arXiv:2601.13095v1 [math.CO] 19 Jan 2026

高维等投影多胞体

Alice Cousaert *

摘要

如果一个三维多胞体沿着一个不平行于任何面的方向进行平面投影，并且每次投影都是一个 k 边形，则称其为 k-等投影多胞体。本文将等投影性推广到高维情形，并给出等投影多胞体组合类型数量的下界。我们还在“$d-2$”维空间的情形下，证明了格拉斯曼流形的一个子集具有路径连通性，并对显式路径给出条件。这使得 Hasan–Lubiw 等投影性刻画能够推广到高维。等投影性为研究影子顶点算法提供了相关情形，表明没有希望将投影的复杂度最小化。由于投影具有固定大小，它还为通常对多胞体平面投影的研究提供了一个逆向视角。

1 引言

Shephard 在其 9th 问题中研究了等投影多胞体：它们是这样的三维多胞体，几乎所有平面投影都具有相同的组合规模（等投影多面体的例子见 [16] ）。Hallard Croft、Kenneth Falconer 和 Richard Guy 在 [10], 中重新表述了这一问题，探讨如何构造等投影三维多胞体。为回答这个问题，Masud Hasan 和 Anna Lubiw 在 [17] 中建立了基于棱面的等投影性刻画：棱面是由一条边 e 和包含它的一个面 F 组成的有序对“$e,\ F$”，其中边 e 相对于 F具有定向。若两个不同的棱面“$e,\ F$”和“$e',\ F'$”满足 F 和 F' 是同一个面或平行面，且 e 和 e' 是方向相反的平行边，则称它们为补偿棱面。他们证明，多胞体 P 是等投影的，当且仅当其棱面可以划分为补偿对。最近，Théophile Buffière 和 Lionel Pournin 在 [8] 中利用法锥建立了另一种等投影性的刻画，使他们得以研究等投影性在闵可夫斯基和运算下的性质，并推导出 k-等投影多胞体的组合类型数量的下界

*大学 索邦巴黎北部大学，法国国家科学研究中心，巴黎北部计算机科学实验室，LIPN，F-93430 维勒塔讷 埃兹，法国；cousaert@lipn.univ-paris13.fr

对所有整数 k，均有这样的多胞体。这两种刻画都基于这样一个事实：随着投影方向连续变化，对于等投影多胞体，由于面的退化而导致一条边消失时，必然会由另一条平行边的出现予以补偿（该边位于同一个面上，或另一个平行面上）。

我们所要考虑的“几乎所有”投影，是指投影方向不平行于任何一个面的情形；否则，该投影会将一个面映射为线段，从而改变投影的组合复杂度。我们首先要确定在高维情形下应当避开哪些平面投影。这将引出对等投影性的推广。特别是，我们将看到，高维区域仍然是具有已知 k 的 k-等投影多胞体（这一点在三维情形下已于 [8] 中指出）；并且，如果固定维数 d，则至少有

$$k^{\frac{k}{2}\left(d^2-2d+O_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{\log k}\right)\right)} \tag{1}$$

种 k-等投影多胞体的组合类型，其中 k 为偶数。

Hasan–Lubiw 刻画依赖于这样一个引理：我们可以连续地将投影方向改变为任意另一个满足相同条件的方向，使得在路径上的任意时刻，退化的面至多只有一个（最终还包括其平行对应面）。这意味着，只需研究一对平行面恰好正在退化时，平面投影的组合规模如何变化。在第 4 节中，我们提出了格拉斯曼流形中有效路径的路径连通性概念，并用它在以下一个具有独立意义的定理中证明格拉斯曼流形某个子集的连通性：

定理 1.1. 给定一个 d 维多胞体 P，我们可以在平面正交投影空间中连接它的任意两个可容许正交投影，同时确保退化情况只有有限个，且 P 中任意两个不平行的二维面不会同时退化。

