega}$ 在任意 qs-H 自同构 $f\in$Aut(M,Q,ω) 下不变这一事实可轻易得出。(4) 由 [KN69 第 3.2 定理，页码 232] 得出。□

由命题2.4 的（3）可知

推论 2.5。带有 *qs-H* 变换作为态射的 *qs-H* 对称空间范畴，是 *qs-H* 流形范畴的满子范畴；也就是说，*qs-H* 对称空间的每个 *qs-H* 自同构都是对称自同构。因此 Aut（M,s）∩Aut（M,Q,ω）=Aut（M,Q,ω）。

3. Quaternionic skew-Hermitian transvection involutive Lie algebras

在本节中，我们将建立单连通四元数斜厄米对称空间的同构类与以下纯粹的李代数对象的同构类之间的双射对应：

定义 3.1。四元数斜厄米平移对合李代数（简称 qs-H tiLa）是一个四元组（$\mathfrak{g}$、σ、Q_0、ω_0），其中：

（1）对（$\mathfrak{g}$、σ）是一个有限维平移对合李代数。（2）三元组（$\mathfrak{m}$、Q_0、ω_0）是一个 $\mathfrak{l}$-不变的四元数斜厄米向量空间，其中$\mathfrak{g}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$的关联典范分解。

注 3.2。设（$\mathfrak{g}$、σ、Q_0、ω_0）是一个具有如上所述 $\mathbb{Z}_2$-分次 $\mathfrak{g}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$ 的 qs-H tiLa。下面我们想说明几点重要事项：
（1）由于（$\mathfrak{g}$、σ）是一个具有典范分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$ 的对合李代数，我们有$B(\mathfrak{l},\mathfrak{m})=0$，其中 B 是 Killing 型 $\mathfrak{g}$。如果 B 是非退化的，则其在 $\mathfrak{l}$ 和 $\mathfrak{m}$上的限制也分别是非退化的，见 [KN69，第 233]页。

(2) 根据定义 3.1 中的第二个条件，我们要求几何对象 Q_0 和 ω_0在子代数 $\mathfrak{l}=[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$的作用下保持不变。特别地，称 $Q_0\subset\mathrm{End}(\mathfrak{m})$ 是 $\mathfrak{l}$-不变的，是指对于任意 $X\in\mathfrak{l}$和 $A\in Q_0$，都有 $[\rho(X)A]\in Q_0$。类似地，$\omega_0:\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathbb{R}$ 是关于 Q_0定义在 $\mathfrak{m}$ 上的线性标量二形式，并且在 $\mathfrak{l}$的作用下保持不变，即对于所有 $X\in\mathfrak{l}$和 $U,V\in\mathfrak{m}$，都有$\omega_0([X,U],W)+\omega_0(U,[X,W])=0$。
(3) 将 ω_0 扩展到整个 $\mathfrak{g}$上（仍记为 ω_0），其特征关系为：对所有 $X\in\mathfrak{l}$，都有 $X\lrcorner\omega_0=0$。此外，由于 ω_0的 $\mathfrak{l}$-不变性以及关系 $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]=\mathfrak{l}$，显然 ω_0 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的平凡表示的切瓦利–艾伦伯格二余循环。这意味着 ω_0 属于空间

$$Z^2(\mathfrak{g},\mathbb{R})=\left\{\alpha\in C^2(\mathfrak{g},\mathbb{R})=\mathrm{Hom}(\bigwedge^2\mathfrak{g},\mathbb{R}):\mathrm{d}\,\alpha=0\right\}$$

$\mathfrak{g}$ 在 $\mathbb{R}$ 上平凡表示的 Chevalley 2-余循环。

现在我们来定义 qs-H tiLa 范畴中的态射。

定义 3.3. 若存在李代数同构 $\varphi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$，使得 $\varphi\circ\sigma_1=\sigma_2\circ\varphi$、$\varphi^*Q_2=Q_1$ 和 $\varphi^*\omega_2=\omega_1$，则称两个 qs-H tiLa $(\mathfrak{g}_i,\sigma_i,Q_i,\omega_i)$ 和 $(i=1,2)$ 同构。

定理 3.4. *qs-H tiLas*$(\mathfrak{g},\sigma,Q_0,\omega_0)$ 的同构类与单连通 *qs-H* 对称空间 (M,Q,ω,s)的同构类之间存在范畴等价。

证明。设 $(M=\mathrm{G/L},Q,\omega,s)$ 是一个 qs-H 对称空间，其中 $\mathrm{G}=\mathrm{Tr}(M,s)$，其典范分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$，其中 $\mathfrak{g}=$ 和 $\mathfrak{l}=$ 分别为李代数 Lie(G) 和李代数 Lie(L)。令 $\sigma(g)=s_o\circ g\circ s_o$ 为 G 上由原点 $o=e\mathrm{L}\in M$ 处的对称变换所定义的对合。由于 $Q\subset\mathrm{End}(TM)$ 是 G-不变四元数结构，且 ω 是 M 上的 G-不变辛二形式，相应的 tiLa 由 $(\mathfrak{g},\sigma,Q_o,\omega_o)$ 给出，其中 σ 是 $\mathfrak{g}$ 上的诱导对合，而 (Q_o,ω_o) 是对 (Q,ω) 在 $o\in M$ 处取值。我们称 $(\mathfrak{g},\sigma,Q_o,\omega_o)$ 为与 $(M=\mathrm{G/L},Q,\omega,s)$ 相关联的 qs-H tiLa。现在我们将证明，在 qs-H tiLas 范畴中，$(\mathfrak{g},\sigma,Q_o,\omega_o)$ 在同构意义下唯一。
断言 1：设 (M,Q,ω,s) 为两个单连通四元数斜厄米对称空间，且设 $\psi:M\to M$ 是一个 *qs-H* 变换。设 $o\in M$ 是M中的一个基点，其对应的 *qs-H tiLa* 为 $(\mathfrak{g},\sigma,Q_o,\omega_o)$，并取 M中的点 $\hat{o}:=\psi(o)$为基点，其对应的 *qs-H tiLa* 为 $(\hat{\mathfrak{g}},\hat{\sigma},\hat{Q}_{\hat{o}},\hat{\omega}_{\hat{o}})$。那么这两个 *qs-H tiLas* 同构。

证明：根据定义以及命题 2.4 的第 (3) 部分，qs-H 变换 ψ 满足以下关系

$$\psi\circ s_x=\hat{s}_{\psi(x)}\circ\psi,\quad x\in M,\quad \psi^*\hat{Q}_{\hat{o}}=Q_o,\quad \psi^*\hat{\omega}_{\hat{o}}=\omega_o.$$

此外，ψ 诱导出一个李群同构 $\Psi:\mathrm{G}\to\mathrm{G}$，由 $\Psi(s_x\circ s_y):=\hat{s}_{\psi(x)}\circ\hat{s}_{\psi(y)}$ 定义，其中对所有 $x,y\in M$ 均成立。因此，Ψ 将 $\mathrm{G}=\mathrm{Tr}(M,s)$ 的生成元映射到 $\mathrm{G}=\mathrm{Tr}(M,\hat{s})$ 的生成元。这

满足 $\Psi\circ\sigma=\hat{\sigma}\circ\Psi$，由此可得，微分 $\mathrm{d}\Psi_e\colon \mathfrak{g}\to\hat{\mathfrak{g}}$ 是关联的 qs-H tiLas $(\mathfrak{g},\ \sigma,\ Q_o,\ \omega_o)$ 与 $(\hat{\mathfrak{g}},\ \hat{\sigma},\ Q_{\hat{o}},\ \hat{\omega}_{\hat{o}})$ 之间所需的同构。□

这就证明了定理陈述的一个方向。现在来证明其逆命题。设 $(\mathfrak{g},\sigma,Q_0,\omega_0)$ 是一个 qs-H tiLa，并设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的相应 $\mathbb{Z}_2$-分次。设 G 是与李代数 $\mathfrak{g}$ 对应的连通单连通李群，$\sigma:\mathrm{G}\to\mathrm{G}$ 是由 σ 生成的 G 的解析自同构。这是 G 的一个对合自同构；由于 G 是单连通的，不动点集 G^σ 是连通的（参见 [K65，第 293] 页）。因此，显然 $\mathrm{L}=\mathrm{G}^\sigma$ 是由李子代数 $\mathfrak{l}$ 生成的解析子群，而且陪集 $M:=\mathrm{G}/\mathrm{L}$ 是一个单连通有效对称空间，另见定理 2.2。

设 $o=e\mathrm{L}$ 是 $M=\mathrm{G}/\mathrm{L}$ 中的原点。根据定义，$(Q_0,\ \omega_0)$ 是 $\mathfrak{m}$ 上的一个 $\mathfrak{l}$-不变线性 qs-H 结构，它也是 L-不变的（因为 L 是连通的）。此外，$(Q_0,\ \omega_0)$ 在对称变换 s_o 下不变。因此，它下降为 G/L 上的一个 G-不变 qs-H 结构 $(Q,\ \omega)$，其中分别有 $Q_o=Q_0$ 和 $\omega_o=\omega_0$，且该结构在对称变换下不变。尚需证明 $(M=\mathrm{G}/\mathrm{L},\ Q,\ \omega,\ s)$ 在同构意义下唯一。

断言 2: 设$(\mathfrak{g},\sigma,Q_0,\omega_0)$ 和$(\hat{\mathfrak{g}},\hat{\sigma},\hat{Q}_0,\hat{\omega}_0)$ 是两个同构的 *qs-H tiLa*。那么，相应的单连通 *qs-H* 对称空间$(M=\mathrm{G}/\mathrm{L},\ Q,\omega,s)$ 和$(\hat{M}=\hat{\mathrm{G}}/\hat{\mathrm{L}},\hat{Q},\hat{\omega},\hat{s})$ 同构。

