arXiv:2601.13058v1 [math.GR] 19 Jan 2026

周期增长与余上下文无关群

Alex Bishop、Corentin Bodart、Letizia Issini、Davide Perego

2026年1月21日

摘要

我们研究余上下文无关群中的周期增长，给出一般性结果，并考察汤普森群 T和 V以及 Houghton 群 H_m等具体例子。在此过程中，我们为汤普森群 V中的词度量给出了一个更精细的上界，并提供了高效算法，用于判断 V 中的元素是否为挠元，以及计算其阶。我们还调整了算法，以计算 T 中元素的旋转数，并回答了 D. Calegari 提出的一个问题。

引言

几何群论中充满了阻碍群之间嵌入的不变量。最引人注目的例子包括体积增长、子群畸变、Følner函数、Poincar´e剖面等。在本文中，我们研究另一种性质略有不同的不变量：周期增长。

定义（周期增长）。设 G 为一个群， S 为一个有限生成集。考虑一个对因子封闭的子集 $D \subseteq \mathbb{N}$，也就是说，若 $a \mid b$ 且$b \in D$，则 $a \in D$。我们将周期增长定义为

$$p^D_{(G,S)}(n) = \max\left(\left\{\mathrm{ord}(g) \;\middle|\; g \in G \text{ and } \|g\|_S \leqslant n\right\} \cap D\right).$$

若 $D = \mathbb{N}$，我们简记为 $p_{(G,S)}(n)$。

一种与$p_{(G,S)}(n)$接近的函数由 [26], 引入，并在[2, 42, 11]中得到了进一步研究。然而，他们将$p_{(G,S)}(n)$定义为 $= \infty$ ，只要球 $B_{(G,S)}(n)$中含有一个无限阶元素；因此研究范围被限制在挠群内。

除 $D = \mathbb{N}$外，典型的例子还有

- $D = \mathbb{P} \coloneqq \{1\} \cup \{$素数$\}$;
- $D_Q \coloneqq \left\{m \in \mathbb{N} \;\middle|\; \{\, m\} \subseteq Q\right\}$ 的素因子，用于 Q 一组素数;
- $D_k \coloneqq \left\{m \in \mathbb{N} \;\middle|\; \#\{\, m\} \leqslant k\right\}$ 的素因子，用于 k 一个正整数。

一个简单的观察（定理 1.1）是， $p^D_{(G,S)}(n)$ 的增长类型是群不变量，并且在嵌入下单调。我们将其与一个猜想联系起来，这个猜想在过去十五年里引发了大量研究:

猜想 (Lehnert [35, 10])。 有限生成群 G是余上下文无关群，当且仅当它嵌入汤普森群 V。

特别是，研究余上下文无关群和汤普森群 V 的周期增长，可能会导致推翻这一猜想。

另一个重要的观察揭示了周期增长与挠问题之间的联系，即判定一个词是否表示有限阶元素:

引理。 如果 G 的字问题可判定，那么 G 的挠问题可判定，当且仅当 $p_{(G,S)}(n)$ 有一个递归函数作为上界。

例如，Brin-汤普森群 $2V$ 的周期增长不受任何递归函数的界定 [4]。这与汤普森群 V [29,定理 9.3]以及余上下文无关群 [30, 定理 9]形成对比：它们的挠问题 可判定，因此或许可以得到一个明确的上界。

这些观察促使我们研究余上下文无关群中的周期增长，以及一些具体例子。我们重点考察 Houghton 群 H_m 和汤普森群 T 与 V。（汤普森群 F 无挠。）我们在下述定理中概述主要结果:

定理。 设 G 是一个余上下文无关群，且 $k \in \mathbb{N}$。

- $p_G(n) \preceq \exp(n^4)$ *and* $p_G^{D_k}(n) \preceq \exp(n^2)$. (Theorem 2.7)
- $p_{H_m}(n) \asymp \exp\left(\sqrt{n \log n}\right)$ *and* $p_{H_m}^{D_k}(n) \asymp n^k$. (Theorem 3.4)
- $p_T(n) \asymp \exp(n)$。 (Theorem 6.1)
- $p_V(n) \asymp \exp(n^2)$ 和 $p_V^{D_k}(n) \asymp \exp(n)$。 (Theorem 6.2)

本文还证明了稍具一般性的结果，详见正文中的不同表述。为了证明关于汤普森群 T 和 V的这些结果，我们需要两个本身也颇有研究价值的主要要素：

▷ 在第4节中，我们根据 V 元素的图的大小，给出了其长度的一个上界：

定理 4.8。设 $g = (\mathcal{U}, \sigma, \mathcal{V}) \in V$是一个元素，其中 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$是两棵具有 n 个叶子的树，且 $\sigma \in \in \mathrm{Sym}(n)$。则

$$\|g\|_V \preceq n \cdot \log(\mathrm{LDS}(\sigma))$$

其中，$\mathrm{LDS}(\sigma) = \max\{|A|: \ \sigma|_A \text{ 是递减的}\}$。

由于 $1 \leqslant \mathrm{LDS}(\sigma) \leqslant n$，这为 [9] 提供了一种具有更细致分级的替代证明，并改进了近期的结果 [15]。注意，这为一个指数级庞大（但必然指数级稀疏）的置换集合 $\sigma \in \in \mathrm{Sym}(n)$给出了线性上界。

▷ 在第5节中，我们描述了如何高效地计算 T 和 V中元素的阶。我们的算法采用了抽象弦图的一种变体，该变体由 Belk 和 Matucci [6]引入。通过添加一些额外的标签，我们还可以计算 T中元素的旋转数。

值得注意的是，D. Calegari 在 [16] 中描述了一种计算并界定 T 中元素旋转数分母的方法。不过，他是以约化树图中树的深度，而非词长，来衡量元素的复杂度。具体而言，这只能推出一个上界 $p_T(n) \preceq \exp(\exp(n))$。他还基于深度提出了更好的上界，我们在第6.2节中对这些上界予以反驳。

最后，我们考察**CF-TR** 群，这是 [18]中近期引入的一类群。关于 Lehnert 猜想，一个重要的问题是汤普森群 V 是否属于**CF-TR**。确实，若答案为肯定，就能将 Lehnert 猜想归结为两个看似更简单的命题：“所有余上下文无关群都是**CF-TR**群吗？”以及“所有**CF-TR** 群都能嵌入 V吗？”。结合我们关于 V 周期增长的结果与先前关于**CF-TR** 群周期增长的结果 [18, 第 5], 节，我们得到以下限制：

推论 7.2。如果 Γ 是一个上下文无关图，其转移群为 V，那么 ¯ 体积增长 $\beta_\Gamma(n) := \sup_{v \in \Gamma} |B_\Gamma(v, \ n)|$ 是指数级的。

对 [18, 第 5] 节的任何改进都将意味着 V 不是 **CF-TR**。然而，我们证明了他们的估计中至少有一个是精确的：

P命题 7.5. 存在一个**CF-TR** 群 G，使得 $p_G^{D_{\{2\}}}(n) \asymp \exp(n)$。

我们通过考察一族 Brin-Navas 群的推广群得到这一结果。这些群由 A. Erschler [21] 引入。

1 周期增长的一般性

引理1.1. 设(G, S) 和(H, T) 是两个有限生成群。

(a) 若 $G \geqslant H$，则存在 $C > 0$ 使得

$$\forall D, \forall n \in \mathbb{N}, \quad p^D_{(G,S)}(Cn) \geqslant p^D_{(H,T)}(n).$$

(b) 若 $G \geqslant H$ 且 H 有限指标，则存在 $C > 0$ 使得

$$\forall D, \forall n \in \mathbb{N}, \quad p^D_{(G,S)}(n) \leqslant C \cdot p^D_{(H,T)}(Cn).$$

特别地，函数 $p^D_G(n)$ 在相差 $\asymp$ 的意义下定义良好。

证明。 </style}(a) 部分只需取 $C := \max_{t \in T} \|t\|_S$ 即可轻松得出。事实上，只需注意到，对于任意 $g \in H$，都有 $\|g\|_S \leq C \|g\|_T$，因此

$$\{g \in H \mid \mathrm{ord}(g) \in D,\ \|g\|_T \leq n\} \subseteq \{g \in G \mid \mathrm{ord}(g) \in D,\ \|g\|_S \leq Cn\}.$$

(b) 部分还额外假设 H 是有限指标。因此存在 $r,\ R > 0$，使得对所有 $g \in G$ 都有 $g^r \in H$，且对所有 $h \in H$都有 $\|h\|_T \leq R \|h\|_S$。将两者结合，$\|g^r\|_T \leq R \|g^r\|_S \leq Rr \|g\|_S$并令 $C = Rr$。此外，D 对因子封闭，因此 $\mathrm{ord}(g^r) \in D$。综上，

$$\begin{aligned}
&\max\{\mathrm{ord}(g) \;\big|\; \mathrm{ord}(g) \in D \text{ and } \|g\|_S \leqslant n\} \\
&\quad \leqslant \max\left\{r \,\mathrm{ord}(g^r) \;\middle|\; \mathrm{ord}(g^r) \in D,\ g^r \in H \text{ and } \|g^r\|_T \leqslant Cn\right\} \\
&\quad \leqslant C \max\left\{\mathrm{ord}(h) \;\middle|\; \mathrm{ord}(h) \in D,\ h \in H \text{ and } \|h\|_T \leqslant Cn\right\}. \qquad \square
\end{aligned}$$

注 1.2. 牢记 C 不依赖于 D，或许能得到一个更强有力的不变量。不过，我们不会探讨这个方向。

我们简要考察群扩张下周期增长的表现。

引理 1.3. 考虑群扩张 $1 \to K \to G \xrightarrow{\pi} H \to 1$。除非另有说明，我们假设 K 是有限生成的。考虑（上）畸变函数 $\mathrm{Dist}_K^G(n) \coloneqq \max\{\|k\|_K \mid k \in K,\ \|k\|_G \leqslant n\}$。

(a) 我们有 $p_G^D(n) \leqslant p_H^D(n) \cdot p_K^D\big(\mathrm{Dist}_K^G(n \cdot p_H^D(n))\big)$。如果 $\{\mathrm{ord}(k) \mid k \in K\} \cap D$ 是有限的，那么即使 K 不是有限生成的，$p_G^D(n) \preceq p_H^D(n)$ 也成立。
(b) 如果它分裂，那么 $p_G^D(n) \succeq \max\{p_K^D(n)\ p_H^D(n)\}$。
(c) 如果它是一个以 $K = \bigoplus_H L$ 为底的花环积，那么

$$\max\{p_H^D(n), p_L^D(n)\} \preceq p_G^D(n) \preceq p_H^D(n) \cdot p_L^D(n)^n.$$

此外，若 D 对乘法封闭，则 $p_G^D(n) \succeq p_H^D(n)\ p_L^D(n)$。

此外，如果扩张是平凡的（即 $G = K \times H$），那么

（d） $p_G^D(n) \preceq p_K^D(n) \cdot p_H^D(n)$。（e）若 D，$D' \subseteq \mathbb{N}$ 且 $D \cap D' = \{1\}$，则 $p_G^{DD'}(n) \succeq p_K^D(n) \cdot p_H^{D'}(n)$。（f）若 $D \subseteq D_1$，则 $p_G^D(n) \asymp \max\{p_K^D(n)\ p_H^D(n)\}$。

证明。为了证明 1.3(a)，令 $x \in G$ 满足 $\mathrm{ord}(g) \in D$ 且 $\|x\|_G \leq n$。我们有 $\ell = \mathrm{ord}(\pi(x)) \leq p_H^D(n)$，因为 D 对因子封闭且 $\|\pi(x)\|_H \leqslant \|x\|_G$。此外，$x^\ell \in K$ 因此

$$\mathrm{ord}(x) = \ell\,\mathrm{ord}(x^\ell) \leqslant \ell \cdot p_K^D\left(\mathrm{Dist}_K^G(\left\|x^\ell\right\|_G)\right) \leq p_H^D(n) \cdot p_K^D(\mathrm{Dist}_K^G(n \cdot p_H^D(n))).$$

如果 $M = \sup\big(\{\mathrm{ord}(k) \mid k \in K\} \cap D\big)$ 有限，那么我们可以给 $\mathrm{ord}(x^\ell) \leqslant M$ 设定一个上界，使得 $\mathrm{ord}(x) = \ell\,\mathrm{ord}(x^\ell) \leqslant \ell \cdot M \preceq p_H^D(n)$。

第 1.3(b) 部分由引理 1.1(a) 得出，因为 K 和 H 是 G 的子群。

对于第 1.3(c) 部分，H 和 L 是 $G = L \wr H$ 的子群，因此第一个下界可直接由引理 1.1(a) 得出。

对于上界，考虑 $g=(\varphi,\ h)$，其中 $\varphi\colon\ H\to L$（有限支撑），且 $h\in H$。我们假设 $\|g\|_G\leqslant n$ 且 $\mathrm{ord}(g)\in D$，因此阶 $\ell:=\mathrm{ord}(h)\in D$。更准确地说，我们有 $\mathrm{ord}(g)=\ell\cdot\mathrm{ord}(g^\ell)$，其中

$$g^\ell=(\psi,1_H)\quad\text{with}\quad\psi(x)=\varphi(x)\varphi(h^{-1}x)\dots\varphi(h^{-\ell+1}x).$$

我们首先观察到，如果 $x=h^ny$（其中 $0\leqslant n\leqslant\ell-1$），那么

$$\psi(x)\cdot\big(\varphi(x)\dots\varphi(h^{-n+1}x)\big)=\big(\varphi(x)\dots\varphi(h^{-n+1}x)\big)\cdot\psi(y).$$

我们推 deduce 出，$\psi(x)$ 的非平凡值至多来自 $|\mathrm{supp}(\varphi)|\leqslant\|g\|_G$ 个共轭类，因此 $\mathrm{ord}(\psi(x))$ 至多取 $\|g\|_G$ 个值。此外，我们有 $\|\psi(x)\|_L\leqslant\sum_{y\in H}\|\varphi(y)\|_L\leqslant\|g\|_G$，因此 $\mathrm{ord}(\psi(x))\preceq p_L^D(n)$。我们得出，$\mathrm{ord}(g^\ell)=\mathrm{lcm}\{\mathrm{ord}(\psi(x))\colon\ x\in H\}\leqslant p_L^D(n)^n$，因此

$$\mathrm{ord}(g)\leqslant p_H^D(n)\cdot p_L^D(n)^n.$$

在 D 对乘法封闭的情况下，设 $h\in H$ 和 $l\in L$ 的长度至多为 n，其阶分别为 $p_H^D(n)$ 和 $p_L^D(n)$。那么 hl 的阶为 $p_H^D(n)p_L^D(n)$。由于 $\|hl\|_G\leq 2n$，我们有 $p_G^D(2n)\geq p_H^D(n)\cdot p_L^D(n)$。

对于 (d),

$$\begin{aligned}
&\max\big\{\mathrm{ord}((k,h))\ \big|\ \mathrm{ord}((k,h))\in D\text{ and }\|(k,h)\|_G\leqslant n\big\}\\
&\leqslant\max\big\{\mathrm{lcm}\{\mathrm{ord}(k),\mathrm{ord}(h)\}\ \big|\ \mathrm{ord}(k),\mathrm{ord}(h)\in D\text{ and }\|(k,h)\|_G\leqslant n\big\}\\
&\preceq\max\big\{\mathrm{ord}(k)\cdot\mathrm{ord}(h)\ \big|\ \mathrm{ord}(k),\mathrm{ord}(h)\in D\text{ and }\|k\|_K,\|h\|_H\leqslant n\big\}\\
&=p_K^D(n)\cdot p_H^D(n).
\end{aligned}$$

为实现 (e)，我们考虑 $k\in K$ 和 $h\in H$，使得 $\|k\|_K\leq n$ 和 $\|h\|_H\leq n$ 分别实现 $p_K^D(n)$ 和 $p_H^{D'}(n)$。于是

$$\mathrm{ord}((k,h))=\mathrm{lcm}\big(\mathrm{ord}(k),\mathrm{ord}(h)\big)\overset{!}{=}\mathrm{ord}(k)\,\mathrm{ord}(h)=p_K^D(n)\cdot p_H^{D'}(n)$$

