arXiv:2601.13092v1 [math.GR] 19 Jan 2026

仿射建筑的动力学边界：C^*-单纯性与泊松边界

CORINA CIOBOTARU 和 CORENTIN LE BARS

摘要。我们研究一类作用于可能是奇异的仿射建筑 X 且具有良好近端性质的群。这类群称为一般型群，其动力学通过它们在 X 无穷远处的室空间中的旗极限集来分析。对于一般型群 G，我们证明其具有 C^*-单纯性，方法是证明其旗极限集 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是拓扑自由、极小且强近端的。当 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 与相对于某个极限室的所有舒伯特胞腔相交时，$\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是一个均值近端空间，也就是说，对于作用群上的任意可容许概率测度，它都承载唯一的近端平稳测度。我们证明格是一般型群的实例，并确定了它们的泊松边界。论证依赖于构造一个等变重心映射，将一般位置的三元室组映至仿射建筑。

目录

1. 引言 1 2. 仿射建筑 7 3. 拓扑边界与可测边界 11 4. 一般型群 14 5. 重心映射 16 6. C^*-简单性 18 7. 等度连续分解与平均近端性 23 8. 格的泊松边界 28 附录 A. 一般位置下的房间三元组 30 参考文献 31

1. 引言

本文研究作用于仿射建筑及其边界上的群。我们的方法依赖于仿射建筑中某些等距变换的近端性质；这些等距变换在无穷远处的室上呈现出一种弱形式的南北动力学。这些等距变换在 [CC15]，中称为强正则双曲变换，其行为类似于半单实李群中的双曲型（即 $\mathbb{R}$-正则）元素。

我们进一步发展了无穷远处三元室组的重心理论，类似于双曲空间中互异三点所对应的重心。我们将这些工具应用于两个方面：推导所研究群的算子代数性质，以及分析其边界理论。

我们采用的普遍性层级，使我们能够对一类群统一表述这些结果，我们称之为一般型群；该类群尤其包括仿射建筑中的所有余紧格。

1.1. **一般型群及其旗极限集**。 本文中，G 表示一个离散可数群，它通过自同构作用于一个厚的、局部有限的仿射建筑 X。我们用 ch(X^∞) 表示 X的无穷远处球形建筑 X^∞ 的室集。若元素 $g \in G$ 是轴向等距变换，且其平移轴正则，因而位于 X的同一个公寓中，则称其为强正则双曲；参见第2节第5小节。这样的元素有一对吸引室和排斥室 $C^\pm \in$ch(X^∞)，而 g 的连续幂会将无穷远处“大多数”室收缩至吸引室 C^+；参见命题2.2。

$\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 的旗极限集定义为：在 ch(X^∞) 上的锥形拓扑中， G 的强正则双曲元素的吸引室集合 $\Lambda^+_{\mathcal{F}}(G)$ 的闭包。在作用的线性情形中，这一对象由 Benoist [Ben97, §3] 引入。若 G 包含强正则双曲元素，且不存在“较大”的闭合真 G-不变子集 ch(X^∞)，则称 G 为一般型；精确定义见第 4 节。这个概念经过设计，使得若 G 是定义在域 $\mathbb{K}$ 上的半单代数群的扎里斯基稠密子群，且 G 包含双曲型元素，那么 G 在相应的对称空间或 Bruhat-Tits 建筑以及其无穷远处的球面建筑上作用时，便是一般型。我们指出，若域 $\mathbb{K}$ 是阿基米德域，则 G 自动包含双曲型元素 [AMS95], ；但若 $\mathbb{K}$ 是非阿基米德域，这一点便不再成立 [Qui02]。

以下结果表明，旗极限集是一个自然的动力学对象。

定理 1.1. 设 X 是一个局部有限仿射建筑，且 $G <\mathrm{Isom}(X)$ 是一个一般型群。那么，极限集 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是 $ch(X^\infty)$ 中最小的非空 G-不变闭子集。它是 G-极小的、完美的且不可数的。如果 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \neq ch(X^\infty)$，那么 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 的内部为空。

在代数情形中，这样的结论令人想起 Benoist 的相关结果，参见例如 [BQ16, §2.8.3]。

1.2. **C^*-简单性：作用于建筑物上的群**。 设 G为一个离散群，设 λ 为 G 在希尔伯特空间$\ell^2(G)$上的左正则表示。约化 C^*-代数 $C^*_r(G)$ 是 $\lambda(g) \mid g \in G\} \subseteq B(\ell^2(G))$ 的张成在算子范数拓扑下的闭包。若 G 的 C^*-简单，则称其具有该性质，即C^*-代数 $C^*_r(G)$ 不存在非平凡的闭双边理想。另一种刻画是： C^*的每个弱包含于左正则表示的表示，实际上都与左正则表示弱等价 dlH。本文的第一个主要结果如下。

另一种刻画是： G 的每个弱包含于左正则表示的表示，实际上都与左正则表示弱等价 [dlH07]。本文的第一个主要结果如下。

定理 1.2 (C^*-单纯性)。 设 $G <\mathrm{Isom}(X)$ 是一个一般型群，它在局部有限仿射建筑 X 上适当作用。那么 G 是 C^*-单纯的。

此前，Bruhat–Tits 建筑[BCdlH94], 中的格已知满足这一结果；随后 Poznansky 将其推广至可 amenable 根平凡的离散线性群 [Poz09]；参见 [BKKO17，推论 6.10]。此外，已知三角群也满足这一结果；它们在类型为 A_2 [RS96] 的˜仿射建筑上简单传递地作用。

我们给出一个统一证明，该证明不要求作用在室上自由或传递，并且还适用于类型为 C_2 和 G_2的奇异建-˜ ˜筑。正如半单李群的扎里斯基稠密子群构成的类别远大于格，广义型群的类别也显著广于仿射建筑中的共紧˜格。根据 [BCL19], ，奇异 A_2-格是非线性的；事实上，人们猜想所有奇异格（类型为 C_2 和 G_2）都是非线性的。在这种情况下， [BCdlH94] 和 [Poz09]的方法并不适用。

定理 1.2 的证明基于 Breuillard、Kalantar、Kennedy 和 Ozawa 在 [BKKO17] 中建立的 C^*-单性动力学刻画。特别地，我们构造了一个 G-边界，在该边界上， G 的作用是拓扑自由的。回顾一下，对于拓扑群 Γ ，若紧致可度量空间 Y 上由同胚构成的作用 $\Gamma \curvearrowright Y$ 同时具有强近端性和极小性，则称 Y 为 Γ-边界。这些概念将在第 3.1 节中回顾。定理 1.2 随即直接由下述结果得出：

定理 1.3. 在与定理 *1.2* 相同的假设下，旗极限集 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \subseteq ch(X^\infty)$ 配备从 $ch(X^\infty)$ 继承的锥拓扑后，是一个 G-边界，并且 G 在 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 上的作用是拓扑自由的。

定理 1.2 进一步揭示了仿射建筑中一般型子群的结构性质。现在我们总结其中一些性质。

推论 1.4。 设 G 是一个作用于局部有限仿射建筑 X上的一般型群，且作用是适当的。则：

(1) G没有可和受限子群；*(2)* G没有非平凡的一致递归子群。*(3)* G满足 [Ken20] 中定义的 *Power* 平均性质。*(4)* 对于 G 的每个可和子群 H ，准正则表示 $\lambda_{G/H}$ 与 λ_G 弱等价。*(5)* 约化群 C^* 代数 $C_r^*(G)$ 有唯一的迹态。*(6)* 约化交叉积 C^* 代数 $C(\Lambda_{\mathcal{F}}(G)) \rtimes_r G$ 是纯无限单的。如果 G 是格，则它还是核的。

证明。 性质 1–2–3–4–5 是 G 的 C^*-单性所众所周知的推论，该性质已在定理 1.2 中确立；参见 [KK17、BKKO17、Ken20]。

根据定理 1.3， G 在 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 上的作用是极小且拓扑自由的，并且在某些情况下， $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) = \mathrm{ch}(X^\infty)$。此外，根据 [JR00]，它是 n-填充的。由于拓扑自由性意味着该作用是真外的（见 [JR00，定义 1.1 和注记 1.3]），根据 [RS96，定理 1.2]，约化交叉积 $C(\mathrm{ch}(X^\infty)) \rtimes_r G$ 是纯无限单的。断言 6 随即由以下事实得到：在 G 是余紧格的情况下， $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) = \mathrm{ch}(X^\infty)$，且 G 在 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 上的作用是拓扑顺从的（ [Léc10，定理 1.1], ），因此 G 是正合的，而约化交叉积 $C(\mathrm{ch}(X^\infty)) \rtimes_r G$ 是核的 [ADR00]。□

为证明定理 1.3，我们的方法依赖于两个主要工具。第一个是强正则双曲元素的动力学行为，这些元素由 [CC15] 引入。利用这些元素，我们证明了一个“通用”近端序列的存在性，这立即推出强近端性，同时该结果本身也具有独立的意义（见命题 6.3）。

命题 1.5. 设 X 是一个局部有限仿射建筑， G 是其自同构群，且该群在 X 上的作用为一般型。那么存在强正则双曲元素 g_1、 $g_2 \in G$ ，使得对于每个理想室 $C \in \mathrm{ch}(X^\infty)$，

$$g_2^n g_1^n C \xrightarrow[n\to\infty]{} C_2^+,$$

其中 C_2^+ 表示 g_2 的吸引理想室。

第二个工具涉及对无穷远处室的三元组的研究。我们证明存在一个子集 $\mathrm{ch}(X^\infty)^{[3]}_{\mathrm{gen}} \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty)^3$ ，其上有一个等变重心映射。三元组 $\mathcal{T} \in \mathrm{ch}(X^\infty)^{[3]}_{\mathrm{gen}}$ 称为一般，这一术语的依据是 $\mathrm{ch}(X^\infty)^{[3]}_{\mathrm{gen}}$ 在 $\mathrm{ch}(X^\infty)^3$中是开且稠密的。在 $X = \Delta^{\mathrm{BT}}(\mathbf{H}\ \mathbb{K})$ 是约化代数群$\mathbf{H}$ 在非阿基米德局部域 $\mathbb{K}$ 上的Bruhat–Tits厦这一情形下，室的三元组处于一般位置，当且仅当其稳定子是$\mathbf{H}$的有界子群。

命题 1.6 （重心映射）。 设 X 是一个局部有限的仿射建筑。则存在一个定义良好的、对$\mathrm{Isom}(X)$等变的映射（称为重心映射）

$$\zeta : ch(X^\infty)^{[3]}_{gen} \to X$$

从无穷远处的室的一般位置三元组映到 X。

考虑在测度类中定义于 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 上的概率测度 ν ，其为 Parkinson 在 [Par06] 中定义的调和测度$\{\nu_x\}$ 。这些测度具有全支撑：对于每个非空开集 $U \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty)$， $\nu_x(U) > 0$ 。术语“一般”由以下结果说明，见命题 5.6。

命题 1.7。 设 X 是一个局部有限仿射建筑。$ch(X^\infty)$ 中的三个室几乎必然处于一般位置。在特别地，若令 C_1, C_2 为无穷远处的相对室，则满足 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 处于一般位置的室 C_3 的集合在 $ch(X^\infty)$ 中稠密。

在 [Par19], A. Parreau 研究了 A_2建筑中无穷远处˜室的非退化三元组构形，并对其中的三重比和交比作出了完整描述。 [Par19] 的目标之一，是为 Fock–Goncharov 坐标 [FG06]提供几何类比。这里我们无法得出如此精确的结论，但给出了一种适用于任意类型仿射建筑的构造，并着重研究这类一般位置理想室三元组的构造与稠密性。不过，如何将这一重心映射与代数三重比、交比以及代数群背景下的 Fock–Goncharov 坐标联系起来，仍是一个有趣的问题。

这种重心映射的存在是刚性技术的有力工具，尤其是在结合 G-等变可测映射 $B \to$Prob(ch(X^∞)) 的存在时；其中 B 是一个 Zimmer-可 amen G- 空间；例如参见 [BCFS24]。我们的构造仅依赖于 X 的 CAT(0) 几何以及无穷远处的球面建筑 X^∞。特别是，经过直接改编可知，非紧型对称空间中也存在类似的重心映射。

1.3. **平均近端性**。 对于与 X相关的有限 Weyl 群W_{fin} 中的一个元素 $w \in W_{fin}$ ，以无穷远处的室$C \in$ch(X^∞)为基点的 w-舒伯特胞腔为

$$\mathrm{Opp}_w(C) := \{D \in \mathrm{ch}(X^\infty) \mid d_{W_{fin}}(C, D) = w\}.$$

设 G 为一般型群， $C \in \Lambda^{+}_{\mathcal{F}}(G)$为一个强双曲正则元的吸引室。若满足以下条件，我们称 C 是相对于舒伯特胞腔非回避的

$$\mathrm{Opp}_w(C) \cap \Lambda_{\mathcal{F}}(G) \neq \emptyset$$

对所有 $w \in W_{fin}$均成立。

对于 G上的概率测度 μ，若测度 $\nu \in$ Prob(ch(X^∞))满足 μ-平稳性，即 $\mu * \nu = \nu$，其中 $\mu * \nu$ 表示卷积积。我们对一般型群上可容许测度所对应的平稳测度进行分类。

