arXiv:2601.13093v1 [math.AC] 19 Jan 2026

准极大理想与环扩张

GABRIEL PICAVET* 与 MARTINE PICAVET-L'HERMITTE

Abstract. Alan 等人定义并研究了准极大理想。我们补充了对这类理想的全面刻画，并引入次极大理想。有限极小扩张$R \subset S$ 的导子在 S中是准极大理想。这使我们得以给出这类扩张的一种新刻画。我们还考察了准极大理想与 Badawi 2-吸收理想之间的联系。

1. Introduction and Notation

本文篇幅较长，因此我们先作简要介绍。读者可在相应章节中查阅所有未作解释的术语。我们考虑交换含幺环范畴。若 $R \subseteq S$是一个（环）扩张，则$([R, S], \subseteq)$表示 S的所有R-子代数构成的格。

在 [1, 定义 1], 中引入了准极大理想的概念：环 R 的真理想 I （即不同于 R）称为准极大理想，若对任意 $a \in R \setminus I$， $I + Ra = R$ 或 $I + Ra$是 R的极大理想。特别地， [1, 命题 3]表明准极大理想有三种类型。

在第 2 节中，我们给出了理想成为准极大的许多等价条件。定理给出了准极大理想的一种刻画2.9，该定理指出，非极大理想 I 属于环 R，当且仅当 I 仅严格包含于极大理想中，换言之， I 是次极大的。

第 3 节致力于研究准极大理想在扩张中或通过环态射所表现出的性质。设 $f : R \to S$ 是一个环态射。如果 I 是 R 的准极大理想，或者 J 是 S 的准极大理想，我们给出使 $f(I)$ 或 $f^{-1}(J)$ 成为准极大理想的条件。

2010数学主题分类。 主要分类：13A15、13B02、13B21；次要分类：13B30。关键词和短语。 极小扩张、扩张的导子、准极大、次极大、2-吸收、准素、原始理想、整扩张、覆盖理想、模的支集。*通讯作者。

我们在第 4 节考察极小扩张，并研究它们与准极大理想之间的联系。本节篇幅较长，因为我们考察了准极大理想和极小扩张的不同类型。在定理 4.9 中，我们得到：如果 $R \subset S$ 是一个有限极小扩张，那么该扩张的导子是 S 的一个与极小扩张 $R \subset S$同类型的准极大理想。该定理与定理 4.11具有某种逆命题关系。

在第5节中，我们考察准极大理想与2-吸收理想之间的联系。事实上，[1, 定理 1]表明，准极大理想是2-吸收理想；这一概念由 Badawi 在[5]中引入。由定理 5.2，在附加假设下，我们得到2-吸收理想为准极大理想的逆命题。

2-吸收理想是原始理想，因此准极大理想也是原始理想。本文最后一节是附录，使用了第一作者在 [23] 中引入、并特别针对准极大理想加以调整的饱和乘法集。

（半）局部环是具有（有限多个）一个极大理想的环。现在，介绍环的一些记号 R：Spec(R) 和 Max(R) 分别表示环 R 的素理想集和极大理想集，而 t(R) 表示 R的全商环。我们用 QMax(R) 表示 R 的准极大理想集。对于扩张 $R \subseteq S$ 和 R 的理想 I，记 $\mathrm{V}_S(I) := \{P \in \mathrm{Spec}(S) \mid I \subseteq P\}$，以及 $\mathrm{D}_S(I) := \mathrm{Spec}(S) \setminus \mathrm{V}_S(I)$。$E$ 的 R-模的支集为 $\mathrm{Supp}_R(E) := \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid E_P \neq 0\}$，并令 $\mathrm{MSupp}_R(E) := \mathrm{Supp}_R(E) \cap \mathrm{Max}(R)$。我们用 $\mathrm{L}_R(E)$ 表示 E 的长度。当 $R \subseteq S$ 是扩张时，对于每个 $T \in [R, S]$，记 $\mathrm{Supp}(T/R) := \mathrm{Supp}_R(T/R)$，以及 $\mathrm{Supp}(S/T) := \mathrm{Supp}_R(S/T)$，除非另有说明。$R$ 的零因子集记为 Z(R)，U(R) 是 R 的单位集，Nil(R) 是 R 的幂零元集，而 J(R) 是其 Jacobson 根。对于 R 的理想 I，I 的根记为 $\sqrt[R]{I}$（若无歧义，也记为 $\sqrt{I}$）；如果包含 I（包括 I）的 R 的真理想集是有限的，则其基数记为 o(I)。如果 R 具有有限多个理想，则用 $\mathcal{O}(R)$ 表示 R 的真理想集的基数（实际上，$\mathcal{O}(R) =$o(0)）。我们回顾一下，环 R 是J-正则的，如果 R/J(R) 是正则的。最后，($R : S$) 是扩张 $R \subseteq S$ 的导子。

扩张 $R \subseteq S$ 若自然映射 $\mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 是单射，则称为*i*-扩张。整扩张 $R \subseteq S$ 若其所有剩余扩张都是同构（分别。；并且是*i*-扩张），则称为亚整 [25]，（分别称为次整 [35]）。

最后，$|X|$ 表示集合 X的基数，$\subset$ 表示真包含；对于正整数 n，我们定义 $\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$。如果 R和 S是

两个同构环，我们记作 $R \cong S$。环R 的特征记为 c(R)。

2. Properties of quasi-maximal ideals

设 I 和 J 是环 R的两个理想。根据 [16, D´efinition，第 10-02], 页中的定义，我们称 J 覆盖 I，记作 $I \prec J$ （或 $J \succ I$），如果 $I \subset J$ 且在 I 与 J 之间不存在严格包含的理想。推论 [36, 1 和 2，第 237]页，对这一性质作了刻画。

命题 2.1。 对于 素谱(R)中的任意 $P \subset Q$，则 $Q \not\succ P$。

证明。 若存在 $P \subset Q$ 属于 Spec(R)，使得 $Q \succ P$，根据 [36,推论 1，第 237], 页，存在某个 $M \in$极大理想(R)，使得 $MQ \subseteq P$。这意味着，要么 $M \subseteq P$，因此 $P = M$，这与$P \subset Q$矛盾；要么 $Q \subseteq P$，出于同样的原因再次产生矛盾。□

我们回顾准极大理想的三种类型:

命题 2.2。 [1, 命题 3] 环R 的准极大理想 I 满足以下互斥性质之一:

(1) I 是 R的极大理想。(2) I 是 R的两个（不同的）极大理想的交。
(3) 存在 R 的极大理想 M，使得 I 是 M-准素理想，并满足 $M^2 \subseteq I \subset M$。

现在，正如我们将在第 4 节中看到的，极小整扩张的导子恰好具有准极大理想的三种类型之一。这促使我们给出下一个定义，因为 [1, 命题3] 具有某种逆命题。为了明确所讨论的准极大理想属于哪种类型，我们将使用与相应极小整扩张相同的名称来称呼它们。关于这两个概念之间的联系，请参见第 4 节。

定义 2.3. 环 R 的理想 I 称为
(1) 若 $I \in$Max(R)，则称为惰性；(2) 若 I 是环 R的两个不同极大理想的交，则称为分解；(3) 若存在 $M \in$ Max(R)，使得 I 是 M-准素的，$M^2 \subseteq I \subset M$，且对任意 $a \in M \setminus I$都有 $M = I + Ra$，则称为分歧，从而 $M = \sqrt{I}$。

–

在讨论不同类型的证明中，我们常常省略惰性情形，因为它们显而易见。

定理2.4 给出了一个理想为准极大理想的许多等价表述。它通过给出逆命题完善了 [1, 命题 3]，并且

解释了定义 2.3 为何刻画了拟极大理想。更准确地说，当I 在 R中是惰性（分别为分歧、分解）时，我们记作 $I \in$Q$_{\mathrm{i}}$Max(R)（分别记作 Q$_{\mathrm{r}}$Max(R)、Q$_{\mathrm{d}}$Max(R)）。事实上，Q$_{\mathrm{i}}$Max(R) =Max(R)。在第5节中，定理 5.2 利用 Badawi 在 [5]中引入的 2-吸收理想给出了另一个等价条件。若 $R \subseteq S$ 是一个扩张，且 $I \in$QMax(R)、 $J \in$ QMax(S)，则称 I 与 J 同型，当且仅当它们具有相同的类型。

定理 2.4. 对于环 R 的真理想I，下列陈述等价，并且蕴含 $\mathrm{V}_R(I) \subseteq$极大理想($R$)：

(1) $I \in$QMax(R)。（2） R/I 的任意真理想都属于 QMax(R/I)。（3） $0 \in$ QMax(R/I)。（4） $1 \leq \mathrm{L}_R(R/I) \leq 2$ 且 $|\mathrm{V}^{R/I}(0)| \leq 2$。（5） $\mathcal{O}(R/I) \leq 3$，其中 $\mathcal{O}(R/I) = 3$ 当且仅当 $|$极大理想(R/I)$| = 2$。（6）o(I) ≤ 3，其中 o(I) $= 3$ 当且仅当 $|\mathrm{V}_R(I) \cap$ 极大理想(R)$| = 2$。（7） $I \in$ Q$_{\mathrm{i}}$Max(R) $\cup$Q$_{\mathrm{r}}$Max(R) $\cup$ Q$_{\mathrm{d}}$Max(R)。

证明。 (1)⇒(2) 由 [1, 推论 2] 得出。

(2)⇒(3)：显然。

(3)⇒(4)：我们考虑 $0 \in$QMax(R/I) 的三种情形。

$0 \in$ Q$_{\mathrm{i}}$Max(R/I)。于是， R/I 是一个域，且 L$_R$(R/I) $=1$，并且$|\mathrm{V}^{R/I}$(0)$| = 1$。

$0 \in$ Q$_{\mathrm{d}}$Max(R/I)。于是 0 := $M_1 \cap M_2$，是两个（不同）极大理想的交 M_1， M_2 属于 R/I，因此 $|\mathrm{V}^{R/I}(0)| = 2$，且 L$_R$($R/I$) $= 2$，因为 L$_R$(R/M_i) $= 1$，并且 $M_i \succ 0$，由 $i \in \mathbb{N}_2$ 的 Remark [1, 得 2]。

$0 \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(R/I)。设 $M \in$ Max(R/I) 满足 $M^2 = 0 \subset M$，因此 $|\mathrm{V}^{R/I}(0)| = 1$，因为根据 [1,Proposition 3]，0 是 M-准素的。此外，根据 [36, Corollary 2，L$_R$(R/M) $= 1$，且 $M \succ 0$，p.237]，因为对于任意 $a \in M \setminus \{0\}$，$M = (R/I)a$。于是，L$_R$(R/I) $= 2$。

(4)⇒(5)：我们有 $1 \leq \mathrm{L}_R(R/I) \leq 2$ 和 $|\mathrm{V}^{R/I}(0)| \leq 2$。

如果 L$_R$(R/I) $= 1$，那么 0 是 R/I 的唯一真理想，因此$\mathcal{O}(R/I) = 1$。

若 L$_R$(R/I) $= 2$ 且 $|\mathrm{V}^{R/I}(0)| = 2$，我们断言 R/I 有两个极大理想 M_1 和 M_2。否则，存在一个非极大素理想 P，它包含于某个极大理想 M 中。在这种情况下，我们有链 $0 \subseteq P \subset M \subset R/I$，从而得到 $P = 0$，因为 L$_R$(R/I) $= 2$；由命题 2.1 可知这会导致矛盾，因为此时 $M \succ P$。于是，$0 = M_1 \cap M_2$，这是因为 L$_R$(R/I) $= 2$。因此，0、M_1 和 M_2 是 R/I 的仅有的真理想，并且 $\mathcal{O}(R/I) = 3$，其中 $|$Max(R/I)$| = 2$。反过来，若 $|$Max(R/I)$| = 2$，则可知 R/I 有两个极大理想，于是问题归结为前一种情况，因此 $\mathcal{O}(R/I) = 3$。

最后，$\mathrm{L}_R(R/I) = 2$ 且 $|\mathrm{V}^{R/I}(0)| = 1$ 表明，0 和 M 是 R/I 仅有的真理想，这是由链 $0 \subset M \subset R$可知的。于是，$\mathcal{O}(R/I) = 2$。

(5)⇒(6)：显然。

(6)⇒(7)：假设 $\mathrm{o}(I) \leq 3$ 当且仅当 $\mathrm{o}(I) = 3$，且 $|\mathrm{V}_R(I) \cap$极大理想$(R)| = 2$。

若 $\mathrm{o}(I) = 1$，则 $I \in \mathrm{Q_i}$极大理想(R)。

若 $\mathrm{o}(I) = 2$，则仅有一个真理想 M 满足 $I \subset M$，因此 $M \in$ 极大理想(R)。令 $a \in M \setminus I$，则 $I + Ra$ 是 R 的一个理想，且满足 $I \subset I + Ra \subseteq M$。因此，$I + Ra = M$是包含 I且严格大于它的 R 的唯一真理想。取 $R' := R/I$，$M' := M/I$，并令 a 为 a 在 R'中的剩余类。则 R' 是一个局部环，其中 $\mathcal{O}(R') = 2$，且极大理想 $M' = R'a$ 是一个有限生成的 R'- 模。这意味着 $M'^2 = 0$ $(*)$ 或 $M'^2 = M'$ $(**)$。在情形 $(**)$ 下，由中山引理可得 $M' = 0$，即 $I = M$，矛盾。因此只有情形 $(*)$ 成立，这意味着 $a^2 \in I$，$M^2 \subseteq I \subset M$，且 I是一个 M-准素理想。综上，$I \in \mathrm{Q_r}$极大理想(R)。

设 $\mathrm{o}(I) = 3$，使得 I 包含于两个不同的极大理想M_1 和 M_2 中，且 I，M_1 和 M_2 是包含 I 的 R的唯一真理想，因此 $I = M_1 \cap M_2 \in \mathrm{Q_d}Max(R)$。

(7) ⇒(1)：若 $I \in \mathrm{Q_r}$Max(R)，则只有一个满足 $I \subset M$的真理想 M。设 $a \in M \setminus I$，使得 $I + Ra$ 是 R 的一个理想，且$I \subset I + Ra \subseteq M$。因此，$I + Ra = M$是$R$ 中严格包含 I 和 M 的唯一真理想，故为极大理想。若 $a \in R \setminus M$，则Ra 和 M 互素，因此 Ra 和 M^2 也互素；根据准极大理想的定义，这意味着 $I + Ra = R$ 和 $I \in \mathrm{QMax}(R)$。

若 $I \in \mathrm{Q_d}\mathrm{Max}(R)$，则 $I = M_1 \cap M_2$。由 [1, 注 2]可推知 $I \in \mathrm{QMax}(R)$。

若 $I \in \mathrm{Q_i}$Max(R)，则由 [1, 命题 3] 可得 $I \in \mathrm{QMax}(R)$，因为我们已经看到 $\mathrm{Q_i}$Max(R) =Max(R)。

（6）⇒（7）的证明表明，对于任意类型，$\mathrm{V}_R(I) \subseteq$Max$(R)$。 □

回顾一下，特殊主理想环（SPIR）是一个主理想环 R，它有唯一的非零素理想 $M = Rt$，且 M 的幂零指数为 $p > 0$。

命题 2.5。环 R 的理想 I 属于 $\mathrm{Q_r}\mathrm{Max}(R)$，当且仅当 R/I 是一个极大理想的幂零指数为 *2* 的 *SPIR*。

证明。假设 $I \in \mathrm{Q_r}\mathrm{Max}(R)$，并设 $M \in \mathrm{Max}(R)$ 满足I 是 M-准素的。我们注意到，定义 $M^2 \subseteq I \subset M$ 中给出的包含关系 2.3 意味着 I 是 M-准素的。根据定理

2.4, $R' := R/I$ 只有两个真理想：0 和 $M' := M/I$ 且$M'^2 = 0$。于是，R' 是一个局部诺特环。此外，M' 是主理想，且 $M' = R'x$ 对任意 $x \in M' \setminus 0$。因此，根据命题 R'，[18,其为主理想 4],，从而 R' 是一个 SPIR，其极大理想的幂零指数为 2。

反之，假设 $R' := R/I$ 是一个 SPIR，其极大理想M' 的幂零指数为 2。那么，$M'^2 = 0$ 和 R' 只有两个真理想：0 和 M'。因此，根据定理 $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 2.4 及其证明可知 $I \in \mathrm{Q_rMax}(R)$。□

注 2.6. (1) 定理 2.4 的条件 (5) 断言，对于环 R 的准极大理想 I，环 R/I 只有有限多个理想。在推论 2.4], 中，Anderson 和 Chun 刻画了只有有限多个理想的环。一个环只有有限多个理想，当且仅当它是有限多个有限局部环、SPIR 和域的有限直积。若 $I \in \mathrm{QMax}(R)$，则 R/I 只有有限多个理想。每种准极大理想的类型决定环 R/I 的性质如下：若 $I \in \mathrm{Q_iMax}(R)$，则 R/I 是域。若 $I \in \mathrm{Q_dMax}(R)$，即为两个不同极大理想 M_1 和 M_2 的交，则$R/I \cong R/M_1 \times R/M_2$ 是两个域的直积。若 $I \in \mathrm{Q_rMax}(R)$，则根据命题 2.5，R/I 是一个 SPIR。无论哪种情况，R/I 都是一个阿廷环。

我们可以指出，条件 $\mathrm{V}_R(I) \subseteq \mathrm{Max}(R)$ 等价于 $\dim(R/I) = 0$。

(2) 由于分歧理想是极大理想 M 的 M-准素理想，准极大理想的乘积是理想的准素分解。

(3) 若 $I \in \mathrm{QMax}(R)$，则 $(\sqrt{I})^2 \subseteq I$ 成立，其中 $\sqrt{I} = \overline{I}$ 在惰性和分解情形下成立。在分歧情形下，$\sqrt{I} = M \in \mathrm{Max}(R)$表明，根据分歧理想的定义，$(\sqrt{I})^2 = M^2 \subseteq I$ 成立。由此可知，若$_ I \in \mathrm{QMax}(R)$，则 $\sqrt{I}$也成立。

定义 2.7。我们称环 R 的理想 I 为次极大 理想，若存在 $M \in \mathrm{Max}(R)$ 使得 $I \prec M$。因此，次极大理想不是极大理想。

命题 2.8。环 R 的真理想 I 是次极大理想，当且仅当对于满足 $I \subset M$ 的任意 $M \in \mathrm{Max}(R)$，都有 $M \succ I$。

证明。其中一个蕴含关系是显然的。

反之，假设 I 是次极大的，因此存在 $M \in \mathrm{Max}(R)$，使得 $I \prec M$，由此可得 $I \notin \mathrm{Max}(R)$。我们断言，对于任意满足 $I \subset M'$ 的 $M' \in \mathrm{Max}(R)$，都有 $M' \succ I$。否则，存在 $M' \in \mathrm{Max}(R)$，使得 $I \subset M'$且 $M' \not\succ I$，从而得到 $M' \neq M$。这意味着存在 R 的一个理想 J，使得 $I \subset J \subset M'$。于是，$I \subseteq M \cap J \subseteq M \cap M' \subset M$。我们推知 $I = M \cap J = M \cap M'$(∗)，因为

$M \cap M' \neq M$。因此， $J = M'$，矛盾。事实上，只需将 $(*)$ 在 M, M' 处局部化，并对任意 $N \in \mathrm{Max}(R)$ $N \neq M, M'$，即可得到 $I_M = M_M$；而且 $J_M = M'_M = R_M$，因为 $I = J$成立时 $J \not\subseteq M$，根据 $(*)$，$J \subseteq M$，矛盾，$I_{M'} = M'_{M'} = J_{M'}$, $M_{M'} = R_{M'}$ 和$I_N = M_N = J_N = M'_N = R_N$。□

定理 2.9. 设 I 是 R的一个非极大理想。以下陈述等价:

(1) $I \in \mathrm{QMax}(R)$。(2) I 是次极大的。(3) I 仅严格包含于极大理想中。

证明。 (1)⇒(2)：定理 2.4 的证明中得到的准极大理想的不同类型表明， R 的一个非极大准极大理想显然是次极大的。

(2)⇒(3)：若 I是次极大的， $M \succ I$则对任意 $M \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathrm{V}(I)$，由命题 2.8可知。因此 I 仅严格包含于极大理想中。

(3)⇒(1)：假设 I 仅严格包含于极大理想中。我们断言， I 至多包含于两个不同于I的真理想中；若这两个理想是极大理想，则恰好有两个。设 $M \in \mathrm{Max}(R)$ 满足 $I \subset M$，并假设存在一个理想 $J \neq M$ 使得 $I \subset J$。那么 $J \in \mathrm{Max}(R)$。但是 $I \subseteq J \cap M \subset J, M$ 表明 $I = J \cap M$，因为 $J \cap M$ 不是极大理想。因此，根据定义 2.3， $I \in \mathrm{Q_dMax}(R)$。若 I 仅包含于一个（极大）理想中，则定理 2.4 表明 $I \in \mathrm{QMax}(R)$，因为 $\mathrm{o}(I) = 2$。□

该定理表明，任何严格包含准极大理想的真理想都是极大理想。

根据 [19, 推论 8，28], 若环 R 是 $Kasch$ 环，当且仅当它的每个极大理想 R 都具有 $(0 : x)$ 的形式，其中 $x \in R$是某个元素；或者等价地，对 I 的任意真理想 R，都有 $(0 : I) \neq 0$。因此，$\mathrm{t}(R) = R$，因为 R 中的正则元必为单位，这是因为它不属于 R的任何极大理想。利用准极大理想，我们可以通过下面的命题构造 Kasch 环。

命题 2.10。 若 $I \in \mathrm{QMax}(R)$ R/I，则它是 ***Kasch*** 环，且$\mathrm{t}(R/I) = R/I$。

证明。 R/I 的任一极大理想都具有如下形式： $N := M/I$，其中$M \in$是R的极大理想，且 $\cap \mathrm{V}(I)$。若 $I \in \mathrm{Q_i}$是R的极大理想，则对于域 R/I中的任意非零 x，都有 $N = 0 = (0 : x)$。若 $I \in \mathrm{Q_d}$是R的极大理想，则对于某个 $M' \in$，有 $I = M \cap M'R$ 的极大理想 $M' \neq M$。令 $N' := M'/I$。由此可得，对于任意 $x \in N' \setminus N$，都有$N = (0 : x)$。若 $I \in \mathrm{Q_r}$是R的极大理想，则 $M^2 \subseteq I \subset M$表明，对于任意 $x \in N$， $x \neq 0$, 都有 $N = (0 : x)$。因此，无论哪种情况， R/I 都是一个 Kasch 环。于是，根据 Kasch 环的性质，$\mathrm{t}(R/I) = R/I$。□