因为 $D\cap D'=\{1\}$，且 $\|(k,h)\|_G\leq 2n$。

对于 (f)，我们再次将 (d) 部分中的论述具体化。如果 $\mathrm{ord}((k,h))=\mathrm{lcm}(\mathrm{ord}(k),\mathrm{ord}(h))\in D\subseteq D_1$，那么 $\mathrm{ord}(k)$ 和 $\mathrm{ord}(h)$ 是同一个素数的幂。由此可得 $\mathrm{ord}((k,h))=\max\{\mathrm{ord}(k),\mathrm{ord}(h)\}$，并且

$$\begin{aligned}
&\max\big\{\mathrm{ord}((k,h))\ \big|\ \mathrm{ord}((k,h))\in D\text{ 且 }\|(k,h)\|_G\leqslant n\big\}\\
&\quad\preceq\max\big\{\max\{\mathrm{ord}(k),\ \mathrm{ord}(h)\}\ \big|\ \mathrm{ord}(k),\ \mathrm{ord}(h)\in D\text{ 和 }\|k\|_K,\\
&\|h\|_H\leqslant n\big\},\ \text{即，}\ p_G^D(n)\preceq\max\{p_K^D(n)\ p_H^D(n)\}。
\end{aligned}$$

□

与体积增长不同，周期增长没有先验的上界或下界，这是有充分理由的：

命题 1.4. 设 $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ 是一个递增函数。存在一个有限生成群 G，满足 $p_G(n) \asymp f(n)$。此外，若 f 是递归的，则 G 可取为具有可判定的字问题与挠问题。

证明。 我们给出两种不同的构造：

1. 取一个词序列 $w_i = a^i b^i$ 并定义

$$G = \left\langle a, b \;\middle|\; w_i^{9f(i)} = 1,\ \forall i \right\rangle.$$

首先，我们注意到，仅通过考虑由 w_n 表示的元素，便有 $p_G(2n) \geq 9f(n)$。该表示满足经典的 $C'(1/8)$ 小消去条件，由此可得若干观察：

断言（Greendlinger [25, 定理 VIII]）。 设 $G = \langle S \mid R \rangle$ 是一个$C'(1/6)$ 表示。若元素 g 具有有限阶 $m > 1$，则存在形如 $r = s^m \in R$ 的关系词以及整数 p，使得 $g \sim s^p$。

断言。 设 $G = \langle S \mid R \rangle$ 是一个 $C'(1/8)$ 表示，且 $h \in F(S)$ 是一个循环 R-约化元素，也就是说，h 及其循环置换所含的关系不超过$_{1\ 2}$ 个。那么

$$\|[h]_\sim\|_S := \min\{\|g\|_S \mid g \sim h\} \geqslant \frac{1}{2}\|h\|_S.$$

▷ 考虑一个长度最小的元素 $g \sim h$及其对应的约化环形图。结合 [38] 的定理 5.3 和 5.5，如 [37],中所述，我们可以推断，每个胞腔都必须与两个边界分量相交，且至多与另外两个胞腔相交（见图 1）。

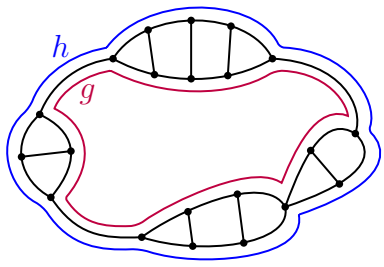


图 1： $C'(1/8)$ 表示的环形图形状。

对于每个胞腔 C，我们有 $|C\cap h|\prec\frac{1}{2}|C|$，而它与每个相邻胞腔的交点为 $<\frac{1}{8}|C|$，因此

$$|C\cap g|>\frac{1}{4}|C|>\frac{1}{2}|C\cap h|.$$

对所有胞腔求和，得到 $\|g\|_S\geqslant\frac{1}{2}\|h\|_{S^\sigma}$ ◁

考虑一个长度为 n 且阶 $\mathrm{ord}(g)>2$的挠元 g。因此，存在 $h=w_i^p$ 使得 $|p|<\frac{9}{2}f(i)$，从而 $g\sim h$。第二个结论给出

$$n=\|g\|_S\geqslant\frac{1}{2}\|h\|_S\geqslant i.$$

由于 $\mathrm{ord}(g)\mid 9f(i)$，我们得出 $\mathrm{ord}(g)\leqslant 9f(n)$。

2. 令 $g(n)$ 为小于 $f(n)$ 的最大 2 的幂。我们考虑 $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$ 的如下中心扩张，该扩张在 [27] 中引入

$$H=\left\langle a,t,(z_i)_{i\geqslant 1}\;\middle|\; z_i=[a,t^iat^{-i}],\ [z_i,a]=[z_i,t]=1\right\rangle.$$

这个群是中心扩张后亚交换群，因此是 3 阶可解群。商群 $G=H/K$ 具有所需的周期增长，其中

$$K=\left\langle z_i^{g(i)}:n\geqslant 1\right\rangle\leqslant\mathcal{Z}(H).$$

下界来自满足 $\mathrm{ord}(z_n)=g(n)$ 和 $\|z_n\|=4n+4$ 的元素 z_n。对于上界，注意到 $\mathcal{Z}(G)\hookrightarrow G\twoheadrightarrow\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$，因此 G 的任何挠元都必须属于 $\mathcal{Z}(G)$。此外，

$$B_{G,\{a,t\}}(4n+4)\cap\mathcal{Z}(G)\leqslant\bigoplus_{i=1}^{n}\langle z_i\rangle\simeq\bigoplus_{i=1}^{n}C_{g(i)},$$

且该群的指数为 $g(n)$。（我们利用了对于 $i\leqslant j$，$g(i)\mid g(j)$。）

注意，如果 $f(i)$ 是递归的，那么字问题是可判定的：

1. G 是小消去群，因此我们可以使用Dehn算法。

2. 给定一个词 $w\in F(a,\ t)$，可以判定 $w\in_H\mathcal{Z}(H)$（等价地，$w=1\,\text{in}\ \mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$）是否成立。若成立，将其写成有限乘积 $w=_H\prod_{i=1}^{\ell}z_i^{e_i}$，并检查对所有 i，$g(i)\mid e_i$ 是否成立。在这种情况下（且仅在这种情况下），$w=_G 1$。

挠问题的可判定性可由引言中的引理推出（也可采用更具体的方法，例如只需检查 $w = 1$ in $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ 是否成立）。 □

注 1.5. 第二种构造还可以构造出字问题可判定、挠问题不可判定的中心扩张后元交换群。这将在 [1, 命题 3.2]中完成。

2 余上下文无关群

对于字问题可判定的群，其周期增长受某个递归函数限制，当且仅当挠问题可判定。在 [30],中，证明了余上下文无关群的挠问题是可判定的。本节将证明这一事实的一个统一且定量的版本。

2.1 背景

在证明结果之前，我们需要回顾一些关于正则语言和上下文无关语言的一般定义与结果。参见 [31]。

定义 2.1. 一个上下文无关文法 是一个元组 (V, Σ, R, V_0)，其中

- V 是一个有限的变量集合。
- Σ是一个有限集合，称为字母表。
- $R \subset V \times (V \sqcup \Sigma)^*$ 是一个有限的改写规则（或产生式规则）集合。元素 $(Y,\ w) \in R$ 写作 $Y \to w$。
- $V_0 \in V$ 是开始符号。

如果对于所有规则 $Y \to w$均有 $|w| \leqslant 2$，则称文法为乔姆斯基范式。

我们在 $(V \sqcup \Sigma)^*$上定义关系（预序） $\to^*$：对于所有 $a,\ b \in (V \sqcup \Sigma)^*$ 和 $(Y,\ w) \in R$，规定 $aYb \to^* awb$，然后取其自反传递闭包。如果存在一个上下文无关文法 $(V,\ \Sigma,\ R,\ V_0)$ 使得，则称形式语言 $\mathcal{L}$ 为上下文无关的。

$$\mathcal{L} = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; V_0 \to^* w \right\}.$$

引理 2.2 ([31, §7.1.5])。给定一个上下文无关文法，存在一个乔姆斯基范式的上下文无关文法，能够生成相同的语言。

定义 2.3. 一个有限状态自动机是一个元组 $(\Sigma、\ \mathsf{Q}\ q_0、\ \delta、\ \mathsf{F})$，其中

- Σ是一个有限集合，称为字母表。
- Q 是一个有限的状态集合。
- $q_0 \in \mathsf{Q}$ 是初始状态。
- $\delta \subseteq \mathsf{Q} \times \Sigma \times \mathsf{Q}$ 是一个有限的转移集合。元素 $(a, s, b) \in \delta$ 应视为一条从 a 到 b、标签为 s的有向边。
- $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{Q}$ 是终态集合。

如果对于每个 $a \in \mathsf{Q}$ 和 $s \in \Sigma$，至多存在一个状态 $b \in \mathsf{Q}$ 使得 $(a, s, b) \in \delta$，则称自动机是确定性的（确定有限自动机）。

如果存在一个有限状态自动机（Σ，Q q_0，δ，F），使得形式语言 $\mathcal{R}$ 是正则的

$$\mathcal{R} = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; w \text{ labels an oriented path } q_0 \to \mathsf{F} \right\}.$$

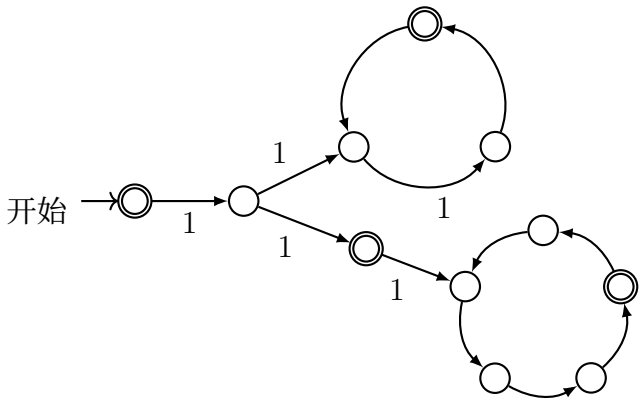


图2：一个以字母表 $\Sigma = \{1\}$为基础、识别
$\mathcal{R} = \{1^0, 1^2\} \cup \left\{1^{15q+r} \;\middle|\; q \geqslant 0,\ r = 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16\right\}$的非确定有限自动机。

Myhill 和 Nerode 提出了正则语言的另一种有趣刻画。我们首先在 Σ^*上定义一个等价关系：

定义 2.4。给定一个语言 $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ 和两个词 u，$v \in \Sigma^*$，若对所有 $w \in \Sigma^*$ 都有 $uw \in \mathcal{L} \iff vw \in \mathcal{L}$，则定义 $u \sim_{\mathcal{L}} v$。

定理 2.5 ([31, §4.4])．$\mathcal{L}$ 是正则的，当且仅当 $\Sigma^*/\sim_{\mathcal{L}}$ 是有限的。在这种情况下，$|\Sigma^*/\sim_{\mathcal{L}}|$ 是识别 $\mathcal{L}$的确定有限自动机中的最少状态数。

最后，我们回顾一下：上下文无关语言与正则语言相交，得到的仍是上下文无关语言。这可以用定量方式表述：

引理 2.6. 考虑两个语言 $\mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \Sigma^*$，满足

- $\mathcal{L}$ 是上下文无关的，由一个包含 m 个变量的文法定义，并且
- $\mathcal{R}$ 是正则的，由一个包含 n 个状态的自动机识别。

那么，$\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ 是上下文无关的，由一个包含 $mn^2 + 1$ 个变量的文法定义。此外，这一构造保留产生式规则的长度。

证明。假设 $\mathcal{L}$ 由一个文法 (V, Σ, R, V_0) 生成，且 $\mathcal{R}$ 由一个自动机 $(\Sigma, \mathrm{Q}, q_0, \delta, \mathrm{F})$ 识别。我们定义一个新的上下文无关文法 (V', Σ, R', V_0')。定义如下：

- $V' = \{V_0'\} \sqcup \{X_{a,b} \mid X \in V, a, b \in \mathrm{Q}\}$,
- 如果 R 包含一条规则 $X \to w_0 Y_1 w_1 Y_2 w_2 \dots Y_n w_n$，其中有 $w_i \in \Sigma^*$ 和 $Y_i \in V$，并且在识别 $\mathcal{R}$的自动机中存在一条标记为 w_i 的有向路径 $a_i \to b_i$，那么我们向 R' 添加产生式规则

$$X_{a_0,b_n} \to w_0 (Y_1)_{b_0,a_1} w_1 (Y_2)_{b_1,a_2} w_2 \dots (Y_n)_{b_{n-1},a_n} w_n$$

最后，我们添加所有产生式规则 $V_0' \to (V_0)_{q_0,\, b}$ 其中 $b \in \mathrm{F}$。

一个关键的观察是

$$\{w \in \Sigma^* \mid Y_{a,b} \to^* w\} \subseteq \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ labels an oriented path } a \to b\},$$

通过归纳法。特别地，由 $(V',\ \Sigma,\ R',\ V_0')$ 生成的语言 $\mathcal{L}'$ 包含于 $\mathcal{R}$ 中。通过将一个文法的推导转换为另一个文法的推导，可以验证 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$。□

2.2 周期增长

我们现在可以陈述并证明本节的主要结果：

定理 2.7。设 G是一个余上下文无关群。

（a）周期增长满足 $p_G(n) \preceq \exp(n^4)$。（b）若对于某个整数 k，$D \subseteq D_k$ 成立，则 $p_G^D(n) \preceq \exp(n^2)$。

证明。我们固定一个生成集 S。根据定理 2.2，我们可以假设上下文无关语言 coWP(G, S) 由一个处于乔姆斯基范式的文法给出，并令 m 为该文法中的变量数量。

考虑 $g \in G$ 并固定一个表示它的词，其长度为 $n = \|g\|_{S^\circ}$。根据定理 2.6，语言 coWP(G, S) $\cap \{w\}^*$ 是上下文无关语言，可由一个具有 $mn^2 + 1$ 个变量的乔姆斯基范式文法生成。将映射 $u\colon s \mapsto 1$ 应用于该语言，得到一个上下文无关语言

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g &:= u(\mathrm{coWP}(G,S) \cap \{w\}^*) \\ &\overset{!}{=} \{1^{n\ell} : \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \text{ such that } \mathrm{ord}(g) \nmid \ell\} \subset \{1\}^*\end{aligned}$$

它也由一个具有 $mn^2 + 1$ 个变量的文法定义。此外，$\mathcal{L}_g$ 是一元的（也就是说，字母表只有一个符号），因此它实际上是正则语言（这是帕里克定理的推论）——这一点在 [43] 中得到了量化。

(a) 根据 [43, 定理 6], ，语言 $\mathcal{L}_g$ 可由一个具有 $|Q| \leqslant 2^{(mn^2+1)^2}$ 个状态的确定性有限状态自动机识别。如果 g 的阶有限，那么语言 $\mathcal{L}_g$ 定义了 $n \cdot \mathrm{ord}(g)$ 个 Nerode 同余类。由此可得，根据定理 2.5，$n \cdot \mathrm{ord}(g) \leqslant |Q| \leqslant 2^{(mn^2+1)^2}$，因此

$$p_G(n) \preceq \exp(n^4).$$

(b) 根据 [43, 定理 4], ，语言 $\mathcal{L}_g$ 可由一个具有 $|Q| \leqslant 2^{2mn^2+1} + 1$ 个状态的非确定性有限状态自动机识别。假设 $\mathrm{ord}(g)$ 有限且属于 D_k。我们可以写成 $\mathrm{ord}(g) = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$。

抽引引理表明，对于每个满足 $x > |Q|$ 的词 $1^x \in \mathcal{L}_g$，都存在 $1 \leqslant y_x \leqslant |Q|$，使得对所有 $z \geqslant -1$，$1^{x+y_x z} \in \mathcal{L}_g$ 都成立。特别地，

$$\forall x > |Q|\,, \quad 1^x \in \mathcal{L}_g \implies 1^{x+\mathrm{lcm}(1,2,\dots,|Q|)} \in \mathcal{L}_g,$$