定理 *1.8*（平均近端性）。设 $G <$*Isom(X)* 是一个作用于局部有限仿射建筑 X 上的一般型群。假设存在 $C \in \Lambda^{+}_{\mathcal{F}}(G)$，其相对于舒伯特胞腔是非回避的。那么 G 在 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 上的作用是平均近端的。换言之，对于任意可容许测度 $\mu \in$ *Prob(G)*，都存在唯一的 μ-平稳测度 $\nu \in$ *Prob(ch(X^∞))*，且该测度使 *(ch(X^∞)* ν*)* 成为一个 *(G,* μ*)*-边界。 ν 的支撑恰为 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$。

特别地，该结果适用于具有全旗极限集的余紧格，见命题 6.1。证明遵循了 [Mar91 第 4] 章中发展的思路。除了证明 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是一个 G-边界之外，我们还在命题 7.4 中给出了旗极限集 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 关于 G 作用的一个等度连续分解，这一结果或许也有独立的研究价值。

即使在代数情形中，相对于舒伯特胞腔而言具有非回避性质这一点似乎也尚未得到完全理解。更具体地说，设 G 是一个约化代数群，P 是 G 的一个极小抛物子群。我们不知道是否存在一个离散的扎里斯基稠密子群 $\Gamma < G$，使得它的旗极限集 $\Lambda_{\mathcal{F}}(\Gamma) \subset G/P$ 是全旗簇的一个非平凡真子集，但仍与相对于某个极限旗的每个舒伯特胞腔相交。

据我们所知，目前尚无此类例子，也没有一般性定理排除这种可能。在实李群的情形下，若 Γ 是阿诺索夫的，则 $\Lambda_{\mathcal{F}}(\Gamma)$ 是 G/P 的真子集，并且系统地避开所有不与最长元 w_0 相关联的舒伯特胞腔。一般而言，导致旗极限集并非全旗簇的几何约束，似乎会导致对舒伯特胞腔的回避。

历史上，富斯滕伯格边界理论一直是研究非正曲率背景下由群作用诱导的随机游走的有力工具（例如，参见 [GM89、BQ16]）。在这一框架中，对平稳测度的分析发挥着核心作用。尽管我们相信，对于所有一般型群，G 对 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 的作用都存在等度连续分解，但本文中定理 1.8 的主要应用是确定仿射建筑中余紧格的泊松边界，因此我们选择聚焦于这一情形。我们计划在另一项工作中研究所有一般型群上的随机游走这一问题。

1.4. 格的泊松边界。最后，我们确定仿射建筑中余紧格的泊松边界。μ生成的随机游走在 G 上的泊松–富斯滕伯格边界（B_μ，ν_μ）是一个带有特定测度类 $[\nu_\mu]$ 的 G-空间，它由其作为唯一最大（G，μ）-边界这一性质刻画；标准参考文献可参见下文定理 3.9 或 [Kai00] 。

为群上的随机游走的泊松–富斯滕伯格边界寻找拓扑模型，这一问题有着悠久而丰富的历史。在他的奠基性论文中，[Kai00], Kaimanovich 给出了此类识别的判据。我们应用该论文中的条带判据，推导出以下结果。

定理 1.9 (格的泊松边界)。设 X 是一个厚的、局部有限的仿射建筑，G 是一个离散可数群，它通过自同构在 X 上真且余紧地作用。设 μ 是 G 上的一个可容许概率测度，并令 ν 表示定理 *1.8* 给出的 $\boldsymbol{ch}(X^\infty)$ 上的唯一 μ- 平稳测度。那么，$(\boldsymbol{ch}(X^\infty)\ \nu)$ 是 (G,μ) 的泊松 – 富斯滕伯格边界的一个紧致模型。

1.5.**进一步发展**。 与经典代数群相比，Kac–Moody 群的约化 C^*-代数研究仍很不充分。我们相信，我们的动力学与几何方法有助于更好地理解作用于建筑和孪生建筑上的群的算子代数性质，而 Kac–Moody 群是其中一大类。

此外， C^*-简单性可以被视为与可 amen 性相对的一种性质，因为对于可 amen 群，任意酉表示都弱包含于正则表示中。在 [LBLV26], 中，第二作者与 E. Leibtag 和 I. Vigdorovich 证明，对于秩 2 的某些可能是奇异的仿射建筑中的格（特别是类型为$\tilde{A}_2$的仿射建筑中的任意格），满足一种先验上更强的非 amen 性：这些群的约化C^*-代数是自无私的。 [LBLV26] 中的一些论证依赖于本文所介绍的技巧。

致谢。C.C 获得 VILLUM FONDEN 提供的研究资助（VIL53023）。C.LB 获得 ERC 高级资助 NET 101141693，并感谢 E. Leibtag 和 I. Vigdorovich 进行了许多有益的讨论。

2. 仿射建筑

本文采用 [AB08] 中的定义来讨论建筑。本文中的仿射建筑 X 均假定为离散的（即多单纯形复形），配备完整的公寓系以及自然的 CAT(0) 度量，记作 d_X，参见 [AB08，第 11] 章。本节余下部分中，固定一个以仿射 Coxeter 群 W 为模型、关联有限 Coxeter 群 W_{fin} 的仿射建筑 X 。

2.1. **无穷远处的球面建筑**。 作为一个 CAT(0)空间， X 具有视觉紧化，其元素由射线的等价类构成；若两条射线之间的豪斯多夫距离有限，则它们等价，记作 $\overline{X} = X \cup \partial_\infty X$。视觉边界 $\partial_\infty X$ 可赋予自然拓扑，且 X 上的等距变换可延拓为边界上的同胚。此外，当 X 可分时， X^∞ 上的拓扑可度量化。类似于树的端的定义，可在 $\partial_\infty X$ 上赋予球面建筑 [的结构，参见 Par00，性质 1.7], ，记作 X^∞。注意，将 X^∞ 的一个公寓映射到 X的一个公寓的映射 $A \mapsto A^\infty$ 是一一映射 [，参见 KW14，命题 4.9]。

2.2. **其上的锥拓扑** X。 视觉边界是完备 CAT(0)空间中的一个经典概念，参见例如 [BH99]。

在仿射建筑 X 中，模型阿尔科夫（或室）可能包含多个特殊顶点；然而，这些顶点不一定属于相应考克斯特群或权格作用下的同一个轨道。在文献中，其中一个这样的轨道称为良好顶点集合（详见 [Par06] ）。当 X 的根系非约化时（见第 2.7 节），良好顶点构成

特殊顶点的一个子集，并在研究 ch(X^∞) 上的调和测度时发挥关键作用。若根系是约化的，则每个特殊顶点都是良好顶点。在所有情况下，每个仿射胞腔都至少包含一个良好顶点。

为特殊顶点固定一种类型后，令 X_P 表示 X 中所有该类型顶点的集合。对于 $x \in X_P$ 和无穷远面 F^∞，存在一个以 x 为基点、属于 F^∞ 等价类的仿射面，记作 $Q(x, F^\infty)$。

关于如何在集合 $X \cup \mathrm{ch}(X^\infty)$，乃至在 $X \cup X_\tau^\infty$ 上定义拓扑的详细说明，其中 X_τ^∞ 表示无穷远处的球面建筑中类型为 τ 的单形集合，见 [CL11]。固定一个特殊顶点 $x \in X_P$。那么，ch(X^∞) 上的拓扑由以下邻域基给出：$\{U_x(y) \mid y$ 与 x 类型相同的特殊顶点$\}$，其中

$$U_x(y) := \{C \in \mathrm{ch}(X^\infty) \mid y \in Q(x, C)\} \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty). \tag{1}$$

该拓扑不依赖于 x [Par06，定理 3.17]，，并使 ch(X^∞) 成为一个可度量的全不连通空间 [GKVMW12，命题 6.14]。事实上，由这个基给出的拓扑与由基 $\{U_x(y)\}$ [Par06，定理 3.17], 给出的拓扑相同，其中 x，y 均为同一类型的特殊顶点。

关于如何为仿射建筑乃至马修尔的边界赋予拓扑，更详尽的论述见 [CMR20]。以下命题总结了紧化 $X \cup \mathrm{ch}(X^\infty)$ 的一些性质，参见[CMR20, §3.1]，尤其是 [CMR20, Remark 3.4]，其中讨论了它与视觉拓扑的关系。正则点 $\partial_\infty^{\mathrm{reg}} X$ 定义为严格支撑于某个室的边界点 $\xi \in \partial_\infty X$ 的集合，记作 C_ξ。

命题 2.1. 设 X 是任意一个仿射建筑。则在 $X \cup \mathrm{ch}(X^\infty)$ 上存在一种拓扑，使得无穷远处各室的开集基由集合(1)给出。该拓扑与 X 上的 *CAT(0)* 拓扑一致。此拓扑是第一可数且豪斯多夫的。由 $\xi \mapsto C_\xi$ 定义的映射 $\partial_\infty^{\mathrm{reg}} X \to \mathrm{ch}(X^\infty)$ 是一个同胚。

在球形建筑中，如果两个室之间的廊道距离达到最大值，就称它们相对，例如参见 [AB08, §5.7.1]。此时，存在唯一一座连接它们的公寓。给定球形建筑中的一个室 C_0，大胞腔 Opp(C_0) 是与之相对的室的集合 C_0。它是锥拓扑中的一个开集。

2.3. **缩回**。设 X 为一个仿射建筑，且 $C \in$ ch(X^∞)。若 A 是一个公寓，使得 $C \subset \partial A$（等价地，存在一个魏尔室 S 包含于 A 中，代表 C），则存在唯一的缩回映射 $\rho_{A,C} : X \to A$，使得 $\rho_{A,C}$ 在任何包含代表 C 的室的公寓上都保持距离，参见 [Par00，命题 1.20]。此外，$\rho_{A,C}$ 不会增大距离。我们称 $\rho_{A,C}$ 为以无穷远处的室 $C \in \mathrm{ch}(X^\infty)$ 为基点、从 X 到 A 的典范缩回。特别地，对于任何在其边界上包含 C 的公寓 A'，$\rho_{A,C|A'}$: $A' \to A$ 是一个逐点固定 $A \cap A'$ 的同构。

2.4. **正则性**。设 $\mathfrak{a}$ 为基本仿射公寓，我们将其认作反射群 W 作用其上的向量空间。设 $\mathfrak{a}^+$ 为基本韦伊室，并用 $\mathfrak{a}^{++}$ 表示其内部。用 w_0 表示与仿射反射群 W相关联的有限 Weyl 群 W_{fin} 的最长元。对于 $\lambda \in \mathfrak{a}$，对立 involution $j\colon \mathfrak{a}^+ \to \mathfrak{a}^+$ 定义为

$$j(\lambda) = w_0(-\lambda).$$

设 $x,\ y \in X$ 是建筑 X 的两个不同特殊顶点，且 A 是包含它们的一个公寓。存在唯一确定的同构，将 f 映射为 $\mathfrak{a} \to A$，满足 $f(0) = x$ 且 $f^{-1}(y) \in \mathfrak{a}^+$。$x$ 与 y 之间的类型 （或向量距离）是上文定义的向量 $\theta(x,\ y) := f^{-1}(y) \in \mathfrak{a}^+$。若线段 $[x, y]$ 的类型 $\theta(x,\ y)$ 是正则的，即 $\theta(x,\ y) \in \mathfrak{a}^{++}$，则称该线段为正则的。

若 $[x, y]$ 是正则的，则 $\theta(x,\ y)$ 和 $j(\theta(y,\ x))$ 都是正则的。注意，$f(\mathfrak{a}^+)$ 是建筑 X 的一个魏尔室，包含于 A 且包含 y。记它所表示的无穷远处的室为 C_y 。类似地，$f(\theta(x,\ y) - \mathfrak{a}^+)$ 是一个包含 x、表示室 $C_x \in \mathsf{ch}(X^\infty)$ 的魏尔室。这些室在无穷远处的球面建筑中互为相对。在这种情况下， A 是连接它们的唯一公寓，即两个室都属于 A^∞。

2.5. **强正则双曲元素**。 我们借用了 [CC15]中仿射建筑里强正则双曲元素的概念。下述命题大致指出，强正则双曲元满足南北动力学的一个弱版本，类似于双曲空间中的双曲型等距变换或 CAT(0)空间中的收缩等距变换。

命题 2.2 ([CC15, 命题 2.10])。 设 $g \in \mathrm{Isom}(X)$ 是一个保持类型的强正则双曲元素，其唯一的平移公寓为 A。设 $C^-, C^+ \in \mathsf{ch}(X^\infty)$ 分别是 g 在无穷远处的斥室和吸引室。那么对于每个 $C \in \mathsf{ch}(X^\infty)$，极限 $\lim g^n(C)$ 存在，且等于 $\rho_{A,C^-}(C)$，其中 ρ_{A,C^-} 是到以C^-为中心的 A 上的收缩映射。

2.6. **基于顶点的余迹建筑**。 设 F 和 F' 是基于顶点 $o \in X$的两个仿射面。若它们的交集分别是 o 在 F 和 F'中的一个开邻域，我们称 F 和 F' 在 o 处具有相同的芽 ，参见[KW14, §4.14]。所有在 o 处且不退化为$\{o\}$ 的芽构成一个单纯球面建筑，称为以 o为基点的余留建筑 $\Sigma_o X$ 。它与无穷远处的球面建筑具有相同的类型。 $\Sigma_o X$ 的最大维数单形是局部胞腔。

对于特殊顶点 $x \in X_P$，我们有一个典范的单纯复形态射

$$\Sigma_x : X^\infty \to \Sigma_x X \tag{2}$$

将任意无穷远面 F^∞ 映射到芽$_x(Q(x,\ F^\infty))$.