证明：记 qs-H tiLas 之间的同构为 $\varphi:\mathfrak{g}\to\hat{\mathfrak{g}}$。根据定义，$\hat{\varphi}\circ\sigma=\hat{\sigma}\circ\varphi$ and $\varphi^*Q_0=Q_0$，$\varphi^*\hat{\omega}_0=\omega_0$。此外，$\varphi$ 保持 $\mathbb{Z}_2$-分次，且有 $\hat{}\,\hat{}\varphi(\mathfrak{l})=\mathfrak{l}$ and $\varphi(\mathfrak{m})=\hat{\mathfrak{m}}$。设 G 和 G 是李代数分别为 $\mathfrak{g}$ 和 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的连通单连通李群，并设 $\sigma,\hat{\sigma}$ 是相应的李群层面的对合。映射 φ 可积分为唯一的李群同构 $\Phi:\mathrm{G}\to\mathrm{G}$，满足$\Phi\circ\sigma=\hat{\sigma}\circ\Phi$。因此 $\Phi(\mathrm{G}^\sigma)=\hat{\mathrm{G}}^{\hat{\sigma}}$，特别地 $\Phi(\mathrm{L})=\hat{\mathrm{L}}$。于是得到一个微分同胚 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\ f:\mathrm{G}/\mathrm{L}\to\mathrm{G}/\mathrm{L}$，满足 $f(g\mathrm{L})=\Phi(g)\mathrm{L}$，$g\in\mathrm{G}$。其在原点处的微分 $o\in\mathrm{G}/\mathrm{L}$ 满足 $\mathrm{d}\ f_o=\varphi|_{\mathfrak{m}}$，且由于 φ 是 qs-H tiLas 的同构，可知 $f^*Q=Q$ 和 $\hat{f}^*\hat{\omega}=\omega$，其中 (Q,ω) 是与 (Q_0,ω_0) 对应的 G-不变 qs-H 结构，而 $(Q,\hat{\omega})$ 是与 $(Q_0,\hat{\omega}_0)$ 对应的 $\hat{}$G-不变 qs-H 结构。为完成证明，可使用命题 2.4 的第 $\hat{}\,\hat{}$ (4) 部分，由此可知 $f:\mathrm{G}/\mathrm{L}\to\mathrm{G}/\mathrm{L}$ 满足 $f\circ s_{g\mathrm{L}}=\hat{s}_{f(g\mathrm{L})}\circ f$（这也可由关系式 $\Phi\circ\sigma=\hat{\sigma}\circ\Phi$ 得出）。□

4. Classification in the semisimple case

定理 3.4 表明，单连通 qs-H 对称空间的分类等价于 qs-H tiLas 的分类。接下来我们将利用这一事实，对所有单连通 qs-H 对称空间进行分类（在覆盖意义下）。为此，我们首先讨论半单情形，因此只需关注四元数斜厄米 tiLas（$\mathfrak{g}$，σ，Q_0，ω_0），其中 $\mathfrak{g}$ 为半单。

4.1. 半单四元数斜厄米 tiLas 的结构。 设 $(\mathfrak{g},\ \sigma,\ Q_0,\ \omega_0)$ 是一个具有典范分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$ 的四元数斜厄米 tiLa。若 $\mathfrak{g}$ 是半单的，则其 Killing 型 B 是非退化的；如上文所述，B 在 $\mathfrak{l}$ 和 $\mathfrak{m}$ 上的限制也具有同样性质，分别记为 $B_{\mathfrak{l}}:=B|_{\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}}$ 和 $B_{\mathfrak{m}}=B|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}}$。下面的命题是关于 $\mathfrak{g}$ 为单时 qs-H tiLas 的一个结构性结果。

命题 4.1. 设$(\mathfrak{g},\sigma,Q_0,\omega_0)$ 是一个 *qs-H tiLa*，其 $\mathfrak{g}$ 为单，且具有典范分解$\mathfrak{g}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$。那么，存在一个非零元素 $Z_0\in\mathfrak{g}$，属于 $\mathfrak{l}$ 的中心 $Z(\mathfrak{l})$。

证明。 在我们的假设下，$B_{\mathfrak{m}}$ 和 ω_0 都是非退化的，并且可以自然地根据以下关系定义一个端omorphism $I\in$End$(\mathfrak{m})$

$$B_{\mathfrak{m}}(X,Y):=\omega_0(X,IY),\quad X,Y\in\mathfrak{m}.$$

断言 1: 端*omorphism* I 与李子代数 $\mathfrak{l}$ 可交换。

证明。 回忆一下，$\mathfrak{l}$ 通过忠实表示 $\rho:\mathfrak{l}\to$ End$(\mathfrak{m})$ 作用于 $\mathfrak{m}$，该表示由伴随作用定义：对所有 $A\in\mathfrak{l}$ 和 $X\in\mathfrak{m}$，$\rho(A)X=[A,X]$。称 I 与 $\mathfrak{l}$ 可交换，是指$I\circ\rho(A)=\rho(A)\circ I$，也就是说

$$I[A,X]=[A,IX],\quad \forall A\in\mathfrak{l},\ X\in\mathfrak{m}. \tag{4.1}$$

为证明这一点，注意限制 $B_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}}$-不变的，即对所有 $A\in\mathfrak{l}$ 和 $X,Y\in\mathfrak{m}$， $B_{\mathfrak{m}}([A,X],Y)=-B_{\mathfrak{m}}(X,[A,Y])$。根据 I 的定义，我们可以等价地将其表示为 $\omega_0([A,X],IY)=-\omega_0(X,I[A,Y])$，也就是说，

$$\omega_0([A,X],IY)+\omega_0(X,I[A,Y])=0\,,\qquad A\in\mathfrak{l},\ X,Y\in\mathfrak{m}\,.\qquad(\dagger)$$

此外，由于 ω_0 的 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}}$-不变性，对于所有 $A\in\mathfrak{l}$，我们有 $\omega_0([A,X],\ Z)+\omega_0(X,\ [A,Z])=0$，以及 $X,\ Z\in\mathfrak{m}$。因此，对于 $Z=IY$，我们得到

$$\omega_0([A,X],IY)+\omega_0(X,[A,IY])=0\,,\qquad A\in\mathfrak{l},\ X,Y\in\mathfrak{m}\,.\qquad(\ddagger)$$

由（†）和（‡），我们得到 $\omega_0(X,\ I[A,Y])=\omega_0(X,\ [A,IY])$，由 的非退化性可推出（4.1）。这证明了断言 1。□

现在，我们通过令 $I(\mathfrak{l})=0$，将端omorphism I 扩展到整个 $\mathfrak{g}$。由（4.1）以及包含关系 $[\mathfrak{l},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m},\ [\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{l}$，我们看到

$$I[X+A,Y+C]=I[X,C]+I[A,Y]=[IX,C]+[A,IY]\,,$$

此外，对于所有 $A,\ C\in\mathfrak{l}$ 和 $X,\ Y\in\mathfrak{m}$，还有 $[I(X+A)\ Y+C]+[X+A,I(Y+C)]=[IX,C]+[A,IY]+[IX,Y]+[X,IY]$。因此，如果关系 $[IX,Y]+[X,IY]=0$ 成立，则前面两个关系将推出

$$I[X+A,Y+C]=[I(X+A),Y+C]+[X+A,I(Y+C)]\,,$$

这意味着 I 应当是 $\mathfrak{g}$的导子。下面证明这一点确实成立。首先，我们将证明：

Claim 2: *The end同态 hism* $I:\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$ *is sk*反对称 *ic with* 关于 $B_{\mathfrak{m}}$。证明。事实上，由于 $B_{\mathfrak{m}}$ 是对称的，而 ω_0 是反对称的，我们立即得到

$$\omega_0(X,IY)=-\omega_0(IX,Y)\,,\quad X,Y\in\mathfrak{m}\,.\tag{4.2}$$

于是 $B_{\mathfrak{m}}(IX,Y)\ \mathrm{def}=\omega_0(IX,IY)$，$B_{\mathfrak{m}}(X,IY)\ \mathrm{def}=\omega_0(X,I(IY))\ (4.2)=-\omega_0(IX,IY)$，比较这两个关系可得，对于所有 $X,Y\in\mathfrak{m}$，$B_{\mathfrak{m}}(IX,Y)+B_{\mathfrak{m}}(X,IY)=0$。□现在令 G/L 为与 $(\mathfrak{g},\sigma,Q_0,\omega_0)$ 相关联的（单连通）有效陪集，其构造见定理 3.4 的证明；令 ∇^0 为与典范分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$相关联的典范联络，其曲率张量为 R^0。回忆一下，对于所有$X,Y,Z\in\mathfrak{m}\cong T_o\mathrm{G/L}$，$R^0(X,Y)Z=-[[X,Y],Z]$。由曲率张量 R^0 的性质以及断言1和断言2，我们可知

$$\begin{aligned}B_{\mathfrak{m}}([[IX,Y],U],V)&=-B_{\mathfrak{m}}(R^0(IX,Y)U,V)=-B_{\mathfrak{m}}(R^0(U,V)IX,Y)=B_{\mathfrak{m}}([[U,V],IX],Y)\\&\overset{\text{Claim 1}}{=}B_{\mathfrak{m}}(I[[U,V],X],Y)\overset{\text{Claim 2}}{=}-B_{\mathfrak{m}}([[U,V],X],IY)\\&=B_{\mathfrak{m}}(R^0(U,V)X,IY)=B_{\mathfrak{m}}(R^0(X,IY)U,V)=-B_{\mathfrak{m}}([[X,IY],U],V)\end{aligned}$$

对所有 $X,Y,U,V\in\mathfrak{m}$，这意味着对所有 $X,Y\in\mathfrak{m}$，$[IX,Y]+[X,IY]=0$。因此，$I\in\mathrm{End}(\mathfrak{m})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的导子；又由于 $\mathfrak{g}$ 是单的，存在一个元素 $Z_0\in\mathfrak{g}$，使得$I=\mathrm{ad}(Z_0)$。由断言 1，我们进而推出 $Z_0\in Z(\mathfrak{l})$。证明至此完成。□

现在假设 $(\mathfrak{g},\sigma,Q_0,\omega_0)$ 是半单 qs-H tiLa，也就是说，它是一个李代数 $\mathfrak{g}$为半单的 qs-H tiLa。令

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_s$$

$\mathfrak{g}$ 分解为单理想的直和，即，要么每个 $\mathfrak{g}_i$ 都是单李代数，且 $\sigma(\mathfrak{g}_i)=\mathfrak{g}_i$；要么 $\mathfrak{g}_i=\mathfrak{g}_i'\oplus\mathfrak{g}_i'$，其中 $\mathfrak{g}_i'$ 是单的，且 σ 满足对所有 $X,Y\in\mathfrak{g}_i'$，$((X,Y))=(-Y,X)$。于是，我们可以将 σ 分解为 $\sigma=\sigma_1\oplus\cdots\oplus\sigma_s$，其中每个 i 都有 $\sigma_i:=\sigma|_{\mathfrak{g}_i}:\ \mathfrak{g}_i\to\mathfrak{g}_i$，并满足对所有 $i\in\{1,\dots,s\}$，$\sigma_i^2=\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_i}$。我们还可以考虑 Z_2-分解 $\mathfrak{g}_i=\mathfrak{l}_i\oplus\mathfrak{m}_i$，其中$\mathfrak{l}_i:=\mathfrak{g}_i^{\sigma_i}$，且 $\mathfrak{m}_i:=\mathfrak{g}_i^{-\sigma_i}$。显然，对所有 i，都有 $\mathfrak{l}_i=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{g}_i$ 和 $\mathfrak{m}_i=\mathfrak{m}\cap\mathfrak{g}_i$，其中分别有 $\mathfrak{l}=\mathfrak{g}^\sigma$ 和$\mathfrak{m}=\mathfrak{g}^{-\sigma}$。于是我们可以写成