可容许性和退化的概念将在第 2 节中定义。简而言之，我们将 d 维多胞体称为 d-多胞体，并将多胞体 P 的 k 维面称为 P 的 k-面。

最后，第 5 节介绍了棱面概念的一种推广，称为**边-二维面**，并探讨了其中的细微之处：给定 „e, F, F_0” 一条边 e、包含它的一个二维面 F，以及另一个与 F 平行的二维面 F_0，使得我们能在某个投影的边界上同时看到它们。对于高维多胞体，我们将看到，无须考虑每一对可能的平行二维面。定向的构造和补偿的概念将沿用 [17] 中的方法。若两个边-二维面 „e, F, F_0” 和 „e', F', F_0'” 满足 e 与 e' 平行且定向相反，并且 $F = F'$ 与 $F_0 = F_0'$ 或 $F = F_0'$ 与 $F_0 = F'$，则称它们互为补偿。我们还给出一些基于上述显式路径的技术引理，并用它们来精确处理 d-多胞体

处理三维多胞体时也是如此，并证明推广后的 Hasan–Lubiw 刻画：

定理 1.2。 一个 d-多胞体是等投影的，当且仅当其边-二维面可以划分为互相补偿的成对组合。

从某种意义上说，等投影性是若干研究已久问题的逆向视角，例如扩展问题（见 [15] 和 [21]）：我们希望通过将给定多胞体视为更高维多胞体的投影来简化对它的研究。此类逆向问题的另一个例子是 Alexander Black 和 Francisco Criado 在 [4], 中的工作：他们固定多胞体，然后研究随机投影的期望大小；而在本文中，我们固定平面投影的大小，并研究多胞体的性质。此外，理解等投影性可能有助于研究影子顶点算法（见 [12] 以及 [11]），尤其是证明在某些情况下，不可能找到一个使影子的组合复杂度最小化的平面投影。一个相关问题研究多胞体被仿射空间[3, 6, 7, 20]截取所得截面的组合学。所有这些问题都涉及凸性与组合学之间的相互作用；尽管这种相互作用在诸多领域（如线性优化 [1, 5, 9, 13, 14, 22], 、几何 [18, 23, 24, 25], 、代数 [3, 19]或凸分析 [2, 20]）中具有重要意义，但我们对它的理解仍不充分。

2 高维等投影性的定义

本节旨在推广等投影性的定义，尤其是确定需要避免哪些平面投影。在本文中，我们始终假设多胞体 $P \subset \mathrm{R}^d$ 是满维的；如果不是，则在包含 P 的最小仿射空间中进行研究。我们的新定义如下：

定义1。 如果多胞体 $P \subset \mathrm{R}^d$ 的每个“可容许平面”投影都是一个 k 边形，则称其为 k-等投影的。

剩下的唯一任务是讨论在高维情况下“可容许平面”的含义。在三维中，我们之所以希望排除平行于 P 某个面的投影，是为了确保没有任何顶点三元组在投影边界上被映射为共线点。如果确实发生这种情况，则意味着 P 的某个面（以及其平行对应面，如果存在）被映射到投影的某条边上。我们称该面沿着此投影发生退化。

虽然使用顶点三元组的投影来扩展定义似乎很自然，但这将导致非常复杂的研究，因为原则上我们必须研究每一个可能的顶点三元组。让我们通过首先证明只需考虑 P 的二维面来简化这项研究。设 W 为 R^d 的一个平面子空间

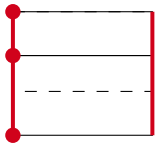


图1：立方体的一种退化投影，其中三个顶点被投影到边界上的共线点

，π_W 为到 W上的正交投影。若 P 的一个二维面 F 对于 W 退化，则称其为 W 的退化二维面，如果 F 在 π_W 下的像包含于 π_W„P”的边界中。特别地，如果一个二维面对 W退化，那么 π_W„P”中存在一条边包含 π_W„F”，于是有三个顶点在 π_W 下的像于边界上共线。反之亦然：如果至少有三个顶点在 π_W 下的像位于同一条边上，那么就存在一个对 W退化的二维面。事实上，将引理 7.10 应用于 [26] 中包含这三个共线像的边，则该边在 π 下的原像与 P 的交集是 P 的一个面，其中包含至少三个顶点，因此它至少包含一个对 W退化的二维面。总而言之，与三维情形一样，我们只需关注 P 的二维面。