固定 $o \in X$。对于每个满足 $[o,x]$ 为正则的 $x \in X$，存在$C \in \mathrm{ch}(X^\infty)$，使得 x 属于 $Q(o, C)$ 的内部。于是，我们可以将唯一的局部仿射胞腔与 $\Sigma_o X$ 关联起来，该仿射胞腔由 $\Sigma_o(x) := \Sigma_o(C)$ 定义。

本文将研究配备完备公寓系的厚仿射建筑。回顾一下，若每个非极大单形都包含在至少 3 个不同的室中，则称建筑为厚的 。特殊点 $p \in X$ 若其球形余留建筑 $\Sigma_p X$ 是厚的，则称其为厚的。我们重点介绍以下简单引理。

引理 2.3. 设 X 是一个配备完备公寓系的仿射建筑，并假设其无穷远处的球面建筑 X^∞ 是厚的。设$g \in \mathrm{Isom}(X)$ 是 X 上的一个等距变换，它逐点固定 $ch(X^\infty)$。则 g 在 X上恒等作用。

证明。由于 g 在 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 上恒等作用，它在无穷远处球形建筑的每个公寓 A^∞ 上都平凡作用。根据 X^∞ 的公寓与 X 的公寓之间的一一对应，限制映射$g_{|A}$ 在 X 的任意公寓 A上保持 A不变，并且是其自同构。

由于 g 稳定 X的每个公寓，它也必然稳定厚墙——即至少三个仿射公寓的交集。由于建筑 X^∞ 是厚的，因此存在一个厚点 p （见 [KW14，引理 4.20]）。

设 $x \in X$ 为任意一点，并设 A 为同时包含 p和 x的一个公寓。由于 p 是厚的， A 中包含 p 的每面墙都是厚墙（见 [KW14，引理 4.18]），因而都被 g稳定。由于 p 是 X的一个顶点，它位于有限多个墙的交集中，而这些墙均被 g稳定，这意味着 g固定 p。

此外，由于 g 稳定 A、固定 p，并且在 A^∞上平凡作用，它必然固定 A的每一点。因此， $g(x) = x$。由于这对任意的 $x \in X$都成立，等距变换 g 必为恒等映射。

□

如果没有指定额外假设，那么本文所考虑的所有仿射建筑在无穷远处都具有厚的球面建筑，因此引理 2.3 适用。

2.7. ch 上的调和测度(X^∞)。 无穷远处的室 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 上有一族测度 $\{\nu_x\}$，称为调和测度，它们以 X 中固定类型的特殊顶点为指标，即 X_P 中的顶点（见[Par06，第587–588]页）。感兴趣的读者可在 [RT21] 或 [BFL23] 中找到更多相关信息（后者引入了拟均匀测度的概念）。对于任意两个同类型的特殊顶点 $x, y \in X$，测度 ν_x 和 ν_y 彼此绝对连续 [Par06，定理3.17]。对于 $\lambda \in \mathfrak{a}^+$，令 $V_\lambda(x)$ 表示满足 $\theta(x,z) = \lambda$ 的 $z \in X$ 的集合。此外

$$\nu_x(U_x(y)) = \frac{1}{N_\lambda}$$

若 $\theta(x,y) = \lambda$，且 $N_\lambda = |V_\lambda(x)|$ 表示集合 $V_\lambda(x)$ 中满足 $\theta(x,z) = \lambda$ 且与 x 同类型的特殊顶点的基数。事实上，我们并不需要如此精确的信息，只需知道测度$\{\nu_x\}$ 定义了一类概率测度，并且其中任意一个都具有全支撑：对于每个非空开集 U， $\nu_x(U) > 0$。以下事实引自 [HHL23，命题2.13]。

命题 2.4. 设 $x \in X_P$，且 $C_0 \in ch(X^\infty)$。那么 ν_x-几乎处处的$C \in ch(X^\infty)$ 与 C_0 相对。

推论 2.5. 对于每个 $C_0 \in ch(X^\infty)$，大胞腔 $Opp(C_0)$ 是 $ch(X^\infty)$中的开稠密集。

证明。设 $C_0 \in \mathrm{ch}(X^\infty)$。$\mathrm{Opp}(C_0)$ 是开集这一点是经典结论。假设 $\mathrm{Opp}(C_0)$ 不稠密：存在一个开集 $U \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty) - \mathrm{Opp}(C_0)$。对于 $x \in X_P$，集合 $\{U_x(y) \mid y \in X_P\}$ 构成开集基，因此存在$y \in X_P$使得 $U_x(y) \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty) - \mathrm{Opp}(C_0)$。但这样一来 $\nu_x(U_x(y)) > 0$，从而 $\nu_x(\mathrm{Opp}(C_0)) < 1$，这与命题 2.4 矛盾。□

下一个命题将有助于构造强正则元素，并控制其吸引室和排斥室。

命题 2.6. 设 $U_1, U_2 \subseteq ch(X^\infty)$ 为开集。则存在一个公寓 A，以及 x, y 中两个类型相同的特殊顶点，使得：

(1) $\theta(x,y)$ 是正则的；*(2)* $U_x(y) \subseteq U_1$ 且 $U_y(x) \subseteq U_2$。

证明。设 $C_1 \in U_1$。由推论 2.5，存在与 C_1相对的 $C_2 \in U_2$。设连接它们的唯一公寓为 A，并取一个特殊顶点 $x \in A$。由于 U_1, U_2 是开集，存在与 x类型相同的特殊顶点 y_1, y_2，使得 y_1 包含于扇区 $Q(x, C_1)$ 的内部；相应地， y_2 包含于 $Q(x, C_2)$ 的内部，其中 $U_x(y_1) \subseteq U_1$；相应地，$U_x(y_2) \subseteq U_2$，且 x 位于从 y_1 到 y_2的测地线段上。如此选取后，有$U_{y_1}(y_2)$ 包含于 $U_x(y_2)$；相应地，$U_{y_2}(y_1)$ 包含于 $U_x(y_1)$，由此得证。□

作为一个附带结果，我们得到以下推论。

推论 2.7. 设 $U_1, U_2 \subseteq ch(X^\infty)$ 为开集。则存在开集 $O_1 \subseteq U_1$ 和 $O_2 \subseteq U_2$，使得对所有 $C_1 \in O_1$ 和 $C_2 \in O_2$，室 C_1 和 C_2 互为相对。

证明。重复命题 2.6 的证明中给出的构造，并沿用相同的记号。对于任意 $D_1 \in U_{y_2}(y_1)$ 和 $D_2 \in U_{y_1}(y_2)$，仿射胞腔 $\Sigma_x(D_1)$ 和 $\Sigma_x(D_2)$ 在 x 处互为相对，因此 D_1 和 D_2 互为相对。□

3. 拓扑边界与可测边界

本节旨在汇集拓扑动力学和边界理论中的相关概念。

3.1. 富斯滕贝格边界。 本节中，我们考虑一个拓扑动力系统（M，G），其中 G 表示一个局部紧、第二可数的（半）群，M 是一个紧致空间（相空间），通常可度量，而 $G \curvearrowright M$ 是由自同胚构成的作用。

回顾一下，波兰空间 M 上的博雷尔概率测度空间 Prob(M) 配备了弱-$*$拓扑（可度量且可分）。

定义 3.1（极小性、近端性）。**(1)** 若空间 M 中每个 G-轨道都稠密，则称 M 为G-极小的：对于任意 $m \in M$ 以及任意非空开子集 $U \subseteq M$，存在 $g \in G$ 使得 $gm \in U$。**(2)** 若 G 在 M 上的作用满足：对于任意两个点 $m_1, m_2 \in M$，都存在一点 $p \in M$，使得对于 p 的每个邻域 U，都存在 $g \in G$ 使得 $gm_1, gm_2 \in U$，则称该作用为近端的 。**(3)** 若对于任意概率测度 $\eta \in \in$Prob(M)，都存在 $m \in M$ 和一个序列$g_n \in G$，使得 $g_n\eta \to \delta_m$，则称 G 在 M 上的作用为强近端的 。等价地，G 在 Prob(M) 上的作用是近端的 [Gla76，引理 III.1.1]。

极小强近端 G-空间 M 称为 G-边界。

Furstenberg 的一项结果指出，每个群 G 都存在一个 G-边界$\partial_F G$，它具有如下泛性质：每个 G-边界都是 $\partial_F G$的连续 G-等变像。空间 $\partial_F G$ 称为 G的富斯滕贝格边界 。然而，离散可数群的富斯滕贝格边界往往“很大”：它总是极端不连通的 [BKKO17，命题 2.4]，，因此除非它退化为一个点，否则不是第二可数的；而它退化为一个点当且仅当 G 可 amen。

我们回顾一下，离散可数群 G 在紧致G-空间 M 上的作用称为拓扑自由，如果对所有 $g \in G$，g的不动点集

$$M^g := \{x \in M \mid gx = x\}$$

具有空内部。

本文使用 Kalantar 和 Kennedy 关于 C^*-简单性的以下突破性结果 [KK17],; 另见 [BKKO17，定理 3.1]。

定理 3.2。设 G 是一个离散群。则以下条件等价：

(1) G是 C^*-单的；*(2)* G在其富斯滕贝格边界上自由作用；*(3)* 存在一个拓扑自由的 G-边界。

3.2. 平稳测度。 设 G 是一个离散可数群，且μ 是 G上的一个概率测度。令 (Ω $\mathbb{P}$) 为概率空间 ($G^{\mathbb{N}}$，$\mu^{\otimes\mathbb{N}}$)，其上带有乘积 σ-代数。空间 Ω 称为正向增量空间。该应用

$$(\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}, n) \in \Omega \times \mathbb{N} \mapsto Z_n(\omega) = \omega_1\omega_2 \dots \omega_n,$$

定义由测度 μ 在 G 上生成的随机游走。若 $\mu \in$ Prob(G) 的支撑 supp(μ) 生成 G 作为半群，则称其为可容许的。

设 Y 是一个拓扑空间，并赋予博雷尔集的 σ-代数。设 $G \curvearrowright Y$ 是在 Y 上的连续作用，且 $\nu \in \mathrm{Prob}(Y)$ 是 Y 上的概率测度。我们将卷积概率测度 $\mu * \nu$ 定义为 $\mu \times \nu$ 在作用 $G \times Y \to Y$ 下的像。换言之，对于 Y 上的有界可测函数 f，

$$\int_Y f(y) d(\mu * \nu)(y) = \int_G \int_Y f(g \cdot y) d\mu(g) d\nu(y).$$

定义 3.3。概率测度 $\nu \in \mathrm{Prob}(Y)$ 若满足 $\mu * \nu = \nu$，则称为 μ-平稳的 。此时，我们称 $(Y,\ \nu)$ 是一个 $(G,\ \mu)$-空间。

注意，若 Y 是波兰空间，则概率测度集 $\mathrm{Prob}(Y)$ 可赋予可度量化的弱-$*$ 拓扑。

注 3.4。当 G 通过同胚作用于紧致度量空间Y时，$\mathrm{Prob}(Y)$ 的弱-$*$ 紧致性意味着，对于 G上的任意测度 μ，Y上都存在一个 μ-平稳测度。μ-平稳测度集是 $\mathrm{Prob}(Y)$ 中的凸紧集。

以下陈述归功于 H. Furstenberg，是边界理论的基础结果之一。

定理 3.5（[Fur73]）。设 G 是一个局部紧第二可数群，$\mu \in \mathit{Prob}(G)$ 是一个可容许测度，而 $(Z_n(\omega))$ 是与测度 μ 相关的 G 上的随机游走。设 Y 是一个波兰空间，G 通过同胚作用于其上，且 Y 上有一个 μ-平稳测度 ν。那么，存在一个本质上良定义的 G-等变可测映射 $\omega \mapsto \nu_\omega \in \mathit{Prob}(Y)$，使得 $\mathbb{P}$-几乎处处有 $Z_n(\omega)\nu \to \nu_\omega$ 在弱-$*$ 拓扑下成立。此外，我们有如下分解

$$\nu = \int_\Omega \nu_\omega d\mathbb{P}(\omega).$$

定义 3.6（(G,μ)-边界，平均近端性）。(1) 一个 (G,μ)-空间 (Y,ν) 是一个 (G,μ)-边界，如果对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\omega \in \Omega$，定理 3.5 中的极限测度 ν_ω 是狄拉克测度。(2) 如果对于任意 μ-平稳测度 $\nu \in \mathrm{Prob}(Y)$，(G,μ)-空间 (Y,ν) 都是 (G,μ)-边界，则称 G-空间 Y 为 μ-近端的。(3) 如果对于任意可容许测度 $\mu \in \mathrm{Prob}(G)$，G-空间 Y 是 μ-近端的，则称 G-空间 Y 为 G-平均近端的。

定义 3.7（等度连续分解）。设 (Y,d) 是一个度量 G-空间。集合 $L \subseteq G$ 在 $U \subseteq Y$ 上等度连续，是指对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $R > 0$，使得若 $y, y' \in U$ 满足 $d(y,y') < R$，则对所有 $g \in L$，都有 $d(gy,gy') < \varepsilon$。

G在 Y 上的作用称为具有等度连续分解，如果我们可以将 G 写成有限个子集 $G = \cup_{i=1}^N G_i$ 的并，并找到非空开集 $Y_i \subseteq Y$，使得：

(1) $GY_i = Y$, for every $i \in \{1, ..., N\}$;