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}^s\mathfrak{g}_i=\bigoplus_{i=1}^s(\mathfrak{l}_i\oplus\mathfrak{m}_i)=\bigoplus_{i=1}^s\mathfrak{l}_i\oplus\bigoplus_{i=1}^s\mathfrak{m}_i=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}\,,\tag{4.3}$$

分别为 $\mathfrak{l}=\bigoplus_{i=1}^s\mathfrak{l}_i$ 和 $\mathfrak{m}=\bigoplus_{i=1}^s\mathfrak{m}_i$。

命题 **n 4.2.** 对于半单 *qs-H tiLa* $(\mathfrak{g}, \sigma, Q_0, \omega_0)$，李代数 $\mathfrak{g}$ 必然是单的。

证明。 由于 Q_0 是线性四元数结构，我们可以选取 Q_0 的一个容许基，并将单李代数 $\mathfrak{sp}(1)$ 与 Q_0, $\mathfrak{sp}(1) \cong Q_0$ 等同。该容许基的具体选取不会影响论证。反设 $s > 1$。那么我们有

断言 1：对于所有 i， Q_0 都不能与 $\mathfrak{l}_i$ 交换，特别是 Q_0 与 $\mathfrak{l}$ 不交换。证明。反设 $Q_0 \subset \mathsf{End}(\mathfrak{m})$ 与每个李子代数 $\mathfrak{l}_i$ for$i \in \{1, \dots, s\}$ 都交换。那么 Q_0 保持 $\mathfrak{m}_i$，这意味着对于所有 $A \in Q_0$ 和所有$i \in \{1, \dots, s\}$， $A(\mathfrak{m}_i) \subset \mathfrak{m}_i$。因此，在这种情况下，每个 $\mathfrak{l}_i$-模 $\mathfrak{m}_i$ 都应为四元数型（一个四元数表示），这与 [B00，推论 V.1.13] 矛盾（因为每个 $\mathfrak{g}_i$ 都是单理想）。因此，Q_0 不与所有 $\mathfrak{l}_i$ 交换，由此可得关于 $\mathfrak{l}$ 的断言。□

现在，根据四元数斜厄米 tiLa 的定义， Q_0 是 $\mathfrak{l}$不变的，这意味着$[X, A] \in Q_0$ 对于任意 $X \in \mathfrak{l}$ 以及 $A \in Q_0$ （见注3.2）。由于 $Q_0 \cong \mathfrak{sp}(1)$ 和 $\mathfrak{sp}(1)$ 是单的，这意味着伴随作用定义了一个李代数同态

$$\lambda : \mathfrak{l} \to \mathsf{Der}(Q_0) = \mathrm{ad}(Q_0) \cong \mathfrak{sp}(1), \quad \lambda(X)A = [X, A].$$

将 λ 限制到每个 $\mathfrak{l}_i$ 上，我们得到表示 $\lambda_i : \mathfrak{l}_i \to \mathfrak{sp}(1)$。由于 Q_0 是一个单 $\mathfrak{l}_i$-模，每个 $\mathfrak{l}_i$ 的像应当是平凡的，或同构于 $\mathfrak{u}(1)$，或同构于 $\mathfrak{sp}(1)$ 本身，即 $\lambda_i(\mathfrak{l}_i) = \{0\}$ 或 $\lambda_i(\mathfrak{l}_i) = \mathfrak{u}(1)$ 或 $\lambda_i(\mathfrak{l}_i) = \mathfrak{sp}(1)$。由于 $\mathfrak{l}$ 在 Q_0 上非平凡作用，且 $\mathfrak{sp}(1)$ 没有非平凡的互相对易的子代数，至少有一个 $\mathfrak{l}_i$ 应当在 Q_0 上非平凡作用，因此对于某个 i，要么 $\lambda_i(\mathfrak{l}_i) = \mathfrak{u}(1)$，要么对于某个 i， $\lambda_i(\mathfrak{l}_i) = \mathfrak{sp}(1)$。然后，由于对所有 $i \neq j$ 都有 $[\mathfrak{l}_i, \mathfrak{l}_j] = 0$，容易看出对所有 $j \neq i$ 都有 $\lambda_j(\mathfrak{l}_j) = 0$，这意味着 $[\mathfrak{l}_j, Q_0] = 0$。根据断言 1，这导致矛盾。因此 $s = 1$ 且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_i$。当 $\mathfrak{g}_i'$ 为单时， $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i' \oplus \mathfrak{g}_i'$ 的情形不可能成立，因为单李代数的伴随表示绝不会是四元数型。这就意味着 $\mathfrak{g}$ 是单的。□

4.2. **半单 qs-H 对称空间的分类**。 现在我们转向半单 qs-H 对称空间的分类。

定理 4.3。 ([CGW22a]) 一个半单四元数斜厄米对称空间 $(M = \mathsf{G}/\mathsf{L}\ Q, \omega, s)$ 在覆盖意义下，是以下对称空间之一：

$$M_1 = \mathsf{SO}^*(2n+2)/\mathsf{SO}^*(2n)\,\mathsf{U}(1),$$
$$M_2 = \mathsf{SU}(2+p,q)/(\mathsf{SU}(2)\,\mathsf{SU}(p,q)\,\mathsf{U}(1)),$$
$$M_3 = \mathsf{SL}(n+1,\mathbb{H})/(\mathsf{GL}(1,\mathbb{H})\,\mathsf{SL}(n,\mathbb{H})).$$

此外， 以下几何结构由L的中心部分提供：

- M_1 具有一个特殊的、与 Q相容的不变复结构 J，相应的不变度量 $g_J = \omega \circ J$ 是伪 *Kähler*。
- M_2 具有一个特殊的不变复结构 I，它与 Q 对易；相应的不变度量 $g_I = \omega \circ I$ 是四元数伪 *Kähler*。对于 $q = 0$，空间 M_2 是紧致的，且 g_I 是四元数 *Kähler*。
- M_3 具有一个特殊的不变拟复结构 I，它与 Q 对易；相应的不变度量 $g_I = \omega \circ I$ 是分裂符号的四元数伪 *Kähler*。

证明。 如上所述，要获得半单 qs-H 对称空间的分类，只需对半单四元数斜厄米 tiLas 进行分类。为此，我们的方法依赖于对 $\mathfrak{g}, \sigma$)（ $\mathfrak{g}$ 半单情形）的对称对进行标准分类。这可以沿用经典专著 [H78]. 中的方法，利用扩展 Dynkin 图来完成。

设 $(\mathfrak{g}, \sigma, Q_0, \omega_0)$ 是一个半单 qs-H tiLa，其典范分解为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$。由命题 4.2 可知，李代数 $\mathfrak{g}$ 是单的；由命题 4.1 可知，李子代数$\mathfrak{l}$ 的中心必定非平凡 $Z(\mathfrak{l}) \neq \{0\}$。这一事实简化了我们的考察，因为它将需要考虑的扩展 Dynkin 图限制为仅有 [H78 第 503] 页表 1 中的那些图。

该过程取决于 $Q_0 \cong \mathfrak{sp}(1)$ 与 $\rho(\mathfrak{l})$ 的交，我们将其记为

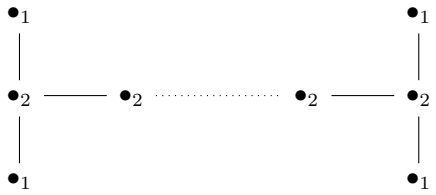
$$\mathfrak{s} := \rho(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{sp}(1),$$

其中 $\rho\colon \mathfrak{l} \to \mathsf{End}(\mathfrak{m})$ 是与四元组 $(\mathfrak{g}, \sigma, Q_0, \omega_0)$ 相关联的忠实表示。我们知道该交不可能是平凡的；若 $\mathfrak{s} = \{0\}$那么 ρ应当是一个四元数表示，而这由 [B00，推论 V.1 可知是不可能的。13]。实际上，由于 $\mathfrak{sp}(1)$ 不含任何二维真李子代数，因此该交 $\mathfrak{s}$只能是 1 维或 3 维的。

情形 A（维数$\mathfrak{s} = 1$）。若维数 $\mathfrak{s} = 1$，我们需要在 [H78第 503] 页的表 1 中查找这样一种情形：去掉 $\mathfrak{l}$的中心后，表示为四元数型。这是一个经典问题，很容易解决，因为只需从 [H78第 503] 页的表 1 中找出相关表示，再利用 [CS09第 612-615] 页的表格，即可判断该表示是否为四元数型。具体步骤如下：

- 考虑扩展 Dynkin 图中确定 σ 的两个节点，并根据 [CS09第 3.2 节中的步骤，将基本权 1 或 2 18] 赋给相连的节点，以描述李子代数 $\mathfrak{l}$ 在 $\mathfrak{m}$上的表示。注意，$\mathfrak{l}$ 由扩展 Dynkin 图中其余的节点确定。
- 接下来，利用 [CS09]中的表格所提供的指标信息，确定总指标是否为 -1，从而判断该表示是否为四元数型。

这一过程最终只得到一个符合条件的情形，即其扩展 Dynkin 图为

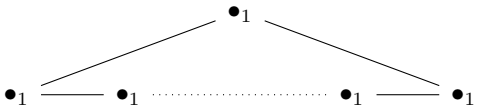


因此，只有一个维数为$\mathfrak{s} = 1$的符合条件的对称对，即

$$(\mathfrak{so}^*(2n+2), \mathfrak{so}^*(2n) \oplus \mathfrak{u}(1))\,,$$

它对应的对称空间为 M_1。

情形 B（维数$\mathfrak{s} = 3$）。若维数$\mathfrak{s} = 3$，则需查阅 [H78第 503] 页的表 1，寻找这样一种情形：从 $\mathfrak{sp}$ 中去掉一个 $\mathfrak{l}(1)$ 因子后，所得表示为四元数型。与前一种情形类似，我们将此表与 [CS09] 中的表格进行比较，以确定该表示是否为四元数型。在这种情形下，比较结果表明，只有 A型的扩展 Dynkin 图符合条件，其形式为



我们推得，存在两个维数为$\mathfrak{s} = 3$的符合条件的对称对，即

$$(\mathfrak{su}(2+p,q), \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(p,q) \oplus \mathfrak{u}(1))\,, \quad (\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{H}), \mathfrak{gl}(1,\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}))$$

这些对分别对应于对称空间 M_2 和 M_3。关于三个对称空间中每一个空间上附加几何结构的刻画，请参阅 [CCG25],另请参见 [P94]关于 M_1的情形。这就完成了我们的证明。□