也就是说，该语言最终是以 lcm(1，2，.....，|Q|) 为周期的。另一方面，$\mathcal{L}_g$ 的最小周期显然是 $n \cdot \mathrm{ord}(g)$，因此

$$p_i^{e_i} \mid n \cdot \mathrm{ord}(g) \mid \mathrm{lcm}(1, 2, \dots, |Q|).$$

我们推导出 $p_i^{e_i} \leqslant |Q|$，最后

$$\mathrm{ord}(g) = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k} \leqslant (2^{2mn^2+1} + 1)^k \preceq \exp(n^2). \qquad \square$$

注2.8。 一元正则语言的最小周期可能大于识别它的非确定性有限状态自动机的规模。图2给出了一个例子。一般而言，最小周期的上界为 $g(|Q|)$，其中 g 是第3节中定义的 Landau 函数。

2.3 无限循环子群的畸变

余上下文无关群中的循环子群成员问题也是可判定的。（这是背包问题的另一种情形，而背包问题在余上下文无关群中是可判定的 [33]。）我们将对此结果进行定量分析。

定理2.9。 设 G 是一个余上下文无关群，且 $g \in G$ 是一个无限阶元素。那么循环子群 $\langle g \rangle$ 的畸变满足

$$\mathrm{Dist}^G_{\langle g \rangle}(n) := \max\left\{k \geqslant 0 \;\middle|\; \|g^k\|_S \leqslant n\right\} \preceq \exp(n^2).$$

注意， V 的循环子群是非畸变的 [13, 定理1.9], 因此真正的答案可能是 $\mathrm{Dist}^G_{\langle g \rangle}(n) \asymp n$。

证明。 固定一个无限阶元素 $g \in G$。语言 $\mathrm{coWP}(G, S \cup \{g\})$ 是上下文无关的；假设它由一个具有 m个变量的乔姆斯基范式文法生成。对于每个词 $w \in S^n$，上下文无关语言 $\mathrm{coWP}(G, S \cup \{g\}) \cap w\{g\}^*$ 可由一个具有 $m(n+1)^2 + 1$个变量的文法识别。由此可得一元语言

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{g,w} &= \{1^0, 1^1, \ldots, 1^{n-1}\} \sqcup u\big(\mathrm{coWP}(G, S \cup \{g\}) \cap w\{g\}^*\big) \\ &= \{1^0, 1^1, \ldots, 1^{n-1}\} \sqcup \{1^{n+x} \mid x \geqslant 0,\, wg^x \neq 1_G\}\end{aligned}$$

由具有 $|Q| \leqslant 2^{2m(n+1)^2+1} + n$ 个状态的非确定有限自动机生成。另一方面，任何识别 $\{1^x \mid x \neq k\}$ 的自动机大小至少为 $\geqslant \sqrt{k}$ [23, 定理 7.2]。如果存在 k 使得 $wg^k = 1$，我们便可得出结论:

$$k \leqslant n + k \leqslant |Q|^2 \leqslant (2^{2m(n+1)^2+1} + n)^2 \asymp \exp(n^2).$$

因此，$\mathrm{Dist}^G_{\langle g \rangle}(n) = \max\left\{k \geqslant 0 \;\middle|\; \|g^k\|_S \leqslant n\right\} \preceq \exp(n^2)$。 □

3 Houghton 群 H_m

我们研究 Houghton 群 H_m 的周期增长，该群定义于 [32]。

定义 3.1（Landau 函数）。设 $n \geqslant 0$ 为一个整数。我们定义

$$\begin{aligned} g(n) &= \max\big\{\operatorname{ord}(\sigma) \;\big|\; \sigma \in \operatorname{Sym}(n)\big\} \\ &= \max\big\{\operatorname{lcm}(m_1, m_2, \ldots, m_k) \;\big|\; m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n\big\}. \end{aligned}$$

更一般地，$g^D(n) = \max\{\operatorname{ord}(\sigma) \mid \sigma \in$ 对称群 $\operatorname{Sym}(n)$ 的阶，并且 $\operatorname{ord}(\sigma) \in D\}$。

定理 3.2 (Landau [34])。 $g(n) \asymp \exp\big(\sqrt{n\log(n)}\big)$。

命题 3.3。若 $D_Q \subseteq D \subseteq D_k$ *with* $Q \subset \mathbb{P}$ *and* $|Q| = k$，则

$$g^D(n) \asymp n^k$$

证明。设 $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$。我们取 $m_i = q_i^{\ell_i}$ 在 $\frac{n}{q_i k}$ 和 $\frac{n}{k}$ 之间，考虑

$$\sigma = (1 \ldots m_1)(m_1 + 1 \ldots m_1 + m_2) \ldots \in \operatorname{Sym}(n).$$

这给出 $g^D(n) \geqslant n^k \cdot \prod(q_i k)^{-1}$。

对于相应的上界，D-挠元 σ 的阶由其分解中 k 个循环长度的乘积所界定（每个 q_i 取一个指数最大的循环）。由此可得 $\operatorname{ord}(g) \leqslant n^k$。

□

定理 3.4。设 $H_2 = \operatorname{FSym}(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ 且 $D \subseteq \mathbb{N}$。则 $p^D_{H_2}(n) \asymp g^D(n)$。

证明。我们固定整数 $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得

$$m_1 + \ldots + m_k = n \quad \text{and} \quad \operatorname{lcm}(m_1, \ldots, m_k) = g^D(n).$$

对于下界，我们考虑元素

$$\begin{aligned} g &= (ta)^{m_1 - 1} t (ta)^{m_2 - 1} t \ldots t (ta)^{m_k - 1} t^{-m_1 - \ldots - m_k} \\ &= (1\,2 \ldots m_1)(m_1 + 1\, m_1 + 2 \ldots m_1 + m_2) \ldots \end{aligned}$$

其中 $a = (0\ 1)$ 且 $t\colon\ x \mapsto x + 1$。该元素的长度为 $\|g\| \leqslant 3n$，阶为 $\operatorname{ord}(g) = g^D(n)$。

对于上界，若 $g \in H_2$ 满足 $\operatorname{ord}(g) \in D$，则 $g \in \operatorname{FSym}(\mathbb{Z})$。此外，若 $\|g\| \leqslant n$，则 $|\operatorname{supp}(g)| \preceq n$，因此 $\operatorname{ord}(g) \preceq g^D(n)$。 □

注 3.5。这可以很容易地推广到其他 Houghton 群 H_m（带有 $m \geqslant 2$），以及 $\operatorname{FSym}(G) \rtimes G$，其中 G 是无限挠无的。事实上，下界由 H_2 是一个子群这一事实以及定理 1.1 得出。对于上界，我们注意到，要使一个元素是挠元且长度至多为 n，其支撑的基数必须为 $\preceq n$。

4 汤普森群 V 中的长度估计

4.1 背景

我们分别为 F、T 和 V固定对称生成集 $S_F \subset S_T \subset S_V$，并将相应的词长记为 $\|\cdot\|_F$，$\|\cdot\|_T$，$\|\cdot\|_V$。此外，我们对置换采用右复合（因此 $(\sigma\tau)(x) = ((x)\sigma)\tau$）。

我们回顾 Birget 和 Burillo–Cleary–Stein–Taback 的若干结果：

定理 4.1. 考虑 $g \in V$，其约化图有 n 个叶子。

(a) 如果 $g \in F$，那么 $\|g\|_F \asymp n$。[9](b) 如果 $g \in T$，那么 $\|g\|_T \asymp n$。 [14]

(c) 如果 $g \in V$，那么 $n \preceq \|g\|_V \preceq n\log(n)$。此外，存在 $c > 0$，使得满足 $\|g\|_V \geqslant cn\log(n)$ 的元素是指数普遍的。 [9]

Birget 的估计 (c) 中的一个关键要点是，顶部树和底部树对 V 中元素的长度影响不大：

定义 4.2 (n 上对称群的诱导长度)。给定 $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$，我们定义

$$L(\sigma) \coloneqq \min\left\{ \|(\mathcal{U}, \sigma, \mathcal{V})\|_V \;\middle|\; \mathcal{U}, \mathcal{V} \text{ are trees with } n \text{ leaves} \right\}.$$

引理 4.3. 存在 $C > 0$，使得对所有正整数 n、所有置换 $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(n)$ 以及所有具有 n 个叶子的树 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$，都有

(a) $\|(\mathcal{U}, \sigma, \mathcal{V})\|_V \leqslant L(\sigma) + 2Cn$，并

且(b) $L(\sigma\tau) \leqslant L(\sigma) + L(\tau) + Cn$。

证明。(a) 假设 $L(\sigma) = \|(\mathcal{U}_0, \sigma, \mathcal{U}_0)\|_V$，那么

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{U}, \sigma, \mathcal{V})\|_V &\leqslant \|(\mathcal{U}, \mathrm{id}, \mathcal{U}_0)\|_V + \|(\mathcal{U}_0, \sigma, \mathcal{V}_0)\|_V + \|(\mathcal{V}_0, \mathrm{id}, \mathcal{V})\|_V \\ &\leqslant Cn + L(\sigma) + Cn, \end{aligned}$$

对 $(\mathcal{U}, \mathrm{id}\ \mathcal{U}_0), (\mathcal{V}_0, \mathrm{id}\ \mathcal{V}) \in F$ 使用定理 4.1(a)。

(b) 假设 $L(\sigma) = \|(\mathcal{U}_0, \sigma, \mathcal{V}_0)\|_V$且 $L(\tau) = \|(\mathcal{U}_1, \tau, \mathcal{V}_1)\|_V$，则

$$\begin{aligned} L(\sigma\tau) &\leqslant \|(\mathcal{U}_0, \sigma\tau, \mathcal{V}_1)\|_V \\ &\leqslant \|(\mathcal{U}_0, \sigma, \mathcal{V}_0)\|_V + \|(\mathcal{V}_0, \mathrm{id}, \mathcal{U}_1)\|_V + \|(\mathcal{U}_1, \tau, \mathcal{V}_1)\|_V \\ &\leqslant L(\sigma) + Cn + L(\tau). \end{aligned}$$

□

4.2 鸽尾洗牌置换

定义 4.4. 给定一个置换 $\sigma \in$对称群(n)，我们定义两个统计量：

- σ 的最长下降子序列是

$$\mathrm{LDS}(\sigma) = \max\{|A| : A \subseteq \{1, 2 \ldots, n\} \text{ and } \sigma|_A \text{ is decreasing}\}.$$

  等价地，迪尔沃斯定理 [20]意味着，LDS(σ)等于划分中部分数量的最小值

$$\{1, 2, \ldots, n\} = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_q$$

  使得 $\sigma|_{C_i}$ 是递增的。

- 上升数为 $r(\sigma) = \#\{i \in \{1, \ldots, n-1\} : \sigma(i) > \sigma(i+1)\} + 1$。等价地，$r(\sigma)$ 是划分中部分数量的最小值

$$\{1, 2, \ldots, n\} = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_q$$

  其中 B_i 由连续 整数构成，且 $\sigma|_{B_i}$ 是递增的。

定义 4.5. $\sigma \in$ 对称群(n) 是一个鸽尾洗牌置换，如果 $r(\sigma) \leqslant 2$。

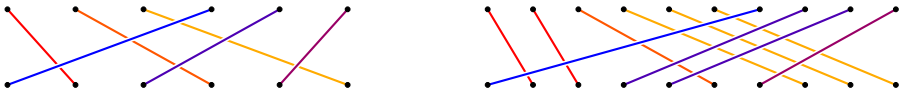


图 3：鸽尾洗牌置换

命题 4.6. 子集 $R \subseteq$对称群(n) 由鸽尾洗牌置换构成，是对称群的一个生成集，并且

$$\forall \sigma \in \mathrm{Sym}(n), \quad \|\sigma\|_R = \lceil \log_2(r(\sigma)) \rceil .$$

证明。 关于生成集 R 的汤普森群 n 对称群的凯莱图上的随机游走已得到广泛研究。特别是，Bayer 和 Diaconis 的著名研究给出了精确公式

$$p^{(m)}(\sigma) = \frac{1}{2^{mn}} \binom{2^m + n - r(\sigma)}{n}$$

表示 m 次随机洗牌得到 σ [3, 定理 1] 的概率。我们利用 $\|\sigma\|_R = \min\{m \geqslant 0 : p^{(m)}(\sigma) > 0\}$ 得出结论。 □

注 4.7. 集合 R 不是对称的，因此 $\|\sigma^{-1}\|_R \neq \|\sigma\|_R$。

4.3 长度界

我们改进了定理 4.1(c)，在许多情况下给出了线性上界。

定理 4.8. 考虑由图 $(\mathcal{U}, \sigma, \mathcal{V})$ 给出的一个元素 $g \in V$，它有n 个叶子。其词长上界为 $\|g\|_V \preceq n \cdot \log_2$(最长下降子序列($\sigma$))。

这与定理 4.1 并不矛盾，因为对于均匀随机选取的置换 $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$，我们有 $\mathbb{E}[$最长下降子序列(σ)$] \sim 2\sqrt{n}$，而且$\mathbb{P}[$最长下降子序列(σ) $\leqslant c\sqrt{n}] \to 0$ 以指数级速度增长，其中 $n \to \infty$ 适用于任意 $c < 2$ [19]。

引理 4.9. $L(\sigma) \preceq n$ 对所有鸽尾洗牌置换 $\sigma \in$ 对称群(n)均成立。

证明。我们注意到，鸽尾洗牌置换 σ 可以通过对置换 τ 中的某些弦进行“克隆”得到；该置换来自图 4 所述的四个族之一。例如，图 3 右侧的置换可以由左侧的置换（也就是图 4 中的 τ_3 ）得到，颜色对此有所提示。这个论证详见 [15,§1]。

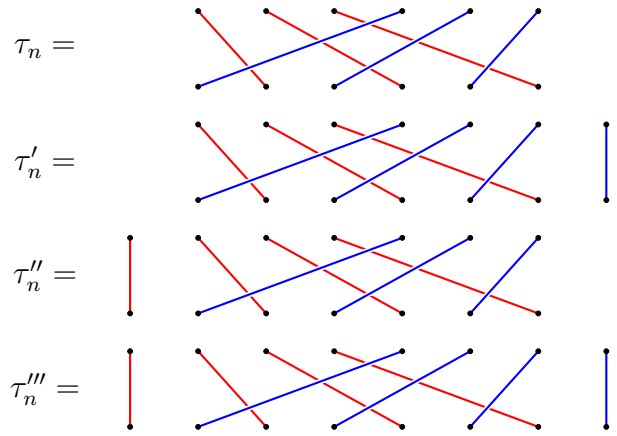


图 4：此处展示的是 $n = 3$ 对应的置换 τ、τ'_n、τ''_n 和 τ'''_n。

我们证明 $L(\sigma) \leqslant L(\tau)$。考虑满足 $\|g\|_V = L(\tau)$ 的 $g =$($\mathcal{U}$、τ、$\mathcal{V}$)。我们只需注意到，g 也可以表示为一个带有置换 σ 的（可约）树图（见图 5），因此 $L(\sigma) \leqslant \|g\|_V = L(\tau)$。所以，我们只需对这四个族证明该命题。

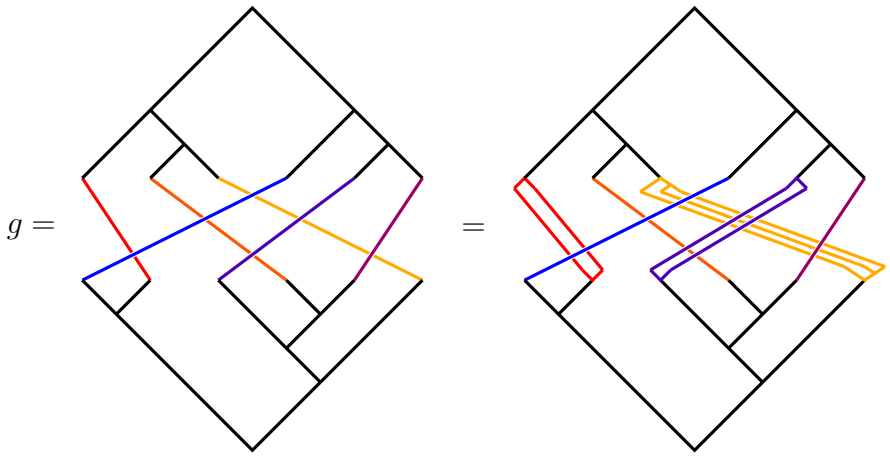


图 5： g 由两个树图给出，置换为 σ 和 τ。

我们首先处理置换 $\tau_n \in$对称群$(2n)$ 的情形，其定义为

$$\tau_n(i) = 2i \quad \text{and} \quad \tau_n(n+i) = 2i-1 \quad \text{for all } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