(2) G_i 在 Y_i上是等度连续的。

我们将使用以下结果作为证明平均近端性的主要判据。 [Mar91 的命题 VI.2.13] 中可以找到一个思想相近的表述。

命题 3.8 ([NS13, 定理 4。7])。 若 G 在 M 上的作用是强近端的，且具有等度连续分解，那么对每个容许的概率测度 μ ，在 G 上都存在唯一的 μ-平稳测度ν，并且 (M,ν) 是一个(G,μ)-边界。特别地， M 是 G-平均近端的。

μ 生成的、作用在 G 上的随机游走的泊松–富斯滕贝格边界是一个带有特定测度类的 G-空间。它可由 Furstenberg [Fur63], （另见[NS13，定理 9.2]）提出的以下普适性性质刻画。

定理 3.9。 与群 G 上的概率测度 μ 相关联的泊松–富斯滕贝格边界 (B_μ,ν_μ) 是唯一的极大(G,μ)-边界：每个(G,μ)-边界都是 (B_μ,ν_μ) 的一个可测 G-因子。

除其他用途外， B_μ 可通过满射等距变换描述 G 上有界的 μ-调和函数集 $\mathrm{Har}^\infty(G,\ \mu)$

$$F \in L^\infty(B_\mu, [\nu_\mu]) \mapsto \Phi_\varphi(F) \in \mathrm{Har}^\infty(G,\mu),$$

其中

$$\Phi_\varphi(F)(g) = \int_{B_\mu} F(gb) d\nu_\mu(b).$$

对所有 $g \in G$ 均成立。

4. 一般型群

本节将介绍一类作用于建筑物上的群，它们具有良好的近端性质。

4.1. 旗极限集。 设 $G <$Isom(X) 是一个群，它通过等距变换忠实地作用于仿射建筑 $(X,\ d)$ 上，其中 d 是 CAT(0) 度量。下文将讨论包含强正则双曲元素的群，并研究它们在边界上的动力学，因此考虑下文定义的旗极限集是合乎情理的。

定义 4.1 （旗极限集）。我们将 $\Lambda^+_{\mathcal{F}}(G) \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty)$ 定义为 G 中强正则双曲元素的吸引室集合。我们将旗极限集 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty)$ 定义为 $\Lambda^+_{\mathcal{F}}(G)$ 在锥拓扑下的闭包。

注 4.2。 经典地，在 H CAT(0)空间Y 上作用的群的极限集，是 $H \cdot o \cap \partial_\infty Y$ 的某个 H-轨道在 $Y \cup \partial_\infty Y$ 中的闭包与视觉边界的交集。这个CAT(0)极限集与我们的极限集之间的关系似乎很微妙，因此我们不会使用这一概念。

4.2. **一般型群**。 我们将在本节中定义主要概念。

定义 4.3. 我们称子群 $G <$Isom(X)为一般型，如果G 包含强正则双曲元素，并且对于任意非空的 G-不变闭集 $M \subseteq$ ch(X^∞) 以及任意有限个室 $C_1, \dots,$ $C_N \in$ch(X^∞)，交集

$$M \cap \bigcap_{i=1,\dots,N} \mathrm{Opp}(C_i)$$

非空。

在实代数群中，对于在贝尔范畴意义下或相对于哈尔测度而言“多数”的元素对 $\{g_1, g_2\}$ ，它们生成的群在相应对称空间上的作用具有一般型，参见例如 [BG03]。我们将在命题 6.1 中看到，仿射建筑中的余紧格是一般型的。

现在我们给出与一般型群相关的旗极限集的重要性质。

定理 4.4. 设 X 是一个局部有限仿射建筑，且 $G <$Isom(X) 是一个一般型子群。那么极限集 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是 $ch(X^\infty)$ 中最小的非空 -不变闭子集。它是 -极小、完美且不可数的。若 $(G) \neq ch(X^\infty)$，则 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 的内部为空。

证明。首先，设 C^+ 是强正则双曲元素 $g \in G$ 的吸引室，且 $h \in G$。那么 hgh^{-1} 是一个强正则双曲元素，其吸引室为 hC^+。因此， $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是 G-不变的。现在假设存在一个闭的 G-不变子集 $M \subseteq$ch(X^∞)，且

$$\Lambda_{\mathcal{F}}(G) - (\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \cap M) \neq \emptyset.$$

设 g 是 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) - (\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \cap M)$ 中的一个强正则双曲元素，其吸引室为 C^+，其排斥室为 C^-。由于 G 是一般型， $M \cap$Opp(C^-) $\neq \emptyset$，因此存在一个室 $D \in M \cap$Opp(C^-)，使得 $g^n D \to C^+$。由于 M 是闭的且 G-不变，$C^+ \in M$，矛盾。这表明 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是 ch(X^∞) 中最小的闭 G-不变子集，并且它是 G-极小的。

同样的证明表明， $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$中没有孤立点，因为对任意具有吸引室和排斥室 C^+、C^- 的强正则双曲元素 $g \in G$， $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \cap$Opp($C^-$)$\cap$Opp($C^+$) $\neq \emptyset$。由于它按构造是闭集，因此它是完美的。此外，它是非空的波兰空间，故不可数。

最后，假设 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \neq$ ch(X^∞)，那么 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 的边界 $\partial\Lambda_{\mathcal{F}}(G) = \Lambda_{\mathcal{F}}(G) - \overline{\mathrm{Int}(\Lambda_{\mathcal{F}}(G))}$ 是一个非空的闭 G-不变集，因此它必定是整个 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$。因此， $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 的内部为空。□

5. 重心映射

本节中，我们为无穷远处两两相对的理想室三元组构造一个重心映射。我们沿用第2节中引入的记号。

定义 5.1. 设 X 是一个局部有限仿射建筑，并令 X^∞ 表示其理想边界。若三个互不相同的理想室$\{C_1, C_2, C_3\} \subset \mathrm{ch}(X^\infty)$ 中的室 C_1, C_2, C_3 两两相对，则称这三个理想室$\{C_1, C_2, C_3\}$ 为对踵的。

若三元组$\{C_1, C_2, C_3\}$ 处于一般位置，则称其处于一般位置；这意味着它是对踵的，并且对所有 $1 \leq i \neq j \leq 3$，记 A_{ij} 为 X 中在无穷远处的边界上同时以 C_i 和 C_j 为室的唯一公寓 A_{ij}^∞，我们有：

$$A_{12}^\infty \cap A_{13}^\infty \cap A_{23}^\infty = \emptyset.$$

记 $\mathrm{ch}(X^\infty)^{[3]}$ 为 X 的对踵理想室三元组集合，记 $\mathrm{ch}(X^\infty)^{[3]}_{gen}$ 为其中处于一般位置的理想室三元组集合。

注5.2. 设 $g \in \mathrm{Aut}(X^\infty)$ 是无穷远处球面建筑的一个自同构。若 $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty)$ 是一个对踵（分别地，一般位置）室三元组，则 $g\mathcal{T}$ 仍然是对踵（分别地，一般位置）的。

下述命题依赖于 CAT(0)空间中度量的凸性。

命题5.3。 存在映射 $\zeta : ch(X^\infty)^{[3]}_{gen} \to X$ ， 它是$\mathrm{Isom}(X)$等变的。

证明。 设$\mathcal{T} = \{C_1, C_2, C_3\} \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty)$ 是一个处于一般位置的三元组，并且一如既往，用 A_{ij} 表示 X 中在无穷远处的边界上同时以 C_i 和 C_j 为室的唯一公寓 ∂A_{ij}。定义函数

$$F_{\mathcal{T}} : x \in X \mapsto \sum_{i \neq j} d(x, A_{ij}) \in \mathbb{R}_+$$

映射 $F_{\mathcal{T}}$ 定义良好。由于 $i \neq j$ 公寓 A_{ij} 是一个闭的（因而完备的）测地凸子集，函数 $x \in X \mapsto d(x, A_{ij})$ 是连续凸函数 [BH99，推论 II.2.5]。作为凸函数之和， $F_{\mathcal{T}}$ 因而连续、凸且有下界。令$\alpha := \inf F_{\mathcal{T}}$为其下确界，并令 $B(F_{\mathcal{T}},1)$ 为集合

$$\{x \in X \mid F_{\mathcal{T}}(x) \leq \alpha + 1\}.$$

我们断言集合 $B(F_{\mathcal{T}},1)$ 是有界的。反设它无界。不妨取一个子序列，假设存在一个序列 (x_n)，它位于 $B(F_{\mathcal{T}},1)$ 中，并收敛到边界$\xi \in \partial_\infty X$上的一点。由于 (x_n) 到公寓A_{ij}的距离一致有界，边界点 ξ 必属于交集 $A_{12}^\infty \cap A_{13}^\infty \cap A_{23}^\infty$；而由于这个三元组处于一般位置，该交集为空。这就产生了矛盾。

因此，集合 $B(F_{\mathcal{T}}, 1)$ 是有界的，所以由 X 的局部紧性可知，它包含于某个紧集中。特别地， $F_{\mathcal{T}}$ 取得其最小值，并且根据

$F_{\mathcal{T}}$ 的凸性，这个最小值在一个闭的测地凸集上取得。将这个极小集记为 Min($F_{\mathcal{T}}$)。现在，在任意完备的 CAT(0) 空间中，都存在一个映射 circ，它将任意有界子集 [的中心（也称为外接中心）与之对应 BH99，命题 II.2.7]。由于 X 局部有限，因此它是完备的，于是我们可以考虑映射 ζ : ch(X^∞) $^{[3]}_{gen} \to X$ ，它将任意三元组 $\mathcal{T} \in$ ch(X^∞)$^{[3]}_{gen}$ 与闭有界集 Min($F_{\mathcal{T}}$) 的中心对应。由 Min($F_{\mathcal{T}}$) 的凸性，以及到测地凸子集的投影不会增大距离这一事实 [BH99，命题 II.2.4(4)], ，可知这个中心实际上必定属于 Min($F_{\mathcal{T}}$)。这个映射显然是 Isom(X)-等变的。□

定义 5.4。 上文定义的映射 ζ : ch(X^∞)$^{[3]}_{gen} \to X$ 称为 ch(X^∞)上的重心映射 。

下面的引理使我们能够显式构造处于一般位置的三元房间组。

引理 5.5。 设 C_1, C_2 是相对的无穷远处的室。设 $A^\infty \subseteq X^\infty$是由 C_1 和 C_2 张成的无穷远公寓。那么对于任意一个室

$$C_3 \in \bigcap_{D \in ch(A^\infty)} Opp(D),$$

三元组 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 处于一般位置。

证明。 设 C_1, C_2 是相对的无穷远处的室，并设 $A^\infty_{12} \subseteq X^\infty$ 是由 C_1 和 C_2张成的无穷远公寓。设 C_3 是一个无穷远处的室，对所有 $D \in$ ch(A^∞_{12}), 它都与 D 相对。按惯例，记由室 C_1 和 C_3张成的无穷远公寓为 A^∞_{13}，由室 C_2和 C_3张成的无穷远公寓为 A^∞_{23}。首先，我们断言交集 $A^\infty_{12} \cap A^\infty_{13}$ 恰好是 C_1。事实上，该交集是一个包含C_1的凸子复形。假设它还包含另一个无穷远处的室 D。在公寓A^∞_{13}上，将一个室映到与之相对的室的对立映射是一个双射 [AB08，引理 5.111]。因此，在A^∞_{13} 中唯一与C_3 相对的室是 C_1，所以 D 不可能与 C_3相对。这与我们的假设矛盾。

当然，同样的证明表明 $A^\infty_{12} \cap A^\infty_{23} = C_2$。于是我们立即得到 $A^\infty_{12} \cap A^\infty_{13} \cap A^\infty_{23} = \emptyset$，因此三元组 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 处于一般位置。□

下一个命题说明了定义 5.1 中将室的三元组称为“一般”的原因。

命题 5.6。 设 ν 是与调和测度 $\{\nu_x\}$属于同一测度类的概率测度，且 C_1, $C_2 \in ch(X^\infty)$ 是相对的理想室。那么对于 ν-几乎处处的 $C_3 \in ch(X^\infty)$, 室 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 处于一般位置。特别地，使房间三元组 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 处于一般位置的 C_3 稠密于 $ch(X^\infty)$。

证明。根据命题 2.4，对于任意室 $D \in \mathrm{ch}(A^\infty)$，大胞腔 $\mathrm{Opp}(D)$ 的 ν-测度为 1。因此，有限个大胞腔的交集测度为 1，并且

$$\nu\Big(\bigcap_{D\in \mathrm{ch}(A^\infty)} \mathrm{Opp}(D)\Big) = 1.$$

由引理 5.5，任意室 $C_3 \in \bigcap_{D\in \mathrm{ch}(A^\infty_{12})} \mathrm{Opp}(D)$ 都满足三元组 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 处于一般位置。这就证明了第一个结论。

证明的最后一部分是调和测度具有全支撑这一事实的推论，正如推论 2.5 的证明中所示：由于每个开子集 $U \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty)$ 都具有正的 ν-测度，因此不存在一个不包含某个室 C_3 的此类开集，使得三元组 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 处于一般位置。□

我们来指出以下显然的推论。

推论 5.7。 对于每个开集 $U \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty)$，存在一个由室组成的三元组 $\{C_1, C_2, C_3\}$，位于 U 中且处于一般位置。