注 4.4。设 $(M = \mathrm{G/L}\ Q, \omega, s)$ 是一个半单 qs-H 对称空间。那么，L 的中心包含一个不变的复结构或超复结构于 M 上。因此可得，$\mathfrak{l}$实际上是 $\mathfrak{g}$ 中 $Z_0 \in Z(\mathfrak{l})$ 的中心化子，即$\mathfrak{l} \cong C_{\mathfrak{g}}(Z_0)$。

5. Classification in the non-semisimple case

一般 qs-H 对称空间的分类依赖于 [CSw09]，中所述的一种几何构造，该构造给出了局部 qs-H 流形（另见 [CGW22a，第 6 节。2]）。如下文所示，这种方法也能得到半单 qs-H 对称空间。

起点是李代数 $\mathfrak{so}^*(2n+4)$ 的接触分次，如下所示：我们将 $\mathfrak{so}^*(2n+4)$ 表示为以下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} a & Y^*\mathbb{j} & d \\ X & A & Y \\ c & -X^*\mathbb{j} & -a^* \end{pmatrix},$$

其中 $a \in \mathbb{H}$、 $X, Y \in \mathbb{H}^n$、 $c, d \in \mathbb{R}$ 和 $A \in \mathfrak{so}^*(2n)$。这里，$\mathbb{j}$ 表示 $\mathbb{H}^n$ 上的标量二形式的矩阵，而 α^* 表示 α的共轭转置。于是，接触分次可描述为

$$\mathfrak{so}^*(2n+4) = \mathfrak{so}^*(2n+4)_{-2} \oplus \mathfrak{so}^*(2n+4)_{-1} \oplus \mathfrak{so}^*(2n+4)_0 \oplus \mathfrak{so}^*(2n+4)_1 \oplus \mathfrak{so}^*(2n+4)_2$$

与

$$\begin{aligned}
\mathfrak{so}^*(2n+4)_{-2} &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}, \\
\mathfrak{so}^*(2n+4)_{-1} &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 \\ 0 & -X^*\mathbb{j} & 0 \end{pmatrix} : X \in \mathbb{H}^n \right\} \cong \mathbb{H}^n, \\
\mathfrak{so}^*(2n+4)_0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & -a^* \end{pmatrix} : a \in \mathbb{H},\ A \in \mathfrak{so}^*(2n) \right\} \cong \mathbb{H} \oplus \mathfrak{so}^*(2n), \\
\mathfrak{so}^*(2n+4)_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y^*\mathbb{j} & 0 \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : Y \in \mathbb{H}^n \right\} \cong \mathbb{H}^n, \\
\mathfrak{so}^*(2n+4)_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : d \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

注意， $\mathfrak{g}_{\pm 2}$ 是一维的，且双线性形式（Levi 括号） $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-2}$是一个取值于 $\mathfrak{g}_{-2}$ 的标量二形式，因此是非退化的。令 $e := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_2$ 并令 $f := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{-2}$。分次元素 $h \in \mathfrak{g}_0$ 定义为

$$h = [e, f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

它对应于 $a = 1$ 和 $A = 0$，即 $h \in Z(\mathfrak{g}_0)$。还需注意， $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ 是一个海森堡代数，而 (e, h, f) 是一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组，二者都自然地与接触分次相关。另一方面，子代数 $\mathfrak{p}$:
$= \mathfrak{g}_{\geq} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$是 $\mathfrak{so}^*(2n+4)$ 的一个抛物子代数，我们将相应的 $\mathsf{SO}^*(2n+4)$ 抛物子群记为 $P \subset \mathsf{SO}^*(2n+4)$。众所周知，$(4n+1)$ 维实旗流形 $N := \mathsf{SO}^*(2n+4)/P$具有一个不变接触分布 $\mathscr{D}$ （见 [CS09，第4.2]节），

$$\mathscr{D} \cong \mathsf{SO}^*(2n+4) \times_P \big((\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{p})/\mathfrak{p}\big)\,.$$

于是，对于 N 的一个充分小的开子集 $U \subset N$，以及一个 1 维子代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{so}^*(2n+4)$，使得相应的右不变向量场在 U 上处处横截于 $\mathscr{D}$，存在一个局部叶空间

$$M := \exp(\mathfrak{t})\backslash U$$

使得 $q : U \to M$ 是 M上的标量 2-形式线丛。事实上，由同构 $(\mathrm{d}\ q)_x(\mathscr{D}_x) \cong T_{q(x)}M$在 M 上诱导的四元数结构，与在 q的纤维中选择 x 无关。此外，局部截面 $M \to U$ 通过 Levi 括号对应于局部几乎 qs-H

结构 M，其挠率类型为 $\mathcal{X}_4$。特别地，存在截面 $M \to U$，它们对应于 M 上文所述的 [CSw09], 中描述的局部（无挠）qs-H 结构，并构成 qs-H 结构的单参数族，其中对应的标量 2-形式相差一个正标量；另见 [CGW22b，注 1.6。]因此，两个子代数 $\mathfrak{t}$ 和 $\hat{\mathfrak{t}}$ 在 M 上提供局部同构的 qs-H 结构单参数族，当且仅当它们由$\mathsf{SO}^*(2n+4)$.

我们将 现在证明，这一构造能够给出所有 qs-H tiLas 的完整分类。
首先我们将 建立一个重要的双射。

命题 5.1. *qs-H tiLas* 的同构类单参数族$(\mathfrak{g}, \sigma, Q_\omega, e^{2t}\omega_o)\,(t \in \mathbb{R})$与由以下形式的元素表示的 *1* 维子代数$\mathsf{SO}^*(2n+4)$共轭类之间存在双射$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{so}^*(2n+4)$

$$\tau = \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & A & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

使得 $a \in \mathfrak{sp}(1)$、$A \in \mathfrak{so}^*(2n)$ 和 $d \in \mathbb{R}$ 满足矩阵方程

$$Xd + 2AXa - Xa^2 - A^2X = 0 \tag{5.2}$$

对于所有的 $X \in \mathbb{H}^n$。对于这样的代表元 τ，在 $\mathfrak{g}$ 的标准分解中，约化补空间 $\mathfrak{m}$ 由下式给出

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & (AX - Xa)^* \mathbb{j} & 0 \\ X & 0 & AX - Xa \\ 0 & -X^* \mathbb{j} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

证明。我们首先证明，由 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{so}^*(2n+4)$ 在 N 的局部叶空间 $M = \exp(\mathfrak{t})\backslash U$ 上给出的 qs-H 结构单参数族 $(Q, e^{2t}\omega)$ $(t \in \mathrm{R})$，具有所声称的性质，并由此得到 qs-H 对称空间 $(M, Q, e^{2t}\omega, s)$。回顾一下，$(Q, e^{2t}\omega)$ 的 qs-H 向量场的李代数同构于商 $N_{\mathfrak{so}^*(2n+4)}(\mathfrak{t})/\mathfrak{t}$，见 [˜CS17]。现在考虑 $\mathfrak{so}^*(2n+4)$ 中形如下式的元素 $\tilde{}X$

$$\begin{pmatrix} 0 & (AX - Xa)^* \mathbb{j} & 0 \\ X & 0 & AX - Xa \\ 0 & -X^* \mathbb{j} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $X \in \mathbb{H}^n$ 且 A，a 由所声称的代表元 τ 给出，属于 $\mathfrak{t}$，见（5.1）。那么，在我们的假设下可得

$$[\tilde{X}, \tau] = \begin{pmatrix} 0 & (Xd + 2AXa - Xa^2 - A^2X)^* \mathbb{j} & 0 \\ 0 & 0 & Xd + 2AXa - Xa^2 - A^2X \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

˜因此 $X \in Z_{\mathfrak{so}^*(2n+4)}(\mathfrak{t})/\mathfrak{t} \subset N_{\mathfrak{so}^*(2n+4)}(\mathfrak{t})/\mathfrak{t}$ 对所有 $X \in \mathrm{H}^n$ 均成立。记为

$$\mathfrak{m} \subset Z_{\mathfrak{so}^*(2n+4)}(\mathfrak{t})/\mathfrak{t}$$

˜由所有这类 X 张成的空间。则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ 是一个 tiLa，其对合定义为：在 $\mathfrak{m}$ 部分取 $-\mathrm{id}_{\mathfrak{m}}$，在 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ 部分取 $\mathrm{id}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]}$。这是因为有包含关系 $[[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$，由 $Z_{\mathfrak{so}^*(2n+4)}(\mathfrak{t})/\mathfrak{t}$. 中不存在 $\mathfrak{so}^*(2n+4)_1$ 的元素可知。于是，根据构造，这是一个 qs-H tiLa。事实上，我们有 $\omega_o \in \Lambda^2\mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{t}$，它对应于 Levi 括号，并在对称变换下保持不变（因为$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset Z_{\mathfrak{so}^*(2n+4)}(\mathfrak{t})/\mathfrak{t}$）。现在考虑两个阿贝尔子代数 $\mathfrak{t}, \hat{\mathfrak{t}} \subset \mathfrak{so}^*(2n+4)$，它们分别由 a, A, d 和 $\hat{a}, \hat{A}, \hat{d}$ 表示。假设它们由元素 $g \in \mathsf{SO}^*(2n+4)$ 共轭。事实上，该元素必须属于 $\mathsf{SL}(2, \mathrm{R}) \times \mathsf{Sp}(1)\ \mathsf{SO}^*(2n)$，其中 $\mathsf{SL}(2, \mathrm{R})$ 对应于 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 (e, h, f)。ˆ ˆ 这是因为，否则由 a, A, d 和 $\hat{a}, A, d$ 给出的代表元将不会彼此映射。注意，$\mathsf{SL}(2, \mathrm{R})$ 的作用将 a, A, d（经过重新缩放）映射为 $e^{2t}a, e^{2t}A, e^{4t}d$，其中某个 $t \in \mathrm{R}$。由此在相应的 tiLas 之间诱导出李代数同构 $t\,\mathrm{id}_{\mathfrak{m}} \oplus \mathrm{id}_{\mathfrak{l}}$，

它对标量二形式进行缩放，即保持单参数族不变。另一方面，$(b,\ B) \in \mathrm{Sp}(1)\,\mathrm{SO}^*(2n)$ 的作用将 $a,\ A,\ d$ 映射为 $bab^{-1},\ BAB^{-1},\ d$，并通过 $\mathrm{Sp}(1)\,\mathrm{SO}^*(2n)$ 的伴随作用诱导出 qs-H tiLas 的同构。因此我们得出结论：

$$\hat{a} = e^{2t} bab^{-1}\,, \quad \hat{A} = e^{2t} BAB^{-1}\,, \quad \hat{d} = e^{4t} d \tag{5.3}$$