为了给 $L(\tau_n)$ 的长度作出界，我们估计 $t_n =(\mathcal{R}_n \wedge \mathcal{R}_n,\ \tau_n,\ \mathcal{R}_{2n})$ 的长度，其中 $\mathcal{R}_n$是具有 n 个叶子的右 comb，而“$\wedge$”表示拼接（见图6）。

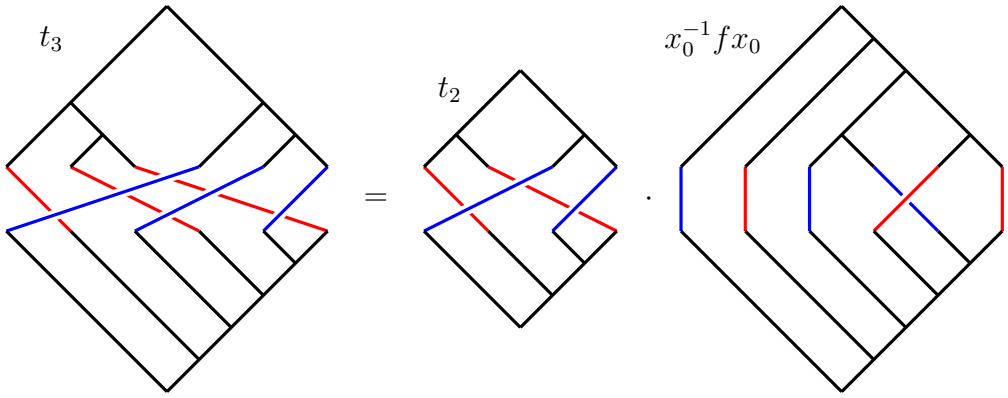


图6： t_n 与 t_{n-1}之间的递推关系。

我们有 $t_n = t_{n-1} \cdot x_0^{5-2n} f x_0^{2n-5}$，其中 x_0、f 如图 7 所示。因此

$$t_n = t_2 \cdot x_0^{-1} f x_0 \cdot \ldots \cdot x_0^{5-2n} f x_0^{2n-5} = t_2 \cdot x_0^{-1} f (x_0^{-2} f)^{n-3} x_0^{2n-5},$$

因此 $L(\tau_n) \leqslant \|t_n\|_V \preceq n$。

接下来，我们考虑族 τ'_n。再次考虑 $g = (\mathcal{U}, \tau_n, \mathcal{V})$，使得 $\|g\|_V = L(\tau_n)$。我们定义一个单射自同态 $h \mapsto h@0$，其中元素 $h@0 \in V$ 通过其在康托尔集 $\mathfrak{C}$ 上的作用来定义：

$$(h@0)(0w) = 0h(w) \quad \text{and} \quad (h@0)(1w) = 1w.$$

在一个句子中，$h@0$ 在 h 0 以下起作用，在其他地方则平凡作用。我们注意到，对于某些树 $\mathcal{U}', \mathcal{V}'$，有 $g@0 = (\mathcal{U}', \tau'_n, \mathcal{V}')$，因此

$$L(\tau'_n) \leqslant \|g@0\|_V \preceq \|g@0\|_{V@0} = \|g\|_V = L(\tau_n) \preceq n.$$

类似的论证也适用于另外两个族。 □

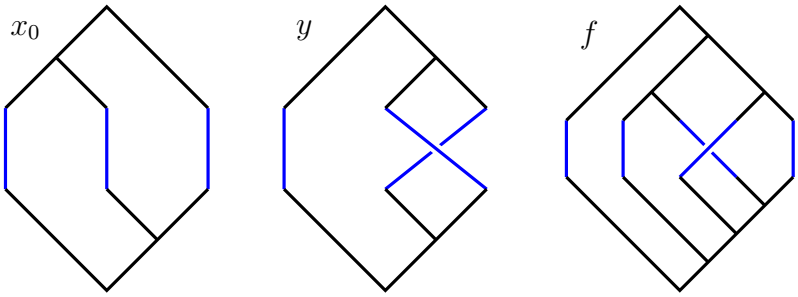


图 7：V 的三个元素

定理 *4.8* 的证明。 结合引理 4.3、4.9 和命题 4.6 可得

$$\forall \alpha \in \mathrm{Sym}(n), \quad L(\alpha) \preceq n \cdot \log_2(r(\alpha)).$$

最后我们注意到，任意置换 σ 都可以写成 $\alpha^{-1}\beta$，其中 $r(\alpha)$ $r(\beta)$ $\leqslant$ 最长下降子序列(σ)（见图 8），因此 $g = (\mathcal{U}, \sigma, \mathcal{V})$ 的长度为

$$\|g\|_V \leqslant \left\|(\mathcal{U}, \alpha, \mathcal{U})^{-1}\right\|_V + \|(\mathcal{U}, \beta, \mathcal{V})\|_V \preceq n \cdot \log_2(\mathrm{LDS}(\sigma)).$$ □

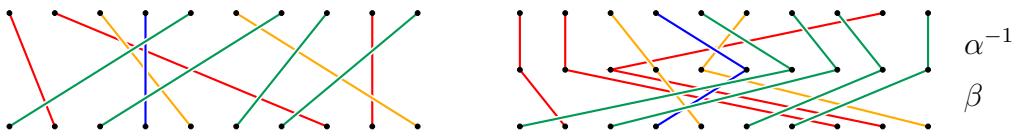


图 8：分解 $\sigma = \alpha^{-1}\beta$。集合 C_i 以不同颜色标示，而 α^{-1} 将它们重新排列为连续整数集合。

最后，我们给出一个互补命题，在最长下降子序列$(\sigma) = n$达到最大值的相反情形下，得到相同的上界。

命题 4.10. 置换 $\varphi_n \in$对称群(n) 定义为

$$\varphi_n(i) = n + 1 - i \quad for\ all\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

满足 $L(\varphi_n) \preceq n$。

证明。我们考虑元素 $g_n = (\mathcal{R}_n, \varphi_n, \mathcal{L}_n)$，其中 $\mathcal{L}_n$ （分别为 $\mathcal{R}_n$）是大小为 n 的左（分别为右）梳状树（见图 9）。

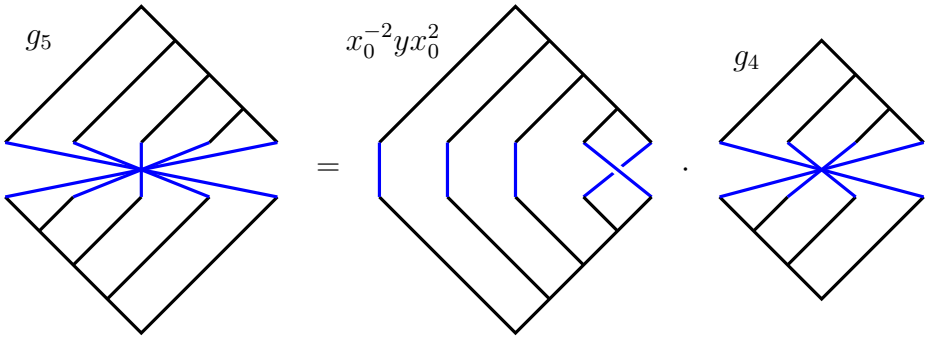


图 9： g_n 与 g_{n-1}之间的递推关系。

我们有 $g_n = x_0^{-(n-3)}yx_0^{n-3} \cdot g_{n-1}$，其中 x_0、y 如图 7 所示。因此

$$g_n = x_0^{3-n}yx_0^{n-3} \cdot x_0^{4-n}yx_0^{n-4} \cdot \ldots \cdot y \cdot g_1 = x_0^{3-n}y(x_0y)^{n-3}g_2,$$

因此 $L(\varphi_n) \leqslant \|g_n\|_V \preceq n$。 □

5 汤普森群中的计算阶

5.1 标记股线图

汤普森群 V 的元素可以通过标记股线图表示，这些图是抽象弦图的轻微推广（见 [6]）。

图上的旋转系统，是指为每个顶点关联的边指定一个循环序。

定义 5.1。 带标记的弦图是有限无环有向图的有限序列，并附有一个旋转系统，且满足以下性质：

1. 每个有向图都有单价的源顶点和汇顶点，源顶点的数量 n 与汇顶点的数量相等。2. 康托尔集 $\mathfrak{C}$ 有两个有序的 n 划分，以及两个保序双射标记映射，分别将源顶点映射到第一个划分，将汇顶点映射到第二个划分。
3. 其他所有顶点都是分裂（ ）或合并（ ）。



如果两个带标记的股线图的连通分支之间存在与相应旋转系统及标记映射相容的有向图同构，则认为这两个图相等。

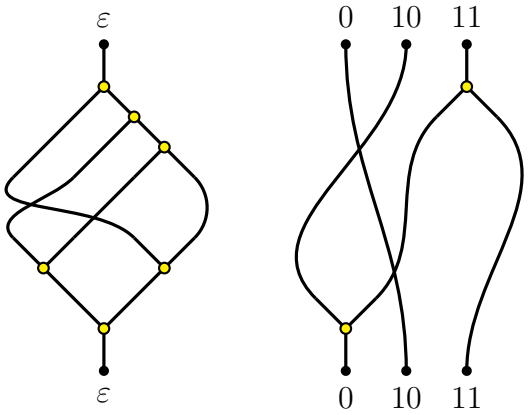


图 10：表示汤普森群 V 中同一元素的两个带标记的股线图，其中一个图是通过多次应用图 11 中的规则从另一个图得到的。

给定一个汇划分等于另一个带标记股线图的源划分的带标记股线图，可以按照标记将前者的汇顶点与后者的源顶点粘合起来，再消去由此产生的二价顶点，从而将两者复合。显然，表示汤普森群 V 中元素 g 和 h 的带标记股线图复合后，所得图是表示 gh 的带标记股线图。

从一个带标记的弦图出发，可以通过应用图 11 中的规则，得到另一个表示 V 中同一元素的带标记的弦图。

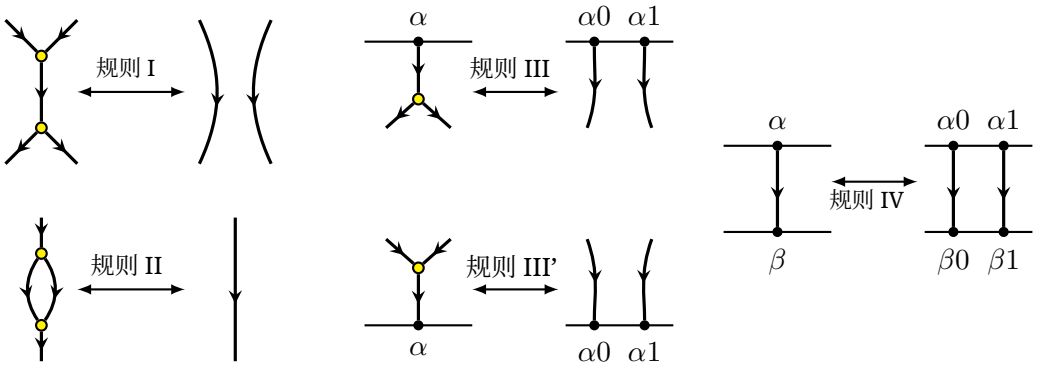


图 11：带标记的股线图的四条改写规则。

5.2 检测挠元并计算阶

我们介绍一种算法，用于判定汤普森群 V 中的一个元素是否具有有限阶；若是，则高效计算其阶。

5.2.1 算法

(1) 我们将该元素画在一个圆柱面上，并在穿过“接缝”的边上标记 1（见图 12 左侧），在所有其他边上标记 0。

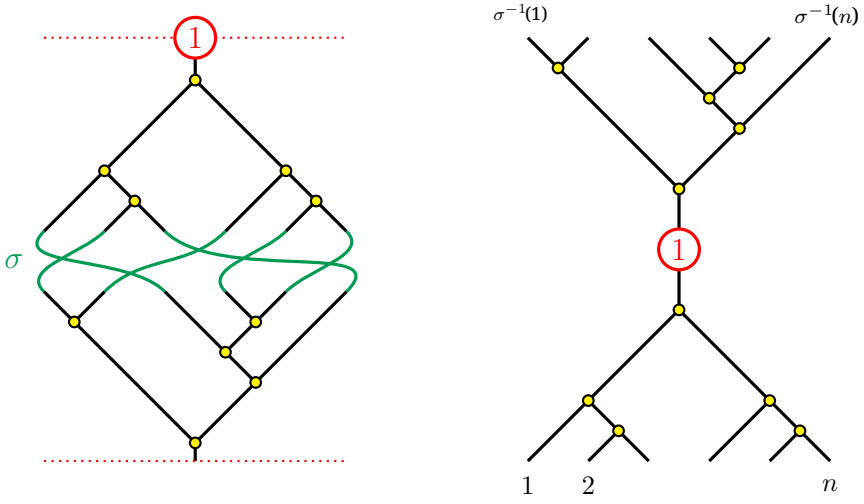


图 12：圆柱面上的理想图示和实际图示。

实际上，只有股线图和边标签才重要（而非嵌入在圆柱面中的方式）。我们将该元素画成叶子朝外，并用 σ 为叶子编号（见图 12 右侧）；在可行时，允许将编号相同的叶子重新粘合。

(2) 如果我们找到一对相邻的合并-分裂叉，就应用规则 I，复制中心标签，并将最终落在每条边上的所有标签相加。注意，某些入边和出边可能重合，这种情况下图会略有不同，如图13和图14所示。

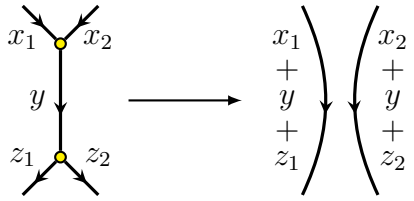


图 13：当 4 条边各不相同时，带标签的规则 I

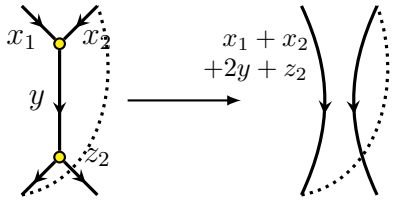


图14：当右上边和左下边重合时，带标签的规则 I

重复此过程，直到相邻的合并-分裂对不再存在。

(3) 最后，有两种可能：

- 或者，该图是有限个圆的并。此时，该元素是挠元，其阶为这些标签的最小公倍数。
- 或者仍然有叉。此时，元素在 $\mathfrak{C}$ 上的作用具有吸引点和排斥点，因此其阶为无限。此外，有限轨道的长度可以通过对循环上的标签求和得到。

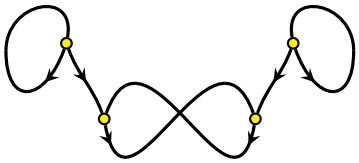


图15：一个仍有合并叉和分裂叉的图，但所有合并叉都位于分裂叉的“下游”。

例5.2。 我们考虑定理 4.10 中的元素 g_n，它也可以定义如下：

$$g_n(1^k0w) = 0^k1w \text{ for } 0 \leqslant k < n-1, \quad \text{and} \quad g_n(1^{n-1}w) = 0^{n-1}w.$$

将前 n 个数位反向读取时， g_n 对 2^{n-1} 取模后加 1，因此 g_n 的阶为 2^{n-1}。我们可以用我们的算法验证这一点，这里以 $n = 3$ 为例：