证明。 由推论 2.7， U 中存在一对相对室。于是由命题 5.6 可得结论：满足 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 处于一般位置的室集合 C_3 在 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 中稠密，因此特别地 U 包含这样一个室。□

注记 5.8。 在引理 5.5 和命题 5.6 中，我们只用到了局部紧空间 X 的 CAT(0)几何以及无穷远处的球形建筑 X^∞。特别地，同样的构造也适用于非紧型对称空间。

6. C^*-单性

本节旨在证明定理 1.2。

6.1. **余紧格**。 本节证明，仿射建筑的余紧格是一般型群，且其旗极限集实际上是 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 的全部。整节中，我们假设所考察的群$G \leq \mathrm{Aut}(X)$在 X 上不一定保型，因此在 X^∞ 上也不一定保型。

论证可由仔细考察 [CC15，第 2] 节得出。具体而言，余紧性意味着特殊顶点的轨道只有有限多个，这使我们能够应用 [CC15，命题 2.9]。

命题 6.1. 设 G 是一个离散可数群，它通过自同构在不可约、局部有限的仿射建筑 X上余紧作用。那么$\Lambda_{\mathcal{F}}(G) = \mathrm{ch}(X^\infty)$，且 G 是一般型。特别地， G在 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 上的作用是极小的。

证明。 根据 [CC15，定理 1.2], , 群 G 具有强正则双曲元素。

要证明推论的其余部分，只需证明 $\Lambda^{\pm}_{\mathcal{F}}(G)$ 在 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 中稠密。事实上，设 $x \in X$ 是一个特殊顶点。选取 $C \in \mathrm{ch}(X^\infty)$，并令

$$\gamma : [0, \infty] \to X$$

是从 $\gamma(0) := x$ 出发、终止于$\gamma(\infty) := \xi \in X^\infty$的强正则双曲射线，其中 ξ 位于理想室 C的内部。沿着射线 γ，考虑一列与 x类型相同的特殊顶点$\{x_n\}_{n\geq 0}$，其中 $x_0 = x$，且距离 $d_X(x_n, x_{n+1})$对所有$n \geq 0$均为常数。由于 G 在 X上余紧作用，集合$\{x_n\}^{n\geq 0}$ 包含于有限多个 G-轨道中。每个轨道都是离散的，因为 X 是局部有限单纯复形。

因此，我们可以应用 [CC15，命题2.9]。存在一个递增的正整数序列$\{f(n)\}_{n\geq 0}$，使得对于任意 $m > n > 0$，都存在一个强正则双曲元素$g_{n,m} \in G$ 满足：

$$x_{f(n)}, x_{f(m)} \in \mathrm{Min}(g_{n,m}) \quad \text{and} \quad g_{n,m}(x_{f(n)}) = x_{f(m)}.$$

将 $g_{n,m}$ 的吸引理想室记作$C^+_{n,m}$。注意，可以构造一条强正则测地射线

$$\gamma_{n,m} : [0, \infty] \to X$$

从 $\gamma_{n,m}(0) = x$出发，经过测地线段 $[x_{f(n)}, x_{f(m)}]$，并以位于$C^+_{n,m}$内部的理想点$\xi_{n,m}$ 为终点。此外，测地线段 $[x, x_{f(m)}]$ 包含于 $\gamma \cap \gamma_{n,m}$中，而射线 $[x_{f(n)}, \xi_{n,m})$ 位于 $\mathrm{Min}(g_{n,m})$ 中。

取 $n, m \to \infty$，可得序列 $\{C^+_{n,m}\}_{m>n} \subset \Lambda^{\pm}_{\mathcal{F}}(G)$ 关于 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 上的锥拓扑收敛到 C。结论得证。□

作为命题 6.1 的直接推论，我们得到了以下有用结果，并将其单独列出，以供日后参考。

推论 6.2。设 X 是一个不可约、局部有限仿射建筑，且 G 是作用于 X 并在 X上余紧作用的自同构群。设$U \subseteq ch(X^\infty)$ 为一个开集。那么存在一个强正则双曲等距变换 $g \in G$，其吸引室位于 U中。

6.2. **强近端性**。在本节中，我们证明一般型群存在一个通用近端序列。

命题 6.3。设 X 是一个局部有限仿射建筑。考虑两个强正则双曲元素 g_1、$g_2 \in \mathrm{Aut}(X)$。对于每个 g_i，分别以 C_i^+ 和 C_i^- 表示其吸引室和排斥室。设 A_1 是由这一对 $(C_1^+$、$C_1^-)$ 在 X 中确定的唯一仿射公寓，并以 A_1^∞ 表示其理想边界。假设

$$C_2^- \in \bigcap_{D \in ch(A_1^\infty)} Opp(D).$$

那么对于每个理想室 $C \in ch(X^\infty)$，都有

$$g_2^n g_1^n C \xrightarrow[n\to\infty]{} C_2^+.$$

证明。令 A_2 为 X 中由 C_2^+和 C_2^-张成的唯一仿射公寓。同样，由于 C_2^- 与任意 $D \in \mathrm{ch}(A_1^\infty)$相对，令 A_D 为 X 中由 C_2^- 和 D张成的唯一仿射公寓。接着，固定点 x_2 属于 A_2，使得对于每个 $D \in \mathrm{ch}(A_1^\infty)$，$x_2$ 都位于公寓 A_2 和 A_D中对应于理想室 C_2^-的某个公共扇区的内部。

再次根据假设，C_2^- 与任意 $D \in \mathrm{ch}(A_1^\infty)$相对，并由[CC15，命题 2.10], ，可得

$$g_2^n(D) \xrightarrow[n\to\infty]{} C_2^+,$$

对任意 $D \in \mathrm{ch}(A_1^\infty)$均成立。

下文中，固定 $r_2 > 0$ 使得 $r_2 \in \mathbb{R}$，并取测地射线 $\rho_2 := [x_2, \xi_2^+) \subset A_2$，其中 ξ_2^+ 表示理想室 C_2^+的重心；再取以基点x_2为中心、半径为 r_2且与测地射线 ρ_2相关联的 C_2^+的标准开邻域 $U(x_2, r_2, C_2^+)$。那么存在

$$N_{r_2} > 0 \text{ such that } g_2^n(D) \in U(x_2, r_2, C_2^+),$$

对任意 $n \geq N_{r_2}$ 以及任意 $D \in \mathrm{ch}(A_1^\infty)$。

现在设 x_1 是 A_1中的一点。对于每个 $D \in \mathrm{ch}(A_1^\infty)$，考虑测地射线 $\rho_{D,1} := [x_1, \xi_D) \subset A_1$ 和 $\rho_{D,2} := [x_2, \xi_D) \subset A_D$，其中 ξ_D 表示理想室 D的重心。由于 X 是一个CAT(0)空间，测地射线 $\rho_{D,1}$,$\rho_{D,2}$ 实际上彼此平行。因此，对于每个 $D \in \mathrm{ch}(A_1^\infty)$，我们在测地线 $\rho_{D,1}$上按需选取一点$y_D \in \rho_{D,1} \cap A_D$，使得 y_D 位于公寓 D所对应的公共扇区内部，其中公寓为 A_1 和 A_D。

设 $C \in \mathrm{ch}(X^\infty)$。根据 [CC15，命题 2.10], ，存在唯一的$D' \in \mathrm{ch}(A_1^\infty)$，使得 $g_1^m(C) \xrightarrow[m\to\infty]{} D'$。令 $U(x_1, y_{D'}, D')$为 D'的标准开邻域，其中心为基点 x_1，半径为 $y_{D'}$，并与测地射线 $\rho_{D',1}$相关联。于是存在

$$M_{C,1} > 0 \text{ such that } g_1^m(C) \in U(x_1, y_{D'}, D'),$$

对于每个 $m \geq M_{C,1}$。注意，常数 $M_{C,1}$ 取决于理想室 C。

由于我们可以在测地线$\rho_{D,1}$上将 $y_{D'}$ 选取得足够远，并且可以独立于理想室 C进行选择，因此测地线段 $[x_1, y_{D'}]$的一大部分（记作测地线子段 $[z_{D'}, y_{D'}]$）包含于公寓 A_1 和 $A_{D'}$中对应于理想室 D' 的公共扇区的内部。

接着，注意到对于任意 $n \geq N_{r_2}$，我们有

$$C_2^- \in \mathrm{ch}(g_2^n(A_{D'})),\ x_2, g_2^n(x_2) \in g_2^n(A_{D'}) \text{ and } g_2^n([z_{D'}, y_{D'}]) \subset g_2^n(A_{D'}).$$

利用测地射线拼接测地线

$$[x_2, g_2^n(\xi_{D'})), \quad [g_2^n(x_2), g_2^n(\xi_{D'})),$$
$$[g_2^n(z_{D'}), g_2^n(\xi_{D'})), \text{ and } [g_2^n(z_{D'}), g_2^n g_1^m(\xi_C)),$$

构造测地射线 $[x_2, g_2^n g_1^m(\xi_C))$，并注意到

$$g_2^n g_1^m(C) \in U(x_2, r_2, C_2^+), \text{ for all } m \geq M_{C,1}, n \geq N_{r_2}.$$

取任意 $n \geq \max\{M_{C,1}, N_{r_2}\}$，可得 $g_2^n g_1^n(C) \in U(x_2, r_2, C_2^+)$，于是命题得证。□

命题 6.4. 设 $G < \mathrm{Isom}(X)$ 是一个一般型子群。则存在一个序列 $\{g_n\}_{n\geq 0}$ 属于 G，以及一个室 $C^+ \in \Lambda_{\mathcal{F}}(G)$，使得对任意 $C \in ch(X^\infty)$,

$$g_n C \xrightarrow[n\to\infty]{} C^+.$$

证明。设 g_1 是一个强正则双曲元素，其吸引室为 C_1^+，排斥室为 C_1^-。设 A^∞ 是由 C_1^+ 和 C_1^- 张成的无穷远公寓。由于 G 是一般型，且根据定理 4.4, $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是闭的 G-不变集，因此交集

$$\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \bigcap_{D\in \mathrm{ch}(A^\infty)} \mathrm{Opp}(D)$$

非空。由于集合 $\bigcap_{D\in\mathrm{ch}(A^\infty)}\mathrm{Opp}(D)$ 是开集，因此其中存在一个排斥室为 C_2^- 的强正则双曲元素 $g_2 \in G$。于是由命题 6.3 可知，对于任意室 $C \in \mathrm{ch}(X^\infty)$,

$$g_2^n g_1^n C \xrightarrow[n\to\infty]{} C_2^+,$$

其中 C_2^+ 是 g_2 的吸引室。这就证明了该断言。 □

在命题 6.4 的证明中，我们得到了 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 中存在一般位置三元组。

推论 6.5。设 $G <\mathrm{Isom}(X)$ 是一个一般型子群。则其中存在一个处于一般位置的房间三元组 $T \subseteq \Lambda_{\mathcal{F}}(G)$。

证明。重复命题 6.4 证明中的构造。由引理 5.5，三元组 $\{C_1^-, C_1^+, C_2^-\}$ 处于一般位置。□

我们立即得到以下推论。

推论 6.6. 设 $G <\mathrm{Isom}(X)$ 是一个一般型子群。则G在 $ch(X^\infty)$ 上的作用是强近端的。

证明。设 $\nu \in \mathrm{Prob}(\mathrm{ch}(X^\infty))$ 是一个概率测度。考虑命题 6.4 给出的普适近端序列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G$。设 $f \in \mathcal{C}(\mathrm{ch}(X^\infty))$ 是一个连续函数。那么

$$g_n \nu(f) = \int f(g_n C) d\nu(C).$$

由于对所有室 $C \in \mathrm{ch}(X^\infty)$，序列 $g_n C$ 都收敛到室 C^+，由控制收敛定理应用于 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 上的函数序列 $\{f_n(\cdot) := f(g_n \cdot)\}$，可得

$$g_n \nu(f) \to f(C^+).$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，$g_n \nu$ 在弱-$*$-拓扑下收敛到狄拉克测度 δ_{C^+}。□

现在我们可以对推论 6.5 作进一步完善。

推论 6.7。设 $G <\mathrm{Isom}(X)$ 为一般型子群，且设$U \subseteq ch(X^\infty)$ 为一个与 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$相交的开集。那么，存在一个完全包含于 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \cap U$中的无穷远处的泛型三元组 $\mathcal{T}$。

证明。由推论 6.5，存在一个完全包含于 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 中的无穷远处的泛型三元组$\mathcal{T}' := \{C_1, C_2, C_3\}$。根据 G-作用于 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 的强近端性（命题 6.3），存在一个序列$\{g_n\}_{n\geq 0}$ 以及一个室$D \in \Lambda_{\mathcal{F}}(G)$，使得 $g_n \mathcal{T}' \to D$。由于 G-作用于 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是极小的，D可以选在 U中，故命题得证。□

6.3. **拓扑自由性**。回忆一下，离散群 H 在紧空间 Y 上的作用是拓扑自由的，当且仅当任意非平凡元素 $h \in H$ 的不动点集 Y^h 的内部为空。

命题 6.8。设 $G < \mathrm{Isom}(X)$ 是一个一般型子群，并假设作用 $G \curvearrowright X$ 是适当的。设 $h \in G$。若存在开集 $U \subseteq ch(X^\infty)$，使得 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \cap U \neq \emptyset$，且 $h_{|U \cap \Lambda_{\mathcal{F}}(G)}$ =恒等映射，则 $h = id$。换言之，G 在 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 上的作用是拓扑自由的。