相应的 qs-H tiLas 属于同一个单参数族。

反过来，对于任意一个维数为 $4n$ 的几乎 qs-H 流形（M, Q, ω），[˜CS17，定理 4] 给出了一种构造，可提供类型为 $(\mathrm{SO}^*(2n+4)\ P)$ 的抛物接触结构，其中包含一个线丛 $q\colon U \to M$，其定义在 M 上；以及一个接触分布 $\mathcal{D}$，定义在全空间 U 上。该构造仅取决于 ω 的共形类，因此，对于整个标量 2-形式单参数族 $e^{2t}\omega$，结果都相同。此外，由 [˜CS17，定理 5] 可知，每个 qs-H 变换都会提升为抛物接触结构的同构。特别地，对于单参数族中的一个 qs-H 对称空间（$M, Q, e^{2t}\omega, s$）以及任意 $y \in U$，存在唯一的抛物接触结构自同构 s_y，使得 $s_y(y) = y$，并且 s_y 是 $s_{q(y)}$ 的提升，即，

$$(\mathrm{d}\, s_y)_y|_{\mathcal{D}_y} = -\,\mathrm{id}_{\mathcal{D}_y}\,. \tag{5.4}$$

此时，回顾一下，抛物接触结构的基本不变量是调和挠率（用 [CS09，第 419] 页中的术语表示），它是向量丛 $\Lambda^2\mathcal{D}^* \otimes \mathcal{D}$ 的一个特殊截面。由于根据 (5.4)，微分 $(\mathrm{d}\, s_y)_y|_{\mathcal{D}_y}$ 在 $\Lambda^2\mathcal{D}^* \otimes \mathcal{D}$ 上的作用为 $-\mathrm{id}$，因此该调和挠率应当为零。因此，抛物接触结构在局部上同构于齐性空间 $N = \mathrm{SO}^*(2n+4)/P$，即 $\mathcal{D} \cong \mathscr{D}$。然后，按照构造 [˜CS17，定理 4],，存在一个阿贝尔子代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{so}^*(2n+4)$，使得相应的右不变向量场是垂直的，即属于 $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\ q)$。此外，与 qs-H 对称空间 $(M, Q, e^{2t}\omega, s)$ 相对应的 qs-H tiLa $(\mathfrak{g}, \sigma, Q_o, e^{2t}\omega_o)$ 提升为子代数 $\mathfrak{g}' \subset N_{\mathfrak{so}^*(2n+4)}(\mathfrak{t})$。于是，$\sigma$ 对应于由元素 $-\mathrm{id} \in \mathrm{SO}^*(2n) \subset P.$ 的共轭所诱导的对合。因此，在由子群 $\exp(\mathfrak{so}^*(2n+4)_2) \subset P$中的某个元素进行共轭之后，我们可以将 $\mathfrak{t}$化为由 a, A, d 表示的形式，如 (5.1) 中所示。此外，约化补空间 $\mathfrak{m}$ 有一个提升 $\mathfrak{m}' \subset N_{\mathfrak{so}^*(2n+4)}(\mathfrak{t})$，其形式为

$$\begin{pmatrix} 0 & f(X)^*\mathbb{j} & 0 \\ X & 0 & f(X) \\ 0 & -X^*\mathbb{j} & 0 \end{pmatrix},$$

对所有 $X \in \mathrm{H}^n$ 以及某个线性映射 $f : \mathrm{H}^n \to \mathrm{H}^n$。这是因为 $\mathfrak{so}^*(2n+4)_{\pm 1}$ 是相应对合的 (-1)-特征子空间。然后，直接计算可得，条件 $[\mathfrak{m}', \mathfrak{t}] = 0$ 推出 $f(X) = AX - Xa$，并且对所有 $X \in \mathrm{H}^n$，都有 $Xd + 2AXa - Xa^2 - A^2X = 0$。现在回想一下，根据定理 3.4，qs-H tiLas 的同构对应于相应对称空间之间的 qs-H 同构。此外，根据 [˜CS17，定理 5] 和 [CS09，命题 1.5，2] 该同构应可提升为某个 $\mathrm{SO}^*(2n+4)$ 元素的左乘。这表明，相应的阿贝尔子代数 $\mathfrak{t}$应属于同一个 $\mathrm{SO}^*(2n+4)$-共轭类，并由此完成证明。□

现在我们利用命题5.1 来构造 qs-H tiLas 的例子。正如我们稍后将看到的，这些例子涵盖了所有可能性，并给出 qs-H tiLas 的完整分类。接下来，我们用 $I_{p,\ q}$ 表示对角线上含有 p 个 1 和 q 个负 1 的对角矩阵。

例 5.2。设 n为偶数，并令 $\mathbb{j} = \begin{pmatrix} 0 & I_{\frac{n}{2}\ 0} \\ I_{0\ \frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}$,,，也就是说，我们将 $\mathbb{H}^n$ 与线性模型 [EH] 通过四元数 Darboux 基进行识别，参见 [CGW22a,⁻ 附录 A。2]。另设 p, q 为

整数 p 数，使得 $0 \le p, q, p+q \le \frac{n}{2}$ 并考虑 τ 的生成元 $\mathfrak{t}$，其形式为

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{q,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{p,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

也就是说，τ 可作分块分解，其各块的大小依次为 1、p、q、$\frac{n}{2} - (p+q)$ p、q、$\frac{n}{2} - (p+q)$ 和 1。因此，τ 是一个 $(n+2) \times (n+2)$ 四元数矩阵。于是，τ 满足 (5.2)，故由命题 5.1 可得一个 qs-H tiLa，其中李代数 $\mathfrak{g}$ 由 $\mathfrak{g} = \big([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]/\mathfrak{t}\big) \oplus \mathfrak{m}$ 定义，而 $\mathfrak{m}$ 具有如下分块矩阵表示

$$\mathfrak{m} = \begin{pmatrix} 0 & -X_1^* & 0 & 0 & 0 & X_2^* & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 \\ X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^* & X_2^* & Z_2^* & -X_1^* & -Y_1^* & -Z_1^* & 0 \end{pmatrix}.$$

注意，$\mathfrak{m}$ 的各块与代表元 τ 的各块大小相同。因此 $\mathfrak{g}$ 允许分块矩阵表示

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} S_1 & -X_1^* & 0 & 0 & 0 & X_2^* & 0 & 0 \\ X_1 & S_2 & 0 & 0 & 0 & S_3^* & 0 & 0 \\ Y_1 & H_1 & S_4 & R_1 & S_3 & H_2 & R_2^* & X_2 \\ Z_1 & R_3 & 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ Y_2 & H_3 & S_3^* & R_4^* & S_2 & -H_1^* & -R_3^* & X_1 \\ X_2 & S_3 & 0 & 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ Z_2 & R_4 & 0 & 0 & 0 & -R_1^* & 0 & 0 \\ H_4 & Y_2^* & X_2^* & Z_2^* & -X_1^* & -Y_1^* & -Z_1^* & S_1 \end{pmatrix} /\mathfrak{t}.$$

这里，对于 $1 \le b \le 4$，我们分别有 X_a，Y_a，$Z_a \in \mathfrak{m}$，其中 $1 \le a \le 2$ 和 S_b，H_b，$R_b \in [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$，且

$$S_1 = -S_1^*, \quad S_2 = -S_2^*, \quad S_4 = -S_4^*, \quad H_2 = H_2^*, \quad H_3 = H_3^*, \quad H_4 = H_4^*.$$

于是我们看到，矩阵 X_1，X_2，S_1，……，S_4 张成了 $\mathfrak{g}$ 的半单部分，它同构于 $\mathfrak{sp}(p+1,\ q)$。此外，$\mathfrak{g}$ 的根基 $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ 分解为两个特别的部分

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathrm{qH}}/\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{r}_{\mathrm{deg}},$$

其中 $\mathfrak{r}_{\mathrm{qH}}$ 由矩阵 Y_1，Y_2，H_1，……，H_4 生成，而 $\mathfrak{r}_{\mathrm{deg}}$ 由 Z_1，Z_2，R_1，……，R_4 生成。注意，$\mathfrak{r}_{\mathrm{qH}}$ 可以排列成块矩阵分解，其块大小为 1，p，q，即

$$\begin{pmatrix} H_4 & Y_2^* & -Y_1^* \\ Y_1 & H_1 & H_2 \\ Y_2 & H_3 & -H_1^* \end{pmatrix}$$

并且，由维数关系可知，它同构于 $\mathfrak{sp}(p+1,\ q)$ 的标准表示上的四元数厄米标量积空间。特别地，τ 属于 $\mathfrak{r}_{\mathrm{qH}}$，并表示定义李代数 $\mathfrak{sp}(p+1,\ q)$ 的非退化四元数厄米标量积。我们指出：

- 对于 $p+q=0$，我们有 $\tau = H_4$，李代数 $\mathfrak{g}$ 恰好是线性模型 [E H]。
- 对于一般的 p，q 半单部分 $\mathfrak{sp}(p+1,\ q)$ 的轨道是四元数伪 K¨ahler 对称空间 Sp$(p+1,\ q)$/(Sp(1) Sp$(p,\ q)$)。

现在让我们重点介绍几个低维情形，其中会出现单李代数的特殊同构。

(1) 考虑 $n=2$, $p=1$ 和 $q=0$ 的情形。在这种情况下，分块大小为 (1，1，0，0，1，0，0，1)，李代数 $\mathfrak{g}$ 的矩阵表示为

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} S_1 & -X_1^* & 0 & 0\\ X_1 & S_2 & 0 & 0\\ Y_2 & H_3 & S_2 & X_1\\ H_4 & Y_2^* & -X_1^* & S_1\end{pmatrix} : S_1,S_2\in\mathfrak{sp}(1), X_1,Y_2\in\mathbb{H}, H_3,H_4\in\mathbb{R}\right\}/\mathfrak{t},$$

因此 $\mathfrak{g}$ 是 15 维的。利用同构 $\mathfrak{sp}(2)\cong\mathfrak{so}(5)$，我们可以将 Levi 分解表示为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(5)\oplus\mathbb{R}^5,$，其中 $\mathfrak{so}(5)$ 通过标准表示作用于 $\mathbb{R}^5$。此外，我们看到 $\mathfrak{l}=\mathfrak{so}(4)\oplus\mathbb{R}$，且约化补空间 $\mathfrak{m}$ 为 8 维，

$$\mathfrak{m}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & -X_1^* & 0 & 0\\ X_1 & 0 & 0 & 0\\ Y_2 & 0 & 0 & X_1\\ 0 & Y_2^* & -X_1^* & 0\end{pmatrix} : X_1,Y_2\in\mathbb{H}\right\}.$$