注 2.11. 命题 2.10 的逆命题一般不成立，下面的例子便可说明这一点：设 R 是一个环，且 $M \in$是R的极大理想，满足 $M \neq M^2$和 $M \not\succ M^2$。令 R':= R/M^2且 M':= M/M^2，则(R', M')是一个局部环。令 $x \in M'$，$x \neq 0$。于是， M':=(0 : x)，因此 R/M^2是一个 Kasch 环；但 $M^2 \notin$ QMax(R)，因为 $M \not\succ M^2$。

当然，任何环都有惰性理想，而任何非局部环都有分解理想。我们将证明，在具有有限生成极大理想的环中，分歧理想确实存在。

命题 2.12. 若 R 是一个非域的环，且存在有限生成的 $M \in$极大理想(R)，则存在 $I \in \mathrm{QMax}(R)$使得 $I \subset M$。

证明. 令 $M = \sum_{i=1}^{n} Rx_i$ 且 $\mathcal{F}$:= $\{I$为 $R \mid I \subset M\}$的理想。于是，$\mathcal{F} \neq \emptyset$，因为 $0 \in \mathcal{F}$。我们断言 $\mathcal{F}$ 是归纳的。设 $\mathcal{F}'$ 为 $\mathcal{F}$ 的一个线性有序子集，并令 $J := \cup[I_\alpha \mid I_\alpha \in \mathcal{F}']$。那么， J是 R的一个理想，且满足 $J \subseteq M$。假设 $J = M$。因此，对每个 $i \in \mathbb{N}_n$，存在某个 $I_{\alpha_i} \in \mathcal{F}'$ 使得 $x_i \in I_{\alpha_i}$。令 I_{α_k} 为所有此类I_{α_i}中最大的一个。因此 $I_{\alpha_k} \in \mathcal{F}$，且对每个$i \in \mathbb{N}_n$都有 $x_i \in I_{\alpha_k}$，于是 $M \subseteq I_{\alpha_k} \subset M$，矛盾。我们得到 $J \subset M$，从而$J \in \mathcal{F}$，并且 $\mathcal{F}$ 有一个极大元 I，满足 $I \subset M$。特别地，$M \succ I$，因为若存在某个理想 K 使得 $I \subset K \subset M$，则应有 $K \in \mathcal{F}$，这与 I的极大性矛盾。于是，$I \in$QMax(R)，由定理 2.9 得。□

推论 2.13. 若 J 是环 R 的一个理想，且 $J \subset M$，其中$M \in$极大理想(R) 有限生成，则存在 $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 使得$J \subseteq I \subset M$。

证明。令 R':= R/J且 M':= M/J，于是 R'不是域。于是，M' 是 R' 的一个有限生成极大理想，而命题 2.12 表明，存在 $K \in$ QMax(R)，它是 R' 的一个理想，并且满足 $K \subset M'$。由定理 2.4 可推得 $0 \in$ QMax(R'/K)。此外，存在 I，它是 R 的一个理想，并且 $K = I/J$ 且 $I \subset M$。由于 R'/K =(R/J)/(I/J) $\cong R/I$，同一定理表明， $I \in$QMax(R) 满足 $J \subseteq I \subset M$。□

推论 2.14。 设 R 是一个非域的诺特环。对于任意 $M \in$ 极大理想(R)，存在 $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 使得 $M \succ I$。

证明。 利用推论 2.13。 □

命题 2.15. 设 J 是环 R 的一个 M-准素理想，其中 $M \in$极大理想(R) 满足 $1 \leq \mathrm{L}_R(M/J) < \infty$，则存在 $I \in \mathrm{Q_r}$ 极大理想 (R) 使得 $J \subseteq I \subset M$。

证明。设 J 是环 R 的一个 M-准素理想，其中 $M \in$ 极大理想(R) 满足 $1 \leq \mathrm{L}_R(M/J) = n < \infty$。那么存在环 R 的递减理想序列 $\{J_i\}_{i=0}^n$，使得 $J_0 = M$，并且 $J_n = J$ 满足 $J_i \succ J_{i+1}$。令 $I := J_1$，可得 I 是 M- 准素理想，且 $\mathrm{L}_R(M/I) = 1$，也就是说 $M \succ I$。此外，$J \subseteq I$。由于 $\mathrm{o}(I) = 2$，并根据定理 2.4，可得 $I \in \mathrm{Q_r}$极大理想(R)，且满足 $J \subseteq I \subset M$。□

命题 2.16. 若 R 是一个环，且 $K := \cap\{I \in \mathrm{QMax}(R)\}$，则$\mathrm{J}(R)^2 \subseteq \cap[M^2 \mid M \in \mathrm{Max}(R)] \subseteq K \subseteq \mathrm{J}(R)$。

证明. 对于任意 $I \in$ QMax(R)，存在 $M \in$ Max(R) 使得 $I \subseteq M$，且任意极大理想都属于 QMax(R)。于是，我们有 $K \subseteq \cap[M \mid M \in$Max$(R)] =$ J(R)。此外，任意惰性理想或分歧理想都包含某个极大理想的平方。若 $I \in \mathrm{Q_d}$Max(R)，则 $I = M \cap M' = MM'$对于某个 M，$M' \in$Max(R) $M' \neq M$。因此 $M^2M'^2 = M^2 \cap M'^2 \subseteq M \cap M' = I$，从而 J$(R)^2 \subseteq \cap[M^2 \mid M \in$Max$(R)] \subseteq K$。□

注 2.17. 与 Jacobson 根不同，幂零根并不总是能与 K 比较，以下例子可以说明这一点。设 (S, N) 是一个局部主理想整环，并令 $N := St$，其中 $t \in N$ 满足相应条件。令 $R := S[X]/(X^3) = S[x]$，其中 X 是一个不定元，x 是 X 在 R 中的剩余类，因此我们有一个整扩张 $S \subset R$，因为 $x^3 = 0$。我们断言，R 是一个局部环，其极大理想为 $M := Rt + Rx$。令$M \in$ Max(R)。存在 $P \in$ Max$(S[X])$ 使得 $X^3 \in P$，于是 $X \in P$，且 $M = P/(X^3)$。此外，由于 R 在 S 上整，因此 $M \cap S \in$ Max(S)，从而 $M \cap S = N$。特别地，由于 $t \in N$，我们可以写成 $t = f(X) + X^3 g(X)$，其中 $f(X) \in P$，且 deg$(f) < 3$。这意味着 $f(X) = t \in P \cap S$，从而 $P \cap S = N$。根据 [34,定理 6.9],，我们得到 $P = N[X] + XS[X] = tS[X] + XS[X]$。因此$M = Rt + Rx$，且 M 是 R 的唯一极大理想，而它是一个局部环。应用命题 2.16 可得 $M^2 \subseteq K \subseteq$J$(R) = M$。由于 $t^2 \in M^2 \subseteq K$ 是 R 的正则元，我们有 $K \not\subseteq$ Nil(R)。现在，令 $I := Rt + Rx^2$。由于 $I + Rx = Rt + Rx = M$，我们推得$I \in$ QMax(R)，其中 $x \notin I$ 和 $x \notin K$ 成立，尽管 $x \in$ Nil(R)。于是，Nil$(R) \not\subseteq K$。总之，K 与 Nil(R) 不可比较。

命题 2.18。 设 $\{R_1, \ldots, R_n\}$ 是一个有限环族，并且$R := R_1 \times \ldots \times R_n$。$\mathrm{QMax}(R)$ 的理想是形如 $M_i \times M_j \times \Pi_{k \neq i,j} R_k$ 的理想，其中 M_i （分别为 M_j）$\in \mathrm{Max}(R_i)$ （分别为$\in \mathrm{Max}(R_j)$），且 $I_i \times \Pi_{k \neq i} R_k$，其中 $I_i \in \mathrm{QMax}(R_i)$（经过某种重新排序）。

证明。设 $I \in \mathrm{QMax}(R)$。那么 o$(I) \leq 3$ 且 o$(I) = 3$ 当且仅当$|\mathrm{V}_R(I) \cap \mathrm{Max}(R)| = 2$ 由定理 2.4可知。

如果 I 包含于 R的两个极大理想中，那么 I 是这两个极大理想的交，且具有 $M_i \times M_j \times \Pi_{k\neq i,j}R_k$ 的形式，其中 M_i （分别是 M_j） $\in$ Max(R_i) （分别是 $\in$ Max(R_j)），经过重新排序后。

如果 I 仅包含于 R的一个极大理想 M 中，例如$M = M_i \times S$，其中 $S := \Pi_{k\neq i}R_k$，且 $R = R_i \times S$（重排后），那么要么 $I = M$，要么 $I \in$ Q$_r$Max(R)，此时 M是准素的，并满足 $M^2 = M_i^2 \times \Pi_{k\neq i}R_k \subseteq I \subset M = M_i \times \Pi_{k\neq i}R_k$。在这两种情况下， I 都具有 $I_i \times \Pi_{k\neq i}R_k$的形式。设 $\psi : R \to R_i$ 为核为 $0 \times S$的典范满射。根据 [1, 命题 2]，，我们得到 $\psi(I) = I_i \in$ QMax(R_i)。□

如果环 R 的每个非零 R-模都有极大子模，则称其为 Max-环。若环 R 的理想 I 满足：对 I中的每个序列 $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$，都存在某个正整数 k 使得 $r_1 \cdots r_k = 0$，则称 I 为 T-幂零。

命题 2.19. 对于任意 $M \in$ 极大理想(R)，若 R 是一个非域的 Max 环，则存在一个准极大理想 $I \subset M$。

证明。 设 $M \in$ 极大理想(R)。那么 M 是一个 R-模，其 R-子模都是 R的理想。由于 M 的任意极大子模都是次极大理想，并根据定理 2.9，可知存在一个准极大理想 $I \subset M$。 □

推论 2.20. 设 R 是一个非域的 J-正则环，且 J(R) 是 T-幂零的。那么，对于任意 $M \in$极大理想(R)，存在一个准极大理想 $I \subset M$。

证明。根据 [17, 定理，第 1135]页， R 是一个 Max 环。应用命题 2.19 可知，对于任意 $M \in$ 极大理想(R)，存在一个准极大理想 $I \subset M$。 □

显然，极大理想是惰性的，并且在每个非局部环中，两个极大理想的交都是分解的。下一个推论给出了极大理想的一个刻画，涵盖了分歧理想。

推论 2.21. 设 R 是一个环，且 $M \in$ 极大理想(R)。存在$I \in$ Q$_r$极大理想(R) 使得 $I \subset M$ 当且仅当 $M^2 \neq M$。

证明。 若 $M^2 = M$，则不存在理想 I 属于 R 且满足$M^2 \subseteq I \subset M$。这就得出了一个方向。

反之，假设 $M^2 \neq M$。令 $R' := R/M^2$， $M' := M/M^2$并令 $f : R \to R'$ 为满射的自然映射，其中 R' 不是域。于是，(R'， M') 是一个局部环，且 $M'^2 = 0$，并且 $M' =$J(R') 是 T-幂零的。此外， $R'/$J(R') $= R'/M'$ 是一个域，因此 R' 是 J-正则。根据推论2.20，存在一个准极大

理想 $I' \subset M'$，它必然属于 $\mathrm{QrMax}(R')$，因为 R' 是局部的。令$I := f^{-1}(I')$，根据R，它属于 $\mathrm{QMax}(R)$ [1, 命题 2]，其中 $M^2 \subseteq I$。因此，$I \subset M$ 并且 I 是 M-准素的，故属于 $\mathrm{QrMax}(R)$。□

下面的命题给出了 Max 环的例子。

命题 2.22. 一个环 R 不是域，且 $0 \in \mathrm{QMax}(R)$ 是一个Max环。

证明. 由于 $0 \in \mathrm{QMax}(R)$，要么 R 是局部环，其极大理想为 M；要么R 有两个极大理想，分别为 M_1 和 M_2，且 $0 = M_1 \cap M_2$。

若 (R, M) 是局部环，则 $M = \mathrm{J}(R)$，且 R/M是一个域，因而是正则的。此外，在两种情形下，$M^2 = 0$ 均为 0 惰性或分歧，因此 $\mathrm{J}(R)$ 是 T-幂零的。由此可得，根据 [17, 定理，p.1135]，R 是一个 Max 环。

若 R 有两个极大理想，分别为 M_1 和 M_2，则 $\mathrm{J}(R) = M_1 \cap M_2 = 0$是 T-幂零的。因此 $R = R/\mathrm{J}(R) \cong R/M_1 \times R/M_2$是两个域的直积，这表明 R 是正则的。同一参考文献可推出，R是一个 Max 环。□

命题 2.22 没有逆命题。只需考虑 $R := \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ 根据 [17, 定理，第 1135]，它是一个 Max 环，因为 $J(R) = 0$是 T-幂零的，并且 $R = R/\mathrm{J}(R)$ 是三个域的乘积，因此R 是正则的。但是 $0 \notin \mathrm{QMax}(R)$，因为 R的三个极大理想的交。

3. Quasi-maximal ideals through extensions

在 [1, 命题 2], 中，考察了准极大理想在满射环态射下的性质。我们将其结果推广到任意环态射，此时只需考察扩张。

我们首先给出两个引理，用于联系环扩张中理想的根及其扩张。

引理 3.1。设 $R \subseteq S$ 是一个 *LO* 扩张，I 是 R 的一个理想。则 $\sqrt[R]{I} = \sqrt[S]{IS} \cap R$。

证明。我们知道，$\sqrt[R]{I} = \cap_{P \in \mathrm{V}_R(I)} P$。令 $P \in \mathrm{V}_R(I)$。由于 $R \subseteq S$ 具有 LO，因此存在 $Q \in \mathrm{Spec}(S)$，使得 $P = Q \cap R$。由此可得 $IS \subseteq Q$，这意味着 $\sqrt[S]{IS} \subseteq Q$，从而得到 $\sqrt[S]{IS} \cap R \subseteq Q \cap R = P$。于是，$\sqrt[S]{IS} \cap R \subseteq \sqrt[R]{I}$。

现在，设 $Q \in \mathrm{V}_S(IS)$，并令 $P := Q \cap R$。因此，$I \subseteq IS \cap R \subseteq Q \cap R = P$，从而 $P \in \mathrm{V}_R(I)$ 且 $\sqrt[R]{I} \subseteq P = Q \cap R$，也就是说，$\sqrt[R]{I}$包含于任意 $Q \in \mathrm{V}_S(IS)$ 中，进而包含于 $\sqrt[S]{IS}$ 中。综上，$\sqrt[R]{I} = \sqrt[S]{IS} \cap R$。□

引理 3.2。设 $R \subseteq S$ 是一个扩张，I 是 R 的一个理想，且满足$I = IS \cap R$。则 $\sqrt[R]{I} = \sqrt[S]{IS} \cap R = \sqrt[S]{\sqrt[R]{IS}} \cap R$。

证明。根据 [36, 定理 9、(16) 和 (22)，第 148], 页，我们有 $\sqrt[R]{\overline{IS} \cap R} = \sqrt[S]{\overline{IS} \cap R} = \sqrt[R]{IS} \cap R$，得到第一个等式。由于 $\sqrt[R]{\overline{IS}} = \sqrt[S]{\overline{IS}} = \sqrt[S]{\sqrt[R]{\overline{IS}}}$，这意味着 $\sqrt[R]{I} = \sqrt[S]{\sqrt[R]{\overline{IS}} \cap R}$。□

推论 3.3。设 $R \subseteq S$ 是一个扩张，I 是 R 的一个理想，且满足 $\sqrt[R]{I} = \sqrt[S]{\overline{IS} \cap R}$。则 $\sqrt[R]{I} = \sqrt[S]{\sqrt[R]{\overline{IS}} \cap R}$。

证明。设 $J := \sqrt[R]{I} = \sqrt[S]{\overline{IS} \cap R}$ 根据假设。于是，引理 3.2 的证明给出 $J = \sqrt[R]{IS} \cap R = JS \cap R$。将引理 3.2应用于 J，可得 $J = \sqrt[R]{J} = \sqrt[S]{JS} \cap R = \sqrt[S]{\sqrt[R]{IS}} \cap R$。□

下文中，我们经常会遇到这样的扩张 $R \subseteq S$：对某个 $M \in$，有 $MS \in$ 极大理想(S)。特别是，永田扩张 $R \subseteq R(X)$ 就会出现这种情况。

命题 3.4. 设 $R \subseteq S$ 是一个扩张，且 $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 满足：对于任意 $M \in$ 极大理想(R) $\cap \mathrm{V}(I)$，都有 $MS \in$ 极大理想(S) 。那么 $IS \in \mathrm{QMax}(S)$ 且 $\sqrt[R]{I} = \sqrt[S]{IS} \cap R$。此外，$\overline{I}$ 与 IS 同型，而且在所有情况下都有 $I = IS \cap R$，除非 $I \in$ Q$_{\mathrm{r}}$极大理想(R) 且满足 $IS = \sqrt[S]{IS}$。

证明。若 $I \in$ Q$_{\mathrm{i}}$极大理想(R)，则 $I \in$ 极大理想(R)，因此 $IS \in$ 极大理想(S) =Q$_{\mathrm{i}}$极大理想(S)。此外，$\overline{I} = \sqrt[R]{I} = IS \cap R = \sqrt[S]{IS} \cap R$。

若 $I \in$ Q$_{\mathrm{d}}$极大理想(R)，则 $I = M_1 \cap M_2 = M_1M_2$，其中 $M_i \in$ 极大理想(R)，对 $i \in \mathbb{N}_2$成立。令 $N_i := M_iS \in$ 极大理想(S)（由假设），可得$IS = M_1M_2S = (M_1S)(M_2S) = N_1N_2 = N_1 \cap N_2$，因此 $IS \in$Q$_{\mathrm{d}}$极大理想(S)。此外，$I = M_1 \cap M_2 = M_1M_2 = \sqrt[R]{I} = (N_1 \cap N_2) \cap R = (M_1S \cap M_2S) \cap R = IS \cap R = \sqrt[S]{IS} \cap R$。

若 $I \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(R)，则存在 $M \in$ Max(R)，使得 $M \succ I$ with $M^2 \subseteq I \subset M$(∗)。于是 $M = \sqrt[R]{I} = \sqrt[S]{\overline{IS}} \cap R$。令 $N := MS \in$Max(S)，可得 $M^2S = N^2 \subseteq IS \subseteq MS = N = \sqrt[S]{IS}$。此外，对任意 $x \in \overline{M} \setminus I$，我们有 $M = I + Rx$，从而得到 $N = (I + Rx)S = IS + Sx$。若 $IS \neq \sqrt[S]{IS}$，则可得 $x \in N \setminus \overline{IS}$。否则，$Sx \subseteq IS$ 推出$IS = \sqrt[S]{IS} = N$，矛盾。特别地，$x \in (N \cap R) \setminus (IS \cap R)$。于是，根据推论 2，第 237], 页的 [36, ，可得 $N \succ IS$，即 $IS \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(S)。由此可知 $I \subseteq IS \cap R \subset N \cap R = M$，因此 $I = IS \cap R$。若$IS = \sqrt[S]{LS} = N$，则 $IS \in$ Max(S) = Q$_{\mathrm{i}}$Max(S)。特别地，$I \subset M = IS \cap R$。此外，$M = \sqrt[R]{I} = MS \sqcap R = \sqrt[S]{IS} \cap R$ 在两种情况下都成立。

无论如何，$IS \in$ QMax(S)，且与 I 同型，除非 $I \in$Q$_{\mathrm{r}}$Max(R) 且 $IS = \sqrt[S]{IS}$，在这种情况下 $IS \in$Q$_{\mathrm{i}}$Max(S)。□

推论 3.5。设 $R \subseteq S$ 为一个扩张，且 $I \in \mathrm{Q_r Max}(R)$ 满足 $\sqrt[R]{IS} \in \mathrm{Max}(S)$。那么 $I = \overline{IS \cap R}$ 当且仅当 $IS \in \mathrm{Q_r Max}(S)$。

证明。由于 $I \in$ Q$_\mathrm{r}$极大理想(R)，因此 $M := \sqrt[R]{I} \in \overline{\text{极大理想}(R)}$，而根据假设，$N := MS \in$ 极大理想(S)。根据命题 3.4 的证明，若 $IS \neq \sqrt[S]{IS} = N$，则 $IS \in$ Q$_\mathrm{r}$极大理想(S)，且$I = IS \cap \overline{R}$；若 $IS = \sqrt[S]{IS} = N$，则 $IS \cap R = M$。因此，$I = IS \cap R$ 当且仅当 $IS \in \overline{\text{Q}_\mathrm{r}\text{极大理想}(S)}$。□

根据命题 2.8，非极大的准极大理想被一个极大理想覆盖。由 [36, 推论 1，第 237], 命题 3.7 可知，在某些假设下，覆盖性质在扩张下得以保持。

在此之前，我们给出 [10, 引理2。4] 的以下改进，这将在本文中派上用场。

引理 3.6. 设 $R \subseteq S$ 是一个扩张，且 $M \in$ 极大理想$(R) \backslash \mathrm{Supp}(S/R)$。则以下性质成立：

(1) $M' := MS$ 是素谱(S) 中位于 M 之上的唯一理想。(2) $M' \in$ 极大理想(S)。

证明。 (1) 由 [10, 引理 2.4] 得出，因为 $R_M = S_M$。

(2) 假设 $M' \notin$ 极大理想(S)。那么存在 $Q \in$ 极大理想(S)，使得 $M' \subset Q \subset S$，这意味着 $M = M' \cap R \subseteq Q \cap R \subseteq S \cap R = R$。由于 $Q \cap R \neq R$ 且 $M \in$ 极大理想(R)，我们得到 $M = Q \cap R$，由 (1) 得出 $M' = Q$，矛盾，因此 $M' \in$ 极大理想(S)。□