证明。假设存在开集 $U \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty)^h$，与 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 相交，且 $h_{|U \cap \Lambda_{\mathcal{F}}(G)}$ =恒等映射。由推论 6.7，存在一般位置三元组 $\mathrm{T} \in \mathrm{ch}(X^\infty)^3$，属于 $U \cap \Lambda_{\mathcal{F}}(G)$。若记其重心为 $z := \zeta(\mathrm{T})$，则有 $h(z) = z$。根据定义，$\Lambda^+_{\mathcal{F}}(G)$ 在 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 中稠密，因此存在一个强正则双曲元素 $g \in G$，其吸引室 C^+ 属于 U，排斥室为 $C^- \in \Lambda_{\mathcal{F}}(G)$。特别地，对所有足够大的 n，可假设 $g^{-n} h g^n \zeta(\mathrm{T}) = \zeta(\mathrm{T}) = z$。由于作用是适当的，存在 $a \in G$，使得对无穷多个 n，都有 $g^{-n} h g^n = a$。若 $a =$ 恒等映射，则得到 $h =$id。否则，命题 2.3 表明存在非空开集 $V \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty) - \mathrm{ch}(X^\infty)^a$。现在，由于 $\mathrm{Opp}(C^-)$ 在 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 中稠密，集合 $\mathrm{Opp}(C^-) \cap V$ 非空；并且对任意室 $D \in \mathrm{Opp}(C^-) \cap V$，当 n 足够大时都有 $g^{-n} h g^n D = D$。特别地，$aD = D$，这与 $D \in \mathrm{ch}(X^\infty) - \mathrm{ch}(X^\infty)^a$ 矛盾。□

6.4. C^***-单性**。

定理 1.2 和定理 1.3 的证明。 集合 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 非空且紧，这是因为它是紧集 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 的闭子集。根据定理 4.4，G 在 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 上的作用是极小的；根据推论 6.6，该作用是强近端的。因此，旗极限集 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是一个 G-边界。在 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 上的作用还具有

拓扑自由性，这由命题 6.8 得出。定理 1.3 得证。于是我们可以应用定理 3.2，从而完成定理 1.2 的证明。□

7. 等度连续分解与平均近端性

本节证明定理 1.8。设 X 是一个不可约局部有限仿射建筑，并设 $G \curvearrowright X$ 是群 G 通过自同构作用于它的作用。

7.1. 一致性及其基。 我们回顾一般拓扑学中关于集合上一致性的一些事实。设 Y 是一个集合。其对角线 $\Delta(Y)$ 是集合 $\{(y, y) \mid y \in Y\}$。Y 上的一个周围 是一个包含 $V \subseteq Y \times Y(Y)$ 且满足 $V = V^{-1}$ 的集合，其中 Y^{-1} : $= \{(y_2, y_1) \mid (y_1, y_2) \in V\}$。我们用 $\mathcal{D}_Y$ 表示 Y 上周围的集合。

对于集合 $V \subseteq Y \times Y$，我们定义 $Y \times Y$ 的以下子集

$$V \circ V := \{(x, z) \mid \exists\, y \in Y \ : \ (x, y) \in V \text{ and } (y, z) \in V\}.$$

定义 7.1. Y 上的一致性$\mathcal{U}$ 是 Y 的周围所组成的一个族，并满足

(U1) 若 $V \in \mathcal{U}$ 且 $V \subseteq W \in \mathcal{D}_Y$，则 $W \in \mathcal{U}$。(U2) 若 $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$，则 $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$。(U3) 对每个 $V \in \mathcal{U}$，都存在 $W \in \mathcal{U}$ 使得 $W \circ W \subseteq V$。（这称为“一致三角不等式”。）(U4) $\cap_{V \in \mathcal{U}} V = \Delta(Y)$。

换言之，Y 上的一致性是集合 $Y \times Y$ 上的一个滤子，其元素都是周围。

一致性$\mathcal{U}$ 的一个基是一个族$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$，满足对任意 $V \in \mathcal{U}$，都存在 $W \in \mathcal{B}$ 使得 $W \subseteq V$。

我们将利用以下结果构造一致性。

定理 7.2 ([Eng68])**.** 设 $B \subseteq D_Y$ 是 Y上的一个周围族，满足以下条件：

(BU1) 若 $V_1, V_2 \in B$，则存在 $W \in B$，使得 $W \subseteq V_1 \cap V_2$。*(BU2)* 对每个 $V \in B$，都存在 $W \in B$，使得 $W \circ W \subseteq V$。*(BU3)* $\cap_{V \in \mathcal{B}} V = \Delta(Y)$。

那么，由包含 B 中某个元素的周围构成的族 $U \subseteq D_Y$ 是一致性，且 B 是其一个基。

对于空间 Y 上一致性 $\mathcal{U}$ 中的一个元素 $V \in \mathcal{U}$，以及 $x \in Y$，球 $B(x, V)$ 表示由所有满足 $(x, y) \in V$ 的 $y \in Y$ 组成的集合。由此，空间 Y 上的一致性 $\mathcal{U}$ 诱导出 Y 上的一个拓扑，该拓扑由以下“开集”构成：

$$\{O \subseteq Y \mid \forall x \in O,\ \exists\, V \in \mathcal{U} \ : \ B(x, V) \subseteq O\}.$$

例 7.3（度量空间）。反过来，当 (Y, d) 是一个度量空间时，集合 $V_i := \{(x, y) \mid d(x, y) < 2^{-i}\}$ 定义了 Y 上一致性的一个基。

该一致性所诱导的拓扑与度量 d 所诱导的拓扑相同。

7.2. 等度连续分解。本小节的目标是证明以下命题。

命题 7.4。设 $G < \mathrm{Isom}(X)$ 是一个一般型子群。假设 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 包含一个无穷远公寓。那么， G 在 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$上的作用存在一个等度连续分解。

先引入一些记号。设 $\mathfrak{a}$ 是 X 的一个基本公寓，并将其视为 X 的模型公寓。设 $\mathfrak{a}^+$ 是 $\mathfrak{a}$ 中的一个基本韦伊室，并将其视为 X 的模型韦伊室。

接下来，固定一个特殊顶点 $o \in X$。回顾第 2.2 节，$\mathsf{ch}(X^\infty)$ 中的开集基由集合 $U_o(y)$ 给出，其中 $\theta(o,\ y)$ 与模型韦伊室 $\mathfrak{a}^+$ （位于 X 中）的重心向量 ρ 共线。此后我们采用这个基。特别地，当我们写作 $U_o(y)$，其中 $o,\ y$ 是特殊顶点时，我们总是指 $\theta(o,\ y)$ 与 $\mathfrak{a}^+$ 中的 $\widetilde{\ }$重心向量 ρ 共线。设 d^∞ 是 $\mathsf{ch}(X^\infty)$ 上与由开集 $U_o(y)$ 诱导的拓扑相容的度量。

$\widetilde{\ }$注记 7.5。 度量的构造 d^∞ 例如见 F. Paulin [的未发表讲义 Pau14，第 3.7 节，命题 3.70]。可以$\widetilde{\ }$将函数 d^∞ 视为格罗莫夫双曲空间中的视觉度量的类似物。

对于 $r \geq 0$，定义$\mathcal{U}(r)$为形如 $U_o(y)$ 的开集的集合，其中按照上述约定，方向 $\theta(o,\ y)$ 与 ρ中的重心向量共线，而 $d_X(o,\ y) \geq r$。

引理 7.6。 对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $r \geq 0$，使得若 $C, D \in U_o(y)\widetilde{\ }$ 满足 $U_o(y) \in \mathcal{U}(r)$，则 $d^\infty(C, D) \leq \varepsilon$。

证明。假设结论不成立。考虑序列 $U_n := U_{o,y_n} \in \mathsf{U}(n)\widetilde{\ }$以及 $C_n, D_n \in U_n$，使得对所有 n都有 $d^\infty(C_n, D_n) \geq \varepsilon$。由 $\mathsf{ch}(X^\infty)$ 的紧致性，取子序列后，不妨设存在 $C_* \in \mathsf{ch}(X^\infty)$，使得 $C_n \to_n C_*$ 在锥拓扑中收敛。令 $U = U_o(y_*)$ 为 C_*的一个开邻域。由收敛性，我们可以将 $n_0 \geq d(o, y_*)$ 取足够大，使得对所有 $n \geq n_0$都有 $C_n \in U_{o,y_*}$。特别地，对于 $n \geq n_0$，y_* 和 y_n 都属于 $Q(o, C_n)$。由于我们选择 y_* 和 y_n 使得 $\theta(o, y)$ 与 $\theta(o, y_n)$ 在 $Q(o, C_n)$ 中是重心的，测地线段$[o, y_n]$对所有 $n \geq n_0$都包含 $[o, y_*]$。由于对所有 n都有 $y_n \in Q(o, D_n)$，这意味着对于 $n \geq n_0$，我们也有 $y_* \in Q(o, D_n)$。由于这对 C_*的所有开邻域U_{o,y_*} 都成立，我们得到 D_n 也收敛到 C_*。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$这与以下事实矛盾：由于度量 d^∞ 是相容的，对所有 n 都有 $d^\infty(C_n, D_n) \geq \varepsilon$。□

对于 $r \geq 0$，定义$\mathcal{D}(r) \subseteq \mathsf{ch}(X^\infty) \times \mathsf{ch}(X^\infty)$ 为满足以下条件的室对 (C_1, C_2) 的集合：存在 $U \in \mathcal{U}(r)$，使得 $C_1,\ C_2 \in U$。作为

开集的并，$\mathcal{D}(r)$ 是 $\mathrm{ch}(X^\infty)\times\mathrm{ch}(X^\infty)$ 中的一个开集，且采用乘积拓扑。显然，它包含对角线。

推论 7.7。 集合族 $D(r)$（其中 $r\geq 0$）构成 $ch(X^\infty)$ 上的一个一致性基，并且与 $ch(X^\infty)$上的锥拓扑相容。特别地，关于乘积拓扑的对角线的任意开邻域 U 都包含于某个 $D(r)$中。

证明。 族 $\mathcal{D}(r)$ 满足定理 7.2 的条件。特别地，它在 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 上定义了一个一致性基。根据引理 7.6，该一致性与度量 d^∞ 相容，而该度量诱导的拓扑对应于 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 上的锥拓扑。□

对于一个仿射胞腔 $c\in\Sigma_o\overline{X}$，令 $\mathrm{Opp}_o(c)$ 表示具有基点 o 的闭扇区$\overline{Q(o,C)}$ 的并集，其中 $\Sigma_o(C)$ 与 c 在 $\Sigma_o X$中相对。令$y\in X$ 满足 $\theta(o,y)$ 为正则，并将 $c_y:=\Sigma_o(y)$ 表示为余留建筑 $\Sigma_o X$中对应于 y 在余留建筑上的投影的、位于 o的余留中的仿射胞腔。令

$$\mathcal{G}(y):=\{g\in G\mid g^{-1}o\in\overline{\mathrm{Opp}_o(c_y)}\}\subseteq G.$$

在图 1 中，我们展示了 $g\in\mathcal{G}(y)$ 的一种情形。

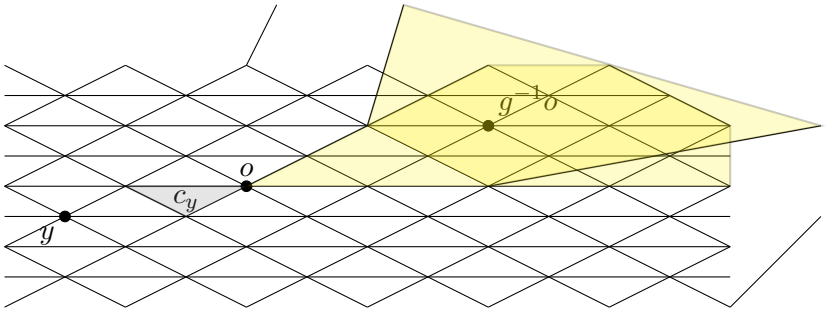

图 1. 仿射胞腔c_y 以及 $\mathrm{Opp}_o(c_y)$ 的一个子集（黄色）。

引理 7.8. 设 $y\neq o$ 是一个特殊顶点，且 $\theta(o,y)$ 与 $\mathfrak{a}^+$中的重心向量 ρ 共线。那么，$G(y)$ 在 $U_o(y)$上等度连续地作用。

证明。记 $r:=d(o,y)>0$。设 $g\in\mathrm{G}(y)$，并设 $C,D\in U_o(y)$。由于y 和 $g^{-1}o$ 属于以 o为基点的相对魏尔室的内部，因此有 $y\in Q(g^{-1}o,C)$ 和 $y\in Q(g^{-1}o,D)$。因此，我们有 $gy\in Q(o,gC)$ 和 $gy\in Q(o,gD)$。此外，$d_X(o,gy)=d_X(g^{-1}o,y)\geq d_X(o,y)$，因为 $\angle_o(y,g^{-1}o)\geq\pi/2$，并且根据余弦定理（注意，对于以 o为基点的魏尔扇区中的任意两点 w,z，都有 $\angle_o(w,z)\leq\pi/2$）。因此，gC 和 gD 都属于 $U_o(y)\in\mathrm{D}(r)$。由推论 7.7 即得证明。□