这给出了非半单对称空间

$$(\mathrm{SO}(5)\ltimes\mathbb{R}^5)/(\mathrm{SO}(4)\times\mathbb{R}).$$

在这种情况下，半单四元数 Kähler 对称空间是陪集 SO(5)/SO(4)，即 4维球面 $S^4\cong\mathbb{HP}^1$。

(2) 现在考虑 $n=2$, $p=0$ 和 $q=1$ 的情形。这里分块大小为 (1，0，1，0，0，1，0，1)，李代数 $\mathfrak{g}$ 的矩阵表示为

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} S_1 & 0 & X_2^* & 0\\ Y_1 & S_4 & H_2 & X_2\\ X_2 & 0 & S_4 & 0\\ H_4 & X_2^* & -Y_1^* & S_1\end{pmatrix} : S_1,S_4\in\mathfrak{sp}(1), X_2,Y_1\in\mathbb{H}, H_2,H_4\in\mathbb{R}\right\}/\mathfrak{t}.$$

因此，$\mathfrak{g}$ 仍然是 15 维的。利用同构 $\mathfrak{sp}(1,1)\cong\mathfrak{so}(4,1)$，我们可以将 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 分解表示为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(4,1)\oplus\mathbb{R}^5,$，其中 $\mathbb{R}^5$ 是 $\mathfrak{so}(4,1)$ 的标准表示。在这种情况下，我们得到 $\mathfrak{l}=\mathfrak{so}(4)\oplus\mathbb{R}$，并且

$$\mathfrak{m}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & X_2^* & 0\\ Y_1 & 0 & 0 & X_2\\ X_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & X_2^* & -Y_1^* & 0\end{pmatrix} : X_2,Y_1\in\mathbb{H}\right\}.$$

这对应于一个 8 维的非半单对称空间

$$(\mathrm{SO}(4,1)\ltimes\mathbb{R}^5)/(\mathrm{SO}(4)\times\mathbb{R})$$

其中，半单四元 Kähler 对称空间是前一个空间的非紧对偶，也就是说，对称空间 SO(4，1)/SO(4)。

例 5.3。 假设 n 为奇数，并令

$$\mathbb{j}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{\frac{n-1}{2},0}\\ 0 & j & 0\\ I_{0,\frac{n-1}{2}} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

这一选择通过四元数 Darboux 基的一种推广，将 $\mathbb{H}^n$ 与线性模型 [EH] 联系起来，参见 [CGW22a，命题 A。9]。设 p，q 为满足以下条件的整数参数：$0\le p$，q，$p+q\le\frac{n-1}{2}$，

并考虑如下形式的生成元 $\tau \in \mathfrak{t}$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{q,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{p,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，在这种情况下，四元数矩阵 τ（$n+2$）$\times$（$n+2$）可作分块分解，分块大小为 $1, p, q,$ $\frac{n-1}{2}$ $-$（$p+q$）$1, p, q, \frac{n-1}{2}$ $-$（$p+q$）$, 1$。¯容易看出， τ满足 (5.2)，因此由命题 5.1 可得一个 qs-H tiLa，其李代数 $\mathfrak{g}$ 由 $\mathfrak{g} = \big([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]/\mathfrak{t}\big) \oplus \mathfrak{m}$ 定义，其中约化补空间 $\mathfrak{m}$ 为

$$\mathfrak{m} = \begin{pmatrix} 0 & -X_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & X_2^* & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 \\ X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^* & X_2^* & Z_2^* & -Z_3^* j & -X_1^* & -Y_1^* & -Z_1^* & 0 \end{pmatrix}.$$

注意， $\mathfrak{m}$ 的分块结构与代表元 τ 的分块大小相符。因此，$\mathfrak{g}$ 具有如下分块矩阵表示

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} S_1 & -X_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & X_2^* & 0 & 0 \\ X_1 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_3^* & 0 & 0 \\ Y_1 & H_1 & S_4 & R_1 & R_6 & S_3 & H_2 & R_2^* & X_2 \\ Z_1 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ Z_3 & R_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & jR_6^* & 0 & 0 \\ Y_2 & H_3 & S_3^* & R_4^* & -R_5^* j & S_2 & -H_1^* & -R_3^* & X_1 \\ X_2 & S_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ Z_2 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1^* & 0 & 0 \\ H_4 & Y_2^* & X_2^* & Z_2^* & -Z_3^* j & -X_1^* & -Y_1^* & -Z_1^* & S_1 \end{pmatrix} /\mathfrak{t}$$

其中，对于 $1 \le b \le 4$， $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, \ldots, Z_3 \in \mathfrak{m}$ 和 $S_b, H_b, R_1, \ldots, R_6 \in [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$分别为

$$S_1 = -S_1^*, \quad S_2 = -S_2^*, \quad S_4 = -S_4^*, \quad H_2 = H_2^*, \quad H_3 = H_3^*, \quad H_4 = H_4^*.$$

与前一个例子类似，我们看到矩阵 $X_1, X_2, S_1, \ldots, S_4$ 张成了 $\mathfrak{g}$ 的半单部分，它与 $\mathfrak{sp}(p+1, q)$ 同构。此外，在此情形下， $\mathfrak{g}$ 的根基 $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ 的分解 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathrm{qH}}/\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{r}_{\mathrm{deg}}$ 满足： $\mathfrak{r}_{\mathrm{qH}} =$ 分别张成 $\{Y_1, Y_2, H_1, \ldots, H_4\}$，而 $\mathfrak{r}_{\mathrm{deg}} =$张成 $\{Z_1, Z_2, Z_3, R_1, \ldots, R_6\}$。同样，分量 $\mathfrak{r}_{\mathrm{qH}}$ 与 $\mathfrak{sp}(p+1, q)$ 的标准表示上的四元数厄米标量积空间同构，其中 $\tau \in \mathfrak{r}_{\mathrm{qH}}$ 表示定义李代数 $\mathfrak{sp}(p+1, q)$ 的非退化四元数厄米标量积。特别地，当 $p+q=0$ 时，我们同样得到 $\tau = H_4$，而李代数 $\mathfrak{g}$ 恰好就是线性模型 [E H], ; 而对于一般的 p, q，半单部分 $\mathfrak{sp}(p+1, q)$ 的轨道再次是四元数伪 K¨ahler 对称空间 $\mathrm{Sp}(p+1, q)/(\mathrm{Sp}(1)\ \mathrm{Sp}(p, q))$。L

et us disc考虑一个低维情形。假设 $n=3$、 $p=1$、 $q=0$。在这种情况下， $\mathfrak{g}$ 具有

矩阵表示

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} S_1 & -X_1^* & 0 & 0 & 0\\ X_1 & S_2 & 0 & 0 & 0\\ Z_3 & R_5 & 0 & 0 & 0\\ Y_2 & H_3 & -R_5^*j & S_2 & X_1\\ -H_3 & Y_2^* & -Z_3^*j & -X_1^* & S_1 \end{pmatrix} : X_1,Y_2,Z_3,R_5\in\mathbb{H}, S_1,S_2\in\mathfrak{sp}(1), H_3\in\mathbb{R}\right\}$$

由此得到一个 12 维非半单 qs-H tiLa 对称空间，其约化补空间 $\mathfrak{m}$ 具有如下形式

$$\mathfrak{m}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & -X_1^* & 0 & 0 & 0\\ X_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ Y_2 & 0 & 0 & 0 & X_1\\ 0 & Y_2^* & -Z_3^*j & -X_1^* & 0 \end{pmatrix} : X_1,Y_2,Z_3\in\mathbb{H}\right\}.$$

注意，块 $\begin{pmatrix} S_1 & -X_1^*\\ X_1 & S_2\end{pmatrix}$ 表示半单部分，它对应于四元数 K¨ahler 对称空间 $\mathrm{HP}^1=\mathrm{Sp}(2)/($ $\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1))$。 $\mathfrak{g}$ 的可解部分作为向量空间，是 Sp(2) 的标准表示 H^2 与 H^2 上四元数 Hermitian 标量积空间的直和。然而，请注意，可解部分上的李括号包含配对

$$[(u,v),(w,z)]=\begin{pmatrix} z^*ju-v^*jw & z^*jv-w^*jz\\ w^*ju-u^*jw & w^*jv-u^*jz\end{pmatrix}/(\mu\,\mathrm{Id}),\quad \text{for}\quad (u,v),(w,z)\in\mathbb{H}^2,\mu\in\mathbb{R},$$

其中 $\mu\mathrm{Id}$ 表示 $\mathfrak{t}$，因此在此情形下，根基不是阿贝尔的。

现在我们通过编码命题 4.3 的方法来描述半单 qs-H tiLas 的实现（见定理 5.1）。

例 5.4. 对于一般的 $n>1$，考虑 $(n+2)\times(n+2)$ 四元数矩阵 x

$$\tau=\begin{pmatrix} i & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & i\end{pmatrix}$$

其分块分解为大小为 1 的分块，n，1。令 $\mathbb{j}=j$，我们可以通过斜厄米基将 $\mathbb{H}^n$ 与线性模型 [EH] 对应起来，参见 [CGW22a，A 节。2]容易看出，τ 满足（5.2），因此根据命题5.1 我们得到一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的 qs-H tiLa，由 $\mathfrak{g}=([\mathfrak{m},\mathfrak{m}]/\mathfrak{t})\oplus\mathfrak{m}$定义；此时约化补空间 $\mathfrak{m}$ 为

$$\mathfrak{m}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & iX^*j & 0\\ X & 0 & -Xi\\ 0 & -X^*j & 0\end{pmatrix} : X\in\mathbb{H}^n\right\}.$$

同样，$\mathfrak{m}$ 的分块结构与 τ的分块大小相匹配。因此，$\mathfrak{g}$ 具有如下分块矩阵表示

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} S_1 & iX^*j & 0\\ X & S_2 & -Xi\\ 0 & -X^*j & S_1\end{pmatrix} : S_1\in\mathfrak{u}(1), S_2\in\mathfrak{so}^*(2n), X\in\mathbb{H}^n\right\},$$

显然，这对应于简单 qs-H 对称空间 $\mathrm{SO}^*(2n+2)/\mathrm{SO}^*(2n)\,\mathrm{U}(1)$。

例 5.5。 对于 $n=p+q>1$，考虑 $(n+2)\times(n+2)$ 四元数矩阵

$$\tau=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & jI_{p,q} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

采用分块分解，各块大小为 1，n，1。此外，令$\mathbb{j}=j$，使得我们可以通过$\mathbb{H}^n$ 与 [EH] 之间的斜厄米基进行识别。矩阵 τ 满足（5.2），因此再次得到

根据命题5.1，我们得到一个李代数为 $\mathfrak{g}$、由 $\mathfrak{g}=\big([\mathfrak{m},\mathfrak{m}]/\mathfrak{t}\big)\oplus\mathfrak{m}$定义的 qs-H tiLa。在这种情况下，约化补空间 $\mathfrak{m}$ 为

$$\mathfrak{m}=\left\{\begin{pmatrix}0 & X^*I_{p,q} & 0\\ X & 0 & jI_{p,q}X\\ 0 & -X^*j & 0\end{pmatrix}:X\in\mathbb{H}^n\right\},$$

