arXiv:2601.13086v1 [math.PR] 19 Jan 2026

布朗环与塞尔伯格 ζ 函数

ROMAN LEMONDE 和 JIAN WANG

Abstract. 我们研究具有常数杀死率的布朗运动在双曲曲面上的布朗环测度。我们计算带杀死的布朗环在某个自由同伦类中的质量，随后在曲面几何有限时，将所有本质同伦类中环路的总质量与塞尔伯格 ζ 函数联系起来。作为应用，我们为紧致和无限面积两种情形下拉普拉斯算子正则化行列式的不同概念提供一种概率解释。

1. 引言

设 $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 是一个无挠福克斯群，且 $X := \Gamma\backslash\mathbb{H}$ 是一个完备、几何有限且无边界的双曲曲面。令 $\mathcal{P}_X$ 表示所有 有向本原闭测地线的集合。塞尔伯格 ζ 函数最初由 Atle Selberg 引入，作为研究塞尔伯格迹公式的工具（见 [Fis87]）。我们将其定义为

$$Z_X(s) := \prod_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-e^{-(s+k)\ell_\gamma}\right)$$

当 $\mathrm{Re}(s) > \delta$ 时收敛（见引理 2.3）。这里，ℓ_γ 是 $\gamma \in \mathcal{P}_X$的双曲长度，而 δ 是 Γ的收敛指数，定义为使得对所有 $z \in \mathbb{H}$，庞加莱级数 $\sum_{h\in\Gamma} e^{-\delta' d_{(z,h\cdot z)}}$ 有限的 $\delta' > 0$的下确界。

布朗环测度最初是在平面上引入的 $\mathbb{C}$ ，见 [LW04] 和[LSW03]。其定义可推广到任意可定向黎曼曲面 (X, g) ，也可推广到具有常数杀死率 κ的布朗运动。我们将其记为μ_X^κ。它定义在 X 上的定向环空间（参见 §2.1 ，其中有简要介绍）。本文的主要结果将所有本质同伦类中的布朗环测度总质量与塞尔伯格 ζ 函数联系起来：

定理 1. 设 X如上所述。那么对于任意满足 $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa} >$ 的 $\kappa \geq -\frac{1}{4}$ δ，

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_X^\kappa\left(\mathcal{C}_X(\gamma^m)\right) = -\log Z_X\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa}\right),$$

其中，对于每个 $\gamma \in \mathcal{P}_X$， $m \in \mathbb{N}^*$， $\mathcal{C}_X(\gamma^m)$ 表示 X 上所有与 γ^m 自由同伦的定向闭曲线的集合。

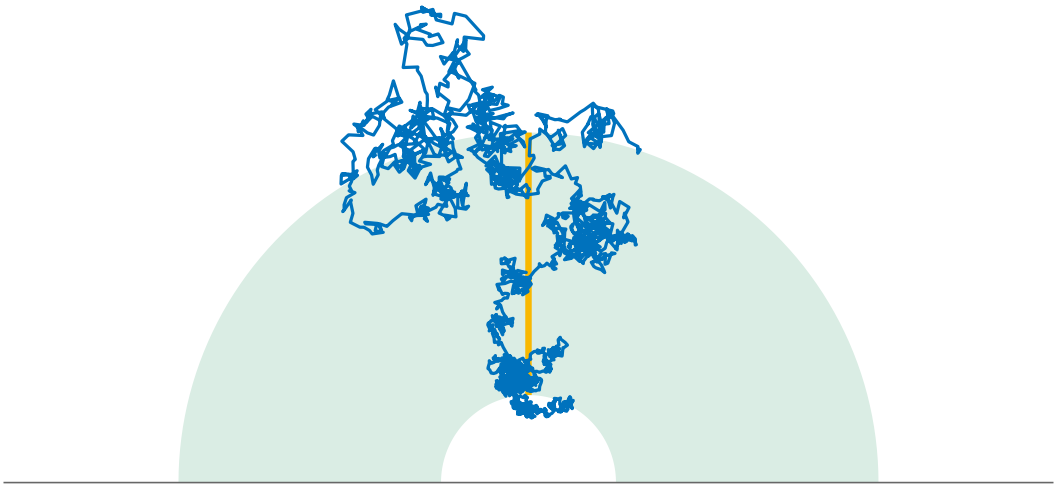


FIGURE 1. 双曲圆柱上同一同伦类型的闭测地线（黄色）与布朗环（蓝色）的示意图。测地线和布朗环均被提升到万有覆盖 $\mathbb{H}$。浅绿色区域是双曲圆柱的基本域。

该定理根据带杀死项的布朗环测度，为塞尔伯格 ζ 函数在实区间（δ， ∞）上的取值提供了概率解释。我们将在下面的注记中讨论定理 1 的一些直接推论。

备注。**1.** 由于 $Z_X(s)$ 在 $s > \delta$时收敛，定理 1的一个直接推论是，当杀死率满足 $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa} > \delta$时，所有本质同伦类中布朗环测度的总质量[WX25有限。9] 其中考虑了 $\kappa = 0$ 的情形。事实上，由于 $\delta < 1$ 对于 X 几何有限且面积无限的情形（例如参见[Bor16，§2.5。2]），定理1 表明，所有本质同伦类中的环路在无杀死情况下（$\kappa = 0$）的布朗环测度是有限的。还值得一提的是，关于带有杀死率的布朗环测度的同伦问题已在 [LJ20]中研究。

2. 由于拉普拉斯算子在 X 上确定了 Z_X，如 [BJP01定理 31], 定理 1 所示，这也意味着它们确定了带杀死项的布朗环测度中同伦本质环的总质量。命题4.5中给出了更精确的关系。

3. 注意，塞尔伯格 ζ 函数对于几何无限曲面并不总是定义良好，因为对于 s 的任意取值，该乘积都会发散。出于简化考虑，本文中所考虑的所有曲面都将是几何有限的。

研究布朗环测度总质量的一个重要动机，是它与热迹的重整化积分以及拉普拉斯算子的正则化行列式之间的关系。在紧情形下，无论是否有边界，文献中曾指出

[Dub09，LJ07] 拉普拉斯算子的ζ正则化行列式的对数$-\log\det_\zeta\Delta$可以解释为布朗环测度的总质量。以下定理给出一种新的重整化程序，阐明了这一联系。

定理 2。 设 X 和 κ 如定理*1*中所述。

(i) 令 $E_{X,\,\kappa}(t)$ 为定义 *4.1*中所述的重整化热算子。则

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_X^\kappa\big(\mathcal{C}_X(\gamma^m)\big)=\int_0^\infty\frac{1}{t}\operatorname{Tr}E_{X,\kappa}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) 假设 X 是紧致的。那么，当 $\kappa\to 0^+$时，

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_X^\kappa(\mathcal{C}_X(\gamma^m))=-\log\det\nolimits_\zeta\Delta+\operatorname{Area}(X)E-2\gamma_{\mathrm{EM}}-\log\kappa+o(1),$$