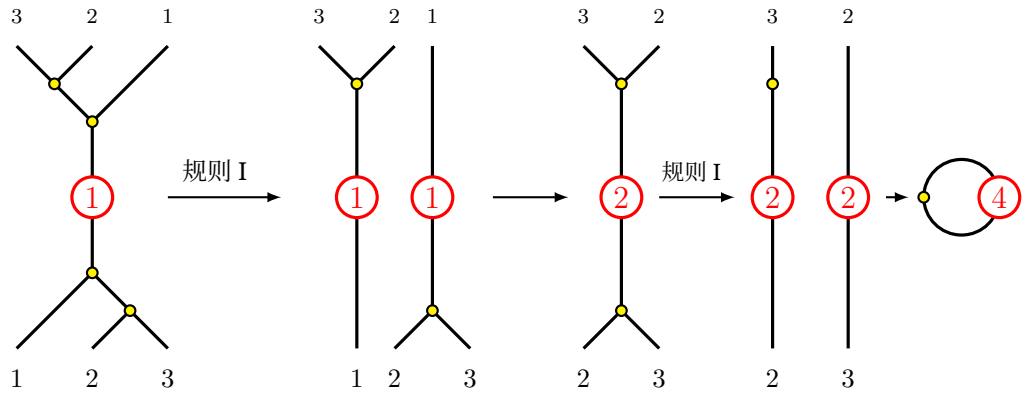


图 16：对 g_3 应用算法。

例 5.3。 考虑满足 $g@0$: $00w \leftrightarrow 01w$ 且 $g@1 = x_0^{-1}$ 的 g。这个元素显然不是挠元，并且在右子树上具有吸引子-排斥子行为，而在左子树上描述了一个周期为 2 的轨道；这可以通过算法验证（见图 17）。

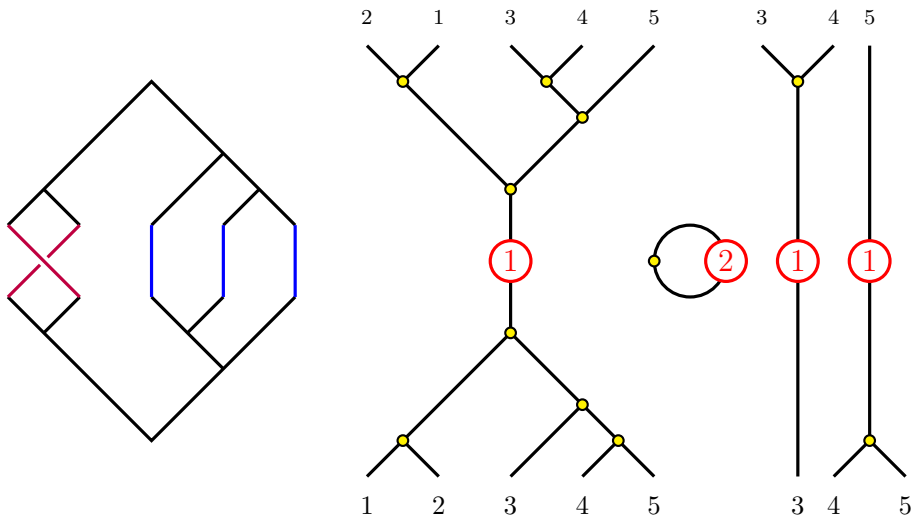


图 17：汤普森群 V 的一个元素，以及算法的第一步（中心）和最后一步（右侧）。在这种情况下，存在一个周期轨道（其周期已突出显示）和两条表示吸引子-排斥子行为的弦。

命题 5.4. 从一个由一对各有 n 个叶子（因此有 $n-1$ 个叉）的树表示的元素出发，末端图满足

- 连通分支的数量至多为 n。
- 所有标签之和至多为 2^{n-1}。

证明。 首先注意到，该算法至多经过 $n-1$ 次规则 I 的应用便会终止，因为叉的数量从 $2n-2$ 开始，并且每次操作都会减少 2。我们注意到，连通分支的数量初始为 1，且每次应用规则 I 至多增加 1。类似地，标签之和初始为 1，且每次应用时至多翻倍。 □

注记 5.5 （复杂度）。 该算法的前两个步骤在确定性空间复杂度(n^2) 和 DTIME(n^2) 内运行。事实上，

- 需要跟踪一个至多有 $2n$ 个顶点的图、每个顶点的类型（合并或分裂），以及每个顶点的 1 条或 2 条出边所指向的目标顶点及其标签（标签是 n 位整数）。
- 每一步都需要扫描一个合并-分裂对，并进行一些 n 位数的加法，这两种操作都需要 $O(n)$ 时间。

算法中开销最大的部分似乎是第 (3) 部分中最小公倍数的计算。递归地使用公式

$$\operatorname{lcm}(l_1, l_2, \ldots, l_k) = \operatorname{lcm}\left(\operatorname{lcm}\big(l_1, \ldots, l_{[\frac{k}{2}]}\big), \operatorname{lcm}\big(l_{[\frac{k}{2}]+1}, \ldots, l_k\big)\right),$$

我们需要计算 $\frac{n}{2^{i+1}}$ 个两个 $2^i n$ 位整数的最小公倍数，$i = 0, \ldots, \log_2 n$。使用计算整数乘积、商和最大公约数的最先进算法，这需要 $O\big((n \log\ n)^2\big)$ 次运算 [28, 39]。

5.2.2 正确性

在上一小节中，我们解释了如何得到约化的股线图（即不含合并-分裂对），甚至是“圆柱面上”约化的股线图。此约化过程只需使用表示 V 中同一元素的带标记的股线图，并根据连接该对的边绕圆柱面的圈数，应用规则 III、III’（有时还需应用规则 IV）来简化合并-分裂对（见图 18）。

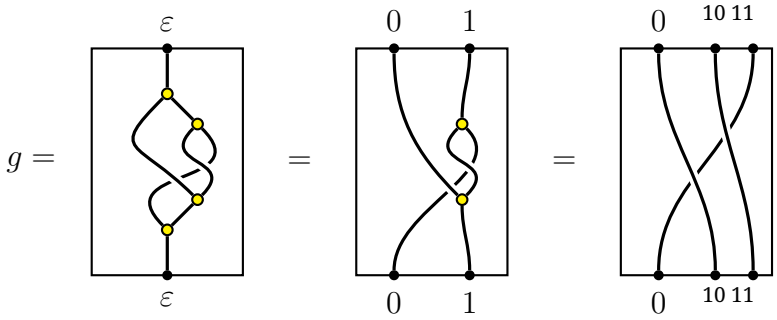


图 18：将元素 $g \in T$约化为不含合并-分裂的图。

一旦得到表示该元素的这些约化带标记的股线图，理解 $g \curvearrowright \mathfrak{C}$ 的动力学就容易得多。

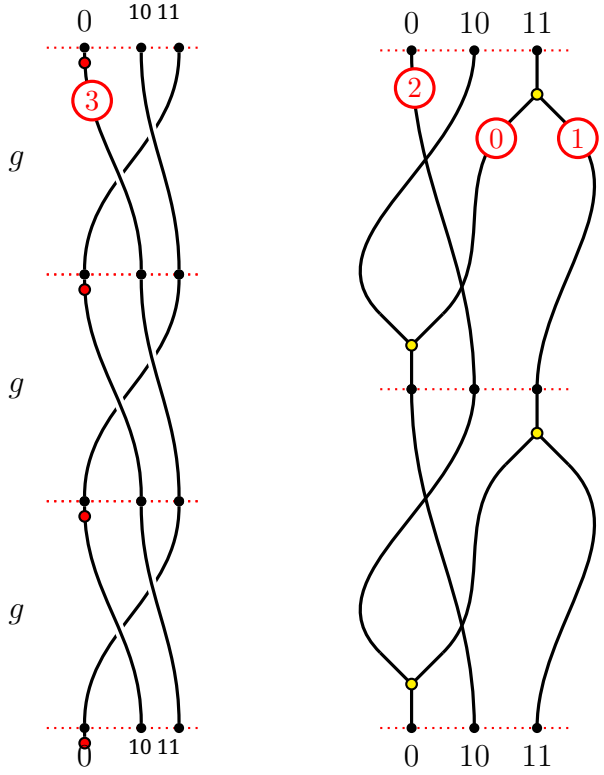


图 19：左侧是一个属于 T 、周期为周期3的元素。右侧是 V 的一个非挠元。

我们注意到，每条边上的标签恰好等于它跨越的水平分隔线数量。（对于“圆”形分量，我们用红色添加一个虚拟顶点来标记边的末端。）我们区分两种情况：

- 如果没有剩下的合并和分裂，那么该元素就是 $\mathfrak{C}$的一个划分上的置换。对于划分中的每个部分 α，相应边上的标签 l_i 是满足 $g^l|_\alpha = \mathrm{id}$ 的最小整数。因此，g 的阶是这些标签 l_i 的最小公倍数。参见图 19 左侧。

- 如果还剩下一些合并和分裂，那么从任意一个合并出发向下走，只会遇到其他合并。由于顶点数量有限，某个合并必定会重复出现：这就是一个吸引子循环，因此其阶为无限。该吸引子包含一个具有有限轨道的点，其轨道长度等于循环上各标签之和。参见图 19 右侧。

5.3 汤普森群 T中的旋转数

设 $g \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{S})$ 是单位圆的一个同胚，且 $\hat{g}$ 是 g 到 $\mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R})$ 的一个提升。g 的旋转数定义为

$$\mathrm{rot}(g) = \lim_{i\to\infty} \frac{\hat{g}^i(x)}{i} \mod \mathbb{Z}.$$

这个数与 $x \in \mathbb{R}$ 的选择无关；由于模 $\mathbb{Z}$ 同余，它也与提升的选择无关。我们回顾一下：当且仅当 $\mathrm{rot}(g) = 0$ 时，g 有不动点。特别地，若 $\mathrm{rot}(g) \in \mathbb{Q}$，则其分母 k 是使 g^k 有不动点的最小自然数。事实上

$$\mathrm{rot}(g^k) = k \cdot \mathrm{rot}(g) = 0.$$

Ghys 和 Sergiescu 的一项卓越结果指出，汤普森群 T 中元素的旋转数总是有理数 [24], 另见 [36]。在本小节中，我们将介绍主算法的一种变体，它可以高效地计算 g 的旋转数，对象为 $g \in T$。注意，主算法已经给出了 $g \curvearrowright \mathbb{S}$ 的有限轨道长度，也就是 $\mathrm{rot}(g)$ 的分母。我们还需要另一组标签来追踪分子。

5.3.1 算法

我们将介绍一种算法，可高效计算元素 $g \in T$ 的旋转数 $\mathrm{rot}(g) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 。

(1) 将该元素画在环面上，并在每条穿过红色“接缝”的边上标注红色标签 1，在每条穿过蓝色“接缝”的边上标注蓝色标签 1，如图20所示。

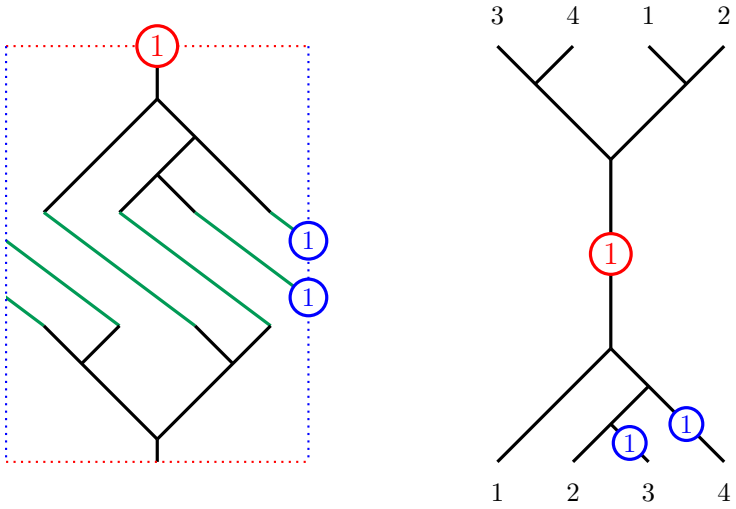


图20：环面上的理想图示和实际图示。

(2) 如果我们找到一对连续的叉所构成的合并-分裂对，就对每种颜色应用规则 I，如§5.2.1中所述的算法。重复此步骤，直到不再有连续叉构成的合并-分裂对。

(3) 最后，旋转数为 $\frac{a}{b}$ where a （分别为 b）是最终图示中任意有向环上的蓝色（分别为红色）标签之和。

例5.6。 让我们完成图20中的例子。

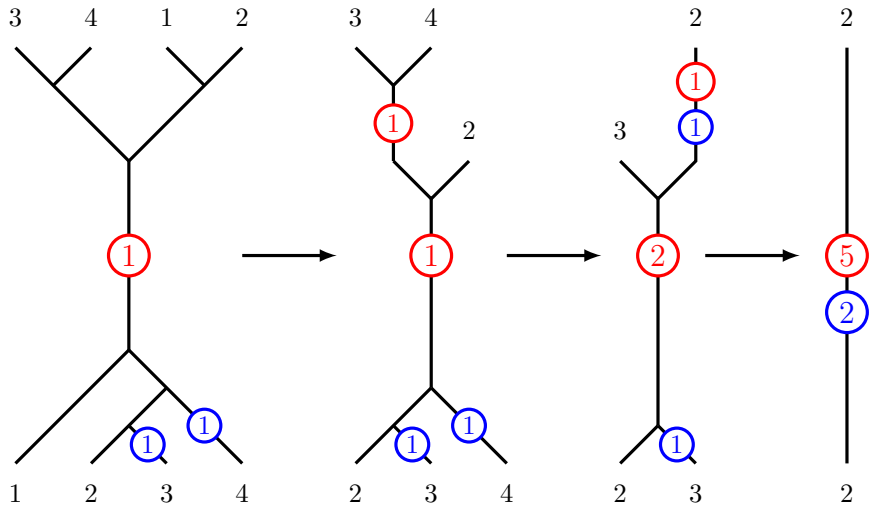


图21：应用于定理 6.1 中 $\tilde{a}_1 \in T$ 的算法。

因此，该元素的旋转数为$_{2\ 5}$。 –

5.3.2 正确性

正如第 5.2.2 节中一样，我们只用表示同一元素 $g \in T$ 的带标记的股线图，就能得到一个约化图。此外，我们可以将该图的副本水平拼接起来，从而得到一个对应于提升 $\hat{g} \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R})$ 的标记图（见图22）。边上的标签恰好等于它所穿过的垂直和水平分隔的数量。

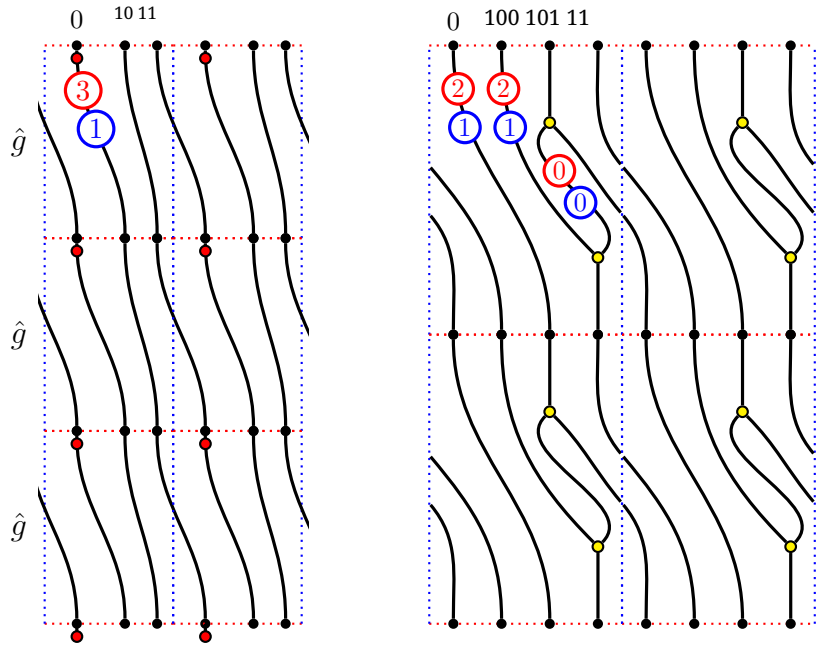


图22： T中两个元素的约化图，以及相应的标签，将它们拼接起来即可得到$\hat{g} \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$的图。它们的旋转数分别为$1\ 3$ 和$1\ 2$。

我们注意到，同一顶点的两个副本之间的每条有向路径都会给出一个点 $x \in \mathbb{S}$，使得 $g^b(x) = x$，其中 b 是该路径上红色标签之和。因此，存在一个点 $\hat{x} \in \mathbb{R}$，使得 $\hat{g}^b(\hat{x}) = \hat{x} + a$，其中某个整数 $a \in \mathbb{Z}$；更具体地说， a 是该路径上蓝色标签之和。由此可得 $\text{rot}(g) = \frac{a}{b}$。