这种退化定义的缺点是难以处理。我们更倾向于采用一个更强的条件，因为它的表述更方便。我们将禁止任何把二维面投影到某条线段上的投影任何位置（不一定在边界上，也可能投影到一个点上）。显然，条件„i”：“没有二维面被投影到线段上”蕴含条件„ii”：“没有二维面被投影到一条边上”。在高维中，反过来则不成立，以下是一个反例：如果将超立方体»0，1...^{4} 投影到张成空间 Span„e_1，e_2，e_3，$2e_3$，e_4”，其中„e_1...，e_d”是 R^d 的标准基，我们得到如下所示的投影：

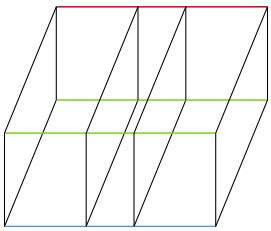


图2：超立方体的一种退化投影

其中，四条彩色线表示与张成空间„e_1, e_2”平行且正在退化的四个二维面。通过对蓝色和红色二维面（图中分别位于底部和顶部）稍作扰动，我们得到一个满足条件„ii”但不满足条件„i”的新多胞体，其投影与下方图3所示相同；其中红色二维面、蓝色二维面及其相邻的二维面可能被分割为两个不共面的三角形。为使图形清晰，我们未画出新增边。

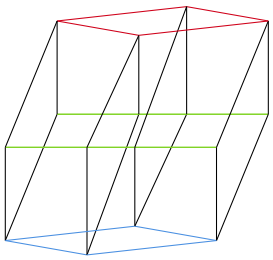


图3：一个提供反例的扰动超立方体

注。 仅在三维情形下，条件„*i*”和„*ii*”等价，因为只有在这种情形下，平面才是分离的。

我们将宽泛地使用术语：若一个二维面经 π映射后落在一条直线上，就仍称它对于W 是退化的。由于“平行于”是 P的二维面集合上的等价关系，我们更愿意说“ F的类”，而不是“F 及其平行二维面（若存在）”。如果一个二维面类中的某个代表元对于W 是退化的（该类中的其他所有代表元也都如此），我们就称这个类对于W 是退化的。

定义2 （可容许性）。 若一个平面向量空间W 满足： P 中没有任何二维面类对于W是退化的，则称W 对于P 是可容许的。由于W 完全由其正交补确定，我们称余维为2的空间 V 为可容许正交补 ，如果$V^{\perp}$ 是一个可容许平面。

如果 F 是 P的一个 k面，我们将 Span»F... 记作唯一一个与 F平行的 k维子空间。根据这一定义的可容许性，平面向量空间W 可容许，当且仅当对于所有二维面 F， W\ Span»F...$^{\perp}$或 $W^{\perp}$\ Span»F... 约化为 f0g（此时两个空间都如此）。这也等价于要求有限个行列式均非零。我们将在定义1中使用这一概念。

注。 这里，我们提出了两种不同的退化概念。人们或许会想，这两种概念是否会导出不同的等投影性定义。答案是否定的：等投影性的两种可能定义是等价的，但证明需要用到后续章节中的工具。

注。 这并非等投影性的唯一可能推广。例如，我们可以考虑投影到维数恒定且至少为 3 的子空间上。在这种情况下，我们必须确定要保持不变的量：可以是顶点数、边数、面数，甚至是组合类型。本文不讨论这一概念。

3 计数

有了定义1，我们来证明这样一个观察可以推广到更高维数：任意三维带区都是等投影的（参见 [8] 中的命题2.1）。

维数。令维数 d 固定。

观察与界的证明 察与界(1)。 经过平移后，区域可表示为如下形式的集合

$$Z = \sum_{g \in \mathcal{G}} \mathrm{Conv}(0, g)$$

其中，G 是 Z 的生成元集合，并假设该集合是极小的，也就是说，没有两个生成元共线。于是，很容易显式地计算出 Z的投影：

$$\pi_W(Z) = \sum_{g \in \mathcal{G}} \mathrm{Conv}(0, \pi_W(g))$$

如果 W 是可容许的，那么这意味着 $\pi_W g$”两两不共线。在这种情况下， $\pi_W „ Z$”是一个具有 2j G j 个顶点的二维区域。因此， Z是 2j G j-等投影的。