其中，γ_{EM} 是欧拉–马歇罗尼常数，ζ 是黎曼ζ函数，而 $E=(4\zeta'(-1)\ -1/2+\log(2\pi))/(4\pi)$。

(iii) 假设 X 具有无限面积。令 $s=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa}$，并令 $\det_0(\Delta_X+s(s-1))$为 Δ_X 在 [BJP01，§2] （称为 $D(s)$；另见*§4.2.2*）中所述的正则化行列式。则：

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_X^\kappa(\mathcal{C}_X(\gamma^m))=&-\log\det\nolimits_0(\Delta_X+s(s-1))+Gs(1-s)+F\\&-n_c\log G_0(s)+\log\chi(X)\log G_\infty(s),\end{aligned}$$

其中 F 和 G 是定义 $\det_0(\Delta_X+s(s-1))$ 时未指定的两个积分常数，n_c 是我们曲面的尖点数，$\chi(X)$ 是 X的欧拉示性数，$G_0(s)=2^{-s}(s-\frac{1}{2})\,\frac{1}{2}\Gamma(s-\frac{1}{2})$，且$G_\infty(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)G(s)^2$，，其中 G 是 Barnes G-函数（见 [Bor16，第56]页）。

备注。 1. 鉴于定理 1，定理 (ii) 中的渐近展开2是 Sarnak 所建立的一个恒等式的推论 [Sar87，定理 1]。渐近展开的直接证明见 §4.2.1。

2. 对于闭光滑黎曼曲面 (M,g)，将 M 上总二次变差至少为 $4\varpi>0$ 的环路在 μ_M^κ 下的质量定义为

$$\mu_M^\kappa(\text{loops with quadratic variation}\geq 4\varpi):=\int_\varpi^\infty\operatorname{Tr}(e^{-t(\Delta_M+\kappa)})\,\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

对于紧致光滑黎曼曲面（M，g），M. Ang 等人 [APPS22] 证明，二次变差至少为 $4\varpi>0$（如上所定义）的环路的质量

具有渐近展开

$$\frac{\mathrm{vol}_g(M)}{4\pi\varpi} - \frac{\chi(M)}{6}\left(\log\varpi + \gamma_{\mathrm{EM}}\right) - \log\kappa - \log\det{}_\zeta\Delta_M + \epsilon(\kappa,\varpi),$$

其中 $\det_\zeta\Delta_M$ 是拉普拉斯算子的 ζ 正则化行列式（参见 §4.2.1），且$\epsilon(\kappa,\varpi$在先令 κ 、再令 ϖ 趋于零时也趋于零。若 M 是双曲的，则定理 (ii) 的第 2 项是这一渐近展开的一个类似结果，此时无需截去二次变差较小的环路。

3. 值得注意的是，按布朗环测度的同伦类对拉普拉斯行列式进行重整化，在无杀死项的情形下已经完成；参见 [WX25，命题 4。11]。

4. 对于面积无限的双曲曲面 X ，拉普拉斯算子具有连续谱；因此，无法通过 ζ 函数正则化方法对其行列式进行正则化。相反，D. Borthwick、C. Judge 和 P. A. Perry [BJP01，§2] 使用拉普拉斯算子预解算子的“0-迹”定义了 Δ_X 的正则化行列式（参见 §4.2.2）。借助这种正则化，他们建立了一个恒等式，将 $\det_0(\Delta_X+s(s-1))$（在 $D(s)$ 中称为 [BJP01]）与塞尔伯格 ζ 函数联系起来；参见 [BJP01，定理 3。2]。定理 (iii)的第 2 项为这一结果提供了概率解释。

论文结构。在§2.1中，我们介绍布朗环测度及其主要性质。§2.2 介绍塞尔伯格 ζ 函数，并着重说明其谱性质。在§3中，我们考察具有恒定杀死率的布朗运动的环测度，并将 [WX25引理 32]推广到带杀死率的情形。由此可证明定理1。在§4中，我们讨论热迹与拉普拉斯算子的行列式的重整化，并将其与布朗环测度的质量联系起来，从而证明定理2。

致谢。作者谨向 Yilin Wang 致谢，感谢他将我们引入这一领域，并给予许多有益的讨论。我们也感谢 Maciej Zworski 对本研究的关注，以及 Giacomo Spriano 与我们进行了多次富有成效的交流。JW 获得西蒙斯基金会资助，并在 Institut´des Hautes Etudes Scientifiques 担任博士后。瑞士教育、研究与创新国务秘书处（SERI）为本研究提供了资助：MB25.00004。

2. Preliminaries

本节回顾布朗环测度和双曲曲面的塞尔伯格 ζ 函数相关的必要事实。

2.1. 布朗环测度。设 (X, g) 是一个维数为 n 的无边界黎曼流形。我们将 X 上以速度 2 运行的布朗运动 W 定义为由 $-\Delta_g$ 生成的扩散过程，其中 Δ_g 是（正）拉普拉斯-贝尔特拉米算子

$$\Delta_g = -\mathrm{div}_g \nabla_g = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j).$$

布朗运动的基础知识可参阅 [Law05] 和 [SV06] 。这一定义自然推广了欧几里得空间中布朗运动的定义 $\mathbb{R}^n$。对于 $t \geq 0$，令 $C([0,t];\ X$表示配备距离函数的连续函数空间

$$d_X^{\infty}(W, W') \coloneqq \sup_{s \in [0,t]} |W_s - W'_s|_X, \text{ for } W,\ W' \in C([0,t]; X).$$

对于 $x \in X$，令$\mathbb{W}_x^t(X)$表示布朗运动（以速度 2 运行）的路径概率测度：该布朗运动从 x 出发，在空间 $C([0,t];\ X)$中运行至时间 t。换言之，对于任意可测子集 $A \subset C([0,t];\ X)$，$\mathbb{W}_x^t(X)(A)$表示从 x 出发、运行至时间 t 的布朗运动路径属于 A 的概率。注意，在$\mathbb{W}_x^t(X)$下，一条路径的总二次变差几乎处处等于 $4t$。于是，我们可以按照终点 $y \in X$对 $\mathbb{W}_x^t(X)$进行分解

$$\mathbb{W}_{x\to y}^t(X) \coloneqq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathbb{W}_x^t(X)_{\mathbb{I}\{W_0 = x,\ W_t \in D_{\varepsilon,X}(y)\}}}{\mathrm{vol}_g(D_{\varepsilon,X}(y))}$$

其中 $\mathbb{W}_x^t$ X $\mathbb{I}^K$ $K \cap A$ $A \subset C$ $[0,t]$ X D_ε X y $\mathbb{I}^K$ = 表示对 $K \subset C([0,t];\ X)$ 的限制，使得 $\mathbb{W}_x^t(X)(A)$：对于可测的 (;), ( )( ), 并且 , ( ) 是 ε 中以 y为中心、半径为 X 的测地球。关于 $\mathbb{W}_{x\to y}^t(X)$ 的详细论证与解释，参见 [Law05，§5。2]。