其中各分块与 τ 的分块大小相同。因此，$\mathfrak{g}$ 具有如下分块矩阵表示

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}S_1 & X^*I_{p,q} & 0\\ X & S_2 & jI_{p,q}X\\ 0 & -X^*j & S_1\end{pmatrix}:S_1\in\mathfrak{sp}(1),S_2\in\mathfrak{u}(p,q),X\in\mathbb{H}^n\right\}.$$

这对应于简单 qs-H 对称空间 SU(2n + 2)/(SU(2) SU(p, q) U(1))。

例 5.6。对于任意偶数 n，考虑如下 (n + 2) × (n + 2) 四元数矩阵 τ

$$\tau=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & I_{\frac{n}{2},0} & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{0,\frac{n}{2}} & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

其分块大小为 1，$\frac{n}{2}$，$\frac{n}{2}$，1。此外，通过四元数 Darboux 基，将 H^n 与 [EH] 进行识别，并令

$$\mathbb{j}=\begin{pmatrix}0 & I_{\frac{n}{2},0}\\ I_{0,\frac{n}{2}} & 0\end{pmatrix}.$$

同样，矩阵 τ 满足（5.2），且命题5.1 给出了一个李代数为 $\mathfrak{g}$、由 $\mathfrak{g}=\big([\mathfrak{m},\mathfrak{m}]/\mathfrak{t}\big)\oplus\mathfrak{m}$ 定义的 qs-H tiLa。在此情形下，约化补空间 $\mathfrak{m}$ 为

$$\mathfrak{m}=\left\{\begin{pmatrix}0 & X_2^* & X_1^* & 0\\ X_1 & 0 & 0 & X_1\\ X_2 & 0 & 0 & -X_2\\ 0 & X_2^* & -X_1^* & 0\end{pmatrix}:X_1,X_2\in\mathbb{H}^{\frac{n}{2}}\right\},$$

其中各分块与 τ 的分块大小相同。因此，对于李代数 $\mathfrak{g}$，我们得到如下分块矩阵表示

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}S_1 & X_2^* & X_1^* & 0\\ X_1 & S_2 & 0 & X_1\\ X_2 & 0 & -S_2^* & -X_2\\ 0 & X_2^* & -X_1^* & S_1\end{pmatrix}:S_1\in\mathfrak{sp}(1),S_2\in\mathfrak{gl}(\frac{n}{2},\mathbb{H}),X_1,X_2\in\mathbb{H}^{\frac{n}{2}}\right\}.$$

这对应于单对称空间 SL($\frac{n}{2}$ + 1，H)/(GL(1，H) SL($\frac{n}{2}$，H))。

现在我们将证明，例 5.2-5.6 给出了 qs-H tiLas 的完整分类。在此步骤中，我们将使用 $\mathfrak{sp}$(1) 和$\mathfrak{so}^*(2n)$ 所对应李代数的若尔当块标准形分类，见 [DPWZ83，表 III]。接下来，我们用 $J_r(\lambda)$ 表示大小为 r、对应特征值 $\lambda\in\mathbb{H}$的标准若尔当块，其中单位元位于对角线下方，即

$$J_r(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{pmatrix}.$$

定理 5.7. *qs-H tiLas* 的同构类单参数族与以下四元数矩阵一一对应 $(\mathfrak{g},\sigma,Q_o,e^{2t}\omega_o)$ $(t\in\mathbb{R})$：示例 τ *5.2*-5.6中给出的矩阵。

证明。 对于阿贝尔子代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{so}^*(4n+2)$，我们可以在（5.1）定义的作用下选取一个代表元 $\tau \in \mathfrak{t}$，其形式为，并检验它是否满足（5.2）给出的条件。回顾一下， τ 取决于 $a \in \mathfrak{sp}(1)$， $A \in \mathfrak{so}^*(2n)$ 以及 $d \in \mathbb{R}$。

根据 [DPWZ83] 以及 $\mathfrak{so}^*(2n)$ 的若尔当块分类，并且根据 $\mathfrak{sp}(1)$，我们可以通过组合以下标准形构造矩阵 τ：

(1) $A \in \mathfrak{so}^*(2n)$ 具有分块对角形式，其分块如下（参见 [DPWZ83]，表 III]) 中的情形 (29)–(31))

$$J_{n_u}(0)\,, \qquad J_{n_v}(b_v j)\,, \qquad J_{n_w}(\beta_w) \oplus J_{n_w}(-\beta_w)^*\,,$$

对于 $u \in U, v \in V, w \in W$（用于标记各分块的指标），有

$$2n = \sum_{u\in U} n_u + \sum_{v\in V} n_v + 2\sum_{w\in W} n_w\,.$$

此外，我们有 $0 < b_v \in \mathbb{R}$ 和 $\beta_w \in \mathbb{C}$，其中 $\mathbb{Re}(\beta_w) > 0$，$\mathbb{Im}(\beta_w) \geq 0$，对于 $v \in V$，$w \in W$。注意，某些情形下 j有两种可能，参见 [DPWZ83]，表 III]中的情形 (30)–(31)。[1](2) $a = \mu \cdot i \in \mathfrak{sp}(1)$，其中某个标量为 $\mu \in \mathbb{R}$，且 $d \in \mathbb{R}$。

现在，根据（5.3）中定义的作用，我们仍可对 a、A、d 分别通过 $e^{2t}a$、$e^{2t}A$和 $e^{4t}d$进行缩放。显然，我们可以分别考察每个块是否满足条件（5.2）；注意，条件（5.2）的若干解能够拼接成一个解，当且仅当它们具有相同的 a 和 d。

应用这一过程，首先注意到，对于三阶幂零元，在（5.2）中只有矩阵 A^2 有贡献。因此，若尔当块的大小只能为 $n_u \leq 2$、$n_v \leq 2$ 和 $n_w \leq 2$。对于二阶幂零元，我们看到，如果 $n_u = n_v = n_w = 2$ 对于 $u \in U$、$v \in V$、$w \in W$成立，那么条件

$$\{xa = 0, \quad 2b_v jx + xa = 0, \quad 2\beta_w x + xa = 0\}$$

必须对所有 $x \in \mathbb{H}$成立。因此，若有 $a = 0$，则 $n_u = 2$ 是可能的，而 $d = 0$可由（5.2）推出；直接计算表明其他情形均不可能，即对于所有 $n_v = 1$、$n_w = 1$， $v \in V$以及 $w \in W$。

在 $n_u = n_v = n_w = 1$的情况下，对于 $u \in U$， $v \in V$以及 $w \in W$，由（5.2）可得条件

$$\{xd - xa^2 = 0, \quad xd + 2b_v jxa - xa^2 + (b_v)^2 x = 0, \quad xd + 2\beta_w xa - xa^2 - \beta_w^2 x = 0\}$$

对所有 $x \in \mathrm{H}$ 都必须成立。因此，在这里经过重新缩放后，我们推得，$(a = 0,\ d = 0)$ 和 $(a = i,\ d = -1)$ 是 $u \in U$ 的仅有解，三元组 $(a = 0,\ b_v = 1,\ d = -1)$ 是 $v \in V$ 的唯一解，而三元组 $(a = 0,\ d = 1,\ \beta_w = 1)$ 是 $w \in W$ 的唯一解。

综上，以上分析得出以下可能的组合：

(i) $a = d = 0$ 和 A 由块 $J_1(0)$ 和 $J_2(0)$ 组成，分别给出例 5.2 和例 5.3 中所述的代表元$\tau \in \mathfrak{t}$。这是通过比较 [DPWZ83] 中 j 的约定（参见 [DPWZ83]，中表 III 的 K 列，取决于 $\kappa = \pm 1$，对应条目 (29)），与我们在 [CGW22a 第 A.2] 节四元数 Darboux 基中对 j 的约定而得出的。这意味着，对于 $\kappa = 1$，两种约定相同；但对于 $\kappa = -1$，两种约定相差一个共轭转置。此外，请注意，这两个例子中出现的参数 p、q 可以作如下理解：

- 参数 p 是满足 $\kappa = 1$的若尔当块 $J_2(0)$ 的数量。
- 参数 q 是满足 $\kappa = -1$的若尔当块 $J_2(0)$ 的数量。

请注意，对于第二种情况，若尔当块 $J_2(0)$ 在四元数 Darboux 基中以其共轭转置的形式出现。

(ii) $a = i$， $d = -1$ 和 $A = 0$。此情形给出的代表元为 $\tau \in \mathfrak{t}$，见例5.4。(iii) $a = 0$， $d = -1$ 和 A 由以下类型的若尔当块组成： $J_1(j)$。这对应于 $\tau \in \mathfrak{t}$ 例5.5中描述的代表元。特别地，参数 p， q 的编码方式与情形 (i) 完全相同，只需查看 [DPWZ83]，表 III]中的条目 (30)，而非条目 (29)。

[1]我们提到，在 [DPWZ83] 中，四元数由 2×2 复矩阵表示。

(iv) $a=0$, $d=1$ 和 A 由以下类型的块组成： $J_1(1)\oplus J_1(-1)$。这给出了代表元$\tau\in\mathfrak{t}$，见例5.6。

由于这些情形涵盖了所有可行的组合，这就完成了证明。 □

定理 1.2 在引言中的表述现在由定理 4.3 和 5. 的组合得到。 7.