命题 3.7. 设 $R \subseteq S$ 是一个扩张。

(1) 设 I 和 J 是 R 的理想，满足 $I \prec J$。假设$\mathrm{V}(I) \cap \mathrm{Supp}(S/R) = \emptyset$。则 $IS \prec JS$和 $IS \cap R = I$（分别为 $JS \cap R = J$）。(2) 设 I' 和 J' 是 S 的理想，满足 $I' \prec J'$。假设$\mathrm{V}(I' \cap R) \cap \mathrm{Supp}(S/R) = \emptyset$。则 $I' \cap R \prec J' \cap R$ 和 $(I' \cap R)S = I'$（分别为 $(J' \cap R)S = J'$）。

证明。 设 I 和 J 是 R 的理想，满足 $I \prec J$。根据 [36,推论 1，第 237], 页，存在 $M \in$ 极大理想(R)，使得 $MJ \subseteq I$ $(*)$，并且存在 $x \in J$，使得 $J = I + Rx$ $(**)$，其中 $I \subseteq M$。我们断言这个M是唯一的。否则，存在 $M' \in$极大理想(R) $M' \neq M$，使得 $M'J \subseteq I(***)$。由于 $M + M' = R$，由 $(*)$ 和 $(***)$ 可得 $J \subseteq I$，这与 $I \prec J$矛盾。

(1) 此外，假设 $\mathrm{V}(I) \cap \mathrm{Supp}(S/R) = \emptyset$。那么 $N := MS \in \mathrm{Max}(S)$，由引理 3.6 可知，因为 $M \notin \mathrm{Supp}(S/R)$。因此，$(*)$ 推出 $(MS)(JS) = N(JS) \subseteq IS$。由 $(**)$，我们有 $JS = IS + Sx$。我们

证明 $JS \neq IS$。由于 $I \neq J$，存在 $M' \in \mathrm{Max}(R)$，使得 $J_{M'} \neq I_{M'}$。特别地，$M' \in \mathrm{V}(I)$，因为若非如此，$M' \notin \mathrm{V}(J)$，从而得到 $J_{M'} = I_{M'} = R_{M'}$，矛盾。但是 $M' \notin \mathrm{Supp}(S/R)$，因此 $R_{M'} = S_{M'}$，得到 $J_{M'} = (JS)_{M'} \neq I_{M'} = (IS)_{M'}$。因此，$JS \neq IS$，并且根据 [36, 推论 1，第 237] 页可得 $IS \prec JS$。当然，$I \subseteq IS \cap R$。

令 $M'' \in \mathrm{Max}(R) \setminus \mathrm{Supp}(S/R)$。因此，$R_{M''} = S_{M''}$ 给出 $I_{M''} = (IS)_{M''} = (IS \cap R)_{M''}$。

现在，令 $M'' \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathrm{Supp}(S/R)$。于是，$M'' \notin \mathrm{V}(I)$。因此，$I_{M''} = R_{M''}$ 推出 $(IS \cap R)_{M''} = (RS \cap R)_{M''} = R_{M''} = I_{M''}$。

最后，$I = IS \cap R$ 和 $J = JS \cap R$，证明类似。

(2) 设 I' 和 J' 是 S 的理想，满足 $I' \prec J'$。假设 $\mathrm{V}(I' \cap R) \cap \mathrm{Supp}(S/R) = \emptyset$。根据 [36, 推论 1，第 237],页，存在 $N \in \mathrm{Max}(S)$，使得 $NJ' \subseteq I'$ 且 $I' \subseteq N$。令 $M := N \cap R$, $I := I' \cap R$ 和 $J := J' \cap R$。于是，$MJ \subseteq NJ' \cap R \subseteq I' \cap R = I$(∗)。我们声称 $I' = IS$ 且 $J' = JS$。显然，$IS \subseteq I'$ 且 $JS \subseteq J'$。我们将通过对 R 的每个极大理想进行局部化，证明这些包含关系都是等式。

设 $M' \in$ 极大理想$(R) \setminus \mathrm{Supp}(S/R)$。因此，$R_{M'} = S_{M'}$ 从而得到 $I_{M'} = (IS)_{M'} = (I' \cap R)_{M'} = I'_{M'} \cap R_{M'} = I'_{M'}$。同理，我们得到 $J'_{M'} = (JS)_{M'}$。

现在，设 $M' \in$ 极大理想$(R) \cap \mathrm{Supp}(S/R)$。那么，$M' \notin \mathrm{V}(I)$，进而有 $M' \notin \mathrm{V}(J)$，因为 $I \subseteq J$。因此，$I_{M'} = J_{M'} = R_{M'}$ 这意味着 $(IS)_{M'} = (JS)_{M'} = (RS)_{M'} = S_{M'} = I'_{M'} = J'_{M'}$，因为 $IS \subseteq I'$（分别为 $JS \subseteq J'$）。

最后，$I' = IS$ 和 $J' = JS$(∗∗)，由此得到 $I \neq J$，因为 $I' \neq J'$。设 $x \in J \setminus I$，于是 $x \in J' \setminus I'$，因为 $I = I' \cap R$。因此，$J' = I' + Sx$(∗∗∗)，因为 $I' \prec J'$。在 R 的每个极大理想处局部化 (∗∗∗)，并利用上一段中的等式，我们得到如下结果：

若 $M' \in \mathrm{Max}(R) \setminus \mathrm{Supp}(S/R)$，则 $J'_{M'} = (I' + Sx)_{M'} = (JS)_{M'} = J_{M'} = I'_{M'} + S_{M'}(x/1) = I_{M'} + R_{M'}(x/1) = (I + Rx)_{M'}$。

若 $M' \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathrm{Supp}(S/R)$，则如我们先前所见，$M' \notin \mathrm{V}(J)$。由此可得 $I_{M'} = J_{M'} = R_{M'} = I_{M'} + R_{M'}(x/1) = (I + Rx)_{M'}$。

结合这两种情况，$J = I + Rx$ 和 $I \prec J$ 总是成立，这由[36,推论 1，第 237] 页可得。□

在注记 4.2(2) 和 4.15(1) 中，我们给出了一些例子，说明命题 3.7 的结论不成立，因为断言 $\mathrm{V}(I' \cap R) \cap \mathrm{Supp}(S/R) = \emptyset$ (分别地，$\mathrm{V}(I) \cap \mathrm{Supp}(S/R) = \emptyset$) 不满足。

推论 3.8. 设 $R \subseteq S$ 是一个扩张，且 $I \in \mathrm{QMax}(R)$，满足 $\mathrm{V}(I) \cap \mathrm{Supp}(S/R) = \emptyset$。则 $I = IS \cap R$，$IS \in \mathrm{QMax}(S)$ 以及

与 I 同型，其中 $IS \prec N := MS \in$ 极大理想(S) 对于这样的 $M \in \mathrm{V}(I) \cap$ 极大理想(R) 成立，当 I 在 R中是次极大的。

证明。若 $I \in$ 极大理想(R)，则 $IS \in$ 极大理想$(S$，且 $I = IS \cap R$ 根据引理 3.6。

现在，假设 I 是次极大且 $I \prec M \in$ 极大理想(R)。由于$M \notin$ Supp(S/R)，可知 $N := MS \in$ 极大理想(S) $IS \prec N$ 且$I = IS \cap R$，这归功于命题 3.7。因此，IS 在S中是次极大的。现在，定理 2.9 表明 $IS \in$QMax(R)，更确切地说，$IS \in \mathrm{Q_d}$极大理想$(S) \cup \mathrm{Q_r}$极大理想(S)。若 $I \in \mathrm{Q_d}$极大理想(R)，即 $I = M_1 \cap M_2$，则得到 $IS = (M_1S) \cap (M_2S)$，从而 $IS \in \mathrm{Q_d}$极大理想(S)。若 $I \in \mathrm{Q_r}$极大理想(R)，则 $M^2 \subseteq I$蕴含 $(MS)^2 \subseteq IS$，且 $IS \in \mathrm{Q_r}$极大理想(S)，因为这是一个准素理想。总之，无论哪种情况，IS 都是与 I同型的准极大理想。□

命题 3.9. 设 $R \subseteq S$ 是满足 *LO* 和 *INC* 的扩张（例如整扩张），且 $I \in \mathrm{Q_i}$极大理想$(R) \cup \mathrm{Q_d}$极大理想(R)。那么，存在与 I 同型的 $J \in \mathrm{QMax}(S)$，使得 $I = J \cap R$。

证明。若 $I \in \mathrm{Q_i}$极大理想(R)，则存在 $J \in$ 极大理想(S) 使得 $I = J \cap R$，因此 $J \in \mathrm{Q_i}$极大理想(S)。

若 $I \in \mathrm{Q_d}$极大理想(R)，则存在 M_1，$M_2 \in$ 极大理想(R) 使得 $I = M_1 \cap M_2$，且 $M_1 \neq M_2$。对于每个 $i \in \mathbb{N}_2$，存在 $N_i \in$ 极大理想(S) 使得 $M_i = N_i \cap R$，且 $N_1 \neq N_2$。令 $J := N_1 \cap N_2$。于是，$J \in \mathrm{Q_d}$极大理想(S)。此外，$I = M_1 \cap M_2 = (N_1 \cap R) \cap (N_2 \cap R) = (N_1 \cap N_2) \cap R = J \cap R$。□

引理 3.10. 设 $f\colon R \to S$ 是一个环同态，J 是 S 的一个理想，且$I := f^{-1}(J)$。那么，$I = f^{-1}(I \cdot S)$。

(1) 存在一个 S 的理想 K，它在 $\mathcal{F} := \{K'$ 中是极大的：$S \mid J \subseteq K'$ 的理想，$I = f^{-1}(K')\}$。这样的理想 K 称为包含 J的 I 的 ***Max*-上理想**。

(2) 若 $N \in Max(S) \cap V_S(J)$，则存在一个 S 的理想 K_1，它在 $\mathcal{F}' := \{K'$ 中是极大的：$S \mid J \subseteq K' \subseteq N$的理想，$I = f^{-1}(K')\}$。这样的理想 K_1 称为包含 J 且包含于 N的 I 的 ***Max*-上理想**。

证明。由于 $f(I) \subseteq J$，我们得到 $f(I) \subseteq f(I)S = I \cdot S \subseteq J$，因此 $I \subseteq f^{-1}(I \cdot S) \subseteq f^{-1}(J) = I$，从而 $I = f^{-1}(I \cdot S)$。

(1) 我们有 $\mathcal{F} \neq \emptyset$ 因为 $J \in \mathcal{F}$。我们断言，$\mathcal{F}$ 是归纳的。令$\mathcal{F}'$ 为 $\mathcal{F}$ 的线性有序子集，并设 $K'' := \cup[K_\alpha \mid K_\alpha \in \mathcal{F}']$。显然，$K'' \in \mathcal{F}$，且 $\mathcal{F}$ 具有极大元 K。

(2) 我们采用前面的证明，其中 $\mathcal{F}' := \{K'$ 是 $S \mid J \subseteq K' \subseteq N$, $I = f^{-1}(K')\}$的理想。于是，$\mathcal{F}'$ 有一个极大元 K_1。□

命题 3.11. 设 $R \subseteq S$ 是一个扩张， J 是 S 的一个理想，且$I := J \cap R$。假设对于某个 $M \in \mathrm{Max}(R)$ ，有 $I \prec M$ ，并且 $N := MS \in \mathrm{Max}(S)$满足 $J \subseteq N$。那么，存在一个 S的 *Max*-上理想 K，它包含 J且包含于 N。此外， $K \in \mathrm{QMax}(S)$ ，并且满足以下性质：

> *(1)* 若 $I \in$*Q*$_{\mathrm{r}}$*Max(R)*，则 $K = IS \in$ *Q*$_{\mathrm{r}}$*Max(S)*。*(2)* 设 $I \in$ *Q*$_{\mathrm{d}}$*Max(R)*，且对 $i \in \mathbb{N}_2$ 有 $I = M_1 \cap M_2$, $M_i \in$ *Max(R)*。令 $N_i := M_i S$ （对 $i \in \mathbb{N}_2$），并假设 $N_1 \in$ *Max(S)*。那么$N_2 \neq S$ ，并且有两种情况：*(a)* 若 $N_2 \in$ *Max(S)*，则 $K = IS \in$ *Q*$_{\mathrm{d}}$*Max(S)*。*(b)* 若 $N_2 \notin$ *Max(S)*，则 $IS \subset K$ ，且 $IS \notin$ *QMax(S)*。

证明。假设对某个 $M \in$ Max(R)，有 $I \prec M$ ，使得 $N := MS \in$Max(S)，且 $J \subseteq N$。那么， $I \in$Q$_{\mathrm{r}}$Max(R) $\cup$Q$_{\mathrm{d}}$Max(R)。根据引理 3.10，我们得到 $I = IS \cap R$ ，并且存在一个 S Max-上理想中的理想 K，它包含 J且包含于 N。我们断言 $K \in$QMax(S)。首先， $K \subset N$，因为 $I \prec M$。假设 $K \not\prec N$。因此，存在 S 的某个理想 K''，使得 $K \subset K'' \subset N$，于是 $I \subseteq K'' \cap R \subseteq M = N \cap R$。但是， $I \prec M$表明以下两者必居其一：$I = K'' \cap R$ $(*)$ 或 $K'' \cap R = M$ $(**)$。在情形（$*$）下，我们有 $K'' \in \mathcal{F}$，这与 K的极大性矛盾。在情形（$**$）下，我们有 $M \subseteq K''$，由此得到 $N = MS \subseteq K''$，同样构成矛盾。总之， $K \prec N$，因此$K \in$QMax(S)。

(1) 若 $I \in \mathrm{Q_r Max}(R)$，$M$ 是 R 的唯一极大理想，且 $I \subset M$并且 $MS \in \mathrm{Max}(S)$。由于 $IS \subseteq K \subset N = MS$，我们有 $IS \neq \sqrt[S]{IS}$。根据推论 3.5， $IS \in \mathrm{Q_r Max}(S)$，并且 $K = IS$。

(2) 假设 $I \in$Q$_{\mathrm{d}}$Max(R)，并令 $I = M_1 \cap M_2$， $M_i \in$Max(R)，其中 $i \in \mathbb{N}_2$，且 $N_i := M_i S$。例如，令 $M = M_1$，使得$N_1 = N \in$ Max(S)。于是，$IS = M_1 M_2 S = N N_2$。由于 M_1 和 M_2 在 R中互素，因此 N 和 N_2 在 S中也互素。

首先，若 $N_2 = S$，则 $I = M_1 \cap M_2 = M_1 M_2$推出 $IS = M_1 S = N$，这表明 $I = IS \cap R = N \cap R = M$，矛盾：这种情况不可能出现。我们考察 N_2的两种可能性。

(a) 若 $N_2 \in$极大理想(S)，则与 N 相同的推理表明 $IS = N_1 \cap N_2$ ，且 $IS = K \in$ Q$_{\mathrm{d}}$极大理想(S)。

(b) 假设 $N_2 \notin$ 极大理想(S)。由此可得 $IS = N \cap N_2$。由于$K \prec N$，要么 $K \in$ Q$_{\mathrm{d}}$极大理想(S) (α)，要么 $K \in$ Q$_{\mathrm{r}}$极大理想(S) (β)。

在情形 (α) 中， $K = N \cap N'$，其中 $N' \neq N$ 且 $N' \in$极大理想(S)，并且 $IS \subseteq N_2 \subset N'$。在这种情况下， $IS \subset K$ ，且 IS 不属于 QMax(S)。

在情形（β）下， N 是 S 中满足 $K \subseteq N$的唯一极大理想。但$IS = NN_2$表明， IS 包含于 S的至少两个极大理想中。因此， $IS \subset K$ 和 IS 不属于 QMax(S)。□

注 3.12。 (1) 我们可以指出，命题 3.11中， $IS = K$并非总是成立；即使成立， I 和 IS 也不总是同型的。此外，当 $IS = K$ 成立时，命题 K 的$\mathcal{F}$ 中得到的极大元 3.11(2)(a) 是唯一的，因为它等于 IS。

(2) 设 $R \subseteq S$ 是一个扩张， J 是 S 的一个理想，且 $I := J \cap R$。若 $I \in \mathrm{Q_i Max}(R)$，那么当 $IS \in \mathrm{Max}(S)$ 时， $J = IS \in \mathrm{Q_i Max}(S)$，因为 $IS \subseteq J$ 总是成立。

我们使用 Olivier 关于纯扩张的结果 [22]。回顾一下，环同态 $f : R \to S$ 称为纯的，如果 R 是S的纯子模；也就是说， $R' \to R' \otimes_R S$ 对于每个环同态 $R \to R'$都是单射。

纯性是一种普遍性质，并且 $R \to S$ 是纯的，当且仅当对每个 $P \in \mathrm{Spec}(R)$, $R_P \to S_P$ 都是纯的。

忠实平坦同态是纯的。若 f 是纯的，则对于 R 的每个理想 I， $f^{-1}(IS) = I$；因此， f 是单射。此外，纯环同态 $R \to S$ 满足条件 (O)，也就是说， R-模 M 在 $M \otimes_R S = 0$ 时为零。

显然，若 f: $R \subseteq S$ 是环的扩张，则当扩张 $R \subseteq S$ 在 R-模范畴中有一个截面时， f 是纯的；也就是说，存在一个 R-模态射 g: $S \to R$，使得 $g \circ f = \mathrm{Id}_R$，或者等价地， $S = R \oplus J$，其中 J是 S的一个 R-子模。例如，对于环 R，扩张 $R \subseteq R[X]$ 有一个截面 $R[X] \to R$，定义为 $X \mapsto 0$。

定理 3.13. 设 $R \subseteq S$ 是一个纯扩张， I 是 R的一个理想。若对于任意 $M \in$ 极大理想$(R) \cap \mathrm{V}(I)$，都有 $MS \in$ 极大理想(S)，则 $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当 $IS \in \mathrm{QMax}(S)$；在这种情况下， I 和 IS 是同型的。

证明。 由于 $R \subseteq S$ 是纯的，对于 R的任意理想 I，有 $I = IS \cap R$。设I 是 R 的一个理想，满足：对于任意 $M \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathrm{V}(I)$， $MS \in \mathrm{Max}(S)$。

若 $I \in \mathrm{QMax}(R)$，命题 3.4 表明 $IS \in \mathrm{QMax}(S)$。

反之，假设 $IS \in \mathrm{QMax}(S)$，并设 $M \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathrm{V}(I)$。

若 $IS \in \mathrm{Q_i Max}(S)$，这意味着 $IS = MS$，从而得到 $I = M \in \mathrm{Q_i Max}(R)$。

现在假设 $IS \in \mathrm{Q_d Max}(S) \cup \mathrm{Q_r Max}(S)$，因此 $MS \succ IS$且 $M \neq I$。我们断言 $M \succ I$。否则，存在一个理想 K属于 R，使得 $I \subset K \subset M$，从而得到 $IS \subseteq KS \subseteq MS$。由于 $MS \succ IS$，可知要么 $KS = IS$，从而得到 $K = KS \cap R = IS \cap R = I$；要么$KS = MS$，从而得到 $K = KS \cap R = MS \cap R = M$，两种情况都导出矛盾。因此， $M \succ I$，所以 I 是 R 的次极大理想，进而属于 $\mathrm{QMax}(R)$。若这些条件成立，根据命题 3.4， I 和IS 是同型的。□

推论 3.14。 设 $R \subseteq S$ 是一个纯扩张，且 极大理想(S) ={$MS \mid M \in$ 极大理想(R) }。理想 I 属于 R，当且仅当$IS \in$QMax(S)时，它属于 QMax(R) 。若此条件成立，则 I 和 IS 是同型的。

证明。 应用定理 3.13。 □

推论 3.15。 设 R 是一个半局部环，且满足 极大理想$(R) = \{M_1, \ldots M_n\}$。令 $S := \prod_{i=1}^{n} R_{M_i}$。则以下性质成立：

(1) $R \subseteq S$ 是纯的。(2) 极大理想$(S) = \{M_1S, \ldots, M_nS\}$。(3) R 的理想 I 属于 QMax(R) 当且仅当 $IS \in$QMax(S)。在这种情况下， I 和 IS 是同型的。

证明。 (1) 可由 [22, 例 1.3。2]。

(2) 设 $N \in$极大理想(S)。那么，存在某个 $M_i \in$ 极大理想(R)，使得 $N = M_iR_{M_i} \times R'$，其中 $R' := \prod_{j \neq i} R_{M_j}$（重新排列后）。但对于 $j \neq i$，我们有 $M_iR_{M_j} = R_{M_j}$，因此 $N = M_iS$，从而得到极大理想(S) ={$M_1S, \ldots M_nS$}。

(3) 使用推论3.14。 □

推论 3.16。 设 $R \subseteq S$ 是一个扩张，且 $f : S \to R$ 是扩张 $R \subseteq S$ 在 R-模范畴中的一个截面。则以下性质成立：

(1) $R \subseteq S$ 是纯的。(2) 若 $I \in$QMax(R)，则 $J := f^{-1}(I) \in$QMax(S) 且 $I = J \cap R$。(3) 若 $J \in$QMax(S) 包含 核(f)，则 $I := f(J) \in$QMax(R)。

在这两种情况下， $J = I +$ 核(f) 和 $I = J \cap R$ 均成立。

证明。 (1) $R \subseteq S$ 是纯的，因为扩张 $R \subseteq S$在 R-模范畴中存在一个截面。此外， f 是满射的，因此 $R \cong S/$核(f) 且 $f(x) = x$对任意 $x \in R$均成立。特别地，核$(f) \cap R = 0$。

(2) 设 $I \in$ QMax(R)。根据 [1, 命题 2（ii）]， $J := f^{-1}(I) \in$QMax(S)，且 $J = \{x \in S \mid f(x) \in I\}$。因此 $J = I +$核(f)，因为对任意 $x \in I$， $f(x) = x$，并且 $I = J \cap R$成立。

(3) 设 $J \in$QMax(S)，其中 Ker$(f) \subseteq J$，并令 $I := f(J)$。于是，根据 [1, 命题 2（i）]，$f(J) \in$QMax(R)。此外， $J = I +$Ker(f) 和 $I = J \cap R$ 也成立，因为对任意 $x \in I$， $f(x) = x$。□

由于忠实平坦态射是纯的，我们可以将关于纯扩张所得的结果应用于忠实平坦扩张。

命题3.17。 若(R, M) 是一个局部环， I是 R 的理想，且$f(X) \in R[X]$ 是一个首一多项式，则以下性质成立：

(1) $R \subseteq R[X]/(f(X))$ *is pure.*

(2) $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当 $I[R[X]/(f(X))] \in \mathrm{QMax}(R[X]/(f(X))$，此时 I和 $I[R[X]/(f(X))]$是同型的。

证明。 令 $R' := R[X]/(f(X))$.