6 汤普森群

6.1 汤普森群 T

我们首先计算汤普森群 T 的周期增长。

定理 6.1。 汤普森 T 的周期增长满足 $p_T(n) \asymp \exp(n)$。

证明。 一个挠元 $g \in T$ 会使 §5.2.1 中描述的算法结束时，出现若干个标签相同的连通分支。事实上，若一个循环的长度为 l，则元素 g^l 固定一个点，因此它属于 F 在共轭下不变的子群

。因此它是平凡元素，所有循环的长度都必须为 l。若 g 有 n 个叶子（因此根据定理 4.1，其长度为 $\asymp n$），那么它的阶就是每个分支上的标签，因此由定理 5.4 可知其上界为 2^{n-1}。这就得到了上界。

为了证明 $p_T(n)$ 是指数级的，我们注意到，从任意满足 $g(12) = 0$（也就是说，恰好将 1 下方的顶点送回左侧）的挠元 g 出发，只要它有 n 个叶子，就可以如图 23 所示构造一个有 $n+2$ 个叶子的元素 $\tilde{g}$，且 $\mathrm{ord}(\tilde{g}) \geq 2\,\mathrm{ord}(g)$。此外，$\tilde{g}^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$。

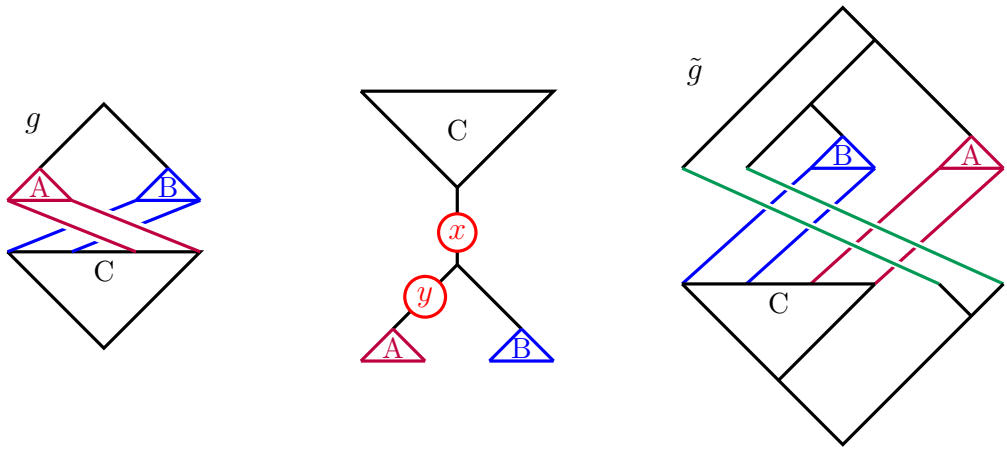


图 23：在算法的第一阶段，左侧的元素 g 为中间的图提供了 $x = 1$ 和 $y = 0$；而对元素 $\tilde{g}$ 应用两次规则 I 后，图保持不变，但变为 $x = 2$ 和 $y = 1$。

从 a_1：$0w \leftrightarrow 1w$（有 2 个叶子且 $\mathrm{ord}(a_1) = 2$）出发，我们递归地定义 $a_{n+1} = \tilde{a}_n^{-1}$。根据归纳法，元素 a_n 有 $2n$ 个叶子（因此由定理 4.1(b) 可得 $\|a_n\|_T \asymp n$），且 $\mathrm{ord}(a_n) \geqslant 2^n$。 □

6.2 D. Calegari 的一个问题

汤普森群 T 中的另一个自然问题，是对 $\mathrm{rot}(g)$ 的分母进行界定，这里的元素不一定是挠元。D. Calegari [16] 的一篇文章部分解决了这一问题。对于一个约化元素$g = (\mathcal{U},\ \sigma,\ \mathcal{V}) \in T$，他证明了

$$\text{denominator of } \mathrm{rot}(g) \leqslant m(g) \cdot 2^{m(g)}$$

其中 $m(g) := 2^{d(g)}$，而 $d(g)$ 是 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 之间的最大深度。他给出了分母与 m^2 成正比的例子，并提出问题：一般情况下，关于 m 是否存在多项式（甚至是二次）上界 [16,问题 44]。

我们借助另一族扭元，对 Calegari 的问题给出了否定答案。特别地，$\mathrm{rot}(g)$ 的分母与 $\mathrm{ord}(g)$ 相同（见定理 6.1 的证明）。现在，我们针对给定的深度而非给定的叶子数／词长来优化阶。

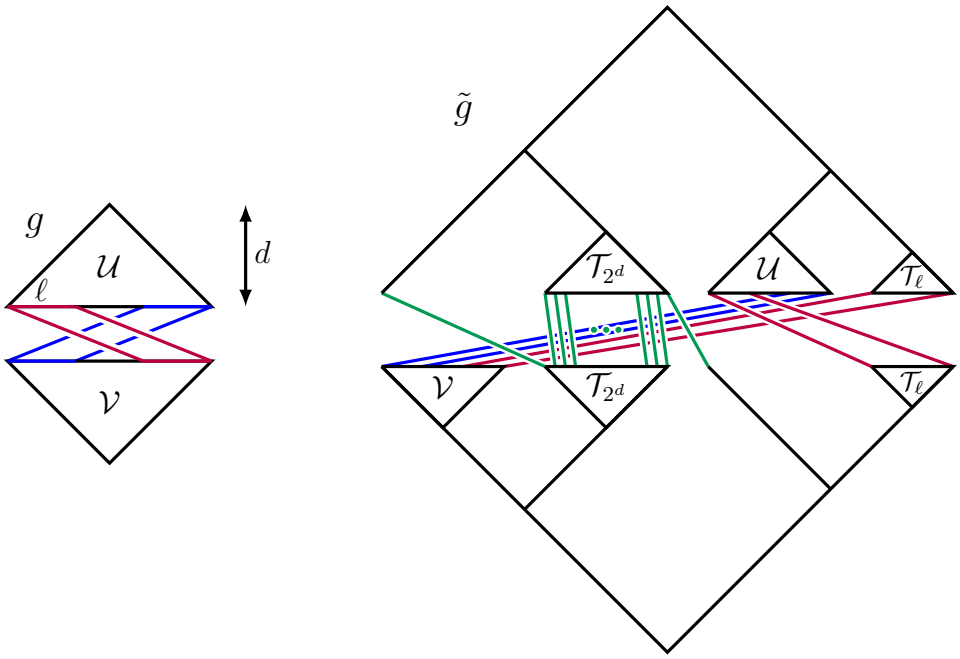


图 24：另一种迭代构造，针对深度进行优化。

对于每个（挠）元素 $g \in T$，我们按照图 24 所示，将其与另一个（挠）元素 $\tilde{g} \in T$关联起来。这里，$\mathcal{T}_n$ 表示任意一棵有 n 个叶子且深度为 $\lceil \log_2(n) \rceil$ 的树。我们对新元素 $\tilde{g}$ 的不同参数进行控制：

- $\mathcal{T}_{2^d}$ 和 $\mathcal{T}_\ell$ 的深度小于 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的深度，因此我们得到等式 $d(\tilde{g}) = d(g) + 2$。
- 元素 $\tilde{g}$ 仍然是挠元，且其阶满足 $\mathrm{ord}(\tilde{g}) \geqslant 2^{d(g)} \cdot \mathrm{ord}(g)$。

如果从元素 b_0 开始：$0w \leftrightarrow 1w$（其中 $d(b_0) = 1$ 且 $\mathrm{ord}(b_0) = 2$），并迭代这一构造，我们就得到一个序列 $(b_k)_{k \geqslant 0}$，其深度为 $d(b_k) =$

$2k+1$。此外，$\mathrm{ord}(b_{k+1}) \geqslant 2^{d(b_k)} \cdot \mathrm{ord}(b_k)$ 归纳地给出

$$\mathrm{ord}(b_k) \geqslant 2^{k^2+1} \asymp m(b_k)^{\frac{1}{4}\log_2 m(b_k)}.$$

这证明 $\mathrm{ord}(g)$（因此 $\mathrm{rot}(g)$ 的分母）不满足关于"高度" $m(g)$ 的任何多项式不等式。

6.3 汤普森群 V

现在我们研究汤普森群 V，包括情形 $D = \mathbb{N}$ 以及更一般的情形。我们必须假设 D 不太稀疏。

定理 6.2。

(a) 如果 $D \subseteq D_k$ 满足"对数型伯特兰假设"，即存在 $\exists C \geqslant 1$、$\forall M \in \mathbb{N}$、$\exists m \in D$ 使得 $M \leqslant m \leqslant M^C$，那么 $p_V^D(n) \asymp \exp(n)$。

(b) $p_V(n) \asymp \exp(n^2)$。

证明。(a) 对于上界，设 $g \in V$ 的阶为 $\in D \subseteq D_k$，于是 g的阶为 $= p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$。设 $\{l_1, \dots, l_m\}$ 为我们在 §5.2.1 中所述算法结束时得到的标签集合。我们有 $p_i^{e_i} \mid \mathrm{lcm}(l_1, \dots, l_m)$，因此

$$p_i^{e_i} \leq \max_{i=1}^{m} l_i \leq \sum_{i=1}^{m} l_i.$$

$_m$因此，如果 $\|g\|_V \leq n$，则由定理 5.4，阶满足 $\mathrm{ord}(g) \leq (\sum l_i)^k \preceq \exp(n)$。

现在我们来处理下界。根据假设，存在 $m \in D$，使得 $(C\exp(Cn))^{\frac{1}{C}} \leq m \leq C\exp(C\bar{n})$。我们将证明，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $g \in V$，其长度为 $\asymp \log(m)$，且 $\mathrm{ord}(g) = m$。这意味着 $p_V^D(n) \geq (C\exp(Cn))^{\frac{1}{C}} \asymp \exp(n)$。

设 $m \in [2^{n-1}, 2^n - 1]$，并将其写作 $a_0 + a_1 \cdot 2 + \ldots + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$，其中 $a_i \in \{0,1\}$。设 $\{i \mid a_i = 1\} = \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$，且 $i_1 < \ldots < i_d$。考虑元素 $c_m = (\mathcal{L}_n \wedge \mathcal{R}_d,\ \phi_m,\ \mathcal{R}_n \wedge \mathcal{R}_d)$，其中

$$\phi_m\colon \begin{cases} 1 & \mapsto & n, \\ i+2 & \mapsto & n+1-(i+2) \qquad \text{if } 0 \leq i \leq n-2 \text{ and } a_i = 0, \\ i_j+2 & \mapsto & n+j, \\ n+j & \mapsto & n+1-(i_j+2). \end{cases}$$

该元素有 $n+d$ 个叶子，满足 $d \leq n-1$，且 $\phi_m = \alpha\beta$，其中 $\alpha \in \mathsf{Sym}(n+d)$ 满足 $\mathsf{LDS}(\alpha) \leqslant 3$，而 $\beta \in \mathsf{Sym}(n+d)$ 由一个 $g_n@0 = g_2 g_{n+1}$ 的非约化图表示（其中 g_n 在定理 4.10 中定义）。因此，根据定理 4.8 和定理 4.10，$\|c_m\|_V \preceq n$。含有 $m = 45$ 的例子见图 25，图 26 展示了该算法。

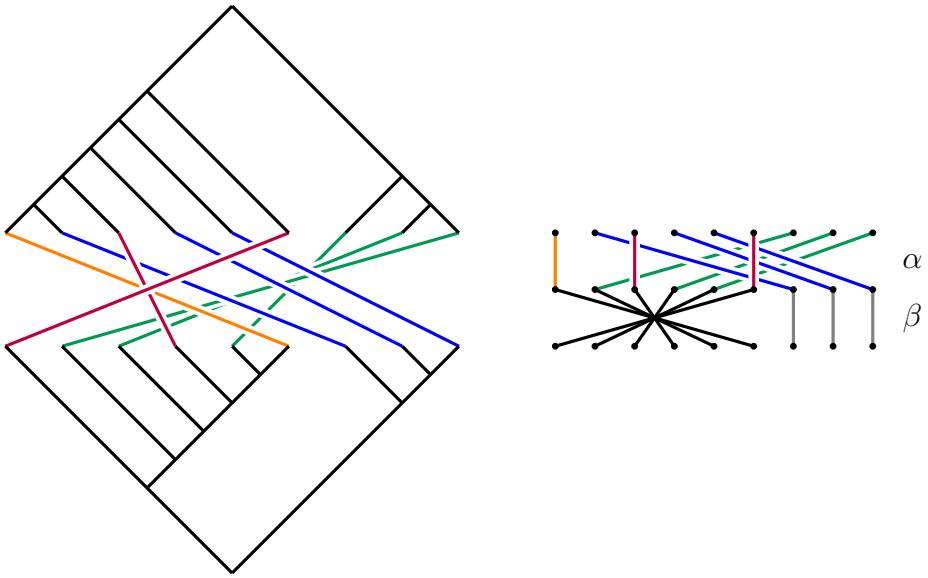


图 25：元素 $m = (1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4) + 2^5$，以及对应的分解 $\phi_m = \alpha\beta$。

应用规则 I d 次后，我们得到图 26 左侧的树，其中有 $k = n$和 $x = 1$。接着，我们再重复应用规则 I $n-1$ 次。总的来说，每个 a_i对阶贡献 $a_i 2^i$，而中间的标签贡献 2^{n-1}，因此总计为 m。

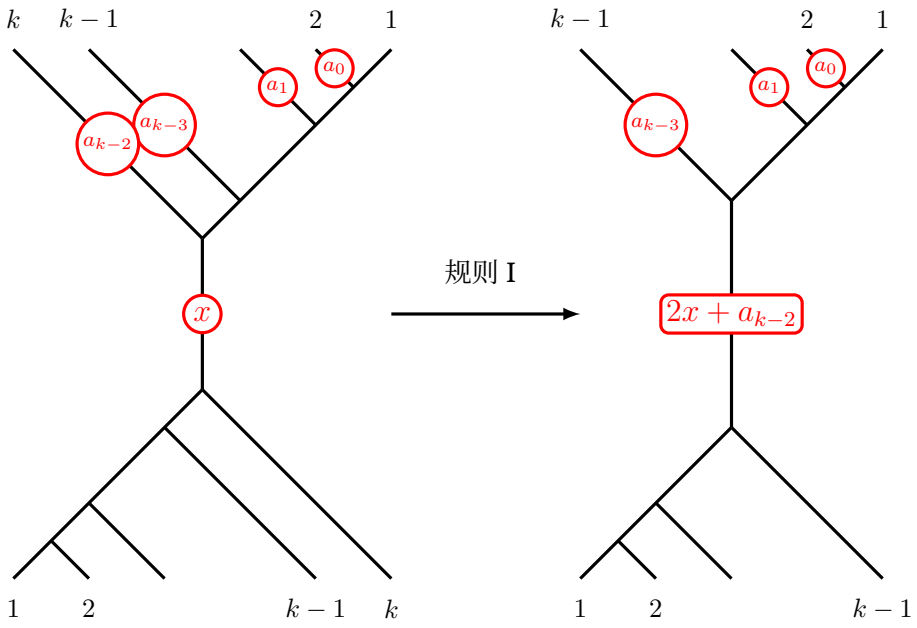


图 26：算法应用于 c_m 的一个步骤。

(b) 对于上界，根据定理4.1，长度至多为 n 的元素 $g \in V$ 可以表示为一个至多有 Cn片叶子的树对图。在 §5.2.1 的算法结束时，它至多产生 Cn 个连通分支，并且根据定理 5.4，每个分支中的标签至多为 2^{Cn-1}。g 的阶至多为 $(2^{Cn-1})^{Cn} \asymp 2^{n^2}$。