引理 2.1. 设 $t \geq 0$, $x, y \in X$。令 $\mathbb{W}_{x\to y}^t(X)$ 如上所述。则

$$\mathbb{W}_x^t(X) = \int_X \mathbb{W}_{x\to y}^t(X)\, \mathrm{dvol}_g(y).$$

此外，$\mathbb{W}_{x\to y}^t(X)$ 在 $C([0,t];\ X)$ 上的总质量，以下记为 $|\mathbb{W}_{x\to y}^t(X)|$，是热算子的积分核 $p_X(t, x, y)$。

证明。关于分解公式，参见 [Law05，§5。2]。关于 $\mathbb{W}_{x\to y}^t(X)$ 的总质量，注意到

$$|\mathbb{W}_{x\to y}^t(X)| = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{\mathbb{P}_x(W_t \in D_{\epsilon,X}(y))}{\mathrm{vol}_g(D_{\epsilon,X}(y))} = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{\mathrm{vol}_g(D_{\epsilon,X}(y))} \int_{D_{\epsilon,X}(y)} p(t,x,y)\, \mathrm{dvol}_g(y)$$

其中，$\mathbb{P}_x$ 是从 x出发的布朗运动的测度。然后由勒贝格微分定理即可得到该结果。□

令 $\mathcal{C}_X^*$ 为参数化环的集合：

$$\mathcal{C}_X^* \coloneqq \{W_\bullet \in C([0,t]; X) \mid t \geq 0,\ W_0 = W_t\}.$$

X 上的参数化布朗环测度是定义在 $\mathcal{C}_X^*$ 上的测度，其定义为

$$\mu_X^* := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_X \mathbb{W}_{x\to x}^t(X)\,\mathrm{dvol}_g(x).$$

现在，我们在参数化环空间 $\mathcal{C}_X^*$上定义一个等价关系。令$W \in C([0,t];X)$满足 $W_0 = W_t$，且 $W' \in C([0,t'];X)$满足 $W'_0 = W'_{t'}$，它们是 $\mathcal{C}_X^*$中的两个参数化环。当且仅当存在一个从 $[0,t]/(0\sim t)$到 $[0,t']/(0\sim t')$的保向同胚 σ，使得$W'_{\sigma(s)} = W_s$对所有 $s\in[0,t]$都成立时，我们称 $W \sim W'$。商空间 $\mathcal{C}_X := \mathcal{C}_X^*/\sim$由无根、无参数化但有方向的环路构成。$\mathcal{C}_X$ 上的度量定义为

$$d_X^{\mathrm{loop}}([W],[W']) := \inf_\sigma \sup_s |W'_{\sigma(s)} - W_s|_X$$

其中，σ 遍历从 $[0,t]/(0\sim t)$到 $[0,t']/(0\sim t')$的所有保向同胚，s遍历 $[0,t]$，而 $|\bullet|_X$是 X上的测地距离。布朗环测度 μ_X 是由 μ_X^* 在 $\mathcal{C}_X^*$上诱导的 $\mathcal{L}$ 上的测度，其含义是$\mu_X(A) = \mu_X^*(\phi^{-1}(A))$，其中 $\phi\colon \mathcal{C}_X^* \to \mathcal{C}_X$ 是商映射，且 A 是 $\mathcal{C}_X$中的任意可测集。

对于定向闭原始测地线 $\gamma\in\mathcal{P}_X$，我们将 $\mathcal{C}_X(\gamma)$ 表示为 $\mathcal{C}_X$ 的子集，其中包含与 γ 自由同伦的无参数、无根环路。

布朗环测度相对于由 d_X^{loop} 诱导的拓扑是博雷尔测度，并具有以下性质。

命题 2.2 ([LW04，命题 6]). 布朗环测度满足限制性质，且具有共形不变性，即

(1) 若 $X'\subset X$，则 $\mathsf{d}\mu_{X'}(\eta) = \mathbb{I}^{\eta\subset X'}\mathsf{d}\mu_X(\eta)$，其中 $\mathbb{I}^{\eta\subset X'}$ 为示性函数；(2) 若 $(X_1,g_1) = (X,g)$ 和 $(X_2,g_2) = (X,e^{2\sigma}g)$ 是两个共形等价的黎曼曲面，且 $\sigma\in C^\infty(X,\mathbb{R})$，则 $\mu_{X_1} = \mu_{X_2}$。

特别要注意的是，X' 可以有边界。在这种情况下，我们考虑满足狄利克雷条件的布朗运动，即在碰到 X'的边界时被杀死。共形不变性使我们能够将布朗环测度视为黎曼曲面上的测度，而不仅仅是黎曼曲面上的测度。

2.2. 塞尔伯格ζ函数。设 X 是一个完备双曲曲面，δ 是相应庞加莱级数的收敛指数。我们有以下收敛引理。

引理 2.3. 定义塞尔伯格 ζ 函数 Z_X 的乘积对任意满足 $\mathrm{Re}\,s > \delta$ 的 $s\in\mathbb{C}$ 收敛。此外，Z_X 可亚纯延拓到整个复平面。若 X 没有尖点，则它是一个整函数。

证明。这里只回顾 $\mathrm{Re}(s) > \delta$ 时的收敛性证明。设 F 是 X 的基本域，$z \in F$ 是该基本域中的一点。设 $\gamma \in \mathcal{P}_X$。由于 F 是一个基本域，γ 可以由双曲平面 $\mathbb{H}$ 中经过 F 内一点的一条测地线 $\tilde{\gamma}$ 覆盖，我们将其记为 q。设 $h \in \Gamma$ 是轴 $\tilde{\gamma}$ 的一个本原元素。根据三角不等式，

$$d(z, h \cdot z) \leq d(z, q) + d(q, h \cdot q) + d(h \cdot q, h \cdot z) \leq \ell_\gamma + 2a,$$

其中，a 是 F的直径。因此，当 $\mathrm{Re}(s) > \delta$

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{P}_X} e^{-s\ell_\gamma} \leq e^{2as} \sum_{h \in \Gamma} e^{-sd(z, h \cdot z)} < \infty.$$

这意味着定义$s(\ Z_X)$的乘积收敛。 □

从 $Z_X(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > \delta$ 到整个复平面的亚纯延拓由 L. Guillop´e ([Gui92]) 在无限面积情形下证明。在有限面积情形下，这是塞尔伯格迹公式的推论（[Bor16]）。

命题 2.4. 设 X 是无边界的紧双曲曲面。则 Z_X是一个二阶整函数，其零点由以下部分组成：位于满足 $s(1-s) \in \mathrm{Spec}(\Delta_X)$的点 s处的谱零点，以及位于点 $s = -k$、$k \in \mathbb{N}$处的拓扑零点。

证明。设 $\mathrm{Re}\, s < a$ $1 <$。我们将塞尔伯格迹公式应用于函数

$$h(r) = \frac{1}{r^2 - (s - \frac{1}{2})^2} - \frac{1}{r^2 - (a - \frac{1}{2})^2}.$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2s-1}\frac{Z_X'}{Z_X}(s) - \frac{1}{2a-1}\frac{Z_X'}{Z_X}(a) \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k - s(1-s)} - \frac{1}{\lambda_k - a(1-a)} \right) + \chi(X) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+k} - \frac{1}{a+k} \right) \end{aligned}$$