(1) 由于 $R \subseteq R'$ 是自由的，因此它是忠实平坦的，进而是纯的。

(2) 设 $N \in \mathrm{Max}(R[X])$ 满足 $f(X) \in N$。根据 [34,定理 6.9],，我们有 $M = N \cap R$和 $N = M[X] + f(X)R[X]$。由此可推得 $N' := N/(f(X)) = (M[X] + f(X)R[X])/(f(X)) \cong MR'$。我们可以应用定理 3.13，因此 $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当 $IR' \in \mathrm{QMax}(R')$。若这些命题成立，则 I和 IR' 是同型的。□

命题 3.18。 设 R是一个环， $f_1, \ldots, f_n \in R$满足$\{\mathrm{D}(f_i) \mid i \in \mathbb{N}_n\}$ 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的一个划分，并令 $S := \prod_{i=1}^{n} R_{f_i}$。 R 的理想 I 属于 $\mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当 $IS \in \mathrm{QMax}(S)$，此时 I 与 IS 是同型的。

证明。由 [6, 命题 3, p.137]，我们知道 $R \subseteq S$ 是忠实平坦的。因此 $R \subseteq S$ 是纯的。为了应用推论 3.14，我们证明 $\mathrm{Max}(S) = \{M \mid M \in \mathrm{Max}(R)\}$。 S的任一极大理想在重新排序后都可写成 $M_i R_{f_i} \times \prod_{j \neq i} R_{f_j}$, 其中$M_i \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathrm{D}(f_i)$。由于 $\{\mathrm{D}(f_i)\}$ 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的一个划分，对于任意 $j \neq i$，我们有 $M_i \notin \mathrm{D}(f_j)$，这意味着对于任意$j \neq i$， $f_j \in M_i$ ，因此对于任意 $j \neq i$， $M_i R_{f_j} = R_{f_j}$。于是， $M_i R_{f_i} \times \prod_{j \neq i} R_{f_j} = M_i R_{f_i} \times \prod_{j \neq i} M_i R_{f_j} = M_i(R_{f_i} \times \prod_{j \neq i} R_{f_j}) = M_i S$。反过来，设$M \in \mathrm{Max}(R)$。由于 $\{\mathrm{D}(f_i)\}$ 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的一个划分，存在某个$i \in \mathbb{N}_n$ 使得 $f_i \notin M$。前面的证明还表明，对于任意 $j \neq i$及任意 $S\mathrm{Max}(S)$，都有 $f_j \in M$和 $MS = MR_{f_i} \times \prod_{j \neq i} R_{f_j} \in$。综上可得，$\mathrm{Max}(S) = \{MS \mid M \in \mathrm{Max}(R)\}$。于是，由推论 3.14 可知，对于 S的理想 I， $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当 $IS \in \mathrm{QMax}(S)$。若这些结论成立，则 I 与 IS 是同型的。□

命题 3.19。 设$(R$、 $M)$是一个局部环， R^h 是其亨泽尔化， I 是 R的一个理想。那么，当且仅当 $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 时， $IR^h \in \mathrm{QMax}(R^h)$，此时 I 和 IR^h 是同型的。

证明。 我们知道， $R \subseteq R^h$ 是忠实平坦的，因而是纯的。此外， R^h 是一个极大理想为 MR^h的局部环。那么，推论3.14 表明，对于 I 的一个理想 R, $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当$IR^h \in \mathrm{QMax}(R^h)$，此时 I 和 IR^h 是同型的。 □

对于任意环 R，存在扩张 $R \subseteq R(X)$，其中$R(X) = R[X]_{\Sigma_R}$ ，且 Σ_R 是由 $R[X]$的所有本原多项式组成的乘法闭集合。环 $R(X)$ 称为 R 的<风格 id='11'>永田</风格>环。我们将研究准极大

环的理想 R 在其永田环中的传递。回顾 $R \subseteq R(X)$ 是忠实平坦的，并且 $\mathrm{Max}(R(X)) = \{M(X) \mid M \in \mathrm{Max}(R)\}$ [11, 节 3]。

命题 3.20. 环 R 的理想 I 属于$\mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当 $IR(X) \in \mathrm{QMax}(R(X))$。在这种情况下， I 和 $IR(X)$是同型的。

证明。我们知道 $R \subseteq R(X)$ 是忠实平坦的，因此也是纯的。此外，$\mathrm{Max}(R(X)) = \{MR(X) \mid M \in \mathrm{Max}(R)\}$。于是，推论 3.14 表明，对于 R 的理想 I， $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当$IR(X) \in \mathrm{QMax}(R(X))$。如果这些陈述成立，那么 I 和 $IR(X)$ 是同型的。□

扩张 $R \subseteq S$ 称为局部 的，如果 $\mathrm{U}(R) = \mathrm{U}(S) \cap R$。

命题 3.21. 设 $(R, M) \subseteq (S, N)$ 是一个局部平坦扩张，且 $N = MS$。环 R 的理想 I 属于$\mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当 $IS \in \mathrm{QMax}(S)$，此时， I 和 IS 是同型的。

证明。根据 [15, 命题 6.6。1]， $R \subseteq S$ 是忠实平坦的，因此是纯的。此外，$\mathrm{Max}(S) = \{N\} = \{MS\} = \{M'S \mid M' \in \mathrm{Max}(R)\}$。于是，推论3.14 表明，对于 I 中的一个理想 R， $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当 $IS \in \mathrm{QMax}(S)$。若这些结论成立，则I 与 IS 是同型的。□

本节中关于扩张 $R \subseteq S$ 以及理想 I 成为准极大理想这一性质的传递的多数结果，都是在假设 $I \subseteq M \in \mathrm{Max}(R)$ 满足 $MS \in \mathrm{Max}(S)$ 的情况下得到的。正如我们现在将看到的，这一性质对于平坦满同态并非总是成立。

命题 3.22。 设 $R \subseteq S$ 是一个平坦满同态， J 是 S 的一个理想，且满足 $I := J \cap R \in \mathrm{QMax}(R)$。则 $J = IS \in \mathrm{QMax}(S)$ ，并且与 I 同型。

证明。由于 $R \subseteq S$ 是平坦满同态，我们可推得 $J = IS$。此外， $J \neq S$ ，因为 $I \neq R$，所以存在 $N \in \mathrm{Max}(S)$，使得 $J \subseteq N$。于是，$I = J \cap R \subseteq N \cap R \in \mathrm{Spec}(R)$，且满足以下两种情况之一：$I \in \mathrm{Max}(R)$（$*$），或者 I 是 R ($**$) 的次极大理想。情况（$*$）意味着 $J \in \mathrm{Max}(S)$。在情况（$**$）下，我们得到 $I \subset M := N \cap R \in \mathrm{Max}(R)$。再次利用 $R \subseteq S$ 是平坦满同态这一事实，可得 $N = MS \in \mathrm{Max}(S)$。于是， $J = IS$ 是 S 的次极大理想，且 $J \subset N$，因为 $I \prec M$ 意味着 $J \prec N$。

若 $I \in \mathrm{Q_d Max}(R)$，则 $I = MM'$，其中 $M' \in \mathrm{Max}(R)$ $M' \neq M$。由此可得 $J = IS = MM'S = NM'S \subset N$。由于 $J \neq N$，我们既没有 $M'S = S$；又由于 $M \neq M'$，我们也没有 $MS = M'S$。设 $N' := M'S$。则 $N' \in \mathrm{Max}(S)$，且 $N' \neq N$，这意味着 $J = N \cap N' \in \mathrm{Q_d Max}(S)$。

若 $I \in \mathrm{Q_rMax}(R)$，则 $\sqrt[R]{I} = \overline{M}$，从而 $\sqrt[R]{IS} = \overline{M}S \in \mathrm{Max}(S)$。由于 $I = IS \cap R$，因此 $J = IS \in \mathrm{Q_rMax}(S)$，根据推论 3.5。无论如何，$IS \in \mathrm{QMax}(R)$ 与 I 同型。 □

命题 3.23. 设 R 是一个环，使得 $R = \sum_{i=1}^{n} Rf_i$，且 I 是包含于某个 $M \in$ 极大理想(R) 中的理想，其中存在某个 $f_i \notin M$。若$I \in \mathrm{QMax}(R)$，则 $IR_{f_i} \in \mathrm{QMax}(R_{f_i})$。

若 I 对 R_{f_i} 是饱和的，则逆命题成立。

证明。由于 $R = \sum_{i=1}^{n} Rf_i$，对于任意 $M \in$ 极大理想(R)，存在某个 $f_i \notin M$。设 I 是 R，$I \subseteq M$ 的一个理想，其中某个 $M \in$ 极大理想$(R) \cap \mathrm{D}_R(f_i)$。那么，$MR_{f_i} \in$ 极大理想(R_{f_i}) 且 $M = MR_{f_i} \cap R$。特别地，$f_i \notin I$。

首先假设 $I \in \mathrm{QMax}(R)$。

若 $I \in \mathrm{Q_i}$极大理想$(R) \cup \mathrm{Q_d}$极大理想(R)，则 IR_{f_i} 也如此，因为它要么是极大理想，要么是 R_{f_i} 的两个极大理想的交。

若 $I \in \mathrm{Q_rMax}(R)$，根据定义 2.3，$M = \sqrt[R]{I}$ 和 I 是M-准素的。我们断言 $I = IR_{f_i} \cap R$。我们有 $I \subseteq IR_{f_i} \cap R$。设 $x \in IR_{f_i} \cap R$。存在 $a \in I$、$b \in R$ 和一个正整数n，使得 $x = a/f_i^n = b/1$。因此，对某些正整数 m和 k，有 $af_i^m = bf_i^k$，从而 $bf_i^k \in I$且 $f_i^k \notin M$，得到 b和 $x \in I$。于是，$I = IR_{f_i} \cap R$，并由推论 3.5 可知$IR_{f_i} \in \mathrm{Q_rMax}(R_{f_i})$。

反过来，假设 I关于 R_{f_i}是饱和的，即 $I = IR_{f_i} \cap R$且 $IR_{f_i} \in \mathrm{QMax}(R_{f_i})$。由于 $I \subseteq M$，我们有 $IR_{f_i} \subseteq MR_{f_i}$，其中$MR_{f_i} \in \mathrm{Max}(R_{f_i})$。令 $I' := IR_{f_i}$，$M' := MR_{f_i}$且 $R' := R_{f_i}$。

若 $I' \in \mathrm{Q_iMax}(R') \cup \mathrm{Q_dMax}(R')$，即它要么是一个极大理想，要么是 R' 的两个极大理想的交，则 I 也满足同样的性质，因而是准极大理想。

若 $I' \in \mathrm{Q_rMax}(R')$，则有 $M'^2 \subseteq I' \subset M'$，从而 $M^2 \subseteq M'^2 \cap R \subseteq I = I' \cap R \subset M = M' \cap R$，因此由 [36, 推论 1，第 153] 页可知，I 是 M-准素理想。要证明 $I \in \mathrm{Q_rMax}(R)$，根据定理 2.9，只需证明 $M \succ I$。由于 $M' \succ I'$，存在某个 $t \in R'$ 使得$M' = I' + R't$，其中 $t \in M'$。于是，对某个整数 k，有 $t = x/f_i^k$，且 $x \in M$。我们断言 $M = I + Rx$，其中 $x \in M \setminus I$。首先，$x \notin I$；否则应有 $M' = I'$。当然，$I \subseteq I + Rx \subseteq M$ （$*$）。令$m \in M$，则 $m/1 \in M'$，从而 $m/1 = (a+bx)/f_i^n$，其中 $a \in I$、$b \in R$，且 $n \geq 0$ 为某个整数。于是，存在某些正整数 t 和 s，使得 $f_i^t m = af_i^s + bf_i^s x \in I + Rx$；根据（$*$），这是一个 M-准素理想。由于 $f_i^t \notin M$，我们推得 $m \in I + Rx$，因此 $M = I + Rx$。接着，根据 [36, 推论 2，第 237] 页可得$M \succ I$，且 $I \in \mathrm{Q_r}$ $\mathrm{Max}(R)$。□

命题 3.24. 设 R 是一个环。理想 I R 属于 $\mathrm{QMax}(R)$，当且仅当对于任意 $M \in \mathrm{V}(I)$，都有$\mathrm{V}(I) \subseteq \mathrm{Max}(R)$ $IR_M \in \mathrm{QMax}(R_M)$。

$|V(I)| \leq 2$，且对于任意 $M \in V(I)$，都有 $IR_M \in Max(R_M)$；当 $|V(I)| = 2$ 时，I 和 IR_M 是同型的，其中 $I \in Q_iMax(R) \cup Q_rMax(R)$。若 $I \in Q_dMax(R)$，则 $IR_M \in Q_iMax(R_M)$。

证明。假设 $I \in \mathrm{QMax}(R)$，并令 $M \in \mathrm{V}(I) \subseteq$ 极大理想(R)。那么，$M = MR_M \cap R$且 $\{MR_M\} =$极大理想(R_M)。根据命题 3.11 和注 3.12，我们得到 $IR_M \in \mathrm{QMax}(R_M)$，且它与 I同型的，其中 $I \in \mathrm{Q_i}$极大理想$(R) \cup \mathrm{Q_r}$极大理想(R)。若 $I \in \mathrm{Q_d}$极大理想(R) 的形式为 $I = M_1 \cap M_2 = M_1M_2$，$M_i \in$ 极大理想(R)，其中 $i \in \mathbb{N}_2$，则 $M \in \{M_1, M_2\}$。例如，假设 $M = M_1$，于是 $M_2R_M = R_M$，$IR_M = MR_M \in \mathrm{Q_i}$极大理想$(R_M)$，并且根据定理 2.4，$|\mathrm{V}(I)| \leq 2$。

反之，假设对于任意 $M \in \mathrm{V}(I)$ 和满足 $IR_M \in \mathrm{Max}(R_M)$ 的任意 $M \in \mathrm{V}(I)$，当 $|\mathrm{V}(I)| = 2$ 时，$\mathrm{V}(I) \subseteq \mathrm{Max}(R)$ $IR_M \in \mathrm{QMax}(R_M)$。

若 $|\mathrm{V}(I)| = 1$，则 I 只包含于一个极大理想 M 之中 R。因此，$\sqrt{I} = M$ 和 I 是 M-准素的，依据 [36, 推论 1，第153]。

若 $IR_M \in \mathrm{Q_iMax}(R_M)$，则由 [36, 推论 2，第225] 可得 $IR_M = MR_M$ $IR_M \cap R = MR_M \cap R = M = I \in \mathrm{Q_iMax}(R)$。

若 $IR_M \in \mathrm{Q_rMax}(R_M)$，我们断言 I 是次极大的。当然，$I \neq M$，因为 $IR_M \neq MR_M$，由前面的证明可得 $IR_M \in \mathrm{Q_iMax}(R_M)$。假设存在 R 中的一个理想 J，使得 $I \subset J \subset M$ $(*)$。因此，J 也是 M- 准素的，而 $(*)$ 根据 [36, 推论 2，第225] 将推出 $IR_M \subset JR_M \subset MR_M$；但这与 IR_M 是次极大的矛盾。于是，$I \in \mathrm{Q_rMax}(R)$。

若 $|\mathrm{V}(I)| = 2$，则对于任意 $M \in \mathrm{V}(I)$，$IR_M = MR_M \in \mathrm{Max}(R_M)$，且 I 包含于两个极大理想 M 和 M'中。因此$I \subseteq J := M \cap M'$，其中 $IR_M = JR_M$，$IR_{M'} = JR_{M'}$并且对于任意 $M'' \in \mathrm{Max}(R)$，$IR_{M''} = JR_{M''} = R_{M''}$，这意味着 $I = J$和 $I \in \mathrm{Q_dMax}(R)$。□

注记 3.25。命题 3.24 的逆命题一般而言并不成立，若 I 包含于多个极大理想中；若 I 包含于至少三个极大理想中，则逆命题绝不成立。最后这一结论显然。若 $I \subseteq M \cap M'$对于 M，$M' \in \mathrm{Max}(R)$ 满足$IR_M \in \mathrm{Q}$ $\mathrm{Max}(R_M)$，那么 I 属于 $\mathrm{QMax}(R)$ 的唯一可能性是 $I \in \mathrm{Q_dMax}(R)$ 且 $I = M \cap M'$。

4. Quasi-maximal ideals and finite minimal extensions

4.1. FCP 扩张中的准极大理想。在考察极小扩张之前，我们先考虑有限扩张。扩张 $R \subseteq S$ 的子扩张链 $\mathcal{C}$ 是 $[R, S]$ 中一族两两可比较的元素。我们称扩张 $R \subseteq S$ 具有

FCP（或称为 FCP 扩张），如果 $[R,S]$ 中的每条链都是有限的；等价地说，其格 $[R,S]$ 是阿廷的且诺特的。FCP 扩张是有限生成的；若其为整扩张，则是（模）有限的。

若 $R \subseteq S$ 具有 FCP，则 $[R,S]$的任意极大（必为有限）链，形式为 $R = R_0 \subset R_1 \subset \cdots \subset R_{n-1} \subset R_n = S$，其长度 $n < \infty$可由拼接 n 极小扩张 $R_i \subset R_{i+1}$，$0 \leq i \leq n-1$得到。

Ferrand-Olivier [13]引入了极小扩张。若扩张 $R \subset S$ 满足 $[R,S] = \{R,S\}$，则称其为极小扩张；在此情形下，根据 [13, 定理 2.2]，对某个 $M \in \mathrm{Max}(R)$，$\mathrm{Supp}_R(S/R) = \{M\}$。极小扩张要么是平坦满同态，要么是严格单态射；后一种情形下，它是（模）有限的。回顾一下，有限扩张 $R \subset S$ 是指满足 S 为有限生成 R-模的扩张。存在三种极小整扩张类型，将在下一个定理中予以刻画（这是 Ferrand-Olivier 基本引理的推论）；因此，极小扩张共有四种类型，且彼此互斥。从现在起，若 $R \subset S$ 是极小有限扩张，我们就称 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}$。

定理 4.1。 [10, 定理 2.1、2.2 和 2。3]。扩张 $R \subset T$当且仅当属于 $\mathcal{M}$，且 $M := (R : T) \in$ 极大理想 (R)，并且以下三个陈述之一成立：

***(a)* 惰性情形**：$M \in$极大理想(T)，且 $R/M \to T/M$是一个最小域扩张。

***(b)* 分解情形**：存在 M_1、$M_2 \in$极大理想(T)，使得 $M = M_1 \cap M_2$，且自然映射 $R/M \to T/M_1$ 和 $R/M \to T/M_2$ 都是同构；或者，等价地，存在 $q \in T \setminus R$ 使得$T = R[q]$、$q^2 - q \in M$和 $Mq \subseteq M$。

***(c)* 分歧情形**：存在 $M' \in$极大理想(T)，使得 $M'^2 \subseteq M \subset M'$、$[T/M : R/M] = 2$，且自然映射 $R/M \to T/M'$是同构；或者，等价地，存在 $q \in T \setminus R$ 使得 $T = R[q]$、$q^2 \in M$和 $Mq \subseteq M$。特别地，$\mathrm{c}(T/M') = \mathrm{c}(T/M)$。

在上述每种情形中，$\mathrm{Supp}(T/R) = \{M\}$。

证明。我们证明 (c) 的最后一个结果。由于 $R/M \cong T/M'$，可得 $\mathrm{c}(T/M') = \mathrm{c}(R/M)$。根据 [12, 命题 4.7]，$R/M \subset T/M$ 属于 $\mathcal{M}$，且 $\mathrm{c}(T/M) = \mathrm{c}(R/M)$ 推出 $\mathrm{c}(T/M') = \mathrm{c}(T/M)$。□

注 4.2. (1) $q \in T$ 在定理 4.1 的 (b)（分别为 (c)）中得到的元素满足 $q \in M_1$ 或 $q \in M_2$（分别为 $q \in M'$），其中 $M_1 = M + Rq$ 或 $M_2 = M + Rq$（分别为 $M' = M + Rq$）。这让人想起 M 中分解理想（分别为分歧理想）的定义T。这种类比将在定理 4.9中得到。

(2) 为了简化表述，对于扩张 $R \subset S$ 且 $\mathcal{M}$，若 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$（分别为 $\mathcal{M}_d$、 $\mathcal{M}_r$），则称该扩张为极小惯性（分别为分解、分歧）扩张。

(3) 假设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_d$，并令 $M := (R : S)$。存在 $M_1, M_2 \in$ 极大理想(S)，使得 $M = M_1 \cap M_2$。于是， $M \prec M_1$ 属于 S，其中 $M = M_1 \cap R$。令 $I' := M$，$J' := M_1$，$I := I' \cap R = M$ 和 $J := J' \cap R = M$，则有 $I' \prec J'$ 属于 S 且 $I = J$。由于 $\mathrm{V}(I' \cap R) \cap \mathrm{Supp}(S/R) \neq \emptyset$，命题 3.7 无法适用。

对于任意扩张 $R \subseteq S$，其长度 $[R, S]$记为 $\ell[R, S]$，是 R-子代数 S的链长度的上确界。需要注意的是，如果 $R \subseteq S$ 具有 FCP，那么确实存在一条 R-子代数 S 的极大链，其长度为 $\ell[R, S]$ [11, 定理 4。11]。

命题 4.3。有限扩张 $R \subseteq S$ 满足 $(R : S) \in \mathrm{QMax}(R)$具有 *FCP*。

证明。 根据定理 2.4， $R/(R : S)$至多有三个真理想，因此是一个阿廷环。因此 $R \subseteq S$ 是整的，并根据 [10,定理 4.2]具有 FCP。 □