对于下界，我们考虑 $d_n = (\mathcal{S}_{2n+1} \wr \mathcal{R}_{n+1},\ \psi_n,\ \mathcal{L}_{2n+1} \wr \mathcal{R}_{n+1})$，其中 $\mathcal{S}_{2n+1}$ 是一棵树，其 $2n+1$ 个叶子在图 27 中以高亮显示，并且 $\psi_n \in$ 对称群$(3n+2)$ 定义为

$$\psi_n\colon \begin{cases} i \mapsto 2n-2i+2 & \text{if } 1 \leqslant i \leqslant n \\ i \mapsto i+n+1 & \text{if } n+1 \leqslant i \leqslant 2n+1 \\ i \mapsto 2i-4n-3 & \text{if } 2n+2 \leqslant i \leqslant 3n+2 \end{cases}$$

我们分解 $\psi_n = \alpha\beta$（见图 27 右侧），其中

- α 是 $g_n@0 = g_{n+1}g_2$ 的一个非约化图中的置换（其中 g_n 在定理 4.10 中定义），因此 $L(\alpha) \leqslant \|g_n@0\|_V \preceq n$，并且
- $\beta \in$ 对称群$(3n+2)$ 是鸽尾洗牌，因此根据定理 4.9 有 $L(\beta) \preceq n$。

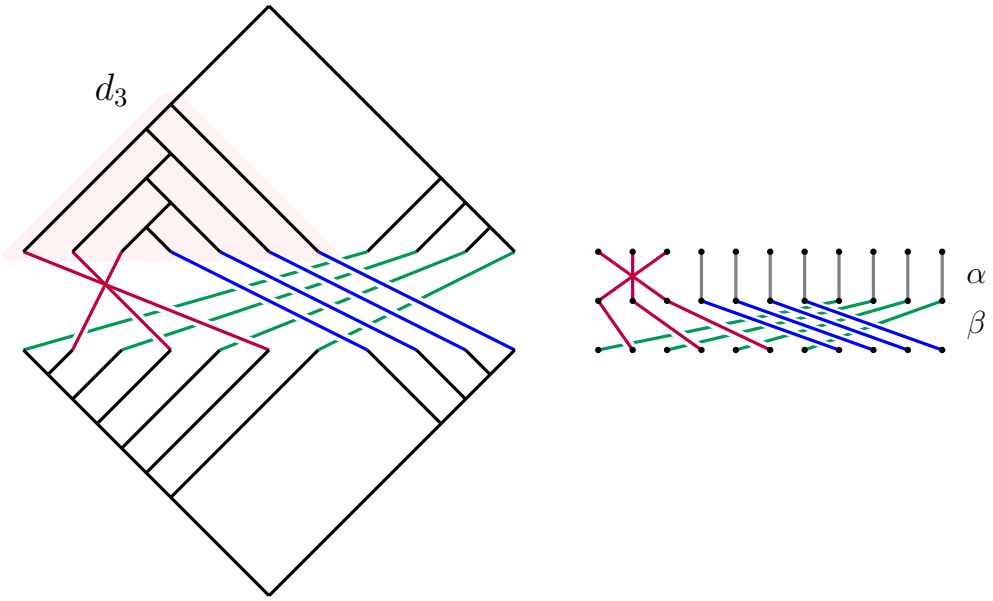


图 27：实现下界的序列 d_n 中的元素，以及相关的分解 $\psi_n = \alpha\beta$。

利用定理 4.3，我们得出

$$\|d_n\|_V \leqslant L(\psi_n) + O(n) \leqslant L(\alpha) + L(\beta) + O(n) = O(n).$$

最后，我们需要计算 d_n 的阶。回想一下，d_n 有 $3n + 2$ 片叶子。我们先应用一次算法（规则 I），将图分成两部分，然后对右树再应用 n 次规则 I。这样会得到一幅有 $2n+1$ 片叶子的图，其标签恰好如图 28 所示（左侧第一幅图，包含 $k = n$ 和 $x = 1$）。接着，我们如图 28 所示再应用两次规则 I。这会产生两个连通分支：一个是具有 $(2n - 1)$ 片叶子的 $(2n + 1)$ 片叶子图的版本，另一个是一个循环；二者的中心标签均为 2。

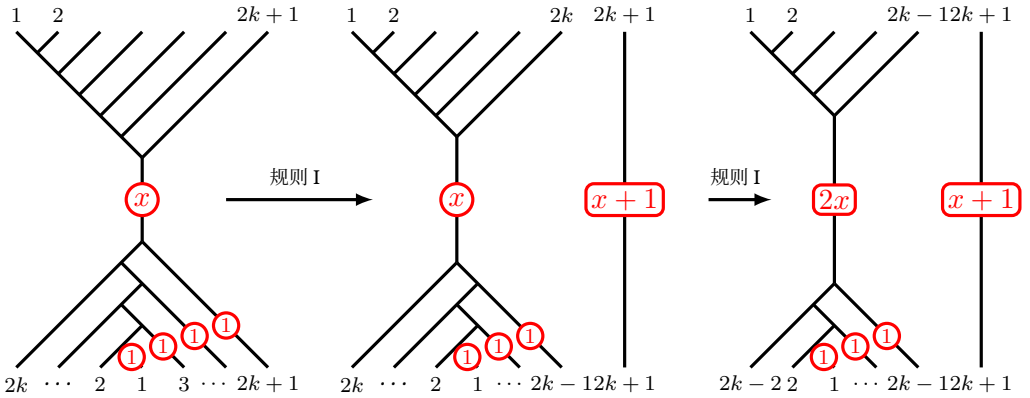


图 28：算法应用于 d_n 时的连续两个步骤。

在左侧树上再迭代应用算法 n 次后，我们得到 $n+1$ 个循环，其标签为 2^0+1，2^1+1，……，2^n+1。因此，d_n 的阶为

$$\operatorname{lcm}(2^0+1, 2^1+1, \ldots, 2^n+1) \asymp \exp(n^2),$$

参见 [43] 第 410 页上的估计。 □

注 6.3. 另一类与余上下文无关字问题密切相关的群是带有 $V_{(G,\theta)}$ 的 G 有限群；另见 [7] 以了解更详细的构造。目前尚不清楚这些群是否嵌入汤普森群 V，因此也不清楚它们是否可能成为 Lehn-ert 猜想的反例。因此，自然会想知道它们的周期增长。回想一下，这些群是 [49],中为 $G_n = G^n \rtimes \mathrm{Sym}(n)$ 定义的克隆系统的实例，并带有显然的映射 ρ_n: $G_n \to \mathrm{Sym}(n)$。利用 [49,引理 3.12], ，我们得到一个短正合列

$$1 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} G \longrightarrow V_{(G,\theta)} \xrightarrow{\mathcal{T}(\rho_*)} V \longrightarrow 1.$$

此外，这个序列是分裂的，因为映射 ρ_n split；这一结论可由同一篇文章中的观察 2.28 和 2.29 得出。当 G 有限时，根据引理 1.1(a) 和 1.3(a)，很容易得出，对于所有 $D \subset \mathbb{N}$，$p^D_{V_{(G,\theta)}}(n) \asymp p^D_V(n)$。

7 一个具有大周期增长的 CF-TR 群

在 [18], 中，介绍了一类新的群：上下文无关图的转移群，也简称为 **CF-TR** 群。相关定义参见 [18] 。此外，文中还证明了**CF-TR** 群周期增长的上界。仔细考察细节，可以提取出以下结果：

定理 7.1。 设 Γ 是一个上下文无关图，并令 $G \in$**CF-TR** 为其¯转移群。定义 $\beta_\Gamma(n) =$上确界$_{v\in\Gamma}|B_\Gamma(v,\ n)|$。那么

(a) $p_G^{D_k}(n) \preceq \left(n \cdot \bar{\beta}_\Gamma(n)\right)^k \preceq \exp(n),\ and$ [18, Lemma 5.3]

(b) $p_G(n) \preceq \bar{\beta}_\Gamma(n)^n \preceq \exp(n^2).$ [18, Proposition 5.4]

一个重要的问题是，汤普森群 V 是否为 **CF-TR**。结合前面的定理与定理 6.2，我们得到以下推论：

推论 7.2。 如果 Γ 是一个上下文无关图，其转移群为 V，那么¯体积增长 $\beta_\Gamma(n)$是指数级的。

对定理 7.1 的任何改进都将直接意味着 $V \notin$**CF-TR**。在本节余下部分，我们给出一族新的 **CF-TR** 群，其中定理 7.1(a) 是精确的。我们考虑以下群的实例

$$B(G) = \left(\ldots \wr G) \wr G) \wr G) \wr \ldots\right) \rtimes \mathbb{Z},$$

由 A. Erschler 在 [21, §4] 中引入。情形 $B(\mathbb{Z})$ 也由 Brin 和 Navas 在 [41, 12], 中研究过，现在称为 Brin-Navas 群。其他群 $B(G)$ 称为 Brin-Erschler-Navas 群（或 BEN 群）。

注 7.3. 形式上，我们首先将 H 定义为由有限支撑的 $|G|$元有根树的自同构组成的群，其局部截面属于 G。注意， H 包含一个同构子群 H@1，该子群由支撑仅位于第一层某个给定顶点 1 下方的元素组成。于是， $B(G)$ 是 $B(G)$的上升 HNN 扩张，其中 x_0： $H \to H$@1。

群 $B(C_2)$ 可通过其在三叉树（或“双向无限二叉树”）上的作用来定义。我们固定树中的一条双向无限路径，并将其称为“脊柱”。这将树划分为若干“层”（或等距面，见图29）。群 $B(C_2)$ 由以下两个自同构生成：

- x_0，沿脊柱平移一个单位，并使悬挂在脊柱下方的所有子树刚性移动。

- y，它将脊柱与第 0 层交点下方的两棵子树刚性互换，并在其他地方恒等作用。

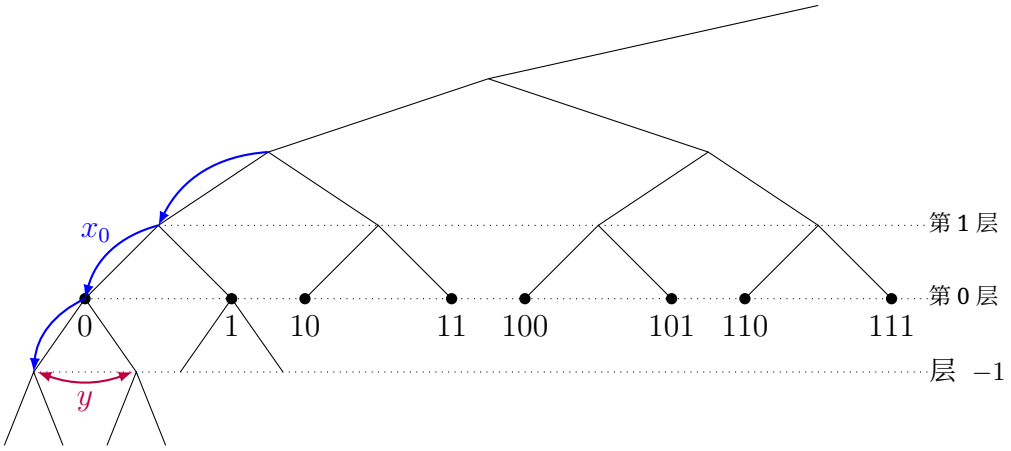


图29：划分为各层的树，以及两个自同构。

一个有趣的观察是，$B(\mathbb{Z})$ 嵌入汤普森群 F。当然，群 $B(C_2)$ 含有非循环有限群，因此它不能嵌入 F，甚至不能嵌入 T。我们证明一个最接近的结果：

命题 7.4。群 $B(C_2)$ 嵌入汤普森群 V。

证明。我们有

$$B(C_2) = \big(\ldots \wr C_2) \wr C_2) \wr C_2) \wr \ldots\big) \rtimes \mathbb{Z} \simeq \langle x_0, y\rangle \leqslant V.$$

或者，一旦我们知道 $\mathrm{QAut}(\mathcal{T}_{2,c}) \hookrightarrow V$（参见 [10]，其中给出了精确的定义和陈述），这一点就显而易见了。 □

命题 7.5. $B\,(C_2)$ 的周期增长满足

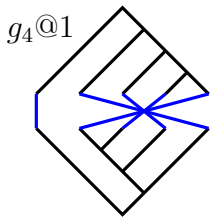
$$\begin{cases} p^D_{B(C_2)}(n) \asymp \exp(n) & \text{if } D \supseteq D_{\{2\}}, \\ p^D_{B(C_2)}(n) \asymp 1 & \text{if } D \not\supseteq D_{\{2\}}. \end{cases}$$

证明。 我们首先注意到， $B(C_2)$ 适合于一个短正合列

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow B(C_2) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1,$$

其中， N 是 B（C_2）的保持层级的自同构子群。该群是二叉有根树的有限支撑自同构群的若干副本的直并。特别地， N 是局部有限 2-群，而 $\mathbb{Z}$ 无挠，因此 B（C_2）只包含 2-扭元。

借鉴定理 4.10 和定理 5.2 中的计算，我们构造出具有较大 2-扭元阶的元素。具体而言，元素



$$g_n@1 = x_0^{-(n-2)} y (x_0 y)^{n-2}$$

其阶为 2^{n-1}。结合 V（定理 1.1）给出的上界，我们得出$p^D_{B(C_2)}(n) \asymp \exp(n)$。 □

另一个有趣的相似之处是，Brin-Navas 群是 **CF-TR**。事实上，F 存在一个忠实作用，其对应的上下文无关施莱尔图为 [44], ，也就是说，汤普森群 F 是 **CF-TR**。此外，**CF-TR** 这一性质对子群有限生成 [18, 命题 4.17]。这一结果可推广到 B（C_2）。

定理 7.6. 群 $B(C_2)$ 是 **CF-TR**。

证明。 我们考虑 $B(C_2)$ 在树的顶点上的作用。根据定义，该作用是忠实的。让我们尝试更清楚地了解相应的 Schreier图。顶点可以用数对 (v, m) 表示，其中m 是顶点所在的层， $v \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 是它在该层上的编号（从 0 开始，以二进制表示，见图29）。对于每个非负整数 v，我们将其长度定义为它的数位个数（二进制表示），即

$$\ell(v) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ \lceil \log_2(n) \rceil & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该作用也可等价地定义为 $x_0^{\pm 1} \cdot (v, m) = (v, m \pm 1)$，并且

$$y \cdot (v, m) = \begin{cases} (v, m) & \text{if } m < \ell(v), \\ (w, m) & \text{if } m \geqslant \ell(v), \end{cases}$$

其中， w 是通过改变 v 的第 m位数字得到的（见图30）。

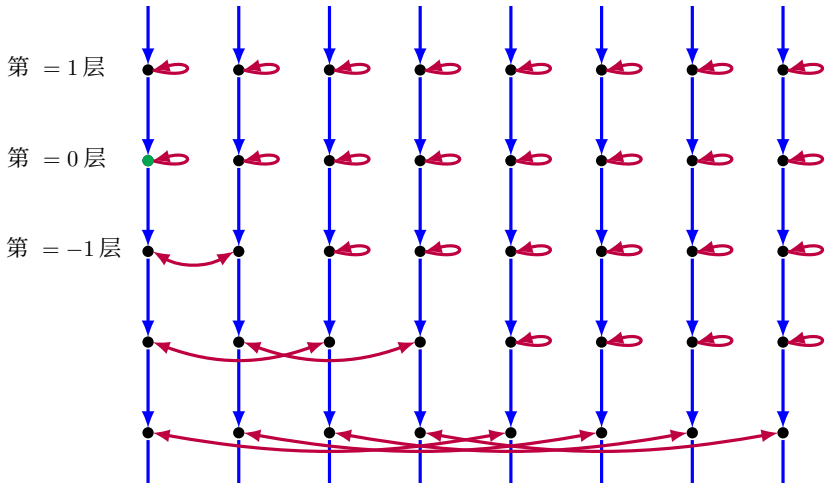


图30： $B(C_2) \curvearrowright \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}$的 Schreier图