注 5.8。 对 $B_{\mathfrak{m}}$ 的 Killing 型的限制 $\mathfrak{so}^*(2n+4)$ 到 $\mathfrak{m}$ 对于定理 5.7 中的 qs-H tiLas，是实迹的倍数

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}0 & (AX-Xa)^*\mathbb{j} & 0\\ X & 0 & AX-Xa\\ 0 & -X^*\mathbb{j} & 0,\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & (AY-Ya)^*\mathbb{j} & 0\\ Y & 0 & AY-Ya\\ 0 & -Y^*\mathbb{j} & 0,\end{pmatrix}\right)$$
$$=\mathbb{R}\mathfrak{e}\big((AX-Xa)^*\mathbb{j}Y-X^*\mathbb{j}(AY-Ya)\big)+\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}\left(X(AY-Ya)^*\mathbb{j}-(AX-Xa)Y^*\mathbb{j}\right).$$

对于例 5.2 和 5.3，我们有 $a=0$，且 $A\in\mathfrak{so}^*(2n)$ 不是满秩的。对于这些情形，我们看到 $B_{\mathfrak{m}}$ 是退化的。然而，由于 $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}^*(2n+4)$ 是 $\mathfrak{so}^*(2n+4)$ 的子代数， $B_{\mathfrak{m}}$ 的退化意味着 $\mathfrak{g}$的 Killing 型退化。这为以下事实提供了另一种解释：与这些 tiLas 对应的对称空间不是半单的。

6. Homogeneous torsion-free qs-H structures

我们通过考察以下有趣的问题来结束本文：

问题： 能否调整第 *5* 节中所述的构造，从而得到具有不变 *qs-H* 结构的非对称齐性流形？

关于这个问题，我们首先指出，根据 [S01、表 4] 可知，我们问题中的齐性流形不可能具有满整体 $\mathsf{SO}^*(2n)\mathsf{Sp(1)}$。下面我们将证明，无挠的齐性几乎 qs-H 流形，即齐性 qs-H 流形，必然是对称空间，因而可由第 5节中的结果加以分类。

因此，让我们再次转向第5 节中所述的构造，这一次考察由一般元素 $\hat{}\,\mathfrak{t}\subset\mathfrak{so}^*(2n+4)$ 生成的一维阿贝尔子代数 $\tau\in\mathfrak{so}^*(2n+4)$，其形式为

$$\hat{\tau}=\begin{pmatrix}a & C^*\mathbb{j} & d\\ 0 & A & C\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix},$$

其中 $a\in\mathfrak{sp(1)}$、 $A\in\mathfrak{so}^*(2n)$、 $d\in\mathbb{R}$ 和 $C\in\mathbb{H}^n$。显然，$\hat{}\,\tau$ 具有形式（5.1）当且仅当$C=0$。

接下来我们将考察由该构造所提供的 qs-H 结构何时是一个非对称的齐性 qs-H 流形。在这种情况下，我们将证明条件

$$[\hat{\tau},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{t},$$

对于充分大的子空间无法满足 $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{so}^*(2n+4)$，从而证明以下结果，即定理 1.1。

定理 6.1。 齐性 *qs-H* 流形是 *qs-H* 对称空间。

证明。 由于我们希望在每个切向方向上都有 $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{so}^*(2n+4)$ 的元素，因此考虑这些元素

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix}\lambda(X)+\mu(X) & f(X)^*\mathbb{j} & g(X)\\ X & \gamma(X) & f(X)\\ 0 & -X^*\mathbb{j} & -\lambda(X)+\mu(X)\end{pmatrix},$$

对于所有 $X\in\mathrm{H}^n$ 以及某些线性映射 $f:\mathrm{H}^n\to\mathrm{H}^n$、 g， $\lambda:\mathrm{H}^n\to\mathrm{R}$、 $\mu:\mathrm{H}^n\to\mathfrak{sp(1)}$ 和$\gamma:\mathrm{H}^n\to\mathfrak{so}^*(2n)$。如果对所有 $X\in\mathrm{H}^n$ 都满足 $[\hat{}\,\tau,\ X]\subset\mathfrak{t}$，即 $\hat{}\,\tau$ 表示一个齐次 qs-H 结构，那么 1-形式 $\lambda+\mu+\gamma:\ \mathfrak{m}\to\mathrm{R}\oplus\mathfrak{sp(1)}\oplus\mathfrak{so}^*(2n)$ 定义了无挠 $\mathsf{SO}^*(2n)\,\mathsf{Sp(1)}$-联络的联络 1-形式。特别地，必须满足 $\lambda=0$，因为这部分是

˜不取值于 $\mathfrak{so}^*(2n) \oplus \mathfrak{sp}(1)$。因此，$\hat{\tau}$ 的分次分量 -2 [, X] 消失，从而

˜ $[\hat{\tau}, X] = 0$。此外，我们看到矩阵 $[\hat{\tau}, X]$ 的位置 (1, 1) 读作

$$a\mu(X) + C^* \mathbb{j} X - \mu(X)a - g(X)\,.$$

˜由于 $[\hat{\tau}, X] = 0$ 因此我们得到条件

$$\begin{aligned}\mathbb{Im}(a\mu(X) + C^* \mathbb{j} X - \mu(X)a - g(X)) &= \frac{1}{2}(C^* \mathbb{j} X + X^* \mathbb{j} C) \\ &= g_1(C,X)i + g_2(C,X)j + g_3(C,X)k = 0\,,\end{aligned}$$

对所有 $X \in \mathbb{H}^n$，其中 g_1，g_2，g_3 是线性模型 [E H] 上的伪厄米度量（参见[CGW22a，命题 2。15]）。由于度量 g_1，g_2，g_3 均为非退化，故 $C = 0$ 成立。因此，$\hat{\tau}$ 具有形式（5.1），因此该齐性 qs-H 流形是一个 qs-H 对称空间。□

我们强调，无挠是命题 6.1中的一个关键条件；这是因为一般而言，该构造的结果是一个共形 qs-H 结构，参见 [˘CS17]。用内蕴挠率分量来表述，这意味着以此方式得到的几乎 qs-H 结构属于 $\mathcal{X}_4$ 型（参见 [CGW22b，注 1。6]）。现在我们给出一个齐性几乎 qs-H 流形的例子，它具有非平凡挠率，且挠率属于分量 $\mathcal{X}_4$。

例 6.2. 考虑元素

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} i & -2i+2j & 0 & 3 \\ 0 & 2j & 0 & 2-2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

其分块分解的各块大小为 1,1, $n-1$,1，并令 j $= j$. 则子空间 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{so}^*(2n+4)$ 为

$$\begin{pmatrix} X_1^*(k-1) + 2(x_2 - x_3)i & 2X_1^* + iX_1^* j & iX_2^* j & 2(x_2 - x_3) \\ X_1 & 0 & (i-j)X_2^* j & 2jX_1 - X_1 i \\ X_2 & -X_2(1+k) & 0 & -X_2 i \\ 0 & -X_1^* j & -X_2^* j & (1+k)X_1 + 2(x_2 - x_3)i \end{pmatrix},$$

对于 $X_1 := x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \mathrm{H}$ 和 $X_2 \in \mathrm{H}^{n-1}$。我们可以直接验证

$$[\hat{\tau}, \mathfrak{m}] = 2(x_4 - x_1)\hat{\tau}$$

因此，这诱导出一个齐性近似 qs-H 结构，其挠率属于$\mathcal{X}_4$-分量。回忆一下，$\mathcal{X}_4 \cong$ [EH] （见 [CGW22a]），可以用证明定理6.1中出现的 1-形式 λ 来诠释挠率。这由下式给出

$$\lambda((x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k, X_2)^t) = x_4 - x_1\,.$$

显然，分析完整的 qs-H 自同构代数并非易事。不过我们注意到，对于 $n = 2$，qs-H 自同构代数包含一个由 $\mathfrak{m}$ 生成的 9 维可解子代数。

References

[AC05] D. V. Alekseevsky 和 V. Cort

´ *Classification of pseudo-Riemannian symmetric spaces of quaternionic* es，载于《李群与 *Kähler type* 213 不变理论》。普罗维登斯（罗得岛州）：美国数学会（AMS）。译丛，第 2 辑。 *Adv. Math. Sci.* 56，(2005)，33–62。（引自第 2 页）[B00] W. Bertram，施普林格出版社，2000。（引自第 2、3、8 和 9 页）[Bℓ98] P. Bieliavsky，*Semisimple Symplectic Symmetric Spaces*，《Geom. Dedicata》73，(1998)，245–273。（引自第 4 页）[CSw09] M. Cahen 和 L. J. Schwachh¨ofer，*Special symplectic connections*，《J. Differential Geom.》83(2)，(2009)，229–271。（引自第 2、9 和 11 页）[˘CS17] A. ˘Cap 和 T. Sala˘c，*Parabolic conformally symplectic structures: parabolic contactification*，《纯粹与应用数学年鉴》197，(2017)，1175–1199。（引自第 11、12 和 20 页）[CS09] A. ˘Cap 和 J. Slov

´ *Parabolic Geometries I* 154, ak，美国数学会，2009 12 数学调查与专著，第 卷。（引自第 2、9、10 和 页）

[CGW22a] I. Chrysikos、J. Gregorovi˘c 和 H. Winther， *Differential geometry of* SO*(2*n*)*-type structures*，《纯粹与应用数学年鉴》201，(2022)，2603–2662。（引自第 1、2、4、8、9、12、14、16、18 和 20 页）[CGW22] *Differential geometry of* * 2*n* *-type structures - Integra-* b I. *bility* 12 93 2022 1 52 2, 4, 11, 20 Chrysikos、J. Gregorovi˘c 和 H. Winther， SO ( )，《分析与数理物理》，第 卷 ( )，( )，–。（引自第 页和 页）[CCG25] ´ *Curvature of quaternionic skew-Hermitian manifolds and* I. *bundle constructions* 2025 87 112 2 9 Chrysikos、V. Cortes 和 J. Gregorovi˘c，《数学新闻》298，( )，–。（引自第 页和 页）[DPWZ83] ´ *Normal forms of elements of classical real* D. ˇZ. *and complex Lie and Jordan algebras* 24，1983 1363 1374 17 18 Djokovic、J. Patera、P. Winternitz 和 H. Zassenhaus，《J. Math. Phys.》，( )，–。（引自第 页和 页）[G12] J. Gregorovi˘c， *General construction of symmetric parabolic structures*，《微分几何及其应用》30(5)，(2012)，450–476。（引自第 2 页）[G13] J. Gregorovi˘c， *Classification of invariant AHS-structures on semisimple locally symmetric spaces*，《中欧数学杂志》11，(2013)，2062–2075。（引自第 2 页）[H78] S. Helgason， *Differential geometry, Lie groups and Symmetric spaces*，学术出版社，纽约，1978。（引自第 2、8 和 9 页）[KN69] S. Kobayashi 和 K. Nomizu， *Foundations of Differential Geometry*，第 II 卷，Wiley - Interscience，纽约，1969。（引自第 2、4 和 5 页）[K65] S. S. Koh， *On affine symmetric spaces*，《美国数学会汇刊》119 (1965)，291–309。（引自第 3 和 6 页）[P94] M. Pontecorvo， *Complex structures on quaternionic manifolds*，《微分几何及其应用》4，(1994)，163–177。（引自第 9 页）[S01] L. Schwachh¨ofer， *Homogeneous connections with special symplectic holonomy*，《Math Z.》238，(2001)，655–688。（引自第 19 页）

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Masaryk University, Kotlářská 2, 611 37 Brno ORCID ID: 0000-0002-0785-8021 , Czech Republic.,*Email address*: chrysikos@math.muni.cz

Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Ostrava, 701 03 Ostrava, Czech Republic, and Institute of Discrete Mathematics and Geometry, TU Vienna, Wiedner Hauptstrasse 8-10/104, 1040 Vienna, Austria., ORCID ID: 0000-0002-0715-7911*Email address*: jan.gregorovic@seznam.cz