命题 4.4。 设 $R \subseteq S$ 是有限扩张， $J \in \mathrm{QMax}(S)$ 且$I := J \cap R$。

(1) 若 $J \in Q_i Max(S)$，则 $I \in Q_i Max(R)$。*(2)* 设 $J \in Q_d Max(S)$，使得 $J = N_1 \cap N_2$ 满足 $N_1, N_2 \in Max(S), N_1 \neq N_2$。那么：*(a)* $N_1 \cap R = N_2 \cap R$ 蕴含 $I \in Q_i Max(R) \cup Supp(S/R)$。*(b)* $N_1 \cap R \neq N_2 \cap R$ 蕴含 $I \in Q_d Max(R)$。*(3)* 若 $J \in Q_r Max(S)$，令 $N := \sqrt[S]{J}$。那么， R/I 是一个局部环，其极大理想为 $M' := (N \cap R)/I$。此外，若 M' 是主的，则 $I \in Q_r Max(R)$。

证明。 （1）由于 $R \subseteq S$ 是整的，因此对于任意 $N \in$， $N \cap R \in$ 是 R 的极大理想。所以（1）显然成立。

（2）由于 $J \in \mathrm{Q_d}$ 是 S 的极大理想，因此 $J = N_1 \cap N_2$ 满足 N_1， $N_2 \in$ 是 S 的极大理想，$N_1 \neq N_2$。令 $M_i := N_i \cap R \in$ 为 R 的极大理想，其中 $i \in \mathbb{N}_2$。于是， $I = N_1 \cap N_2 \cap R = M_1 \cap M_2$。

（a）如果 $M_1 = M_2$，那么 $I \in \mathrm{Q_i Max}(R) \cup \mathrm{Supp}(S/R)$ 。例如，当 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_d$ 且 $J = (R : S)$（见定理 4.1）时，这一结论成立。在这种情况下，对于 $R/M_1 \cong S/N_i$ 有 $i \in \mathbb{N}_2$。

（b）如果 $M_1 \neq M_2$，那么 $I \in \mathrm{Q_d}$ 是 R 的极大理想。

(3) 假设 $J \in \mathrm{Q_r Max}(S)$ 并令 $N := \sqrt[S]{J}$. 那么， S/J 根据定理 2.4，它是一个局部环，且只有有限多个理想。 S/J是阿廷环，因此也是诺特环。所以，根据 Eakin-Nagata 定理， R/I 也是诺特环，因为 $R/I \subseteq S/J$ 是有限的，而 R/I 是局部环

其极大理想为 $M' := (N \cap R)/I$。令 $R' := R/I$, $S' := S/J$以及 $N' := N/J$。根据命题 2.5, S'是一个满足$N'^2 = 0$的 SPIR。由于 $M' = N' \cap R'$，我们得到 $M'^2 = 0$。

如果 M'是主理想，也就是说 $M' = R'x$，那么 M'是R' 中唯一一个非零理想。由此可得 R' 是一个 SPIR，且 $M'^2 = 0$。因此， $I \in \mathrm{Q_rMax}(R)$，由命题 2.5 得出。□

我们考虑一个 FCP 扩张 $R \subseteq S$，并求出使 $(R : S) \in \mathrm{QMax}(S)$ 成立的条件。我们回顾一些所需的定义。

定义 4.5。设 $R \subseteq S$ 是一个扩张。半正规化$_S^+R$ 在 R 中的 S 是 R 在 S 中的最大次整扩张，而*t*-闭包 $_S^tR$ 是 R 在 S中的最大亚整扩张。扩张 $R \subseteq S$ 称为*t*-闭（分别称为半正规），如果 $_S^tR = R$（分别为$_S^+R = R$）（见 [24] 和 [35]）。

扩张 $R \subset S$ 的导子在 S 中是准极大惰性的情形，有一个简单的刻画。

命题 4.6. 若 $R \subset S$ 是一个整扩张，且 $(R : S) \in \mathrm{Q_iMax}(R)$，则 $(R : S) \in \mathrm{Q_iMax}(S)$ 当且仅当 $R \subset S$ 是 *t*-闭的。

证明。令 $M := (R : S) \in \mathrm{Max}(R)$。若 $M \in \mathrm{Q_iMax}(S)$，则 $R/M \subset S/M$ 是一个整域扩张。由此，根据 [24, 引理 3.10], , $R/M \subset S/M$ 是 t-闭的，因而根据 [8, 命题 2.13], $R \subset S$ 也是 t-闭的。

反过来，假设 $R \subset S$ 是 t-闭的，则 $R/M \subset S/M$也是 t-闭的。由前述两个结果可知， S/M 是一个域。因此，我们得到 $M \in \mathrm{Q_iMax}(S)$。□

在本文其余部分的大多数情况下，得益于前述命题，我们将不考虑扩张 $R \subset S$ 的导子属于 $\mathrm{Q_i}$极大理想(S)的情形。

下一个引理将会很有用。

引理 4.7。设 $R \subset S$是一个整 *FCP i*-扩张，其中（R、 M）是局部环，因此 S 也是局部的。设 N 为其极大理想。置 $T := {}^tR = {}^+R$。

$$Then, \ \mathrm{L}_R^S(M/(R : S)) = \mathrm{L}_S(N/(R : S))[S/N : R/M] - \ell[R, T].$$

证明。由于 $R \subset S$是一个整 FCP i-扩张，其中（R， M）是局部环，所以 S 也是局部环。由此，根据 [31,命题 5.2], 和 $M = N \cap R$，可得 $T := {}_S^tR = {}_S^+R$。置 $I := (R : S)$。因此， N和 I也是 T的理想，并且（T， N）是局部环。根据 [21,定理 13，第 168],页，我们有 $\mathrm{L}_T(N/I) = \mathrm{L}_S(N/I)[S/N : T/N]$。

由于 $R \subset S$ 具有 FCP， $R \subset T$也如此。设 $\{R_i\}_{i=0}^n$ 是 $[R, T]$的一条极大链，其中 $R_0 := R$， $R_n := T$，且对每个 $R_{i-1} \subset R_i$， $\mathcal{M}$ 都属于

$i \in \mathbb{N}_n$。根据 [10, 引理 5.4]，$n = \ell[R,T]$。每个 $R_{i-1} \subset R_i$ 都属于 $\mathcal{M}_r$，依据 [29, 命题 4.5]。令 $N_i := N \cap R_i$，则每个 (R_i, N_i) 都是一个局部环，并且仍以 I 为理想。此外，$I \subseteq N_i$。我们将对 $i \in \mathbb{N}_n$ 进行归纳，证明 $\mathrm{L}^{R_i}(N_i/I) = \mathrm{L}_T(N/I) - (n-i)$ (∗)。对于 $i = n$，我们有 $\mathrm{L}^{R_n}(N_n/I) = \mathrm{L}_T(N/I)$，且 (∗) 成立。

假设对于某个 $i \in \mathbb{N}_n$，(∗) 成立，因此 $\mathrm{L}^{R_i}(N_i/I) = \mathrm{L}_T(N/I) - (n-i)$。由于 $R_{i-1} \subset R_i$ 属于 $\mathcal{M}_r$，且 $N_{i-1} = (R_{i-1} : R_i)$，我们有 $\mathrm{L}^{R_i}(N_i/N_{i-1}) = 1 = \mathrm{L}^{R_i}(N_i/I) - \mathrm{L}^{R_i}(N_{i-1}/I)$。利用 [10, 引理 5.4] 和 [21, 定理 13，第 168], 页，我们推得 $\mathrm{L}^{R_i}(N_i/I) - 1 = \mathrm{L}^{R_i}(N_{i-1}/I) = \mathrm{L}^{R_{i-1}}(N_{i-1}/I) = \mathrm{L}_T(N/I) - (n-i) - 1 = \mathrm{L}_T(N/I) - (n-i+1) = \mathrm{L}_T(N/I) - (n-(i-1))$，且 (∗) 对 $i-1$ 成立。因此，(∗) 对每个 $i \in \mathbb{N}_n$ 都成立，故 $\mathrm{L}_R(M/I) = \mathrm{L}_T(N/I) - n = \mathrm{L}_T(N/I) - \ell[R,T] = \mathrm{L}_S(N/I)[S/N : R/M] - \ell[R,T]$。□

现在我们能够刻画一个 FCP 整扩张 $R \subset S$ 使得 $(R : S) \in \mathrm{Q_d}$极大理想$(S) \cup \mathrm{Q_r}$极大理想(S)，这是由命题 4.6得到的。

定理 4.8。设 $R \subset S$ 是一个 *FCP* 整扩张，并令 $T := \overset{t}{S}R$。那么，

(1) $(R : S) \in Q_{\mathrm{d}}$极大理想$(S)$ 当且仅当以下两种情况之一成立：$R = T$ 且 $|V_R((R : S))| = 2$ （在此情形下，$(R : S) \in Q_{\mathrm{d}}$极大理想$(R)$），或者 $R \subset T$ 属于$\mathcal{M}_d$ 且 $|V_R((R : S))| = 1$ （在此情形下，$(R : S) \in Q_{\mathrm{i}}$极大理想$(R)$）。*(2)* $(R : S) \in Q_{\mathrm{r}}$极大理想$(S)$ 当且仅当 $R \subset S$ 是一个 *i*-扩张，且 $|Supp_R(S/R)| = 1$；令 $\{M\} := Supp_R(S/R)$，并设 $N := \sqrt[S]{MS}$，则有：$[S/N : R/M] = L_R(N/(R : S))$。

证明。我们设 $I := (R : S)$，这是 $[R,S]$ 中任意元素共有的一个理想。

(1) 假设 $I \in \mathrm{Q_d}$极大理想(S)，即 $I = N_1 \cap N_2$，$N_1 \neq N_2$，其中$N_i \in$ 极大理想(S) 对于 $i \in \mathbb{N}_2$成立。设 $M_i := N_i \cap R$，于是 $M_i \in$ 极大理想(R) 对于$i \in \mathbb{N}_2$ 成立。则 $I = M_1 \cap M_2$。有两种情况：(a)：$M_1 \neq M_2$ 或 (b)：$M_1 = M_2$。

在情况 (a) 下，$I \in \mathrm{Q_d}$极大理想(R)，由命题 4.4 得出。此外，$R = T$ 由[30, 命题 2。5] 因为 $|\mathrm{V}_R(I)| = 2$。

反过来，若 $R = T$ 满足 $|\mathrm{V}_R(I)| = 2$，则 $|\mathrm{V}_R(I)| = \mathrm{V}_S(I)| = 2$。再次根据 [30, 命题 2。5]，$R \subset S$ 是 t-闭的，且是 S 的两个极大理想的交。于是，$I \in \mathrm{Q_d}$极大理想(R)。

在情况（b）中，$I = M_1 = M_2 \in \mathrm{Q_i}$极大理想$(R)$根据命题4.4。此外，$R \subset T$ 属于 $\mathcal{M}_d$，其中 $|\mathrm{V}_R(I)| = 1$ 且 $|\mathrm{V}_T(I)| = |\mathrm{V}_S(I)| = 2$ 根据定理4.1。

反过来，假设 $R \subset T$ 属于 $\mathcal{M}_d$，且 $\mathrm{V}_R(I)| = 1$。那么，$R \subset T$ 和 $R \subset S$ 是半正规的，这意味着 $I \in \mathrm{Max}(R)$。设 $J := (R : T) = M_1' \cap M_2'$，其中 $M_i' \in \mathrm{Max}(T)$，对 $i \in \mathbb{N}_2$成立，且$J \in \mathrm{Max}(R)$。由于 $I \subseteq J$，我们推得 $I = J = M_1' \cap M_2' = N_1 \cap N_2$，

其中，对每个 $i \in \mathbb{N}_2$， $N_i \in$ Max(S) 位于 M_i' 上方（由于 N_i 在两部分中起相同作用，因此沿用第一部分中的字母并无妨）。于是， $I \in$Q$_{\mathrm{d}}$Max(S)。

(2) 假设 $I \in$Q$_{\mathrm{r}}$极大理想(S)，并令 $N := \sqrt[S]{I} \in$ 极大理想(S)，从而得到 L$_S$(N/I) $= 1$。因此，Supp$_R$(S/R) $= \{M\}$，其中 $I \subseteq M :=N \cap R \in$ 极大理想(R)，由命题 5.7 和例 5.15] 得出。这意味着 $R \subset S$ 是一个 i-扩张，而 $N = \sqrt[S]{MS} \in$ 极大理想(S) 是 S 中位于 M 之上的唯一极大理想。根据引理 4.7，由于根据定理 12，第 166], 页，我们可以假设 (R, M) 是一个局部环：L$_R$(M/I) $=$L$_S$(N/I)[S/N: R/M] $- \ell[R,T] = [S/N$:$R/M] - \ell[R,T] = [S/N$: $R/M] -$L$_R$(N/M) (∗)，由引理 5.4] 得出，因为 $R \subseteq T$ 是次整的，且 $N \in$ 极大理想(T)，因为 $I \subseteq (T$: $S)$。于是 (∗) 表明 L$_R$(M/I) $+$L$_R$(N/M) $=$L$_R$(N/I) $= [S/N$: $R/M]$。

反过来，假设 $R \subset S$ 是一个 i-扩张，且 |Supp$_R$(S/R)$| = 1$；令 $\{M\} :=$ Supp$_R$(S/R)，根据 $I \subseteq M$ [33, 命题 5.7 和例 5.15], , 并令 $N:= \sqrt[S]{MS} \in$ Max(S) $\cap$Max(T)，则有如下等式： $[S/N : R/M] =$ L$_R$(N/I)。由引理 4.7, [21, 定理 13，第 168] 页，以及 Supp$_R$(S/R) $= \{M\}$，可得 L$_R$(M/I) $=$ L$_{R_M}$(MR_M/IR_M) $=$L$_{S_M}$(NR_M/IR_M)[S/N: $R/M]-\ell[R_M, T_M] =$L$_S$(N/I) [S/N: $R/M]-\ell[R,T] =$L$_S$(N/I) L$_R$(N/I) $- \ell[R,T] =$L$_S$(N/I)L$_R$(N/I) $-$ L$_R$(N/M)；再次利用 [10,引理 5.4], , 它给出 L$_S$(N/I)L$_R$(N/I) $=$L$_R$(M/I) $+$ L$_R$(N/M) $=$L$_R$(N/I)，因此 L$_S$(N/I) $= 1$，因为 $N \neq I$。于是 $N \succ I$ 且 $I \in$Q$_{\mathrm{r}}$Max(S)。□

4.2. **极小扩张中的准极大理想**。 正如我们在定理 4.1 和注 4.2中回顾的，极小整扩张的导子 $R \subset S$ 具有与 S的准极大理想相同的刻画。本节中，我们考察与极小整扩张的导子相关联的 S 准极大理想$R \subset S$的性质。事实上，下面的定理表明，极小整扩张的导子 $R \subset S$ 属于 QMax(S)。

定理 4.9. 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}$。那么 $(R : S) \in$ 属于 QMax(S)，且与 $R \subset S$ 属于同一类型。

证明。 令 $M := (R : S) \in$ Max(R)。

根据定理 4.1，在惰性情形下，有 $M \in$Max(S) 且 $M \in$Q$_{\mathrm{i}}$Max(S)。

在分解情形下，存在 M_1, $M_2 \in$ Max(S)，使得$M = M_1 \cap M_2$ 且 $M \in$ Q$_{\mathrm{d}}$ Max(S)。

在分歧情形下，存在 $M' \in$ 极大理想(S)，使得 $M'^2 \subseteq M \subset M'$并且存在 $q \in S \setminus R$使得 $M' = M + Rq$根据

定理 4.1。特别是， M 是 M'中的准素理想 S。于是， [36,推论 2，第237] 页表明， $M' \succ M$ 在 S中，因此 $M \in \mathrm{Q_r}$极大理想(S)，由定理 2.9 和定义 2.3。□

下面的命题在一个特殊假设下给出了定理 4.9 的逆命题。

命题 4.10. 设 $R \subset S$ 是一个 *FCP* 亚整扩张，满足 $(R : S) \in \mathrm{QMax}(S)$。则，$R \subset S$ 是与 $(R : S)$ （在 S 中）同类型的极小扩张，因此 $(R : S) \in \mathrm{Max}(R)$。

证明。 令 $I := (R : S)$。由于 $\mathrm{Q_i Max}(S)$，我们按定理 4.8讨论两种情形，因为 $S = {}_S^t R$ 根据命题 4.6。

若 $I \in \mathrm{Q_d Max}(S)$，则 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_d$，且 $I \in \mathrm{Max}(R)$，因为$R \neq {}_S^t R$。

若 $I \in \mathrm{Q_r Max}(S)$，则 $R \subset S$ 是一个 i-扩张，因此 $R \subset S$ 是次整的，因为它是亚整的，且 $|\mathrm{Supp}_R(S/R)| = 1$。令 $\{\underline{M}\} := \mathrm{Supp}_R(S/R)$，其中 $I \subseteq M$，并令 $N := \sqrt[S]{MS}$。下列等式成立： $[S/N : R/M] = \mathrm{L}_R(N/I)$。但 $S/N \cong R/M$，因为 $R \subset S$ 是亚整的，所以 $\mathrm{L}_R(N/I) = \mathrm{L}_R(N/M) + \mathrm{L}_R(M/I) = 1$。由于 $N \neq M$，且 $S \neq R$，可得 $\mathrm{L}_R(N/M) \neq 0$，以及 $\mathrm{L}_R(M/I) = 0$。因此， $I = M$，由定理 4.1 可知 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_r$。事实上，$[S/M : R/M] = 2$，因为 $N = M + Sx$ 对某个 $x \in N \setminus M$ 成立，而同构 $R/M \cong S/N$ 表明 $S = R + N = R + Rx + Nx = R + Rx$，从而 $[S/M : R/M] = 2$。□

可以问定理 4.9是否有逆命题。事实上，下一个定理表明，给定一个环 S 和 $I \in \mathrm{QMax}(S)$，我们必须添加额外假设，才能存在一个子环 R 属于 S，使得 $R \subset S$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个扩张，且（$R : S$） $= I$。

定理 4.11。 设 S 是一个环，且 $I \in \mathrm{QMax}(S)$。那么，存在一个子环 R 属于 S，使得 $I = (R : S)$，且 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}$，当且仅当以下条件之一成立：

(1) $I \in \mathrm{Q_i Max}(S)$，且 S/I 是一个域，并且它有一个作为域的极大子环。
(2) $I \in \mathrm{Q_d Max}(S)$ 满足 $I = M_1 \cap M_2$，其中 M_1、$M_2 \in \mathrm{Max}(S)$ $M_1 \neq M_2$ 且 $S/M_1 \cong S/M_2$。*(3)* $I \in \mathrm{Q_r Max}(S)$ 满足 $M^2 \subseteq I \subset M$，其中 $M \in \mathrm{Max}(S)$ 且 $c(S/M) = c(S/I)$。

在上述每种情况下， $R \subset S$ 都是与准极大理想 I 类型相同的极小扩张。

证明。设 S 是一个环，且 $I \in \mathrm{QMax}(S)$。假设存在一个子环 R 属于 S，使得 $I = (R : S)$，其中 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}$。那么定理 4.9 和 4.1给出了等价关系的第一部分。

现在，假设条件 (1)、(2) 或 (3) 之一成立。根据 [12, 命题 4.7], ，可知存在 S 的一个子环 R，使得 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}$，且 $I = (R : S)$ 当且仅当 $R/I \subset S/I$ 属于 $\mathcal{M}$；如果该结论成立，则这两个扩张具有相同的类型。在这种情况下，由于 $I = (R : S)$，且 $R \subset S$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个扩张，可知 $I \in \mathrm{Max}(R)$，因此 R/I 是一个域。因此，如果存在 S 的一个子环 K，它是一个域，且 $K \subset S/I$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个扩张，那么所需的环 R 可由拉回 $R \subset S$ 得到。

$$\downarrow \qquad p \downarrow \text{其中 } p : S \to S/I \text{ 是自然满射。然后, } K \subset S/I$$

$R = p^{-1}(K)$。对于这样的环 R，我们得到 I 是 R 和 S 共有的理想，且 $K = R/I$，因此 $I = (R : S) \in$ 极大理想(R)，而 $R \subset S$ 是 $\mathcal{M}$ 中与前述文献中的 $K \subset S/I$ 同类型的扩张。因此，我们的问题归结为寻找条件，使得 S/I 存在一个极大子环 K，它是一个域，并且 $K \subset S/I$ 是 $\mathcal{M}$ 中与 S 中的准极大理想 I 同类型的扩张。我们将根据 S 的准极大理想 I 的不同类型展开讨论。

假设 $I \in$准极大$_i$极大理想(S)，使得 S/I 是一个域，并假设S/I 有一个极大子环 K，它是一个域。那么 $K \subset S/I$ 属于 $\mathcal{M}_i$，而且 $R := p^{-1}(K) \subset S$。在备注 4.12中，我们将对这种情形给出更精确的刻画。

假设 $I \in \mathrm{Q_dMax}(S)$，也就是说 $I = M_1 \cap M_2$ 其中 M_1，$M_2 \in \mathrm{Max}(S)$ $M_1 \neq M_2$。那么，$S/I \cong S/M_1 \times S/M_2$。进一步假设 $S/M_1 \cong S/M_2$。令 $K := S/M_1 \cong S/M_2$，则可得 $K \subset S/I \cong K^2$ 属于 $\mathcal{M}_d$，因此 $R := p^{-1}(K) \subset S$ 也成立。

假设 $I \in \mathrm{Q_r}$极大理想(S)，即 $M^2 \subseteq I \subset M$ 对于某个 $M \in$极大理想(S)，并假设 $\mathrm{c}(S/M) = \mathrm{c}(S/I)$。由于 I 在 S中分歧，由命题 2.5 可知，$S' := S/I$ 是一个 SPIR，其极大理想为 $M' := M/I$，幂零指数为 2。特别地，S' 是一个完备局部环，且由 [18, 定义 9]可知，M' 是主理想。令 $M' = S't$。根据 [18, 定理 8]，$S' = f(K[[X]])$，其中 $f : K[[X]] \to S'$是一个态射，使得 $f(X) = t$，且 $K = S'/M' \cong S/M$，因为 $\mathrm{c}(K) = \mathrm{c}(S/M) = \mathrm{c}(S/I)$。于是，$S' = K[t] = K + Kt$，因为$t^2 = 0$。因此，根据定理 4.1，$K \subset S' = S/I$ 属于 $\mathcal{M}_r$，R 也属于$= p^{-1}(K) \subset S$。□