以下结果是众所周知的，但很有用。

引理 7.9。设 A 是球形建筑 Δ 中的一个公寓。那么，每个室 $C \in ch(\Delta)$ 都与 A 中的一个室相对。

证明。设 C 是 Δ中的一个室。根据 [Ron89，定理（A.19）], ，建筑Δ 与球面的花束同伦等价，球面的数量等于与 C相对的室的数量。考虑 Δ的几何实现。根据 [Ron89，定理（A.19）], 的证明，删除 Δ 中所有与 C 相对的室后得到的建筑 Δ' 是可缩的。特别地，它不可能包含公寓 A ，因为后者与球面同伦等价。□

对于特殊顶点 $o \in X$ 以及包含 o的公寓 A ，我们用 $\Sigma_o A$ 表示余留建筑 $\Sigma_o X$ 中的对应公寓，用 $\mathrm{ch}(\Sigma_o A)$ 表示其室。这些室与包含 o的 A 中的仿射胞腔一一对应。为简化记号，我们将二者等同起来。与本文其余部分一样，我们假设 X 是厚的，因此 o 可以取为一个厚点。

引理 7.10. 设 $o \in X$ 是一个厚的特殊顶点， A 是包含 o 的公寓。对于每个仿射胞腔 $c \in ch(\Sigma_o A)$，我们令 $y \in X$ 满足

(1) y 属于 c 的内部；*(2)* $\theta(o, y)$ 与 ρ 共线。

令 S 为这类 y 的有限集合。于是我们有

$$\bigcup_{y \in S} \mathcal{G}(y) = G.$$

证明。我们需要证明

$$\bigcup_{c \in \mathrm{ch}(\Sigma_o A)} \overline{\mathrm{Opp}_o(c)} = X.$$

根据引理 7.9，任意室 $c' \in \mathrm{ch}(\Sigma_o X)$ 都与 $\Sigma_o A$ 中的一个室相对。因此，对所有 $g \in G$，存在 $c \in \mathrm{ch}(\Sigma_o A)$，使得元素 $g^{-1}o$ 属于一个魏尔室 $Q(o, C)$ 的闭包，其中 $\Sigma_o C$ 与 c 是相对的仿射胞腔。特别地，对任意 $g \in G$，存在$y \in S$ ，满足 $g \in \mathcal{G}(y)$，结论得证。□

引理 7.11. 此外，假设 G 在 X 上的作用是一般型。那么，对于任意满足 $U_o(y) \cap \Lambda_{\mathcal{F}}(G) \neq \emptyset$ 的 $y \in X$ ，都有 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G) \subseteq G \cdot U_o(y)$。

证明. 根据定理 4.4， G 在 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 上的作用是极小的。特别地，对于 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 中任意非空开集 $U \subseteq \mathrm{ch}(X^\infty)$ 以及任意 $C \in \Lambda_{\mathcal{F}}(G)$，都存在满足 $gC \in U$ 的 $g \in G$。注意，根据假设，集合 $U_o(y) \cap \Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 中的非空开集，因此对于任意室$C \in \mathrm{ch}(X^\infty)$，都存在满足 $gC \in U_o(y)$ 的 $g \in G$ 。结论得证。□

命题 *7.4* 的证明。根据假设， $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 包含一个无穷远处的公寓 A^∞。记 A为相应的仿射公寓，并令 o为

A中的一个特殊顶点。按照引理 7.10，考虑有限集 S： 该集合由残余 o中属于 A的仿射胞腔内部的点 y 构成。由引理 7.10 可知,

$$\bigcup_{y\in S}\mathcal{G}(y)=G.$$

根据 A 的选取，对任意 $y\in S$，存在一个室 $C\in$ch(A^∞)，使得$C\in U_o(y)$。特别地，对每个 $y\in S$，都有 $U_o(y)\cap\Lambda_{\mathcal{F}}(G)\neq\emptyset$。由引理 7.11，得 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)\subseteq G\cdot U_o(y)$。由引理 7.8，$\mathcal{G}$ 在 $U_o(y)$ 上等度连续地作用。证毕。□

推论 7.12。设 X 是一个厚且局部有限的仿射建筑，且G 是一个离散可数群，通过自同构在 X 上真且余紧地作用。那么， G 在 $ch(X^\infty)$ 上的作用存在等度连续分解。

证明。由命题 6.1， G 是一般型，且 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)=$ch($X^\infty$)。因此满足命题 7.4 的假设。□

下面的结果表明，假设 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 在无穷远处存在一个公寓，等价于存在一个室 $C\in\Lambda^{\pm}_{\mathcal{F}}(G)$，它相对于舒伯特胞腔是非回避的。

引理 7.13. 设 G 是仿射建筑 X中的一个一般型群。设 $g\in G$ 是一个强正则双曲元素， $C^{\pm}$ 是它在无穷远处的吸引室和排斥室。记 $A^{\pm}$ 为它在无穷远处唯一的不变公寓。若对某个 $w\in W_{fin}$，旗极限集 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 与舒伯特胞腔相交

$$Opp_w(C^-)=\{C\in ch(X^\infty)\mid d_{W_{fin}}(C^-,C)=w\},$$

则 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 包含唯一的室 $C_w\in A^{\pm}$，满足 $d_{W_{fin}}(C^-,C_w)=w$。特别地，若对每个 $w\in W_{fin}$，

$$\Lambda_{\mathcal{F}}(G)\cap Opp_w(C^-)\neq\emptyset,$$

则 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 包含 $A^{\pm}$。

证明。设 $C\in\Lambda_{\mathcal{F}}(G)\cap$Opp$_w(C^-)$。于是 $g^nC\to C_w$，因为 $n\to\infty$。由于 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 是闭的且 G-不变， C_w 必属于 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$。□

7.3. **平均近端性**。

定理 *1.8* 的证明。引理 7.13 保证，如果存在一个相对于舒伯特胞腔非回避的室$C\in\Lambda^{\pm}_{\mathcal{F}}(G)$，那么就存在一个无穷远公寓，其中所有的室都属于 $\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$。根据命题 3.8 给出的判据，该结果便由推论 6.6（提供强近端性）以及命题 7.4 推出；命题 7.4 断言，$G\curvearrowright\Lambda_{\mathcal{F}}(G)$ 存在一个等度连续分解。□

8. 格的泊松边界

设 μ 是离散可数群G上的一个容许概率测度。若存在一个距离函数 $|\cdot|: G \to \mathbb{R}_+$，定义在 G 上，且与某个词度量准等距，则称 μ 具有有限一阶对数矩，其中

$$\sum_{g\in G} \log|g|\mu(g) < \infty.$$

请注意，具有有限对数矩与所选词度量无关。μ 的熵 定义为

$$H(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{g\in G} \mu^{*n}(g) \log \mu^{*n}(g).$$

我们用 $\check{}\mu$ 表示 G 上由 $\check{}\mu(g) = \mu(g^{-1})$ 定义的概率测度：它仍然是可容许测度。

现在设 X 是一个厚且局部有限的仿射建筑，G 是一个通过自同构在 X 上余紧作用的离散可数群。在 G 上考虑一个由此恰当且余紧作用诱导的距离函数。设 μ 是 G 上的一个容许概率测度。根据定理 1.8，在无穷远处的室集合上存在唯一的 μ-平稳测度，我们记为 ν。同样，在无穷远处的室集合上存在唯一的 $\check{}\mu$-平稳测度，我们记为 $\check{}\nu$。我们将 (B, ν_B) 称为 (G, μ)-泊松–富斯滕伯格边界，并将 $(\check{}B, \nu_{\check{}B})$ 称为 $(G, \check{}\mu)$-泊松–富斯滕伯格边界，定义见第 3.2 节。

本节将证明，若 μ 具有有限一阶对数矩，则 $(\mathrm{ch}(X^\infty), \nu)$ 是 (G, μ) 的泊松–富斯滕伯格边界的紧致可度量模型。这将由 Kaimanovich 提出的条带判据推出，现回顾如下。

定理 8.1 ([Kai00, 定理 6.5])**.** 设 μ 是群 G 上具有有限一阶对数矩和有限熵的概率测度。设 (B, ν) 是一个 (G, μ)-边界，且 $(\check{}B, \check{}\nu)$ 是一个 $(G, \check{}\mu)$-边界。假设存在一个可测的 G-等变映射

$$S : (b, \check{b}) \in B \times \check{B} \mapsto S(b, \check{b}) \subseteq G.$$

若对 $\nu \times \check{}\nu$-几乎所有的点对 $(b, \check{}b)$，条带 $S(b, \check{}b)$ 具有多项式增长，则 (B, ν) 和 $(\check{}B, \check{}\nu)$ 分别实现 (G, μ) 和 $(G, \check{}\mu)$ 的泊松–富斯滕伯格边界。

本节的主要结果是定理 1.9，现为方便读者重述如下。

定理 8.2。设 X 是一个厚且局部有限的仿射建筑，且 G 是一个离散可数群，它通过自同构在 X 上真且余紧地作用。设 μ 是 G 上的一个容许概率测度，并设 ν 是定理 *1.8* 给出的 $ch(X^\infty)$ 上唯一的 μ-平稳测度。

那么，$(ch(X^\infty)\ \nu)$ 是 (G,μ) 的泊松–富斯滕伯格边界的一个紧模型。

我们定义

$$\mathcal{O} := \{(C_1, C_2) \in \mathrm{ch}(X^\infty)^2 \mid C_1 \text{ opposite } C_2\}$$

为无穷远处相对室对的集合。根据推论 2.5 和命题 2.6，它是 $\mathrm{ch}(X^\infty)^2$ 的一个非空开子集（相对于乘积拓扑），并且在 $\mathrm{Aut}(X)$ 作用下不变。

我们首先证明 $\mathcal{O}$ 具有全 $\nu\otimes\check{}\nu$-测度。

引理 8.3。一对室 $(C_1, C_2) \in ch(X^\infty)^2$ 几乎处处是 $\nu\otimes\check{}\nu$-对踵的。

证明。首先，已知 ν 的支撑是一个闭的、G-不变集，因此根据命题 6.1 所给出的 G 在 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 上作用的极小性，ν 具有全支撑，即 $\mathrm{ch}(X^\infty)$ 中的任意非空开集 $O \subseteq$ 都具有正的 ν-测度。测度 $\check{}\nu$ 也同样如此。根据 Kaimanovich 的经典定理 [Kai03]，G 在 $(B\times\check{}B, \nu_B\otimes\check{}\nu\check{}_B)$ 上的作用是遍历的。根据定理 1.8，空间 $(\mathrm{ch}(X^\infty)\ \nu)$ 是一个 (G,μ)-边界，因此根据定理 3.9，它是 (B,ν_B) 的一个可测 G-因子；相应地，$(\mathrm{ch}(X^\infty), \check{}\nu)$ 是 $(\check{}B,\nu\check{}_B)$ 的一个可测G-因子。因此，$(\mathrm{ch}(X^\infty)^2, \nu\otimes\nu)$ 是 $(B\times\check{}B, \nu_B\otimes\nu\check{}_B)$ 的一个可测 G-因子。特别地，通过一个简单的论证可知，这也意味着 G 在 $(\mathrm{ch}(X^\infty)^2, \nu\otimes\check{}\nu)$ 上的作用同样是遍历的。由于 ν 和 $\check{}\nu$ 具有全支撑，空间 O 具有正的 $\nu\otimes\check{}\nu$-测度。由于它在 G 作用下不变，根据遍历性可知其具有全测度。□

我们定义映射 $\mathcal{A}$：$(C_1, C_2) \in \mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(C_1, C_2) \subseteq X$，它将一对相对室对应到它们在 X 中张成的唯一公寓。

定理 *8.2* 的证明。由 G 对 X的作用具有余紧性，取一个有限的顶点族 $(x_1, \ldots, x_p)$，它们代表 X 的顶点集中的 G 轨道。若顶点 $x \in X$ 属于轨道 $G\cdot x_j$，则称其类型为 t_j。考虑由下式定义的集合 $\mathcal{O}_j$

$$\mathcal{O}_j := \{(C_1, C_2) \in \mathcal{O} \mid \mathcal{A}(C_1, C_2) \text{ contains a vertex of type } t_j\}.$$

容易看出，任意 $\mathcal{O}_j$ 都是开集，因此是 $\nu\otimes\check{}\nu$-可测的。事实上，固定一对无穷远处的相对室 $(C_1, C_2) \in \mathrm{ch}(X^\infty)^2$，使得$\mathcal{A}(C_1, C_2)$包含一个类型为 t_j的顶点 o。设 $y_1, y_2 \neq o$ 分别是测地射线 $[o, \xi_{C_1})$ 和 $[o, \xi_{C_2})$ 上的特殊顶点，其中 ξ_{C_i} 表示 C_i的重心，$i = 1, 2$。则任意一对 $(D_1, D_2) \in U_o(y_1) \times U_o(y_2)$ 都属于 $\mathcal{O}_j$。

我们有 $\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{O}_j$，因此存在 $j \in \{1, \ldots, p\}$，使得 $\mathcal{O}_j$具有正的 $\nu\otimes\check{}\nu$-测度。不失一般性，假设 $j = 1$。由于集合 $\mathcal{O}_j$ 是 G-不变的，根据 G-作用在 $(\mathrm{ch}(X^\infty)^2, \nu\otimes\nu)$ 上的遍历性可知，它必有满 $\nu\otimes\check{}\nu$-测度。

对于任意的 $(C_1, C_2) \in \mathcal{O}_1$,，定义条带 $S'(C_1, C_2)$ 为所有陪集 $g\,\mathrm{Stab}_G(x_1)$ 的并，其中 g 满足 $gx_1 \in \mathcal{A}(C_1, C_2)$。由于