其中 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ 是拉普拉斯算子 Δ_X 的特征值。

韦伊渐近公式表明，对于某个常数 c，有 $\lambda_k \sim ck$。特别地，这意味着右侧的级数对于任意 $s \in \mathbb{C}$ 都绝对收敛，但在满足 $s(1-s) = \lambda_k$ 或 $s = -k$ 的极点处除外。积分后，由于这些极点是单极点，且其留数为正整数，我们得到该命题。□

虽然这里不深入讨论细节，但值得注意的是，塞尔伯格迹公式的一般情形可以通过应用留数定理从塞尔伯格 ζ 函数推导出来（详见 [Fis87] ）。

3. The Brownian Loop Measure in Homotopy Classes

设 X 为一完备几何有限双曲曲面。布朗环测度的定义可以推广到具有杀死率 κ 的布朗运动。Y. Le Jan 在 [LJ20] 中以及 M. Ang 等人在 [APPS22] 中都已提及这一点。我们将具有杀死率 $\kappa \geq -1/4$ 的布朗运动定义为由算子 $-\Delta_X - \kappa$ 生成的过程。其在 X 上的相关核为

$$p_X^\kappa(t, z, z') := p_X(t, z, z')e^{-\kappa t},$$

其中， p_X 表示 X上的热核。布朗环测度的构造（记作 μ_X^κ）也适用于带杀死项的布朗运动。

本部分的主要结果是计算 μ_X^κ 在同伦类$\mathcal{C}_X(\gamma^m)$中的质量，其中 $\gamma \in \mathcal{P}_X$ 和 $m \in \mathbb{N}^*$。值得注意的是，这是我们主要关注的情形，因为每个本质自由同伦类都包含唯一一条定向闭测地线，而非本质类（即同伦平凡类或与尖点同伦的类）中的布朗环测度是无穷大。事实上，热核迹的短时间渐近表明，对短时间的积分不收敛。

引理 3.1. 设(X, g)是一个无边界的双曲曲面。那么，对任意$\gamma \in \mathcal{P}_X$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\kappa \geq -\frac{1}{4}$,

$$\mu_X^\kappa(\mathcal{C}_X(\gamma^m)) = \frac{1}{m} \frac{e^{m\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+\kappa}\right)\ell_\gamma}}{e^{m\ell_\gamma} - 1}.$$

引理 3.1 推广了 [WX25中的引理 1。1] 该引理考察了 $\kappa = 0$ 情形。此处给出的引理 3.1 的证明改编自 [WX25中的引理 3。2],该引理考察的是没有杀死项的布朗运动。

引理*3.1*的证明。1. 设 γ 是 X 上的一条长度为 ℓ_γ 、迭代次数为 m的定向闭测地线。注意，对所有 $x \in X$ 和 $t > 0$，均有如下分解:

$$\mathbb{W}^t_{x\to x}(X)(\mathcal{C}_X(\gamma)) = \sum_{h\in[\gamma]} |\mathbb{W}^t_{z\to h\cdot z}(\mathbb{H})|$$

其中， $[\gamma]$ 是与 γ 在 Γ中的共轭类， $z \in \mathbb{H}$ 是 x的一个提升，$|\mathbb{W}^t_{z\to h\cdot z}(\mathbb{H})|$ 是 $\mathbb{W}^t_{z\to h\cdot z}(\mathbb{H})$的总质量。

确实，固定 $\epsilon_0 > 0$ 足够小后，将引理 2.1 应用于 $\epsilon > 0$ 集合

$$\{W \in C([0, t]; X) \mid W_0 = x,\ W_t \in D_{\epsilon,X}(x),\ d_X^\infty(W, \mathcal{C}_X(\gamma)) < \epsilon_0\},$$

其中 $d_X^\infty(W,\mathcal{C}_X(\gamma)) < \epsilon$ 表示存在 $\eta \in C([0,t];\, X)$，使得 $\eta_0 = \eta_t = x, [\eta] \in \mathcal{C}_X(\gamma)$ 且 $d_X^\infty(W,\eta) < \epsilon$。因此我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{W}^t_{x\to x}(X)(\mathcal{C}_X(\gamma))\\&= \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\mathbb{W}^t_x(X)(\{W \in C([0,t];X) \mid W_0 = x,\ W_t \in D_{\epsilon,X}(x),\ d_X^\infty(W,\mathcal{C}_X(\gamma)) < \epsilon_0\})}{\mathrm{vol}(D_{\epsilon,X}(x))}.\end{aligned}$$

设 z 是 $\mathbb{H}$ 中 x 的一个提升。由于布朗运动只取决于曲面的局部几何性质，因此其路径可以提升到万有覆盖上。设 $W \in C([0,t];\, \mathbb{H})$，其中 $W_0 = z$，是 $W \in C([0,t];\, X)$ 的提升，其中 $W_0 = x$。那么，当 ϵ 足够小时，

$$W_t \in D_{\epsilon,X}(x),\ d_X^\infty(W,\mathcal{C}_X(\gamma)) < \epsilon_0 \ \Leftrightarrow\ \exists h \in [\gamma],\ \tilde{W}_t \in D_{\epsilon,\mathbb{H}}(h\cdot z).$$

因此，

$$\begin{aligned}&\mathbb{W}^t_{x\to x}(X)(\mathcal{C}_X(\gamma))\\&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{h\in[\gamma]} \frac{\mathbb{W}^t_z(\mathbb{H})\big(\{\tilde{W} \in C([0,t];\mathbb{H}) \mid \tilde{W}_0 = z,\ \tilde{W}_t \in D_{\varepsilon,\mathbb{H}}(h\cdot z)\}\big)}{\mathrm{vol}(D_{\varepsilon,\mathbb{H}}(h\cdot z))}\\&= \sum_{h\in[\gamma]} \big|\mathbb{W}^t_{z\to h\cdot z}(\mathbb{H})\big|.\end{aligned}$$

2. 此外，若 $p_{\mathbb{H}}(t;\ z,\ w) : (0,\ \infty) \times \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ 表示双曲平面上的热核，那么根据引理2.1

$$|\mathbb{W}^t_{z\to w}(\mathbb{H})| = p_{\mathbb{H}}(t,z,w) = \frac{\sqrt{2}}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-t/4} \int_{d(z,w)}^\infty \frac{re^{-r^2/(4t)}}{\sqrt{\cosh r - \cosh d(z,w)}}\,\mathrm{d}r$$

其中 $d(z,\ w)$ 是 z 与 w之间的双曲距离，参见[Bor16，§2.1]。本质上，$p_{\mathbb{H}}(t,\ z,\ w)$ 表示从 z 出发的布朗运动在时刻 w 位于 t的概率。

3. 根据 μ_X^κ的定义（该定义在§3开头引入），我们可以用热核 $p_{\mathbb{H}}$表示 $\mathcal{C}_X(\gamma)$ 在 μ_X^κ 下的质量：

$$\mu_X^\kappa(\mathcal{C}_X(\gamma)) = \int_0^\infty \frac{e^{-\kappa t}}{t} \sum_{h\in[\gamma]} \int_F p_{\mathbb{H}}(t,z,h\cdot z)\,\mathrm{d}\rho(z)\mathrm{d}t.$$