注 4.12。当 $I \in$Q$_i$极大理想(S) 时所出现的条件相当苛刻。事实上，对于一个域 K，Azarang 和 Karamzadeh 得出，K 没有极大子环，当且仅当存在一个素数 p，使得 $K = \mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 或 K 是 $\mathbb{F}_p$ 的代数闭包 $\mathbb{F}_p$ 的无限子域，且满足 $K = \cup_{n\in T}\mathbb{F}_{p^n}$；其中 $T \subseteq \mathbb{N}$ 满足$\cup_{n\in T}\mathbb{F}_{p^n}$ 是 $\mathbb{F}_p$ 的子域，而 $\mathbb{F}_{p^n}$ 是 $\mathbb{F}_p$ 中含有p^n个元素的唯一子域（T 称为 FG-集），并且 T 没有极大 FG 子集 [4,定理 1.8]。于是，取其逆否命题，可得到具有极大子环的域的一个刻画。但现在我们必须排除那些不是域的解。现在，使用 [3, 定理 3.3]，该定理指出，对于具有极大子环 R 的域 K，要么 R 是满足 $[K : R] < \infty$ 的域，要么 R 是一个非域的 G- 整环。

设 $R \subseteq S$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个扩张，并令 $M := (R : S)$。由定理 4.1，Supp$(S/R) = \{M\}$。根据推论 3.8，若 $I \in$ QMax(R) 满足 V$(I)\cap$Supp$(S/R) = \emptyset$，则 $IS \in$ QMax(S) 且与 I 同型，其中 $I = IS \cap R$。此外，若 I 是 R 的一个次极大理想，则对于任意 $N \in$V(I)，$IS \prec N' := NS \in$Max(S)。下面的命题给出了这一情形的逆命题。

命题 4.13. 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}$，$M := (R : S)$ 且 $J \in$QMax(S) 满足 $I := J \cap R \nsubseteq M$。则 $J = IS$，$I \in$ QMax(R)且与 J 同型。

证明。我们先注意到 $M \in$ Max(R) 和 Supp$(S/R) = \{M\}$。若 $J \in$ Q$_i$ Max(S)，则根据命题4.4，$I \in$ Q$_i$Max(R)。但是，$I \subseteq J$ 推出 $IS \subseteq J$，且 $IS \in$ Max(S)，因为根据引理3.6，$I \notin$ Supp(S/R)。因此，$J = IS$。

假设现在 $J \in$ Q$_d$Max$(S) \cup$ Q$_r$Max(S)。于是，$J \prec N'$ 对某个 $N' \in$ QMax(S) 成立。根据命题 3.7，$I \prec M' := N' \cap R \in$ Max(R) 且 $IS = J$。特别地，$I \in$ QMax(R)。根据推论 3.8，IS 与 I同型。□

现在，根据命题 4.13 并考虑扩张$R \subset S$ 在 $\mathcal{M}$ 中，满足 $M := (R : S)$，为了研究理想 $I \in$ QMax(R) 或 $J \in$ QMax(S) 在 $I = J \cap R$ 的情况下的行为，我们只需假设 $I \subseteq M$。下面的关键引理刻画了 I 中的 R 同时也是 S的理想的次极大理想，即 $I = IS$。

引理 4.14。设 $R \subset S$ 是一个扩张，使得 $(R : S) \in$ 极大理想(R)，并设 I 是 R 的次极大理想。那么 $I = IS$ 当且仅当 $I \subset (R : S)$，且存在 S 的一个理想 J 使得 $I = J \cap R$。

证明。 置 $M := (R : S)$。

假设 $I \subset M$ 和 J 是 S 的理想，且满足 $I = J \cap R$。这意味着 $I \subseteq J$，因此 $IS \subseteq JS = J$(∗)。由此可推得 $I \subseteq IS \subseteq MS = M$。于是 $IS \in \{I, M\}$，因为 IS也是 R的理想。我们断言 $IS = I$。否则， $IS = M$ 和 (∗)将推出 $M \subseteq J$，从而得到 $M = M \cap R \subseteq J \cap R = I$，这与假设矛盾，因此 $IS = I$ 成立。

反过来，如果 I 是 R 的次极大理想，且满足 $I = IS$，那么$I \subset M$，因为 I 也是 S 的理想，并且 $I \notin$ 属于 Max(R)。此外， IS也是 S 的理想，且满足 $I = IS \cap R$。□

注 4.15. (1) 令 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_d$，并设 $M := (R : S) = M_1 \cap M_2 \in$极大理想($R$) $\setminus$ 极大理想(S)，其中 $M_i \in$ 极大理想(S)，适用于 $i \in \mathbb{N}_2$ 和 $M_1 \neq M_2$。令$M' \in$极大理想(R) $M' \neq M$，并设 $I := M \cap M' = MM'$。那么 $I \prec M'$ 属于 R。此外， $MS = M$ 和 $IS =$(MM')$S = MSM' = MM' = I$ 也是 S 的一个理想。由于 $M' \neq M$，根据引理 3.6，我们有 $N' := M'S \in$极大理想(S)，而 $I \subset M_1 \cap N' \subset N'$ 表明 $IS \not\prec M'S$。接着，命题 3.7(1) 不适用，因为 V(I) $\cap$ Supp(S/R) $\neq \emptyset$。

(2) 为了刻画扩张 $R \subset S$ 中 $\mathcal{M}$ 满足以下条件的扩张：给定理想 $I \in \mathrm{QMax}(R)$，且 $I \subset (R : S)$，存在 $J \in \mathrm{QMax}(S)$，使得 $I = J \cap R$，我们可以根据引理 4.14 加入假设 。这意味着 R 与 S 共享 I。

在接下来的小节中，我们将根据极小扩张 $R \subset S$的类型，给出关于 R 和 S 的准极大理想的更精确结果。

4.3. 极小惰性扩张中的准极大理想。

命题 *4.16.* 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}$， $M := (R : S)$，且 $I \in Q_{\mathrm{d}}Max(R)$，其中 $I \subset M$。那么 $I = M \cap M'$，对于某个 $M' \in$ 极大理想(R) $\setminus \{M\}$，并且存在 $J := N \cap N' \in Q_{\mathrm{d}}Max(S)$，使得 $I = J \cap R$，其中 N（分别为 N'） $\in$极大理想(S) 位于 S 之上，且在 M （分别为 M'）上方，并且 $I = IS$。此外， $I \in Q_{\mathrm{d}}$ *Max(S)* 当且仅当 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$。在此情形下， I 是 *QMax(S)* 中唯一包含于 M 且位于 I上方的理想。若 $M \notin$ 极大理想(S)，则 $I \neq J$。

证明。根据定理 4.9， $M \in \mathrm{QMax}(S)$。在命题 3.9的证明中，我们证明了存在 $J := N \cap N' \in \mathrm{Q_dMax}(S)$，使得 $I = J \cap R$，其中 N（分别 N'） $\in$ $\mathrm{Max}(S)$）位于 M（分别 M'）之上。由引理 4.14， $I = IS$ 成立。

如果 $M \in$是S的极大理想，那么 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$，而 $I = IS$ 也属于 QMax(S)，因为包含在 I 和 M 之间的 S 的任意理想都是 R的理想，因此只能是 M或 I。在这种情况下， $M = N$，所以 $J = N \cap N' = M \cap N' = M \cap R \cap N' = M \cap M' = I$。但是 $N' = M'S \in$是S的极大理想

Max(S) 中位于 M' 上方的唯一元素，因为 $M' \notin \mathrm{Supp}(S/R)$，根据引理 3.6。那么， $I \in \mathrm{Q_dMax}(S)$，因为 $M \neq N'$。

若 $M \notin$ Max(S)，则 $R \subset S$ 不属于 $\mathcal{M}_i$ 和 $I \neq J$。事实上， $I_M = M_M \neq J_M = N_M$，因此 $I \subset J$。特别地， $I \notin \mathrm{Q_dMax}(S)$。□

命题 4.17. 设 $R \subset S$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个扩张，且 J 是 S 的次极大理想，其中 $J \subset (R :\ S)$。那么，要么 $J \in \mathrm{Q_dMax}(R) \cap \mathrm{Q_dMax}(S)$，要么 $J \in \mathrm{Q_r}$ $\mathrm{Max}(S)\ \backslash \mathrm{QMax}(R)$，且两种情形下 $R \subset S$ 都属于 $\mathcal{M}_i$。

证明。 $J \notin$Q$_{\mathrm{i}}$Max(S) 是 S的一个次极大理想。

若 $J \in \mathrm{Q_dMax}(S)$，则 $J = N_1 \cap N_2$, $N_1 \neq N_2$, (∗)，其中 $N_i \in$Max(S) 对于 $i \in \mathbb{N}_2$成立。令 $M_i := N_i \cap R$ 对于 $i \in \mathbb{N}_2$，可得 $J = M_1 \cap M_2$，因为 $J \subset (R :\ S) \subset R$。因此，对于某个 $i \in \mathbb{N}_2$，有 $(R :\ S) = M_i$。例如，假设 $(R :\ S) = M_1$。若 $M_1 = M_2$，则可推出 $J = M_1 \in$ Max(R)，矛盾。于是， $J = M_1 \cap M_2$, $M_1 \neq M_2$ (∗∗)，且 $J \in \mathrm{Q_dMax}(R)$。此外，$(R :\ S) \not\subseteq N_2$。否则， $J =(R :\ S)$，矛盾。于是， $R \subset S$ 不属于 $\mathcal{M}_d$。将 (∗) 和 (∗∗) 在 M_1处局部化，可得 $J_{M_1} = M_{1M_1} = N_{1M_1}$；又因为 $M_2 \notin$ Supp(S/R)，所以 $M_{1M_2} = R_{M_2} = S_{M_2} = N_{1M_2}$，因为$R_{M_2} = S_{M_2}$，从而 $M_1 = N_1 = (R :\ S)$，且 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$。

若 $J \in \mathrm{Q_r}$Max(S)，则对于某个 $N \in$ Max(S)，有 $N^2 \subseteq J \subset N$ (∗ ∗ ∗)，且 J是 S的 N-准素理想。令 $M :=N \cap R \in$ Max(R)。于是，(∗ ∗ ∗) 蕴含 $M^2 \subseteq N^2 \subseteq J \subseteq M \subseteq N$，其中 J和 N是 S和J的理想，而 M是 R的理想，并且 J是 R的 M-准素理想。此外，$M = (R :\ S)$，因为 M 和 $(R :\ S)$ 都是 R的极大理想，且包含 J。由于 J 是 S 的一个次极大理想，仅包含于 S的一个极大理想中，即由 (∗ ∗ ∗) 可知为 N，我们有 $M =(R:\ S) = N \cap R$。但是， $M = (R : S)$ 表明 M 也是 S 的理想，而 $J \subseteq M \subseteq N$表明 $M = J$或 $M = N$。现在， N（分别地，M）是包含 J的 S（分别地， R）的唯一极大理想。于是，等式 $M = J$ 将蕴含 $J = (R :\ S)$，矛盾。综上，我们有 $M = N = (R :\ S)$，且 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$。由于 $M \succ J$ 在S中，这意味着 $\mathrm{L}_S(M/J) = 1$。但是，根据 [21, 定理 13，第 168], 页，$\mathrm{L}_R(M/J) = \mathrm{L}_S(M/J)[S/M:\ R/M] = [S/M:\ R/M] > 1$，因为 $R/M \subset S/M$ 是一个并非同构的域扩张。于是，$J \notin$QMax(R)。□

推论 4.18。 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$，且 $I \in \mathrm{Q_r}$极大理想(R) 满足$I \subset (R :\ S)$。那么，不存在 $J \in \mathrm{QMax}(S)$ 满足$J \subset (R :\ S)$ 且 $I = J \cap R$。

证明。 由于 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$, $(R : S) \in$ Max(S)。假设存在 $J \in$ QMax(S) $J \subset (R :\ S)$，使得 $I = J \cap R$，于是

$I = J$。根据命题 4.17，若 $J \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(S)，则可得$J = I \notin$ QMax(R)，这与关于 I 的假设矛盾。同一命题指出，若 $J \in$Q$_{\mathrm{d}}$Max(S)，则 $I = J \in$Q$_{\mathrm{d}}$Max(R)，这也构成矛盾。最后，若 $J \in$ Q$_{\mathrm{i}}$Max(S)，则 $I = J \in$ Q$_{\mathrm{i}}$Max(R)，这同样矛盾，因为 $I \subset (R : S)$。

因此，不存在满足 $J \subset (R : S)$ 和 $I = J \cap R$ 的 $J \in$ QMax(S)。□

注 4.19. 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$，且 $J \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(S) 满足$J \subset (R : S)$。在命题 4.17 中，我们证明了作为 R 的理想，$J \notin$ QMax(R)。特别地，令 $M := (R : S) \in$ Max(S)，则存在 R 的一个理想 K，使得 $J \subset K \subset M$。因此，$J = JS \subset K \subseteq KS \subseteq MS = M$ 属于 S。所以，我们有 $J \subset KS \subseteq M$，其中 KS 是S 的一个理想。但 $M \succ J$ 属于 S，因此 $KS = M$。于是，R 中严格包含于 J 且严格包含 M 的任何理想，都会在 M 中得到提升。

例如，在代数数的情形下可能会出现这种情况。取代数序的一个扩张 $R \subset S$ in $\mathcal{M}_i$ and set $M := (R : S) \in$ Max(S)，从而由中山引理可得 $M^2 \neq M$。由于 $0 < \mathrm{L}_S(M/M^2) < \infty$，存在 S 的一个理想 J，使得 $M^2 \subseteq J \subset M$with L$_S(M/J) = 1$。于是，$J \in$Q$_{\mathrm{r}}$Max($S$) with$J \subset M$ and $J \notin$ QMax(R)。

设 $R \subset S$ 是一个扩张，满足 $I \in$ QMax(R)，且 V$_R(I) \cap$Supp(S/R) $= \emptyset$。由推论 3.8，$I = IS \cap R$，并且对于任意 $M \in$ V$_R(I)$，$IS \in$ Q Max(S) with$IS \subset N := MS \in$ Max(S)，且 IS 与 I 同型。现在，我们将考虑一个极小扩张 $R \subset S$，以及一个理想 $J \in$ QMax(S)，使得 $J \not\subseteq (R : S)$。特别地，命题 4.20 推广了命题 4.13。根据命题 4.4，只需考虑 $J \in$Q$_{\mathrm{r}}$ Max(S)。

命题 4.20. 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$，且 $J \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(S) $J \not\subseteq (R : S)$。令 $I := J \cap R$。则 $I \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(R) 且 $J = IS$。

证明。令 $M := (R : S)$。由于 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$，因此 Supp(S/R) $= \{M\}$ 且 $M \in$Max(S)。由此可得 $J \not\subseteq M$。令 $N' := \sqrt[S]{J} \in$Max(S)，并设 $\overline{N} := N' \cap R \in$ Max(R)。于是 $N \notin$ Supp(S/R) 且$\{N\} =$ V$_R(I)$。根据命题 4.13，$I \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(R) 且$J = IS$，因为 $J \not\subseteq M$。□

4.4. **极小分解扩张中的准极大理想**。设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}$。根据命题 4.17，若 $J \in$ QMax(S) 满足 $J \subset (R : S)$, 则 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_i$。由此可知，对于 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_d \cup \mathcal{M}_r$，我们不能考虑这种情形。

如果删去假设 $J \subset (R : S)$，但保留 $I := J \cap R \subset (R : S)$，我们就能得到更多结果，如下一个命题所示。

在 $I \not\subseteq (R:S)$的情形下，$I \in \mathrm{QMax}(R)$与 J 以及$J = IS$ 由命题 4.13可知同型。

命题 *4.21.* 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_d$，其中 $M := (R:S) = M_1 \cap M_2$，$M_i \in$ 极大理想*(S)*，对 $i \in \mathbb{N}_2$ 成立。设 $I \in QMax(R)$ 满足 $I \subset M$。存在 $J \in QMax(S)$ $J \not\subseteq M$ 使得 $I = J \cap R$ 当且仅当 $I = IS$ 且以下条件之一成立：*(1)* $I \in Q_{\mathrm{d}}$ 极大理想*(R)*，其中 $I = M \cap N$，$N \in$极大理想*(R)* $N \neq M$；或 *(2)* I 是 Q_{r} 极大理想*(R)* 的 M-准素理想。

若这些条件成立，则 I 和 J 是同型的，并且对于某个 $i \in \mathbb{N}_2$，有 $J = M_i \cap N'$ $N' := NS \in$极大理想(S)（情形 *(1)*）；或者 $\mathrm{V}_S(J) = \{M_i\}$（情形 *(2)* 中仅对一个 $i \in \mathbb{N}_2$ 成立）。

证明。首先，由于 $I \subset M \in R$，所以 $I \notin \mathrm{Q_iMax}(R)$。其次，对于任意 $i \in \mathbb{N}_2$，都有 $M \prec M_i$属于 S。

假设存在 $J \in \mathrm{QMax}(S)$，且 $J \not\subseteq M$ 使得$I = J \cap R$。那么，根据命题 $J \notin \mathrm{Q_iMax}(S)$4.4 以及 $I = IS$ 根据引理 4.14。

(1) 若 $I \in \mathrm{Q_dMax}(R)$，则由命题 4.4 可知 $J \in \mathrm{Q_dMax}(S)$。由于 $I \subset M$，我们得到 $I = M \cap N$，$N \in$Max(R) $N \neq M$。由此可得 $N \notin$Supp(S/R)，并且由引理 3.6，$N' := NS \in$Max(S)满足 $N = N' \cap R$，其中 $N' \neq M_i$对应 $i \in \mathbb{N}_2$。因此$I = M_1 \cap M_2 \cap N = M_1 \cap M_2 \cap N' \subset J$属于 S。由于 $J \in \mathrm{Q_dMax}(S)$，我们得到某个 $i \in \mathbb{N}_2$使得 $J = M_i \cap N'$，因为 $J = M_1 \cap M_2$会推出$J = M$，这就产生了矛盾。

(2) 若 $I \in \mathrm{Q_rMax}(R)$，则由命题 4.4 可知 $J \in \mathrm{Q_rMax}(S)$。此外，$I \subset M$和 I 是 R 的准素理想，因为分歧。这意味着 I 是 M-准素的，并满足 $M_1^2 M_2^2 = M^2 \subseteq I \subset J$(∗)。但是，$J \in \mathrm{Q_rMax}(S)$ 是 S 的准素理想，因而是一个 M_i-准素理想。于是，$J \subseteq M_i$ 仅对应于一个 $i \in \mathbb{N}_2$。

反之，假设 $I = IS$，于是 I 也是 S 的一个理想，并且有以下两种情况之一：(1) $I \in \mathrm{Q_dMax}(R)$，其中 $I = M \cap N$，$N \in$ Max(R) $N \neq M$；或 (2) I 是 $\mathrm{Q_r}$ Max(R) 的一个 M-准素理想。我们断言存在 $J \in \mathrm{QMax}(S)$ $J \not\subseteq M$，使得 $I = J \cap R$。

(1) 假设 $I \in \mathrm{Q_d}$极大理想(R)。我们保留证明的第一部分，其中 $I = M \cap N$，$N \in$极大理想(R) $N \neq M$，$N' := NS \in$极大理想(S) 满足 $N = N' \cap R$，其中 $N' \neq M_i$对于 $i \in \mathbb{N}_2$。令 $J := M_1 \cap N'$，可得 $J \in \mathrm{Q_d}$ 极大理想(S) 以及 $J \cap R = M_1 \cap N' \cap R = M \cap N = I$。此外，$J \not\subseteq M$。否则，应有 $M_1 \cap N' \subseteq M \subset M_2$，矛盾。取 $J' := M_2 \cap N'$ 时也有类似结果。

(2) 假设 I 是 $M\mathrm{Q_rMax}(R)$ 中的准素理想。根据引理 4.14，存在一个 J' 的理想 S，使得 $I = J' \cap R$。我们声称可以选取 $J' \in \mathrm{Q_rMax}(S)$。由于 $I \prec M$，我们得到 $\mathrm{L}_R(M/I) = 1$。根据 [21, 定理 13，第 168], 页，我们还有

$\mathrm{L}_R(M/I) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{L}_{S_{M_i}}[(M/I)_{M_i}][S/M_i : R/M] = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{L}_{S_{M_i}}[(M/I)_{M_i}]$，因为 $R \subset S$ 是亚整的。因此，对于某个 i，有 $\mathrm{L}_{S_{M_i}}[(M/I)_{M_i}] = 1$；对于 $j \neq i$，有 $\mathrm{L}_{S_{M_j}}[(M/I)_{M_j}] = 0$。特别地，$I_{M_j} = M_{M_j}$且 $I_{M_i} \prec M_{M_i}$。根据 [36, 推论 2，第 225], 页，存在 M_i 的一个准素理想 J，其中 S，使得 $\mathrm{L}_S[(M_i/J)] = 1$ (∗)，且当 $J \prec M_i$ 属于 S时，$J \in \mathrm{Q_rMax}(S)$成立。此外，$I_{M_j} \subset J_{M_j} = S_{M_j}$ (∗∗)表明 $I \subseteq J \cap R \subseteq M_i \cap R = M = M_1 \cap M_2$。由此可知 $J \nsubseteq M$，否则便有 $J \subseteq M_j$，这与（∗∗）矛盾。最后，由于 $I \prec M$属于 R，我们得到 $J \cap R \in \{I, M\}$。但是$J \cap R = M$推出 $M \subseteq J$，这与（∗）矛盾，因为 $M \prec M_i$。综上，$J \cap R = I$。□

命题 4.22. 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_d$，且 $M := (R : S) = M_1 \cap M_2$，$M_i \in$ 极大理想(S) 对于 $i \in \mathbb{N}_2$。设 $J \in \mathrm{QMax}(S)$ $J \nsubseteq M$。令$I := J \cap R$。则 $I \in \mathrm{QMax}(R)$，且与 J 同型。

证明。若 $J \in \mathrm{Q_iMax}(S)$，则 $I = J \cap R \in$ 极大理想(R)。

若 $J \in \mathrm{Q_dMax}(S)$，则根据命题 4.4，$I \in \mathrm{Q_iMax}(R) \cup \mathrm{Q_dMax}(R)$。我们断言 $I \in \mathrm{Q_dMax}(R)$。否则，$I \in \mathrm{Q_iMax}(R)$，这意味着$I \in$ 极大理想(R)且 $I = (R : S) = M = J$，矛盾。因此$I \in \mathrm{Q_dMax}(R)$。