$\mathcal{A}(C_1, C_2)$ 中顶点的数量呈多项式增长（它与某个 $\mathbb{R}^d$ 等距），相对于由余紧作用诱导的 G 上的词度量，它也呈多项式增长。现在，对于任意这样的 g，集合 $g\mathrm{Stab}_G(x_1) \subseteq G$ 根据作用的适当性是有限的，因此 $S'(C_1, C_2)$ 呈多项式增长。证明由定理 8.1 得出。□

附录 A. 一般位置的房间三元组

设 k 是一个域， $E = (e_1, e_2, e_3)$ 是与向量空间 k^3 相关联的标准基。设 $G = \mathrm{SL}_3(k)$，并设 $P, P' < G$ 是分别对应于完全旗 $\{0\} \subset e_1 \subset e_1, e_2 \subset k^3$ 和 $\{0\} \subset e_3 \subset e_2, e_3 \subset k^3$ 的极小抛物子群。在坐标表示下，它们对应于 G 中由以下条件定义的子群

$$P = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid aei = 1\}, \text{ and } P' = \{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} \mid aei = 1\}.$$

注意，由于 $P \cap P'$ 是一个极大分裂环面， $T := \{\mathrm{Diag}(a, e, (ae)^{-1}) \mid a, e \in k\}$，因此 P 和 P' 是横截的，并对应于 G 的 Tits 建筑中的相对室。

令 $v = e_1 + e_2 + e_3$，并对 $t \in k$，考虑由下式定义的线性平面

$$V_t := \{-xt + (1+t)y - z = 0 \mid x, y, z \in k\}.$$

注意，对于所有 t、 $v \in V_t$。考虑抛物子群 $P^t := \mathrm{Stab}\{\{0\} \subset \langle v \rangle \subset V_t \subset k^3\}$。

命题 A.1。对于所有 $t \neq 0$、-1，抛物子群 P、$P\prime$和 P^t处于一般位置。

我们对 $t = 1$ 作出具体计算，其中 $V_1 = \{(2y - z, \ y, \ z) \mid y, \ z \in k\}$。

然后容易计算得到，向量 $(2, \ 1, \ 0)$ 也属于 V_1，因此若矩阵

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

属于 P^1，则

$$\begin{cases} a + b + c & = d + e + f = g + h + i \\ 2a + b & = 2(2d + e) - (2g + h). \end{cases}$$

特别地，交集 $P \cap P^1$ 是该群

$$T_1 := \{A_{a,e} := \begin{pmatrix} a & 2e - 2a & (ae)^{-1} - 2e + a \\ 0 & e & (ae)^{-1} - e \\ 0 & 0 & (ae)^{-1} \end{pmatrix} \mid a, e \in k\}.$$

注记A.2。注意，$(a, \ e) \mapsto A_{a, \ e}$ 是从自由阿贝尔群 k^2 到 T_1的一个态射，因此 T_1 是一个极大分裂环面。

注意，与交集 $P \cap P'$ 对应的极大分裂环面稳定了与图2所示复形对应的公寓：

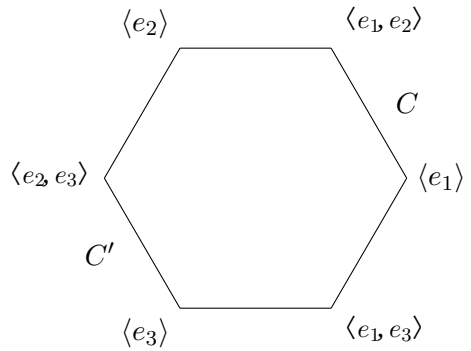

图2. 球形建筑中与 T 对应的公寓 G

我们突出显示了分别由 P和 P' 稳定的室 C 和 C'。注意，与交集 $P \cap P^1$ 对应的环面 T_1 既不稳定部分旗$\{0\} \subset \langle e_2 \rangle \subset k^3$，也不稳定部分旗 $\{0\} \subset \langle e_1, e_3 \rangle \subset k^3$，因此，与 T 和 T_1 相关的公寓的交集恰好是室 C。

通过重复类似的计算，可以证明 $P_\prime$和 P^1 也彼此横截，并且它们的交包含极大分裂环面

$$T_1 := \{B_{a,e} := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a-e & e & 0 \\ a-2e+(ae)^{-1} & 2e-2(ae)^{-1} & (ae)^{-1} \end{pmatrix} \mid a, e \in k\}.$$

在图2所示公寓中的单形中，该环面只稳定与旗 $\{0\} \subset \langle e_2 \rangle \subset \langle e_2, e_3 \rangle \subset k^3$相关的室。

注意，对于 $t = 0$， P^t 稳定 e_1；而对于 $t = -1$， P_t 稳定 e_2。关于 $t \neq 0, -1$ 的一般论证归结为证明 V_t 不包含这些直线。在这一特例中，我们得到了一族具体的不可数个处于一般位置的三元组。此类族的存在性由命题 5.6给出。

推论 A.3。 存在一族不可数个极小抛物子群 P^t，使得 $(P, P_\prime T^t)$ 处于一般位置。否则，与部分旗 $\{0\} \subset \langle e_2 \rangle \subset k^3$ 或 $\{0\} \subset \langle e_1, e_3 \rangle \subset k^3$ 相对应的抛物子群的顶点将会被稳定。

参考文献

[AB08] Peter Abramenko 和 Kenneth S. Brown。建筑，数学研究生教材丛书第 248 卷。Springer，纽约，2008 年。理论与应用。

[ADR00] C. Anantharaman-Delaroche 和 J. Renault。《可 amen 群胚》，数学教学专著丛书第 36 卷 *[数学教学专著]*。数学教学，日内瓦，2000 年。附 Georges Skandalis 撰写的序言及 E. Germain 撰写的附录 B。[AMS95] H. Abels、G. A. Margulis 和 G. A. So˘ifer。含有近端线性映射的半群。《以色列数学杂志》，91(1-3):1–30，1995 年。[BCdlH94] M. Bekka、M. Cowling 和 P. de la Harpe。若干约化 C^* 80 117 134, 代数为单代数 1994 的群。高等科学研究所数学出版物，( ): – 。[BCFS24] Uri Bader、Pierre-Emmanuel Caprace、Alex Furman 和 Alessandro Sisto。高秩格的双曲作用源自秩一因子，2024 年。arXiv:2206.06431。[BCL19] Uri Bader、Pierre-Emmanuel Caprace 和 Jean Lécureux。仿射建筑中格的线性性与奇异 Cartan 流的遍历性。《美国数学会杂志》，32(2):491–562，2019 年。[Ben97] Y. Benoist。线性群的渐近性质。《几何与泛函分析》，7(1):1–47，1997 年。[BFL23] Uri Bader、Alex Furman 和 Jean Lécureux。作用于 $\tilde{A}_2$建筑上的群的正规子群定理，2023 年。arXiv:2310.13472。[BG03] Emmanuel Breuillard 和 Tsachik Gelander。李群中稠密自由子群的问题。《代数学杂志》，261(2):448–467，2003 年。[BH99] Martin R. Bridson 和 André Haefliger。《非正曲率度量空间》，数学科学基础丛书第 319 卷 *[数学科学基本原理]*。施普林格出版社，柏林，1999 年。[BKKO17] Emmanuel Breuillard、Mehrdad Kalantar、Matthew Kennedy 和 Narutaka Oza wa。离散群的 C^*-单性与唯一迹性质。《高等科学研究所数学出版物》，126:35–71，2017 年。[BQ16] Yves Benoist 和 Jean-François Quint。《约化群上的随机游走》，数学及其边界领域成果第 62 卷，第 3 辑：《现代数学综述丛书》 *[数学及其相关领域成果，第 3 辑：《现代数学综述丛书》]*。Springer，尚贝里，2016 年。[CC15] Pierre-Emmanuel Caprace 和 Corina Ciobotaru。欧几里得建筑上的 Gelfand 对与强传递性。《遍历理论与动力系统》，35(4):1056–1078，2015 年。[Cio24] Corina Ciobotaru。仿射建筑上强 i-正则双曲元素的动力学，2024 年。arXiv:2407.10320。[CL11] Pierre-Emmanuel Caprace 和 Jean Lécureux。建筑的组合紧化与群论紧化。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，61(2):619–672，2011 年。[CMR20] Corina Ciobotaru、Bernhard Mühlherr 和 Guy Rousseau。马修尔上的锥拓扑。《高等几何》，20(1):1–28，2020 年。附录由Auguste Hébert 撰写。[dlH07] Pierre de la Harpe。群的约化 C^*代数的单性。《伦敦数学会通报》，39(1):1–26，2007 年。[Eng68] R. Engelking。《一般拓扑学纲要》。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹；PWN——波兰科学出版社，华沙；Interscience Publishers Division John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1968 年。由 K. Sieklucki 从波兰语译出。

[FG06] Vladimir Fock 和 Alexander Goncharov. 局部系统模空间与高阶 Teichmüller 理论. 《高等科学研究所数学出版物》, (103):1–211, 2006. [Fur63] Harry Furstenberg. 非交换随机乘积. 美国数学会汇刊, 108(3):377–428, 1963. [Fur73] Harry Furstenberg. 齐性空间上的边界理论与随机过程. 载于《齐性空间上的调和分析》(《纯数学研讨会论文集》第 XXVI 卷，威廉姆斯学院，美国马萨诸塞州威廉斯敦，1972)，1973. [GKVMW12] Theo Grundhöfer, Linus Kramer, Hendrik Van Maldeghem 和 Richard M. Weiss. 紧致全不连通 Moufang 建筑. 东北数学杂志（第二辑）, 64(3):333–360, 2012. [Gla76] Shmuel Glasner. 近端流，数学讲义第 517 卷. 施普林格出版社，柏林—纽约，1976. [GM89] I. Ya. Gol’dshe˘id 和 G. A. Margulis. 随机矩阵乘积的 Lyapunov 指数. 《数学科学进展》, 44(5(269)):13–60, 1989. [HHL23] Camille Horbez, Jingyin Huang 和 Jean Lécureux. 非正曲率空间中的适当近端性. 《美国数学杂志》, 145(5):1327–1364, 2023. [JR00] Paul Jolissaint 和 Guyan Robertson. 简单纯无限 C^*-代数与 n充满作用. 《泛函分析杂志》, 175(1):197–213, 2000. [Kai00] Vadim A. Kaimanovich. 具有双曲性质的群的泊松公式. 《数学年刊》（第二辑）, 152(3), 2000. [Kai03] Vadim A. Kaimanovich. 泊松边界的双重遍历性及其在有界上同调中的应用. 《几何与泛函分析》, 13 861, 2003 4 852( ): – .[Ken20] Matthew Kennedy. C^*-简约性的内蕴刻画. 《高等师范学院科学年刊》（第四辑）, 53(5):1105–1119, 2020. [KK17] Mehrdad Kalantar 和 Matthew Kennedy. 离散群约化 C^* 代数的边界. 《纯粹与应用数学杂志》, 727:247–267, 2017. [KW14] Linus Kramer 和 Richard M. Weiss. 欧几里得建筑的粗等价. 《数学进展》, 253:1–49, 2014. 附录由 Jeroen Schillewaert 和 Koen Struyve 撰写. [LBLV26] Corentin Le Bars, Elyashev Leibtag 和 Itamar Vigdorovich. 秩 2 群的动力学及其自无私约化 C^*代数，2026. 准备中. [Léc10] Jean Lécureux. 建筑边界上作用的可 amen 性. 《国际数学研究论文集》IMRN, (17):3265–3302, 2010. [Mar91] G. A. Margulis. 半单李群的离散子群，数学及其边界领域成果（第三辑）第 17 卷 *[数学及其相关领域成果（第三辑）]*. 施普林格出版社，柏林，1991. [NS13] Amos Nevo 和 Michah Sageev. CAT(0) 方复形群的泊松边界. 《群、几何与动力学》, 7(3):653–695, 2013. [Par00] Anne Parreau. 仿射建筑：由范数构造及等距变换研究. 载于《晶体群及其推广》（科特赖克，1999），《当代数学》第 262 卷，第 263–302 页. 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000. [Par06] James Parkinson. 仿射建筑上的球谐分析. 《数学杂志》, 253(3):571–606, 2006. [Par19] Anne Parreau. 关于 A_2建筑中的理想室三元组. 《创新关联几何》, 17(2):109–140, 2019. [Pau14] Frédéric Paulin. 群与几何，2014. 巴黎萨克雷大学奥赛数学系硕士二年级课程讲义. [Poz09] Tal Poznansky. 约化 C^* 代数为简单代数的线性群的刻画，2009. arXiv:0812.2486.

[Qui02] J.-F. Quint. 局部域上约化群离散子群的极限锥. 变换群, 7(3):247–266, 2002. [Qui 05] J.-F. Quint. 高秩凸余紧群. 《几何专论》, 113:1–19, 2005. [Ron89] Mark Ronan. 建筑物讲义，《数学展望》第 7 卷。《数学展望》. Academic Press, Inc., 美国马萨诸塞州波士顿，1989.[RS96] Guyan Robertson 和 Tim Steger. 由三角建筑边界上的群作用产生的 C^* 代数. 《伦敦数学会会刊（第三辑）》, 72(3):613–637, 1996. [RT21] Bertrand Rémy 和 Bartosz Trojan. 仿射建筑的 Martin 紧化，2021. arXiv:2105.14807.