这里，F 是 X的一个基本域，且 $\mathrm{d}\rho(z)$ 表示 $\mathbb{H}$上的双曲面积测度。接下来，我们按照塞尔伯格迹公式的证明进行推导（参见 [Ber16、Bor16、WX25]）。

固定 $h_0 \in [\gamma]$。存在唯一的本原元素 $\alpha \in \Gamma$，使得 $h_0 = \alpha^m$ 且 $m > 0$。h_0 在 Γ 中的中心化子为 $\langle\alpha\rangle$。特别地，$[\gamma] = \{h_1^{-1}h_0h_1 \mid [h_1] \in$

$\langle\alpha\rangle\backslash\Gamma\}$。因此

$$\begin{aligned}\sum_{h\in[\gamma]}\int_F p_{\mathbb{H}}(t,z,h\cdot z)\,\mathrm{d}\rho(z) &= \sum_{[h_1]\in\langle\alpha\rangle\backslash\Gamma}\int_F p_{\mathbb{H}}(t,z,h_1^{-1}h_0h_1\cdot z)\,\mathrm{d}\rho(z)\\ &= \sum_{[h_1]\in\langle\alpha\rangle\backslash\Gamma}\int_F p_{\mathbb{H}}(t,h_1\cdot z,h_0\cdot(h_1\cdot z))\,\mathrm{d}\rho(z)\\ &= \sum_{[h_1]\in\langle\alpha\rangle\backslash\Gamma}\int_{h_1\cdot F} p_{\mathbb{H}}(t,z,h_0\cdot z)\,\mathrm{d}\rho(z).\end{aligned}$$

这里，我们利用了热核和面积测度在等距变换下均保持不变这一事实。

经过共轭后，我们可以假设 h_0 由 $h_0 : z \mapsto e^{\ell_\gamma} z$给出。$\mathbb{H}$ 中的任意一点都可以通过群 $\langle\alpha\rangle$ 中的一个元素拉回到条带$F_\alpha := \{x+iy \mid 1 \le y < e^{\ell_\gamma/m}\}$中的唯一一点。这意味着

$$\begin{aligned}\sum_{h\in[\gamma]}\int_F p_{\mathbb{H}}(t,z,h\cdot z)\,\mathrm{d}\rho(z) &= \int_{F_\alpha} p_{\mathbb{H}}(t,z,e^{\ell_\gamma}z)\,\mathrm{d}\rho(z)\\ &= \frac{\sqrt{2}e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}}\int_1^{e^{\ell_\gamma/m}}\int_{\mathbb{R}}\int_{d(z,e^{\ell_\gamma}z)}^{\infty}\frac{re^{-r^2/4t}\,dr}{\sqrt{\cosh r-\cosh d(z,e^{\ell_\gamma}z)}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2},\end{aligned}$$

其中 $z = x+iy$，且双曲距离 d 满足

$$\cosh d(z,e^{\ell_\gamma}z) = 1+2\left(\sinh\frac{\ell_\gamma}{2}\right)^2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right).$$

因此我们计算得

$$\sum_{h\in[\gamma]}\int_F p_{\mathbb{H}}(t,z,h\cdot z)\,\mathrm{d}\rho(z) = -\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t}{4}}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{2t\ell_\gamma}{m}\int_{\mathbb{R}}\int_{\cosh^{-1}(q(\theta))}^{\infty}\frac{\mathrm{d}(e^{-\frac{r^2}{4t}})}{\sqrt{\cosh r-q(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta,$$

其中记 $q(\theta) := 1+2(\sinh(\frac{\ell_\gamma}{2}))^2(1+\theta^2)$，而 $\cosh^{-1}$ 是 $\cosh : (1,+\infty) \to (\cosh(1)$ $+\infty)$ 的反函数。

4. 为继续进行计算，我们引入阿贝尔变换 $\mathcal{A}$ 及其逆变换（参见 [Ber16，引理 3。10]）：

$$\mathcal{A}u(\rho) := 2\int_\rho^\infty u(r)\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\rho^2}},\quad \mathcal{A}^{-1}v(r) := -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty\frac{\mathrm{d}v(\rho)}{\sqrt{\rho^2-r^2}}.$$

接下来我们计算：

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_{\cosh^{-1}(q(\theta))}^{\infty}\frac{\mathrm{d}(e^{-\frac{r^2}{4t}})}{\sqrt{\cosh r-q(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta\\
&\qquad=\int_{\mathbb{R}}\int_{\sqrt{q(\theta)}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}(e^{-\frac{(\cosh^{-1}(\rho^2))^2}{4t}})}{\sqrt{\rho^2-q(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta\\
&\qquad=-\pi\int_{\mathbb{R}}\mathcal{A}^{-1}\left(e^{-\frac{(\cosh^{-1}(\bullet^2))^2}{4t}}\right)\left(\sqrt{q(\theta)}\right)\,\mathrm{d}\theta\\
&\qquad=-\frac{\pi}{\sqrt{2}\sinh(\frac{\ell_\gamma}{2})}\int_{\sqrt{\cosh\ell_\gamma}}^{\infty}\mathcal{A}^{-1}\left(e^{-\frac{(\cosh^{-1}(\bullet^2))^2}{4t}}\right)(r)\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\cosh\ell_\gamma}}\\
&\qquad=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}\sinh(\frac{\ell_\gamma}{2})}\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\left(e^{-\frac{(\cosh^{-1}(\bullet^2))^2}{4t}}\right)\left(\sqrt{\cosh\ell_\gamma}\right)\\
&\qquad=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}\sinh(\frac{\ell_\gamma}{2})}e^{-\frac{\ell_\gamma^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

我们得到：

$$\sum_{h\in[\gamma]}\int_F p_{\mathbb{H}}(t,z,h\cdot z)\,\mathrm{d}\rho(z)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{t}{4}}e^{-\frac{\ell_\gamma^2}{4t}}\frac{\ell_\gamma}{m\sinh\frac{\ell_\gamma}{2}}.$$

因此，我们得出：

$$\mu_X^\kappa(\mathcal{C}_X(\gamma))=\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{t}{4}}}{\sqrt{4\pi t}}\frac{\ell_\gamma\,e^{-\frac{\ell_\gamma^2}{4t}}}{2m\sinh\left(\frac{\ell_\gamma}{2}\right)}e^{-\kappa t}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{m}\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa}\right)\ell_\gamma}}{e^{\ell_\gamma}-1},$$

其中积分使用公式计算

$$t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{t}-\beta^2t}=\ -\frac{\pi}{2\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{2\alpha\beta}\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha+\beta t}{\sqrt{t}}\right)+e^{-2\alpha\beta}\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha-\beta t}{\sqrt{t}}\right)\right),$$

该公式对常数 α、 $\beta>0$ 以及误差函数 $\mathrm{Erf}(w)$ 成立：$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^w e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$。 □