设 $J \in \mathrm{Q_rMax}(S)$ $J \nsubseteq M$，因此 J 是 S 的准素理想，且只包含在 S 的一个极大理想中。

首先假设 $J \subset M_i$，对于某个 $i \in \mathbb{N}_2$，例如 $i = 1$，使得 $M_1^2 \subseteq J \subset M_1$ 和 J 是 M_1-准素的。于是，$I = J \cap R = J \cap M_1 \cap R = J \cap M = J \cap M_1 \cap M_2 = J \cap M_2$ (∗)，因此 I也是 S的一个理想。根据 [21, 定理 13，第 168], 页，我们得到 $\mathrm{L}_R(M/I) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{L}_{S_{M_i}}[(M/I)_{M_i}][S/M_i : R/M] = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{L}_{S_{M_i}}[(M/I)_{M_i}]$ (∗∗)，因为 $R \subset S$ 是亚整的。此外，$(M/I)_{M_1} = (M_1 \cap M_2/J \cap M_2)_{M_1} = (M_1)_{M_1}/J_{M_1}$，这意味着 $\mathrm{L}_{S_{M_1}}[(M/I)_{M_1}] = 1$，因为$J \in \mathrm{Q_rMax}(S)$ 且 $J \prec M_1$。同理，我们有 $(M/I)_{M_2} = (M_2)_{M_2}/((M_2)_{M_2} \cap J_{M_2}) = (M_2)_{M_2}/(M_2)_{M_2} = 0$，因为 $J_{M_2} = S_{M_2}$，且 J 是 M_1-准素的。这意味着 $\mathrm{L}_{S_{M_2}}[(M/I)_{M_2}] = 0$，因此 $\mathrm{L}_R(M/I) = 1$，从而 $I \prec M$ 属于 R。于是，根据命题 2.8，必有 $I \in \mathrm{Q_rMax}(R)$，因为根据 (∗)，I 不可能包含于 R 的另一个极大理想中。

最后，假设 $\sqrt[S]{J} = N'$对于某个 $N' \in \mathrm{Max}(S)$ $N' \neq M_i$，有 $i \in \mathbb{N}_2$。因此 $I \subseteq N := N' \cap R \neq M$。特别地，$I \nsubseteq M$ 因为 $J_M = S_M$ 给出 $I_M = R_M$。于是 $N \notin \mathrm{Supp}(S/R)$，所以$I \in \mathrm{Q_rMax}(R)$，并且 $J = IS$ 由命题 4.13。□

4.5. 极小分歧扩张中的准极大理想。 设$R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_r$，且 $I \in \mathrm{QMax}(R)$满足 $I \subset (R : S)$。如果

存在一个理想 J 属于 S 使得 $I = J \cap R$，根据引理 4.14，我们有 $IS = I$，且 I 是 S的一个理想。为考察这样的理想 J是否存在，我们将研究 I 也是 S的一个理想的情形。

命题 4.23. 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_r$，且 $M := (R : S)$ 以及$N := \sqrt[S]{M}$。设 I 是 R 的次极大理想，且 $I = IS$，则$I \notin \mathrm{QMax}(S)$。

证明。首先，$M \in$ Max(R) 且 $N \in$ Max(S)。此外，$I \subseteq M$，因为 $I = IS$。定理 4.9 表明 $M \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(S)。但是，$N \cap R = M$ 也位于 M 之上，且 $N \in$ Q$_{\mathrm{i}}$Max(S)。假设 $IS = I$，于是 I 是 S的一个理想。S 中包含于 I 与M 之间的任一理想都是 R的理想，也就是说，它要么是 I，要么是 M。特别地，根据定理 12，第166], 页，L$_R$(M/I) $= 1 =$L$_S$(M/I)。由于 $R \subset S$ 属于$\mathcal{M}_r$，由定理 4.9 可知 L$_S$(N/M) $= 1$，从而 L$_S$(N/I) $= 2$，因此$I \notin$QMax(S)。□

下面的命题将命题4.23 推广到 $I \in$Q$_{\mathrm{r}}$Max(R) 的情形。

命题 *4.24.* 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_r$，且 $M := (R : S)$，并且$N := \sqrt[S]{M}$。设 $I \in$ *Q$_{\mathrm{r}}$Max(R)* 满足 $I = IS$，从而 $I \subset M$。令 $R' := R/I$，$S' := S/I$，$M' := M/I$和 $N' := N/I$。存在$J \in$ *QMax(S)* 使得 $I = J \cap R$，当且仅当 $S' \cong R'(+)(R'/M')$，在此情形下 $J \in$*Q$_{\mathrm{r}}$Max(S)*。

证明. 我们已在命题 4.23 中证明 $I \notin$ QMax(S)。我们将刻画满足 $I = J \cap R$ 的 $J \in$ QMax(S)。由于 $I \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(R) 且 $I \subseteq M$，命题 2.5 表明 R' 是一个 SPIR，其极大理想 M'的幂零指数为 2。特别地，存在 $t \in M' \setminus \{0\}$使得 $M' = R't$ 且 $t^2 = 0$。此外，根据命题 4.7] ，$R' \subset S'$ 也属于 $\mathcal{M}_r$，其中 (R' : S') $= M'$。Dobbs 在其论文 [9, Theorem 2.1(g)], 中给出了 $\mathcal{M}_r$ 中扩张 $R' \subset S'$ 的刻画，其中 R' 是一个 SPIR。将其应用于我们的情形（M' 的幂零指数为 2），可得 S' 是一个 R'-代数，且同构于 $R'(+)(R'/M')$ (∗) 或 S'_u : $= R'[X]/(tX, X^2 - tu)$ (∗∗)，其中 $u \in$ U(R')。此外，在这两种情形下，S' 都是局部的，因为 R'也是局部的。我们断言，存在$J \in$ QMax(S) 使得 $I = J \cap R$，当且仅当 (∗) 成立。

在情形 (∗) 下，由 [1,定理 6]可得 $\in$QMax(S')，因为根据定理 2.4, $0 \in$ QMax(R')，更确切地说，属于 Q$_{\mathrm{r}}$Max(S')。令 J 为 S 的一个理想，满足 $I \subseteq J$ 且使得 $J' = J/I$。应用 [1, 推论 2], ，可得 $J \neq I$，且 $J \in$ QMax(S)，其中$I \subset J$。此外，$J' \cap R' = \{x \in R' \mid (x, 0) \in 0(+)(R'/M')\} = 0$意味着 $J \cap R = I$，在此情形下显然有 $J \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(S)。

假设对于某个 $u \in \mathrm{U}(R')$，$(**)$成立。设 $y := X \in S'_u$，其中X 是 X 在 $\overline{S'_u}$中的剩余类。于是 $S'_u = R'[y]$，且 $ty = y^2 - tu = 0$，因此 $y^2 = ut \in M' \setminus \{0\}$，这意味着 $y \in N' \setminus M'$。所以 $S'_u = R' + R'y$且 $N' = M' + R'y$，因为 $M' \in \mathrm{QrMax}(S'_u)$，其中 $N' = \sqrt[S'_u]{M'}$。由此可得 $N' = R't + R'y = R'y^2 + R'y = y(R' + R'y) = S'_u y$，并且$N'$ 是 S'_u 的一个主理想，满足 $y^3 = uty = 0$。我们知道 R' 是诺特环，因此 S'_u也是诺特环；它是一个极大理想为主理想的局部环。于是，S'_u是一个 SPIR，其理想为 $N'^3 = 0$、$N'^2 = M'$和 N'，并且满足 $0 \subset M' \subset N'$。因此，M'是 S'_u唯一的次极大理想。特别地，不存在满足 $J' \cap R' = 0$的 $J' \in \mathrm{QMax}(S'_u)$；也就是说，不存在满足 $J \cap R = I$的 S_u的 $J \in \mathrm{QMax}(S_u)$。□

下面给出命题 4.24的逆命题。

命题 4.25. 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_r$，且 $M := (R : S)$，并设$N := \sqrt[S]{M}$。设 $J \in \overline{\mathrm{QMax}(S)}$，其中 $J \subseteq N$且 $J \not\subseteq M$。令 $I := J \cap R$。则 $I = IS \in \mathrm{QMax}(R)$，且与 J同型。

证明。若 $J \in \mathrm{Q_iMax}(S)$，则 $J = N$ 且 $I = M = IS \in \mathrm{Q_iMax}(R)$。

若 $J \in \mathrm{Q_dMax}(S)$，则 $I \in \mathrm{Q_dMax}(R)$，由命题 4.4 可知$R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_r$，然后由 [30, 定理 22]得到一个 i-扩张。此外，$I = IS$ 由命题 4.14 可知 $I \subset M$。

若 $J \in \mathrm{QrMax}(S)$，则由 $J \subset N$可知它满足 $N^2 \subseteq J \subset N$。因此，$M^2 \subseteq I \subseteq M$ 且 I 是 M-准素的。此外，M 和 J 都是N-准素的。特别地，由于 $J \subset N$，我们有 $I = J \cap R \cap N = J \cap M$，因此 I 也是 S的一个理想，从而得到 $I = IS$。作为 S-模以及 R-模，我们有如下同构：$M/I = M/(J \cap M) \cong (M + J)/J = N/J$，因为 $J \not\subseteq M$，其中 J和 M在 N中都是次极大的。根据 [21, 定理 13，第 168], 页，我们推得 $\mathrm{L}_R(M/I) = \mathrm{L}_R(N/J) = \mathrm{L}_{S_N}[(N/J)_N] = \mathrm{L}_S(N/J) = 1$。于是，$I$ 作为 R 的一个理想，在 M 中是次极大的，因此属于 $\mathrm{QrMax}(R)$，因为M是准素的。□

推论 4.26. 设 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_r$，且 $M := (R : S)$，并设 $N := \sqrt[S]{M}$。设 $J \in \overline{\mathrm{QMax}(S)}$且 $J \not\subseteq M$。那么 $I := J \cap R \in \mathrm{QMax}(R)$，并且与 J 同型。

证明。由于 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_r$，因此由 [30, 定理 2。2], 进行 i-扩张，并根据命题 4.25，若 $J \subseteq N$ 但 $J \not\subseteq M$，则$I \in \mathrm{QMax}(R)$ 与 J 同型。

假设 $J \not\subseteq N$。

根据命题4.4，如果 $J \in \mathrm{Q_i}$极大理想$(S) \cup \mathrm{Q_d}$极大理想(S)，那么 $I \in \mathrm{QMax}(R)$且与其同型，因为 J，因为 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}_r$，根据[30,定理 22]，可得一个 i-扩张。

如果 $J \in$ Q$_r$极大理想(S)且 $J \not\subseteq N$，令 $Q := \sqrt[S]{J} \neq N$。设 $P := Q \cap R$，我们有 $P \neq M$ 因为 $Q \neq N$ 且 $I = J \cap R \not\subseteq M$。根据命题4.13，$I \in$Q$_r$极大理想$(R)$。□

设 $(R, M) \subset (S, N)$ 是一个扩张，其中 (R, M) 和 (S, N) 是局部环，且 N 在 M 之上。于是，$MS \subseteq N$ 是 S 的一个理想。它可能是也可能不是 S 的极大理想，正如定理 4.1 中 $R \subset S$ 属于 $\mathcal{M}$ 时，考察 $M = (R : S)$ 所见。在下一个例子中，我们会看到，某个理想是否为准极大理想，取决于所考虑的环。

例 4.27. 设 k 是一个域，并令 $T := k[X, Y]/(X^2, Y^2, XY) := k[x, y]$，$R := k[x]$ 和 $S := k[y]$，其中 x 和 y 分别是 X 和 Y 在 T 中的剩余类。这给出如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} & R\nearrow & \searrow k \\ T & & \\ & \searrow & \nearrow S \end{array}$$

其中 (R, M)、(S, N) 和 (T, P) 是满足 $M = kx$，$N = ky$ 和 $P = kx + ky$。显然，$k \subset R$ 和 $k \subset S$属于 $\mathcal{M}_r$，且满足 $(k : R) = (k : S) = 0$。此外，$T = R[y] = S[x]$ 满足 $My = Nx = 0$ 和 $x^2 = y^2 = 0$，因此 $R \subset T$（分别地，$S \subset T$）属于 $\mathcal{M}_r$，且满足 $M = (R : T)$（分别地，$N = (S : T)$）。于是，由定理 4.9 可得 $0 \in$ Q$_r$Max$(S) \cap$ Q$_r$Max(R)（分别地，$M, N \in$ Q$_r$Max(T)）。由$0 \subset M \subset P$，我们得到 $0 \notin$ QMax(T)。

现在，我们展示如何从理想化构造极小扩张和准极大理想。

命题 *4.28.* 设 $I \prec J$ 是环 R 的两个理想。则，$R(+)I \subset R(+)J$ 属于 $\mathcal{M}_r$，且 $(R(+)I : R(+)J) = N(+)I$，其中 $N := (I : J) \in$ 极大理想(R)。特别地，$N(+)I \in$Q$_r$ 极大理想$(R(+)J)$。

证明。由于 $J \succ I$，R 中不存在理想，因此 I 与 J 之间不存在严格包含于两者之间的 R-模。因此 $\mathrm{L}_R(J/I) = 1$。根据 [27, 命题 2.8]，这意味着 $\ell[R(+)I, R(+)J] = \mathrm{L}_R(J/I) = 1$，因此 $[R(+)I, R(+)J] = \{R(+)I, R(+)J\}$，且 $R(+)I \subset R(+)J$ 属于 $\mathcal{M}$。此外，根据 [27, 引理 2.1]，$R \subset R(+)J$ 是次整的，$R(+)I \subset R(+)J$ 也是如此。于是，[26, 引理 3.1] 表明，$R(+)I \subset R(+)J$ 属于 $\mathcal{M}_r$。特别地，$(R(+)I : R(+)J) \in$ Max$(R(+)I)$，且其形式为 $M(+)I$，其中 $M \in$ Max(R)。由于存在某个 $N \in$ Max(R) 使得 $NJ \subseteq I$，根据 [36, 推论 1，第 237] 页，这说明 $(R(+)J)(N(+)I) \subseteq N(+)(NJ + I) = N(+)I \subseteq R(+)I$，因此 $(R(+)I : R(+)J) = N(+)I$。特别地，根据定理 4.9，$N(+)I \in$Q$_r$Max$(R(+)J)$。□

4.6. 极小平坦满同态中的准极大理想。 尽管极小平坦满同态$R \subset S$的情形相当不同，我们仍可考虑导子 $(R : S)$。首先，我们先给出这类扩张的刻画。

命题 4.29. 设 $R \subset S$ 是一个扩张。以下条件等价：

(1) $R \subset S$ 是一个极小平坦满射。(2) $\mathrm{Supp}_R(S/R) = \{M\}$ 对于某个 $M \in$ 极大理想(R) 成立，且 $R_M \subset S_M$ 是一个极小平坦满射。(3) $\mathrm{Supp}_R(S/R) = \{M\}$ 对于某个 $M \in$ 极大理想(R) 成立，并且 $(R : S) =: P \in$ 素谱 (R) 满足 $P \subset M$，其中 $S_M \cong R_P$ 且 R_M/PR_M 是一个一维赋值整环。

证明。 (1)⇔(2) 由 [12, 命题 4.6]和 [13,定理 2.2].(2)⇔(3) 由 [32, 命题 9.2 和推论 9.3]. □

定理4.9 的第一个结论也适用于极小平坦满射 $R \subset S$，但需满足额外条件。

命题 4.30。 设 $R \subset S$ 是一个极小平坦满射。那么，$(R : S) \in \mathrm{QMax}(S)$ 当且仅当 $|\mathrm{V}_R((R : S)) \cap \mathrm{Max}(R)| = 1$。在此情形下，$(R : S) \in \mathrm{Max}(S)$。

证明。由于 $R \subset S$ 是一个极小平坦满射，根据 [13, 引理 3.2], ， $P := (R : S) \in$素谱$(R) \cap$ 素谱(S)，并且满足 $P \subset M$，其中$\{M\} = \mathrm{Supp}_R(S/R)$，且根据 [32, 推论 9.3]，不存在严格包含在 P 与 M 之间的 R 的素理想。此外，根据 [10, 定理 2.1]，谱映射素谱$(S) \to$ 素谱$(R) \setminus \{M\}$ 是双射。

假设 $|\mathrm{V}_R(P) \cap$ 极大理想$(R)| = 1$，这意味着 M 是 R 中包含 P的唯一极大理想。我们断言 $P \in$ 极大理想(S)。否则，存在 $Q \in$极大理想(S) 使得 $P \subset Q$，从而 $P \subseteq Q \cap R \in$极大理想(R)，这与 P， $M \neq Q \cap R$矛盾。于是 $P \in \mathrm{QMax}(S)$。

现在假设 $|\mathrm{V}_R(P) \cap$极大理想$(R)| > 1$，并设 $N \in$极大理想(R) $N \neq M$ 满足 $P \subset N$。由于 $N \notin \mathrm{Supp}_R(S/R)$，可得 $NS \in$ 极大理想 (S) （见引理 3.6 ）。那么，根据命题 2.1、定理 2.9 以及 S 中的 $P \subset NS$，可知 $P \notin \mathrm{QMax}(S)$。□

例4.31。 此例表明，极小平坦满射 $R \subset S$ 的导子在 S中并非总是准极大。

令 $R := \mathbb{Z}$，并设 p 为一个素数。考虑 $S := \mathbb{Z}_p$ 和$M := p\mathbb{Z}$。那么， M 是 R 的唯一极大理想，且 S 中没有素理想位于其上方。显然， $R \subset S$ 是一个极小平坦满射，使得 $MS = S$， $\{M\} =\mathrm{Supp}_R(S/R)$ 和 $(R: S) = 0$，它

不属于 QMax(S)。事实上， R 的任意极大理想都包含 (R : S)。我们可以指出， $R_M = \mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$ 是一个商域为 $S_M = \mathbb{Q}$ 的离散赋值整环（参见 [12, 命题 4。6]）。特别地，这个例子表明，命题 3.22 在 R_M 是局部环时没有逆命题，因为 0 是 S_M 中的极大理想，而是 R_M中的非极大素理想，因此不是 R_M中的准极大理想。

5. Quasi-maximal ideals and 2-absorbing ideals

Badawi 在 [5] 中引入了 2-吸收理想的概念：环 R的非零真理想 I被称为 2-吸收理想，如果对于任意 a、b、$c \in R$，使得 $abc \in I$，则 $ab \in I$ 或 $bc \in I$ 或 $ac \in I$。根据 [1, 定理 1]，，准极大理想是 2-吸收理想；并且根据其刻画的三分法，二者十分相似。因此，本节考察这两个概念相一致的情形。在 [5, 定理 2 中，4], Badawi 证明了，环 R 的一个 2-吸收理想 I 满足下列性质之一：

(a) $\sqrt{I}$是环 R 的素理想 P，且满足 $P^2 \subseteq I$。

(b) $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$、$P_1P_2 \subseteq I$ 以及 $(\sqrt{I})^2 \subseteq I$，其中 P_1、P_2 是环 R 中包含于 I之上的唯一不同素理想。

（一个在 I 之上极小的素理想，是 $\mathrm{V}_R(I)$ 中的极小理想。）

注 5.1。若我们将刻画范围限制在极大理想的 2-吸收理想上，则命题 2.2 对 (a) 给出：或者 $I \in \mathrm{Max}(R)$，这给出命题 2.2(1)；或者 I 是一个 M-准素理想，其中$M \in \mathrm{Max}(R$，且 $M^2 \subseteq I \subset M$ 这给出命题 2.2(3)。而 (b) 给出 $I = M_1 \cap M_2$ 对于两个不同的极大理想 M_1，M_2 属于 R，因为 $M_1M_2 \subseteq I \subset M_1 \cap M_2$ 给出 $I = M_1 \cap M_2$，这是因为 M_1 且 M_2互素，这正是命题2.2(2)。

我们得到以下 [1, 定理 1]的逆命题。

定理 5.2。环 R 的理想 I 属于 $\mathrm{QMax}(R)$ 当且仅当 I 是一个 2-吸收理想，且 $\mathrm{V}(I) \subseteq \mathrm{Max}(R)$，并且对于每个 $M \in \mathrm{V}(I)$，M/I 是 R/I 的一个主理想。

证明。一个方向由 [1, 定理 1 和定义 1] 以及定理2.4。

逆命题，假设 I 是一个 2-吸收理想，使得 $\mathrm{V}(I) \subseteq \mathrm{Max}(R)$，并且 M/I 是 R/I 的主理想，对于每个 $M \in \mathrm{V}(I)$。首先，根据 2-吸收理想的定义，I 是真理想。根据 [5, 定理 2。3] 和备注 5.1，$I \in \mathrm{QMax}(R)$，如果 I 是极大理想（备注 5.1中情形 (a) 的第一部分），或者是两个极大理想的交（备注 5.1 中的情形 (b) ），由定理 2.4 可得。在

备注 5.1 的情形 (a) 中，当 $\sqrt{I}$ 是极大理想 M 且属于 R，使得$M^2 \subseteq I$且 $I \subset M$时，我们得到 I是一个 M-准素理想，使得$M^2 \subseteq I \subset M$。此外，根据假设， M/I 是主理想，因此存在 $t \in M$ 使得 $M = I + Rt$。由于 $M^2 \subseteq I$，由此根据 $M \succ I$ 推论 2，第 [36, 页237]可知。应用定理 2.9 可得 $I \in$QMax(R)。 □

推论 5.3。 令 $I \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(R) 且 $M := \sqrt{I}$。则对任意 $x \in M \setminus I$，$(I : x) = M$。

证明。 由于 I 根据定理 5.2是 2-吸收的，因此 $(I : x) = M$ 对任意 $x \in M \setminus I$ 成立，依据 [5, 定理 2。5]。 □

推论 5.4。 设 M 是环 R 的极大理想，且 $M^2 \neq M$。则 $M^2 \in$QMax(R) 当且仅当 M/M^2是主理想，当且仅当 L$_R$(M/M^2) = 1。

证明。根据定理 5.2， $M^2 \in$ QMax(R) 当且仅当 M^2 是一个 2-吸收理想，满足 V(M^2) ⊆Max(R)，且 M/M^2是主理想。根据 [5, 定理 3.1]， M^2 是一个 2-吸收理想。显然，V(M^2) = $\{M\}$ ⊆Max(R)。因此，第一个等价关系得证。最后，根据定理 2.4， $M^2 \in$QMax(R) 当且仅当 L$_R$(M/M^2) = 1，因为 $M^2 \in$ QMax(R) 当且仅当 $M^2 \in$ Q$_{\mathrm{r}}$Max(R)。□