这个图可以重新绘制如下：

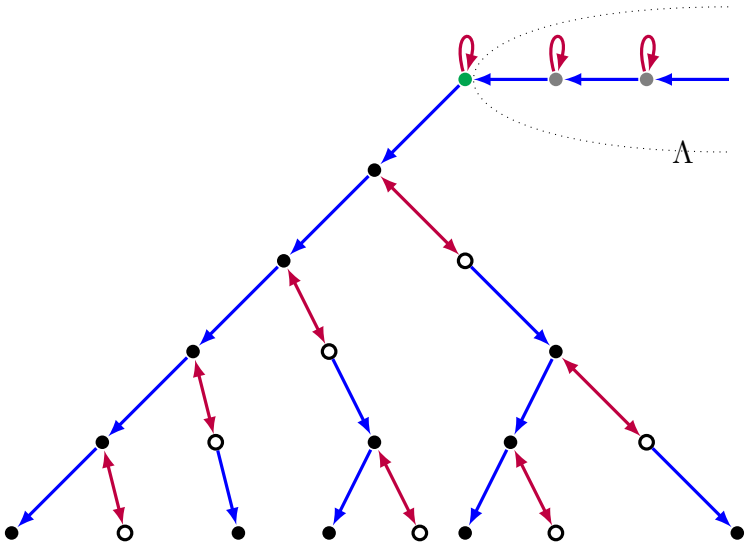


图31：同一个 Schreier图，但不包含从每个类型为 $\circ$ 的顶点出发的 Λ 副本。根以绿色标出。其他锥类型标记为 $\bullet$、$\circ$ 和 $\bullet$。

从图31可以很容易看出，Schreier图在 [40, 17], 意义下是上下文无关的 $B(C_2)$，即为**CF-TR**。 □

注 7.7。 BEN 群 $B(D_\infty)$ 包含 $B(C_2)$。此外，可以调整前面的构造来证明它是 **CF-TR**，并且嵌入汤普森群 V。 $B(C_2) \leqslant B(D_\infty) \leqslant V$ 这一事实，以及所有有限阶都为 2 的幂这一点，意味着$p_{B(D_\infty)}(n) \asymp \exp(n)$。更有意思的是，A. Erschler 注意到，对于适当的生成集，该群与无挠的 Brin-Navas 群 $B(\mathbb{Z})$ 等距，由此证明周期增长不是准等距不变量 [21,定理 3]。

8 进一步的问题

在我们遇到的所有情形中，由含有 n 个叶子的图定义的 V 中的元素，其词长都是线性的；这引出了以下问题：

公开问题。 找出 $g_n \in V$ 中一个显式的元素序列，其中 g_n 由含有 n 个叶子的约化图定义，且 $\|g_n\| \asymp n\log(n)$。

这个问题或许令人惊讶，因为满足 $\|g\| \asymp n\log(n)$ 的元素是指数普遍的（当 $n \to \infty$） [9, 命题 3.8(2)]。尽管如此，我们尚不知道任何一个显式的族，其 $\|g_n\|$ 的增长甚至是超线性的。[1] 这种情况让人联想到电路复杂度：众所周知，对于 n 个变量上的大多数布尔函数，只能通过规模为 $\asymp \frac{2^n}{n}$ 的电路来计算；然而，要证明任何一个给定的函数确实需要超线性规模的电路，却是一个公认的难题。我们也可以将其与其他仍未解决的、更初等的问题相提并论，例如找出 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ 中词长超线性的显式元素，参见 [48, §7.1]。

* * *

比较定理 2.7 与本文中研究的不同例子，一个自然的问题是：定理 2.7 是否是最优的：

猜想。 设 G 是一个余上下文无关群。那么

(a) 周期增长满足 $p_G(n) \preceq \exp(n^2)$。(b) 如果对于某个整数 k，有 $D \subseteq D_k$，那么 $p_G^D(n) \preceq \exp(n)$。

[1] 为了将这个问题形式化并使否定回答成为可能，是否存在一个序列 (g_n) 以及一个算法，以 n 为输入，并在 $\mathrm{DTIME}\big(\exp(o(n))\big)$ 时间内打印 g_n？

请注意，猜想任一部分的反例都会推翻 Lehnert 猜想。根据定理 6.3 和定理 7.1，文献中仅有的尚不知晓这些界是否成立的例子是 FSS 群[22]。

另一个动机是尝试证明 Grigorchuk 群 $\mathfrak{G}$ 不是余上下文无关群。我们的结果无法得出这一结论，因为 $p_{\mathfrak{G}}(n) \preceq n^{\frac{3}{2}}$ [2]。不过，人们会意识到，有限阶较小的元素应被视为“挠性很强”，而有限阶较大的元素则应被视为“几乎不挠”。由此引出以下问题：

问题。是否存在一个余上下文无关群 G，使得 $p_G(n)$ 无界，但仍有一个多项式上界？
目前，我们已知增长最慢的例子是 Houghton H_m （以及类似的构造，例如灯笼洗牌群），其 $p_{H_m}(n) \asymp \exp(\sqrt{n}\log n)$。

* * *

在 [5] 中引入的分形重排群，给出了一类表现出混合行为的 Thompson 类群。这一族在两个极端分别包含汤普森群 $F(p_F(n) = 1)$ 和 $V(p_V(n) \asymp \exp(n^2))$。所研究的大多数例子都包含汤普森群 T 的副本，树枝状连续体重排群 [46]则是一个显著的例外。结合本文中发展的技巧与 Tarocchi 的弦图 [45]，可以进一步研究这一族群的周期增长。

公开问题。找出一个判据，以确定有限生成的重排群何时具有指数周期增长。

这需要对它们的度量性质作出一般性陈述，而这似乎很困难；然而，迄今已知的所有具体例子似乎都与汤普森群 F 和 T 具有相同的特性（见定理 4.1）。

* * *

汤普森 T 和 V 是否属于**CF-TR**群这一问题仍未解决。特别是，**CF-TR** 群是否与 V 的有限生成子群构成的类相同。了解**CF-TR** 群的 $p_G^{\mathbb{P}}(n)$能以多快的速度增长，将会很有意思。

问题。 是否存在一个**CF-TR** 群 G，使得 $p_G^{\mathbb{P}}(n) \asymp \exp(n)$?

迄今为止，增长最快的是 Houghton 群 $H_m \in$ **CF-TR**（见图 32），其增长为 $p_{H_2}^{\mathbb{P}}(n) \asymp n$，而 $p_V^{\mathbb{P}}(n) \asymp \exp(n)$。

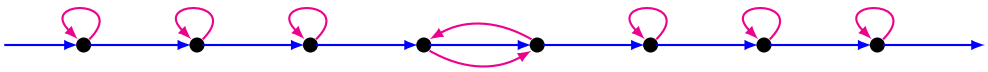


图 32：转移群为 $H_2 = \mathrm{FSym}(\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}$ 的上下文无关图。

BEN 群这一类的表现与缠绕积相似。进一步研究它们将很有意思。我们着重提出两个问题：

问题。 $B(C_2)$ 的增长级数是有理的/代数的吗?

如果增长级数是有理的，那么它可能是一个具有有理增长级数、但完全增长级数非 $\mathbb{Z}G$-有理的群的例子。如果它是代数的但非有理的，那么在形如 $L \wr F_2$ 的群之后，这将是首个具有这些性质组合的可恭群示例。

问题。 $B(C_2)$ 和 $B(\mathbb{Z})$ 中的子群成员问题是否可判定?

请注意， F 中子群成员问题的可判定性仍未解决，因此将 Brin-Navas 群 $B(\mathbb{Z})$ 作为一个自然的切入点似乎颇为合适。

致谢

我们感谢 Michal Ferov 提出定理 1.4。第二作者谨此感谢 Giles Gardam 和 Cosmas Kravaris 与其交流并提供参考文献。在本项目期间，作者获得了瑞士国家科学基金会资助 200020- 200400。第三和第四作者获得了编号为 2022.0011 和 2024.0010 的瑞士政府卓越奖学金。

参考文献

[1] Goulnara Arzhantseva、Jean-Fran.cois Lafont 和 Ashot Minasyan。《某类有限表示群的同构与可公度性》。载于：*Journal of Group Theory* 17.2（2014），第 361–378 页。

[2] Laurent Bartholdi 和 Zoran ˇSunic。《关于某些树自同构群的字增长与周期增长》。载于：《代数通信》29.11（2001），第 4923–4964 页。[3] Dave Bayer 和 Persi Diaconis。《追踪燕尾洗牌，直至其巢穴》。载于：《应用概率年刊》2.2（1992），第 294–313 页。[4] James Belk 和 Collin Bleak。《异步转换器与 Brin-Thompson 群 $2V$ 的若干不可判定性结果》。载于：《美国数学会汇刊》369.5（2017），第 3157–3172 页。[5] James Belk 和 Bradley Forrest。《分形重排群》。载于：《美国数学会汇刊》372.7（2019），第 4509–4552 页。[6] James Belk 和 Francesco Matucci。《汤普森群中的共轭与动力学》。载于：《几何学奉献》169.1（2014），第 239–261 页。[7] Daniel Bennett。《关于 Lehnert 猜想的合理反例》。博士论文。圣安德鲁斯大学，2018。[8] Rose Berns-Zieve、Dana Fry、Johnny Gillings、Hannah Hoganson 和 Heather Mathews。《具有上下文无关余字问题的群及其嵌入汤普森群 V》。载于：《群论中的拓扑方法》。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，2018，第 19–37 页。[9] Jean-Camille Birget。《Richard Thompson 群与复杂度》。载于：《代数与计算国际期刊》14.05n06（2004），第 569–626 页。[10] Collin Bleak、Francesco Matucci 和 Max Neunh¨offer。《嵌入汤普森群 V 与余上下文无关群》。载于：《伦敦数学会杂志》94.2（2016），第 583–597 页。[11] Henry Bradford。《量化有限生成群中的无法则性》。载于：*Journal of Group Theory* 27.1（2024），第 31–59 页。[12] Matthew G. Brin。《R. Thompson 群 F 的初等可解子群》。载于：《代数与计算国际期刊》15.04（2005），第 619–642 页。[13] Jos´e Burillo、Sean Cleary 和 Claas E. R¨over。《汤普森群 V 子群的障碍》。载于：《几何与上同调群论》。Peter H. Kropholler、Ian J. Leary、Conchita Mart´ınez-P´erez 和 Brita E. A. Nucinkis 编。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，2017，第 1–4 页。[14] Jos´e Burillo、Sean Cleary、Melanie Stein 和 Jennifer Taback。《汤普森群 T 的组合与度量性质》。载于：《美国数学会汇刊》361.2（2009），第 631–652 页。

[15] Jos´e Burillo 和 Marc Felipe。关于 *Thompson* 群度量的一则注记V。https://arxiv.org/abs/2511.08518。2025。[16] Danny Calegari。“Thompson 类群中的分母界与流”。载于：《群、几何与动力学》1.2（2007），第 101–109 页。[17] Tullio Ceccherini-Silberstein 和 Wolfgang Woess。“群的上下文无关对 I：上下文无关对与图”。载于：《欧洲组合学杂志》33.7（2012），第 1449–1466 页。[18] Daniele D’Angeli、Francesco Matucci、Davide Perego 和 Emanuele Rodaro。上下文无关图及其转移群。https://arxiv.org/abs/ 2408.13070。2024。[19] Jean-Dominique Deuschel 和 Ofer Zeitouni。“关于独立同分布样本的递增子序列”。载于：《组合学、概率与计算》8.3（1999），第 247–263 页。[20] Robert P. Dilworth。“偏序集的一个分解定理”。载于：《数学年刊》51.1（1950），第 161–166 页。[21] Anna Erschler。“非剩余有限的中间增长群、可公度性与非几何性”。载于：《代数杂志》272.1（2004），第 154–172 页。[22] Daniel Farley。“具有上下文无关余词问题的局部相似群”。载于：《群论中的拓扑方法。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，2018，第 67–91 页。[23] William Gasarch、Erik Metz、Yuang Shen、Zan Xu 和 Sam Zbarsky。“余有限一元语言的小型非确定有限自动机”。载于：《当代逻辑与计算。2020，第 554–573 页。[24] Etienne Ghys 和 Vlad Sergiescu。“关于圆周上一类杰出的微分同胚群”。载于：《瑞士数学评论》62（1987），第 185–239 页。[25] Martin Greendlinger。“关于共轭问题和字问题的 Dehn 算法及其应用”。载于：《纯粹与应用数学通讯》13.4（1960），第 641–677 页。[26] Rostislav Ivanovich Grigorchuk。“关于群增长的米尔诺问题”。载于：《科学院院报》第 271 卷，第 1 期。1983，第 30–33 页。[27] Philip Hall。“可解群的有限性条件”。载于：《伦敦数学会会刊》s3-4.1（1954），第 419–436 页。[28] David Harvey 和 Joris Van Der Hoeven。“在时间$O(n\log\ n)$内进行整数乘法”。载于：《数学年刊》193.2（2021），第 563–617 页。[29] Graham Higman。有限呈示无限单群。纯数学札记。澳大利亚国立大学高等研究院数学系，1974。

[30] Derek F. Holt、Sarah Rees、Claas E. R¨over 和 Richard M. Thomas。“具有上下文无关余字问题的群”。载于：《伦敦数学会期刊》71.3（2005），第 643–657 页。[31] John E. Hopcroft、Rajeev Motwani 和 Jeffrey D. Ullman。《自动机理论、语言与计算导论》（第 3 版）。美国：Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.，2006。[32] Chris H. Houghton。“具有置换模系数的群的第一上同调”。载于：《巴塞尔数学档案》31.3（1978），第 254–258 页。[33] Daniel K¨onig、Markus Lohrey 和 Georg Zetzsche。“幂包问题与子集和问题在幂零群、多循环群及余上下文无关群中的研究”。载于：《代数与计算机科学》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2016 年 1 月，第 129–144 页。.[34] Edmund Landau。“关于给定次数置换的最大阶”。载于：《数学与物理档案》5（1903），第 92–103 页。[35] J¨org Lehnert。《准自同构群》。博士论文。歌德大学，2008。[36] Isabelle Liousse。“圆周分段仿射同胚的旋转数、不变测度与比率集”。载于：傅里叶研究所年刊 55.2（2005），第 431–482 页。[37] Alan Logan。 $C'(\lambda)$ 关于 $\lambda < \frac{1}{6}$ 的小取消。MathOverflow。https : // mathoverflow.net/q/475562（版本：2024-07-23）。[38] Roger C. Lyndon 和 Paul E. Schupp。《组合群论》。数学经典。施普林格，2001。[39] Niels M¨oller。“关于 Schönhage 算法与次二次整数最大公因数计算”。载于：《计算数学》77.261（2008），第 589–607 页。[40] David E. Muller 和 Paul E. Schupp。“端理论、下推自动机与二阶逻辑”。载于：《理论计算机科学》37（1985），第 51–75 页。[41] Andr´es Navas。“区间微分同胚的若干可均群”。载于：《墨西哥数学会通报》（第 3 辑）10.2（2004），第 219–244 页。[42] Jan Moritz Petschick。“小周期增长群”。载于：爱丁堡数学会会刊 66.3（2023），第 625–641 页。[43] Giovanni Pighizzini、Jeffrey Shallit 和 Ming-wei Wang。“一元上下文无关文法与下推自动机：描述复杂度和辅助空间下界”。载于：《计算机与系统科学杂志》65.2（2002），第 393–414 页。[44] Dmytro Savchuk。“与 Thompson 群相关的一些图 F”。载于：《组合与几何群论：多特蒙德与渥太华—蒙特利尔会议》。施普林格，2010，第 279–296 页。

[45] Matteo Tarocchi。《分形重排群中的共轭》。载于：即将发表于《以色列数学杂志》（2025年）。[46] MatteoTarocchi。《关于 Wa˙zewski 树丛的 Thompson 群》。载于：《剑桥哲学学会数学会刊》179.1（2025年），第189–231页。[47] Anatoly M. Vershik 和 Sergei V. Kerov。《对称群的普朗歇雷测度的渐近性与杨表的极限形状》。载于：《苏联数学文献汇编》18（1977年），第527–531页。[48] Avi Wigderson。《P、NP 与数学——计算复杂性视角》。载于：《*2006*年国际数学家大会会议录》1（2007年），第665–712页。[49] Stefan Witzel 和 Matthew CB Zaremsky。《群系的 Thompson 群及其有限性性质》。载于：《群、几何与动力学》12.1（2018年），第289–358页。

University of Newcastle, Australia

电子邮箱地址: alexbishop1234@gmail.com

University of Oxford, United Kingdom

电子邮箱地址: corentin.bodart@maths.ox.ac.uk

Université de Genève, Switzerland

电子邮箱地址: letizia.issini@unige.ch, davide.perego@unige.ch