备注。 1. 引理 3.1 中的公式对任意复参数 κ满足 $\mathrm{Re}\,\kappa\geq-1/4$时仍然成立。然而，具有复杀死率的布朗运动缺乏概率解释。尽管从测度论的角度来看，后续的许多结果仍然成立，但我们在此不再探讨这一推广。

2. 注意，带有杀死项的布朗环测度不一定具有共形不变性。事实上，当且仅当 $\kappa\neq0$（即没有杀死项）时，它才具有共形不变性。

定理1 是引理3.1的直接推论。

定理1的证明。当 $\operatorname{Re} s > \delta$时，利用对数函数的泰勒展开，可得

$$-\log Z_X(s) = \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{e^{sm\ell_\gamma}-e^{(s-1)m\ell_\gamma}}.$$

特别地，对于 $\kappa > 0$ 和 $s = \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa}$，我们有

$$\begin{aligned}-\log Z_X\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa}\right) &= \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa}\right)m\ell_\gamma}-e^{-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa}\right)m\ell_\gamma}}\\ &= \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa}\right)m\ell_\gamma}}{e^{m\ell_\gamma}-1}.\end{aligned}$$

上述计算形式上适用于任何无边界的完备双曲曲面上的任意实杀灭率。只要保证收敛，该公式便成立。引理 2.3 表明，只要 $s = \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa} > \delta$，□

4. Trace and determinant

4.1. 布朗环测度与正则化热迹。设 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ 为一完备双曲曲面。设 Δ 为作用于 X上的（正）拉普拉斯–贝尔特拉米算子。热算子 $e^{-t\Delta}$ 不一定是迹类。因此，我们引入以下热核重整化。

定义 **4.1**。设 X如上。令 $(c_1,\dots,c_{n_c})$ 表示 X的尖点，并令$[c_l]$ 表示第 l个尖点的同伦类。我们将 $E_{X,\,\kappa}$ 定义为这样一个算子：其施瓦茨核是 X 上杀灭率为 $\kappa \geq -1/4$ 的热核减去平面上的热核及抛物项。也就是说，

$$E_{X,\kappa}(t,z,z') := \sum_{h\in\Gamma\backslash\{\mathrm{Id}\}} p^{\kappa}_{\mathbb{H}}(t,z,h\cdot z') - \sum_{l=1}^{n_c}\sum_{h\in[c_l]} p^{\kappa}_{\mathbb{H}}(t,z,h\cdot z')$$

对于 $F\times F$ 中与其提升相对应的 $(z,z')\in X\times X$，其中 F 是 X 的一个固定基本域。

注。 对于没有尖点的曲面，$E_{X,\,\kappa}$ 是从中减去了整个双曲平面上的热核的热核。如果 X 具有无限面积，这一项便是迹发散的原因。因此，这是一种自然的正则化。D. Borthwick 在 [Bor16, §3.3] 中也采用了类似操作来正则化预解算子。

根据定义，我们有以下恒等式：

$$E_{X,\kappa}(t,z,z') = \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{h\in[\gamma]}\sum_{m=1}^{\infty} p^{\kappa}_{\mathbb{H}}(t,z,h^m\cdot z'),\ (z,z')\in F\times F.$$

可以为 $E_{X,\ \kappa}(t)$ 计算一个塞尔伯格型迹公式。

命题 4.2。设 $\kappa \geq -1/4$。对于任意 $t>0$，算子 $E_{X,\ \kappa}(t)$ 属于迹类，并且满足以下迹公式：

$$\operatorname{Tr} E_{X,\kappa}(t) = \frac{e^{-t/4-\kappa t}}{4\sqrt{\pi t}}\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{k=1}^{\infty}\ell_\gamma\frac{e^{-\frac{(k\ell_\gamma)^2}{4t}}}{\sinh(\frac{k\ell_\gamma}{2})},$$

其中，$\mathcal{P}_X$ 是 X的闭的定向本原测地线集合。

注。对热迹进行正则化的另一种方法是使用 零热迹0-tr$(e^{-t\Delta})$；参见 [Bor16，§13。3]。根据 [Bor16，引理 13，本文引入的热迹与零热迹通过以下恒等式相关联。13]

$$0\text{-tr}(e^{-t(\Delta+\kappa)}) = \operatorname{Tr}E_{X,\kappa}(t) + 0\text{-vol}(X)h_{0,\kappa} + n_c h_{c,\kappa}(t)$$

其中，0-vol(X) 是 X 的零体积，而 $h_{0,\ \kappa}$、$h_{c,\ \kappa}$ 是由下式定义的函数

$$h_{0,\kappa}(t) := \frac{e^{-(\frac{1}{4}+\kappa)t}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \frac{re^{-\frac{r^2}{4t}}}{\sinh(\frac{r}{2})}\,\mathrm{d}r,$$
$$h_{c,\kappa}(t) := \left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\Gamma'(1+iu)}{\Gamma(1+iu)}e^{-tu^2}\,\mathrm{d}u - \frac{\log 2}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{1}{4}\right)e^{-(\frac{1}{4}+\kappa)t}.$$

命题4.2的证明。根据单调收敛定理，Tr$E_{X,\kappa}(t)$ 可通过在对角线上对其核积分得到：

$$\operatorname{Tr} E_{X,\kappa}(t) = \int_X E_{X,\kappa}(t,z,z)\,\mathrm{d}\rho(z),$$

其中 $d\rho$ 是曲面 X上的双曲体积形式。将 Γ 中的元素按共轭类重新分组，即可得到所需结果；这正如塞尔伯格迹公式证明中的经典做法（例如参见 [Ber16] 或 [Gui86] ）。□

算子$E_{X,\kappa}(t)$ 与布朗环测度通过以下命题相关联。

命题 4.3. 设 X 是一个无边界的完备且几何有限双曲曲面。设 δ 为其收敛指数。对于任意满足 $\frac{1}{2}+$的 κ ，

$\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa} > \delta$，下列等式成立：

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} \operatorname{Tr} E_{X,\kappa}(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_X} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_X^\kappa\big(\mathcal{C}_X(\gamma^m)\big).$$

证明。令 $(c_1, \ldots, c_{n_c})$ 表示 X的尖点，而 $[c_l]$ 表示第 l 个尖点的同伦类。对于任意满足 κ 的 $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\kappa} > \delta$，根据定理 1 证明的第 3 部分，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma \in \mathcal{P}_X} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_X^\kappa\big(\mathcal{C}_X(\gamma^m)\big) \\
&\quad = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_X} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{1}{t} \sum_{h \in [\gamma]} \int_F p_{\mathbb{H}}^\kappa(t, z, h \cdot z)\, \mathrm{d}\rho(z) \mathrm{d}t. \\
&\quad = \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_F \left(\sum_{h \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}} p_{\mathbb{H}}^\kappa(t, z, h \cdot z) - \sum_{l=1}^{n_c} \sum_{h \in [c_l]} p_{\mathbb{H}}(t, z, h \cdot z) \right) \mathrm{d}\rho(z) \mathrm{d}t \\
&\quad = \int_0^\infty \frac{1}{t} \operatorname{Tr} E_{X,\kappa}(t)\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