注记 5.5。定理 5.2 表明，在环 R中，2-吸收理想的剩余类比准极大理想的剩余类更大，即使我们将范围限制在满足 V(I) ⊆ Max(R) 的理想 I 上。特别地，对于扩张 $R \subset S$，如果 J 是 S的 2-吸收理想，那么 $J \cap R$ 显然是 R的 2-吸收理想。但是，在注 4.19 中，我们给出了一个扩张 $R \subset S$（属于 $\mathcal{M}_i$）以及 S 的一个理想 J，它同时也是 R 的理想，并且满足 $J \in$Q$_{\mathrm{r}}$ Max(S)，而 $J \notin$QMax(R)。

现在我们来考察 Badawi 对 [5] 中的 2-吸收理想所得到的一些性质如何传递到准极大理想上。

命题 5.6。 M-准素理想 I是赋值整环(R, M)的理想，当且仅当 $I \in$ QMax(R)。

证明。 如果 $I \in$QMax(R)，那么根据 [1, 定理 1]， I 是 2-吸收的。

反之，假设 I 是 2-吸收的。由于 I 是一个 M-准素理想，且根据 [5, 命题 3.10], ， $I = M$ 或 $I = M^2$。在第一种情况下，根据定义 2.3， $I \in$ QMax(R)。假设 $M \neq I = M^2$。那么 $I \subset M$ 是次极大的，因为 R 的唯一 M-准素理想是 M 的幂，依据 [20, 定理 5.11]。因此，定理 2.9 表明 $I \in$ QMax(R)。□

命题 5.7. *Pr ¨ufer* 整环 R 的非零理想 I 满足$\mathrm{V}(I) \subseteq \mathrm{Max}(R)$ 当且仅当 $I \in \mathrm{QMax}(R)$ 时，它是 *2*-吸收的。

证明。 若 $I \in \mathrm{QMax}(R)$, 则 I 根据 [1, 定理 1] 是 2-吸收的。

反过来，假设 I 是 2-吸收的。根据 [5, 定理 3.14], ，或者 $I = M$ (∗), 或者 $I = M^2$ (∗∗)，或者 $I = M_1 \cap M_2$ (∗ ∗ ∗)，其中 M、M_1、$M_2 \in$ Max(R)，因为 V(I) $\subseteq$ Max(R)。由此可得|V(I)| ≤ 2。根据 [5, 引理 3.13], IR_M 在 R_M中是 2-吸收的；随后根据命题 5.6，对于任意 $M \in$ V(I)，它属于 QMax(R_M)，因为 R_M 是赋值环。当 |V(I)| $= 2$ 时，由 (∗ ∗ ∗)可知 $IR_M \in$ Max(R)，命题 3.24 得出 $I \in$QMax(R)。□

命题 5.8. 一个非域的诺特整环 R 是 *Dedekind* 整环，当且仅当对每个 $M \in$ 极大理想(R)，都有 $M^2 \in \mathrm{QMax}(R)$ 。

证明。 在 [14, 定理 38。1], Gilmer 证明了，一个非域的诺特整环R 是 Dedekind 整环，当且仅当对每个$M \in$ 极大理想(R)，其间不存在真包含的理想 M 与 M^2，若 $M \neq M^2$，这等价于 $\mathrm{L}_R(M/M^2) = 1$，也等价于 $M^2 \in \mathrm{QMax}(R)$，由推论 5.4可得。若 $M = M^2$，则 M^2 显然是准极大的。 □

推论 5.9. *(1) Dedekind* 整环 R 的理想 I 是 *2*-吸收的，当且仅当 $I \in \mathrm{QMax}(R)$。

(2) 诺特整环 R 不是域，当且仅当它是 *Dedekind* 整环且任意 *2*-吸收理想都属于 $\mathrm{QMax}(R)$。

证明. (1) 如果 R 是域，则无需证明。因此，假设R 不是域。如果 $I \in$ QMax(R)，那么 I 根据 [1,定理 1]是一个 2-吸收理想。如果 I 是 2-吸收理想，那么 [5, 定理 3.15]表明，存在某个 $M \in$ 极大理想(R)，使得要么 $I = M$，要么 $I = M_1 \cap M_2$，其中$M = M_i$适用于 $i \in \{1, 2\}$，或者 $I = M^2$属于 QMax(R)，由命题 5.8 可知。在前两种情况下，根据定义 2.3， I 显然也属于 QMax(R)。

(2) 如果 R 是 Dedekind 整环，那么根据 (1)，任意 2-吸收理想都属于 QMax(R)。

反之，假设任意 2-吸收理想都属于 $\in \mathrm{QMax}(R)$。根据[5, 定理 3。1]， M^2 对任意 $M \in \mathrm{Max}(R,$ 都是 2-吸收理想。因此，命题5.8 表明 R 是一个 Dedekind 整环。□

本节最后补充一些关于 2-吸收理想在环态射下行为的结果，这些结果或许已有所知。

命题5.10。设 $R \subseteq S$ 是一个平坦满同态， J 是 S 的一个真理想，且 $I := J \cap R$。那么，

(1) 如果 J 是 S的 *2*-吸收理想，那么 I 是R的 *2*-吸收理想。

(2) 假设 I 是一个 M-准素理想，且 $M \in$ 极大理想(R)。那么，J 是 *2*-吸收的，当且仅当 I 是 R的 *2*-吸收理想。

证明。 (1)显然。 ()

2

一个蕴含关系是（1）。现在，假设 I 是一个 M-准素 2-吸收理想，且 $M \in$ Max(R)。由 [5, 定理 3.1]， $M^2 \subseteq I$ （$*$）。根据 [28, 附注 A（6）]， $J = IS$。由于 J 是 S 的真理想，因此对于某个 $N \in$ Max(S)，有 $J \subseteq N$。此外， $M^2 \subseteq I = J \cap R \subseteq N \cap R$ 蕴含 $M = N \cap R$，从而 $N = MS$。于是，由（$*$）可得 $N^2 \subseteq J = IS$。因此， J 是 S 的 N-准素理想。前述参考结果表明，J 是 S 的 2-吸收理想。□

推论 5.11。 *(1)* 环 R 的一个 M-准素理想 I，若满足 $M \in$极大理想(R)，则它是 *2-* 吸收理想，当且仅当 IR_M 是 R_M 的 *2-* 吸收理想。

（*2*）环 R 的 $M \in \mathrm{Max}(R)$ 准素理想 I 是*2*-吸收理想，当且仅当 $IR(X)$ 是 $R(X)$的*2*-吸收理想。

证明。 （1）一个方向由 [5, 引理 3。13]得出。对于逆命题，我们使用命题 5.10（2），取 $S := R_M$ 和 $J := IR_M$。

（2）若 I 是 R的2-吸收理想，则由 $M^2 \subseteq I \subseteq M$ 根据 [5, 定理 3。1]。因此（$MR(X))^2 \subseteq IR(X) \subseteq MR(X)$），首先得到$IR(X)$是 $MR(X)$的 $R(X)$准素理想，随后根据前述结果，它是 $R(X)$的2-吸收理想。

若 $IR(X)$是 $R(X)$的2-吸收理想，且 I M是R的准素理想，则根据 [36, 推论 1，第153], 页， $IR(X)$是 $R(X)$的 $MR(X)$-准素理想，因为 $MR(X) \in$ Max$(R(X))$，且 $M^2R(X) =$($MR(X))^2 \subseteq IR(X)$蕴含 $M^2 \subseteq I$，因此 I 是 R 的2-吸收理想，这同样由 [5, 定理 3.1]得出。□

6. Appendix

对于环 R 的真理想 I，第一作者在 [23,D´efinitions 1、2 和 3] 中定义了集合 $\Lambda(I) := \{x \in R \mid I : x = I\}$，它是一个饱和乘法集。它满足 $I \cap \Lambda(I) = \emptyset$，并且 $\Lambda(I)$ 是 R 中其在 R/I 中的像为正则元素的元素集合。于是，$\mathrm{t}(R/I) =(R/I)^{\Lambda(I)}$ 得证。

命题 6.1。 设 R 为一个环，且 $I \in$QMax(R)。我们有以下性质：

(1) 若 $I \in \mathrm{Q_i Max}(R) \cup \mathrm{Q_r Max}(R)$ 且 $M \in \mathrm{Max}(R) \cap \mathrm{V}(I)$，则$\Lambda(I) = R \setminus M$。(2) 若 $I \in \mathrm{Q_d Max}(R)$ 满足 $I = M_1 \cap M_2$， $M_i \in \mathrm{Max}(R)$ 对于 $i \in \mathbb{N}_2$，则 $\Lambda(I) = R \setminus (M_1 \cup M_2) = (R \setminus M_1) \cap (R \setminus M_2)$。

证明。 $\Lambda(I)$ 是 R 中像在 R/I 中为正则的元素的集合。

(1) 若 $I \in$Q$_i$Max(R)，则 $I = M$ 和 R/I 是一个域，因此 $\Lambda(I) = R \setminus M$。

若 $I \in$ Q$_r$极大理想(R)，令 $M \vdots = \sqrt{I} \in$ 极大理想(R)。命题 2.5指出 R/I 是一个 SPIR，其极大理想 M/I 是幂零的，因此 $\Lambda(I) = R \setminus M$。

(2) 设 $I \in$ Q$_d$Max(R)，其中 $I = M_1 \cap M_2$， $M_i \in$ Max(R) 对于$i \in \mathbb{N}_2$。那么 $R/I \cong R/M_1 \times R/M_2$是两个域的直积。因此，其正则元素的集合为 $(R \setminus M_1)/M_1 \times (R \setminus M_2)/M_2$，因此$\Lambda(I) = (R \setminus M_1) \cap (R \setminus M_2) = R \setminus (M_1 \cup M_2)$。□

推论 6.2. 设 R 是一个环， I 是 R 的一个理想，使得对于某个 $M \in$ 极大理想(R)，有 $I \prec M$。那么 $I \in$ Q$_r$极大理想$(R) \cup$Q$_d$极大理想(R)。设 $x \notin M$。则：

(1) 若 $I \in Q_r$极大理想*(R)*，则 $I\colon\ x = I$ 且 $x \in \Lambda(I)$。*(2)* 若 $I \in Q_d$ 极大理想*(R)*，其中 $I = M \cap M'$，$M' \in$极大理想*(R)* 且 $M \neq M'$，则：*(a)* 若 $x \in M' \setminus M$，则 $I\colon\ x = M$且 $x \notin \Lambda(I)$；*(b)* 若 $x \notin M \cap M'$，则 $I\colon\ x = I$ 且 $x \in \Lambda(I)$。

证明. 根据定理 2.9， $I \in$ Q$_r$极大理想$(R) \cup$ Q$_d$极大理想(R)。

令 $x \notin M$ 和 $a \in I\colon\ x$。由于 $ax \in I \subseteq M$ $(*)$，我们得到 $a \in M$，从而 $I \subseteq I\colon\ x \subseteq M$。因此 $I\colon\ x \in \{I, M\}$，因为 $I \prec M$。

(1) 如果 $I \in$ Q$_r$极大理想(R)，那么 I 是 M-准素的，并且 $(*)$ 蕴含 $a \in I$，从而 $I\colon\ x \subseteq I \subseteq I\colon\ x$，得到 $I = I\colon\ x$ 和 $x \in \Lambda(I)$。

(2) 假设 $I \in$Q$_d$极大理想(R)，且 $I = M \cap M'$， $M' \in$极大理想(R)，$M \neq M'$。

(a) 如果 $x \in M' \setminus M$，那么任意 $a \in M \setminus I$都满足 $ax \in I$，这意味着 $a \in (I\colon\ x) \setminus I$。证明的开头表明 $I\colon\ x = M$和$x \notin \Lambda(I)$。

(b) 若 $x \notin M \cup M'$，则 $x \in R \setminus (M \cup M') = \Lambda(I)$，由命题6.1 以及 $I = I\colon\ x$。□

命题 6.3。 设 $f\colon\ R \to S$ 是一个环同态，且 J 是 S的一个理想。则 $f^{-1}[\Lambda(J)] \subseteq \Lambda[f^{-1}(J)]$,，若 f是满射的，则等号成立。

证明。 根据 [23,推论，第89]， $f^{-1}[\Lambda(J)] \subseteq \Lambda[f^{-1}(J)]$成立。

我们断言，如果 f是满射的，那么 $f^{-1}[\Lambda(J)] = \Lambda[f^{-1}(J)]$。只需证明 $\Lambda[f^{-1}(J)] \subseteq f^{-1}[\Lambda(J)]$。因此，令 $I := f^{-1}(J)$，并取$x \in \Lambda(I)$，即 $I\colon\ x = I$。设 $y := f(x) \in S$，我们已有 $J \subseteq J\colon\ y$。令 $b \in J\colon\ y \subseteq S$，于是 $by \in J$ $(*)$。由于 f 是满射的，存在某个 $a \in R$ 使得 $b = f(a)$。由$(*)$可得 $f(ax) \in J$。由于 $ax \in I$，我们推知 $a \in I\colon\ x = I$。因此，$b = f(a) \in f(I) \subseteq J$。我们证明了 $J\colon\ y \subseteq J$，这意味着

J: $y = J$且 $y = f(x) \in \Lambda(J)$。总之， $x \in f^{-1}[\Lambda(J)],$，我们的断言得证。□

命题 6.4。 设 f： $R \to S$ 是一个环同态，且 J 是 S 的一个理想。若 I: $= f^{-1}(J)$，则对于任意 $x \in \Lambda(I)$，有 $f^{-1}(J$: $f(x)) = I$。

证明。设 $x \in \Lambda(I)$，从而 I： $x = I$。令 y： $= f(x)$，且 K： $= J$： y。现在，令 $z \in f^{-1}(K)$。因此， $f(z) \in K$以及 $f(zx) \in J$。于是，$zx \in I$，由此 $z \in I$： $x = I$。可得， $f^{-1}(K) = f^{-1}(J$: $f(x)) \subseteq I = f^{-1}(J) \subseteq f^{-1}(J$: $f(x))$，因为 $J \subseteq J$: $f(x)$ 总是成立。因此， $f^{-1}(J$: $f(x)) = I$。□

我们回顾一下，真理想 I 在环 R 中称为原始的，如果 $Z(R/I) = P/I$，其中 $P \in \mathrm{Spec}(R)$ [7, 第 IV 章，习题 33，第177]。于是，根据 [23,推论，第83], 真理想 I 在环 R 中是原始的，当且仅当$R \setminus \Lambda(I) \in \mathrm{Spec}(R)$。这就推出了以下结论。

命题 6.5。 惰性或分歧理想是原始的。

证明。设 I 是环 R的一个真理想。根据命题 6.1，若$I \in Q_r\mathrm{Max}(R) \cup Q_i\mathrm{Max}(R)$ 且 $M := \sqrt{I}$，则 $\Lambda(I) = R \setminus M$，因此 $R \setminus \Lambda(I) = M \in \mathrm{Max}(R)$，并且根据前面的刻画， I 是原始的。□

注 6.6。 (1) 我们将环 I 中的真理想 R 称为 半原始的，如果 $R \setminus \Lambda(I)$ 是有限个素理想的并。于是，根据命题6.1，分解理想是半原始的。

（2）环 R 的理想 I 是原始的（分别为半原始的），当且仅当 $t(R/I)$ 是局部的（分别为半局部的）。由于 $t(R/I)$ 是将 R/I 在 R/I 的正则元素集合（即 $(R/I) \setminus Z(R/I)$）处局部化所得，因此得到该等价关系。

（3）原始理想 I 属于环 R 不一定是准极大理想，即使 $R \setminus \Lambda(I) = M \in \mathrm{Max}(R)$。取一个局部环（$R$， M），使得$M^3 = 0$，其中 $M^2 \neq M$，0。定理 2.4表明 0 不是准极大理想，但由于 $Z(R) = M$，所以它是原始的。

命题 6.7。 设 $f : R \to S$ 是一个环同态， J 是 S 的一个理想，且 $I := f^{-1}(J)$。那么，存在 S 中的一个 *Max*-上理想 K，使得 $J \subseteq K$，且 $f^{-1}[\Lambda(K)] = \Lambda[f^{-1}(K)]$。因此，存在唯一的环同态 $g : t(R/I) \to t(S/K)$，由 f 诱导。

证明。根据引理 3.10，存在 K 的一个理想 S，它是 I 的一个极大理想上方理想。现在，根据命题 6.4，对于任意 $x \in \Lambda(I)$，有 $f^{-1}(K$: $f(x)) = I$。由于 $K \subseteq K$: $f(x)$，由 K 的极大性可得 $K = K$: $f(x)$。于是， $f(x) \in \Lambda(K)$ 且 $x \in f^{-1}(\Lambda(K))$。由此可得

因此 $\Lambda[f^{-1}(K)] \subseteq f^{-1}[\Lambda(K)] \subseteq \Lambda[f^{-1}(K)]$ 根据命题 6.3 以及 $f^{-1}[\Lambda(K)] = \Lambda[f^{-1}(K)]$ 成立。

由于 $I = f^{-1}(K)$，存在唯一的环同态 $g : \mathrm{t}(R/I) \to \mathrm{t}(S/K)$，由 f 诱导。□

注 6.8. 使用 2-吸收理想，以另一种方式重新得到命题 6.5 中的结果：惰性或分歧的理想是原始的。现在 [5, 推论 2。7] 表明，满足 I 且 $I \neq \sqrt{I}$ 的 2-吸收理想是原始的，但分解情形除外。

References

.[1] M. Alan, M. Kili.c, S. Ko.c 和 U. Tekir，关于交换环的准极大理想，保加利亚科学院学报，76卷第12期（2023年），1801–1810。[2] D. D. Anderson 和 S. Chun，具有有限生成分式理想幺半群的交换环，《代数学杂志》，320卷第7期（2008），3006–3021。[3] A. Azarang，关于极大子环，《远东数学科学杂志》，32（2009），107–118。[4] A. Azarang 和 O. A. S. Karamzadeh，哪些域没有极大子环？，帕多瓦大学数学研讨会报告，126（2011），213–228。[5] A. Badawi，关于交换环的2-吸收理想，《澳大利亚数学会公报》，75(3)（2007），417–429。[6] N. Bourbaki，《交换代数》，第1–2章，Hermann，巴黎，1961年。[7] N. Bourbaki，《交换代数》，第3–4章，Hermann，巴黎，1967年。[8] P.-J. Cahen、G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，逐点极小扩张，《阿拉伯数学杂志》，7（2018），249–271。[9] D. E. Dobbs，主理想环的分歧极小环扩张的代数同构分类，《巴勒斯坦数学杂志》，11（2022），37–46。[10] D. E. Dobbs、G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，刻画满足有限中间性质或 FCP 的环扩张，《代数学杂志》，371（2012），391–429。[11] D. E. Dobbs、G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，关于环扩张的有限中间性质和 FCP 性质的传递结果，《代数通讯》，43（2015），1279–1316。[12] D. E. Dobbs、G. Picavet、M. Picavet-L'Hermitte 和 J. Shapiro，关于极小环扩张的交与复合，《JP代数、数论与应用杂志》，26（2012），103–158。[13] D. Ferrand 和 J.-P. Olivier，环的极小同态，《代数学杂志》，16（1970），461–471。[14] R. Gilmer，《乘法理想理论》，《女王大学纯粹与应用数学讲义》第90号，女王大学出版社，金斯顿，安大略省，1992年。[15] A. Grothendieck 和 J. Dieudonn´e，《代数几何要素 I》，施普林格出版社，柏林，（1971年）。[16]J. Gu´erindon，关于环中理想的极大链，Dubreuil研讨会：代数与数论，第7卷，第10篇，（1953-1954），1–11。[17] R. M. Hamsher，所有模都有极大子模的交换环，《美国数学会会刊》，9（18）（1967），1133–1137。

[18] T. Hungerford，关于主理想环的结构，《太平洋数学杂志》，25(3)（1968年），543–547。[19] T.Y. Lam，《模与环讲义》，施普林格，柏林（1999年）。[20] M.D. Larsen 和 P.J. McCarthy，《理想的乘法理论》，学术出版社，纽约、伦敦（1971年）。[21] D. G. Northcott，《环、模与重数课程》，剑桥大学出版社，伦敦，1968年。[22] J.P. Olivier，纯态射下若干初等性质的下降，《巴西科学院年刊》，45（1973），17–33。´G. Picavet，关于环素谱概念的一种推广，《克莱蒙费朗第二大学数学科学年刊》，44卷第7期（1970），81–101。[24] G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，t-闭态射，《代数通讯》，21（1993），179–219。[25]G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，T-闭性，第369–386页，载于：《非诺特交换环理论》，数学应用丛书520，Kluwer，多德雷赫特，2000年。[26] G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，关于永田扩张的更多组合学结果，《巴勒斯坦数学杂志》，5（2016），1–15。[27] G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，具有有限多个子模的模，《国际代数电子期刊》，19（2016），119–131。[28] G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，环的准普吕弗扩张，第307–336页，载于：《环、多项式与模》，施普林格，2017年。[29] G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，长度为二的环扩张，《代数及其应用杂志》，18卷第8期（2019），1950174，34页。[30] G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，分裂环扩张，《代数与几何贡献》，64（2022），627–668。[31] G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，附属于 FCP 环扩张的闭包与余闭包，《巴勒斯坦数学杂志》，11（2022），33–67。[32] Picavet, G. 和 Picavet-L'Hermitte, M.：关于环的普吕弗扩张。第351–382页，载于：《环论的代数、数论与拓扑学方面》，施普林格（2023年）。[33] G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，计算支集的闭包，《代数通讯》，52（2024），4923–4945。[34] G. Picavet 和 M. Picavet-L'Hermitte，共享单位的环对，《摩洛哥代数与应用几何杂志》，4（2025），207–238。[35] R. G. Swan，关于半正规性，《代数学杂志》，67（1980），210–229。[36] O. Zariski 和 P. Samuel，《交换代数》，第1卷，D. Van Nostrand，普林斯顿，新泽西州，美国，1963年。

Mathématiques, 63670, Le Cendre, France电子
邮箱地址：picavet.gm (at) wanadoo.fr