对 κ 的条件确保所有考虑的量都是有限的。 □

4.2. 布朗　环路测度与拉普拉斯算子的正则化行列式。

4.2.1. 紧情形。在本节中，我们假设 X 是一条无边界的紧致双曲曲面。拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ 在 X 上的谱是一个递增的离散序列

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots.$$

零特征值 λ_0 的重数为一，相应的特征函数为常函数。遗憾的是，量“$\det \Delta = \prod_{k=1}^{\infty} \log \lambda_k$”并不收敛。为了克服定义拉普拉斯算子的行列式时遇到的这一困难，我们采用 ζ正则化，其定义为取

$$\log \det_\zeta \Delta := -\zeta_X'(0)$$

其中当 $\operatorname{Re}(s) > 1$ 时，

$$\zeta_X(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k}\, \mathrm{d}t,$$

它可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，且在 $s = 0$ 处解析。

现在证明定理 2 的 (ii) 。我们注意到，根据定理 1，定理 2 的 (ii) 中渐近公式的左端也等于

– 对数 $Z_X\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa}\right)$。因此，定理 2 的 (ii) 可以被视为下述恒等式的推论

$$\det{}_\zeta\left(\Delta_X+s(s-1)\right)=Z_X(s)\left(e^{E-s(s-1)}(2\pi)^s\frac{\Gamma_2(s)^2}{\Gamma(s)}\right)^{-\chi(X)},$$

最初由 Sarnak 证明[Sar87，定理 1]。这里我们给出该渐近展开的直接证明。

定理（ii）的证明，定理 2。我们先回顾以下恒等式，例如它出现在[Nau23，式（3）]中。这一恒等式由 F. Naud 给出，是塞尔伯格迹公式的推论：

$$-\log\det{}_\zeta\Delta=-\mathrm{Area}(X)E-\gamma_{\mathrm{EM}}+\int_0^1\frac{S_X(t)}{t}\,\mathrm{d}t+\int_1^\infty\frac{S_X(t)-1}{t}\,\mathrm{d}t$$

其中，$S_X(t)$由下式给出

$$S_X(t)=\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{m=1}^\infty\frac{e^{-t/4}}{(4\pi t)^{1/2}}\frac{\ell_\gamma}{2\sinh(m\ell_\gamma/2)}e^{-\frac{(m\ell_\gamma)^2}{4t}}.$$

我们注意到，$S_X(t)=e^{-\kappa t}\mathrm{Tr}^{E_X,\kappa}(t)$，其中 $\mathrm{Tr}^{E_X,\kappa}(t)$ 是命题 4.3 中引入的重整化热迹。在我们的语境中，值得注意的是，$|S_X(t)-1|$ 当 $t\to+\infty$ 时呈指数级小，而 $S_X(t)$ 当 $t\to0^+$ 时呈指数级小，见[Nau23，第 2] 节。

1. 首先我们注意到，根据命题 4.3，

$$\int_0^\infty e^{-\kappa t}\frac{S_X(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_X}\sum_{m=1}^\infty\mu_X^\kappa(\mathcal{C}_X(\gamma^m)).$$

2. 由于 $\kappa\to0+$，且 $|(1-e^{-\kappa t})S_X(t)/t|\le C\kappa|S_X(t)|$ 和 $|S_X(t)|$ 在$[0,1]$, 上可积，我们有

$$\int_0^1(1-e^{-\kappa t})\frac{S_X(t)}{t}\,\mathrm{d}t=O(\kappa).$$

3. 公式 [GR07，8.212-1] 给出，当 $\kappa\to0^+$时，

$$\int_1^\infty\frac{e^{-\kappa t}}{t}\,\mathrm{d}t=\int_\kappa^\infty t^{-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=-\gamma_{\mathrm{EM}}-\log\kappa+O(\kappa).$$

4. 最后，注意到 $|1-e^{-\kappa t}|\le\kappa t$ 对于 $t\in(1,-\log\kappa)$，因此

$$\int_1^{-\log\kappa}(1-e^{-\kappa t})\frac{S_X(t)-1}{t}\,\mathrm{d}t=O(\kappa(\log\kappa)^2).$$

另一方面，由于 $|S_X(t) - 1|$ 随 $t \to +\infty$呈指数衰减，我们可以假设对于某个 $\beta > 0$, $|S_X(t) - 1| = O(e^{-\beta t})$。于是当 $\kappa \to 0+$

$$\int_{-\log \kappa}^{\infty} (1 - e^{-\kappa t}) \frac{S_X(t) - 1}{t} \, \mathrm{d}t = O(e^{\beta \log \kappa}).$$

汇总 1–4 中的所有积分，即可得到所需的渐近结果。 □

作为比较，我们提及 M. Ang 等人在 [APPS22],中针对一般闭黎曼曲面得到了类似结果。

命题 4.4 ([APPS22，命题 1。4])。 设 (M, g) 为一闭合光滑黎曼曲面。在 M 上，关于 μ_M^κ 且二次变差大于 $4\varpi > 0$ 的环路质量等于：

$$\frac{\mathrm{vol}_g(M)}{4\pi\varpi} - \frac{\chi(M)}{6} (\log \varpi + \gamma_{\mathrm{EM}}) - \log \kappa - \log \det{}_\zeta \Delta_g + \epsilon(\kappa, \varpi),$$

其中，当先令 κ 再令 ϖ 趋于零时， $\epsilon(\kappa, \varpi)$ 趋于零。

尽管适用范围较窄，因为它仅适用于紧双曲曲面，但定理 (ii) 的渐近公式 2 有一个优点：它仅取决于杀死率 κ，因为它不需要截去二次变差较小的环路。

检查引理证明3.1 可知，二次变差小于 4ϖ 的同伦本质环的总质量（含杀死项）等于

$$\int_0^{\varpi} \mathrm{Tr} E_{X,\kappa}(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

其中$E_{X,\ \kappa}(t)$ 是定义4.1中的重整化热算子。利用命题4.2 以及 $S_X(t)$ 随 $t \to 0^+$指数衰减这一事实，我们得出该质量的阶为 $O(\varpi)$。比较定理(ii) 的2 和命题4.4，可推得二次变差大于 4ϖ的零同伦环路的如下渐近展开：

$$\mu_X（二次变差为 \geq 4\varpi 的零同伦环路） = \frac{\mathrm{Area}(X)}{4\pi} \left(\frac{1}{\varpi} + \frac{\log \varpi}{3} \right) + C + \epsilon(\varpi),$$

其中 $C := -\mathrm{Area}(X)E + \left(\frac{\mathrm{Area}(X)}{12\pi} - 2 \right) \gamma_{\mathrm{EM}}$ 是一个常数，且当 $\varpi \to 0$ 时， $\epsilon(\varpi) \to 0$。

4.2.2. 无限面积情形。 当 X 面积无限时，拉普拉斯算子的谱不再是离散的。在这种情况下，无法直接利用塞尔伯格迹公式对拉普拉斯算子的行列式进行重整化。D. Borthwick、C. Judge 和 P. A. Perry 提出了一种替代方法，利用预解算子的 0-迹对拉普拉斯算子的行列式进行重整化 [BJP01]。我们

在此简要回顾这些重整化方法，并阐述它们与布朗环测度之间的联系。

我们首先回顾，对于面积无限的几何有限双曲曲面 X，当 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$, $s \notin [\frac{1}{2}, 1]$ 时，X 上的 Δ_X 预解算子定义为

$$R_X := (\Delta_X + s(s-1))^{-1} : L^2(X) \to L^2(X).$$

已证明，当将预解算子 $R_X(s)$ 视为从 $C_0^\infty(X)$ 到 $C^\infty(X)$ 的映射时，它可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$；参见 [Bor16，第 6] 章及其中的参考文献。预解算子的这一亚纯延拓的极点称为 X 的共振，我们用 $\mathcal{R}_X$ 表示共振集合，并计入重数（重数的定义见 [Bor16，第 8.1] 节）。根据 Borthwick、Judge 和 Perry [BJP01，第 2], 节，拉普拉斯算子 Δ_X 的重整化行列式通过以下微分方程定义

$$\left(\frac{1}{2s-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^2 \log \det{}_0(\Delta_X + s(s-1)) = 0\text{-}\mathrm{tr}(R_X(s)^2).$$

这里，“0-tr”表示 [Bor16 中的 0-迹，参见 §10。1]。我们指出，$\det_0(\Delta_X + s(s-1))$ 通过对微分方程积分定义，因此只确定到两个自由参数；此外，由于定义 0-迹，还取决于 X 的边界定义函数。

这个拉普拉斯算子的重整化行列式恰好与 X 的“谱”（更确切地说，通过共振）以及 X 的长度谱密切相关，正如下文命题所述。我们首先定义一个魏尔斯特拉斯乘积

$$P_X(s) := s^{m(0)} \prod_{\tau_j \in \mathcal{R}_X \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{s}{\tau_j}\right) e^{\frac{s}{\tau_j} + \frac{s^2}{2\tau_j^2}} = s^{m(0)} \exp\left(-\sum_{\tau_j \in \mathcal{R}_X \setminus \{0\}} \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k} \frac{s^k}{\tau_j^k}\right)$$

其中 $m(0)$ 是 0 的共振重数。定义 P_X 的意义在于，它在紧致集上一致收敛，因此对 $s \in \mathbb{C}$ 定义了一个整函数。此外，P_X 的零点集恰好是共振 $\mathcal{R}_X$ 的集合，计重数。详情请参见 [Bor16，§9。4] 及其中的参考文献。

命题 4.5 ([Bor16], 定理 10.1 和 10.14)。设 X 是一个非初等的几何有限双曲曲面，且面积无限。则塞尔伯格 ζ 函数 $Z_X(s)$ 可作如下分解

$$Z_X(s) = P_X(s) e^{q(s)} G_\infty(s)^{-\chi(X)} \Gamma\left(s - \tfrac{1}{2}\right)^{n_c},$$

以及

$$Z_X(s) = \det{}_0(\Delta_X + s(s-1)) e^{q_1(s)} G_\infty(s)^{-\chi(X)} \Gamma\left(s - \tfrac{1}{2}\right)^{n_c} \left(s - \tfrac{1}{2}\right)^{\frac{n_c}{2}}$$

其中 q、q_1 是次数至多为 2 的多项式，而 G_∞、$\chi(X)$、n_c 与定理 2.

定理 1 通过将$Z_X(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\kappa})$（其中 $\kappa > -\frac{1}{4}$、视为布朗环测度下同伦本质环的质量），赋予命题 4.5 以概率解释。因此，命题 、以及无限面积情形下拉普拉斯算子的正则化。

定理2的证明。该定理是由先前命题直接推得的。定理(i) 的2 是命题4.3的另一种表述。条目(ii) 在§4.2.1中证明，而条目(iii) 则结合了命题4.5 和定理1的结果。□

References

[APPS22] M. Ang、M. Park、J. Pfeffer 和 S. Sheffield。《布朗环与李ouville随机曲面的中心荷》。《概率年刊》，50(4):1322–1358，2022。[Ber16] N. Bergeron。《双曲曲面的谱》。Universitext。Springer Cham，2016。[BJP01] D. Borthwick、C. Judge 和 P. A. Perry。《无限面积曲面上拉普拉斯算子的行列式与等极点度量》。《杜克数学杂志》，118:61–102，2001年12月。[Bor16] D. Borthwick。《无限面积双曲曲面的谱理论》。Progress in Mathematics。Birkh¨auser Cham，2016。[Dub09] J. Dub´edat。《SLE与自由场：配分函数与耦合》。《美国数学会杂志》，2009。[Fis87] J. Fischer。《通过塞尔伯格ζ函数研究塞尔伯格迹公式》，Lecture Notes in Mathematics第1253卷。Springer Berlin Heidelberg，1987。[GR07] I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik。《积分、级数与乘积表》。Elsevier/Academic Press，阿姆斯特丹，第七版，2007。译自俄文；译文由 Alan Jeffrey 和 Daniel Zwillinger 编校并作序；附一张 CD-ROM（Windows、Macintosh 和 UNIX）。[Gui86] L. Guillop´e。《关于紧致曲面上闭测地线长度的分布，曲面边界为全测地线》。《杜克数学杂志》，53(3):827–848，1986。[Gui92] L. Guillop´e。《有限几何曲面的塞尔伯格ζ函数》。载于《几何中的ζ函数》（东京，1990），Advanced Studies in Pure Mathematics第21卷，第33–70页。日本数学会，1992。[Law05] G. F. Lawler。《平面上的共形不变过程》，第114卷。美国数学会，2005。[LJ07] Y. Le Jan。《马尔可夫环、行列式与高斯场》。arXiv预印本：math/0612112，2007。[LJ20] Y. Le Jan。《布朗环拓扑》。《势分析》，53:223–229，2020。[LSW03] G. F. Lawler、O. Schramm 和 W. Werner。《共形限制：弦情形》。《美国数学会杂志》，2003。[LW04] G. F. Lawler 和 W. Werner。《布朗环汤》。《概率论及相关领域》，128:565–588，2004。[Nau23] F. Naud。《随机双曲曲面上的拉普拉斯算子行列式》。《数学分析杂志》，151(1):265–291，2023。

[Sar87] P. Sarnak。《拉普拉斯算子的行列式》。《数学物理通讯》，110:113–120，1987。[SV06] D. W. Stroock 和 S. R. S. Varadhan。《多维扩散过程》。数学经典丛书。Springer Berlin，海德堡，2006。[WX25] Y. Wang 和 Y. Xue。《黎曼曲面上的布朗环测度及其在长度谱中的应用》。《纯粹与应用数学通讯》，78(11):2123–2148，2025。

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, ETHZ
电子邮箱，ROMAN LEMONDE：rlemonde@ethz.ch

Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 91893 Bures-sur-Yvette, France电子邮箱，JIAN WANG：wangjian@ihes.fr