由于我们可以轻松构造无穷多个等投影多胞体（例如，取任意一个棱柱），因此我们更愿意统计其组合类型的数量，而非等投影多胞体的数量。当且仅当两个多胞体的面格之间存在保持包含关系的同构时，它们具有相同的组合类型。

将 Buffière–Pournin 界应用于具有 $\frac{k}{2}$ 个生成元的 d-区域在 k 为偶数时的组合类型数量（见 [8], 定理 1.2），可得至少有

$$k^{\frac{k}{2}\left(d^2-2d+O_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{\log k}\right)\right)}$$

引言中方程 (1) 所述的不同类型的 k-等投影多胞体。□

4 在格拉斯曼流形中行走

在 [17] 中 Hasan–Lubiw 刻画的证明依赖于一个引理，该引理指出，可以在两个可容许的投影方向之间找到一条连续路径，使得任意时刻至多有一类二维面发生退化，并且退化次数有限（见其中的引理 2）。关键问题在于，我们考虑的是一个投影方向（即二维球面上的一个点），而不是整个投影正交补；因此，在高维情况下无法将该引理推广，因为我们的投影正交补的维数为 $d-2$。在进一步讨论之前，我们必须明确格拉斯曼流形中弧连通性的某些概念。

尽管格拉斯曼流形有许多种实现方式，但在选择采用哪种实现方式之前，我们必须考虑导致多重退化的投影集合的几何性质。我们尤其希望避开这些投影，因为多重退化会使追踪投影的组合学变得非常困难。在三维中，这个集合仅由有限多个点组成，因此无需采用这样的工具。不过在高维中，

研究这个集合的几何性质要复杂得多。因此，我们需要逐个情形进行处理，构造显式路径，以避开这类投影。正是这一构造限制了我们的选择。例如，如果采用普吕克坐标，或者将格拉斯曼流形表示为正交投影的集合，那么在满足不同约束条件（分别为普吕克关系、幂等性和对称性）的同时构造路径，可能会很困难。此外，我们不采用将格拉斯曼流形实现为可表示函子或舒伯特胞腔的方式，因为这些表示无法提供向量空间如何与给定多胞体相互作用的信息。因此，最方便的做法是使用向量自由族，甚至不必先对“两个自由族张成同一空间”这一关系取商。如果赋予格拉斯曼流形商拓扑，这一取商操作将保留路径的连续性。此外，采用这种格拉斯曼流形的实现方式，还能让我们在下一节中精确处理多胞体。

4.1 连通性引理的推广

现在让我们陈述前面提到的连通性的定义，这里给出一般情形下的定义。

定义 3. 设 $V_0, V_1 \subset \mathrm{R}^d$ 是两个维数为 k 的向量空间。若γ：$t \in$ »0, 1... ⊦! γ„t” 2 „ R^{d}”^{k}，则称其为 V_0 与 V_1 之间的一条连续弧（或路径），如果：

1. 对所有 $t \in$ »0, 1...， γ„t” 都是一个自由族
2. 张成空间„γ„0”” $= V_0$和张成空间„γ„1”” $= V_1$
3. γ除有限个点 t_1、...、 t_n外连续， $0 < t_1 <\ldots\ldots < t_n < 1$ 并且在这些点处存在满足以下条件的左右极限：张成空间„γ„t_i^-”” =张成空间„γ„t_i^+”” =张成空间„γ„t_i””

如果存在这样的映射，我们就说可以从 V_0 连续地到达 V_1，并记作V_t = 张成空间„γ„t””。

注。 第一个条件确保张成空间„γ„t””沿路径保持相同的维数。第三个条件允许进行有限次基变换。
注。 与弧连通性的经典定义一样，我们可以沿路径反向行进，也可以拼接路径。换句话说，如果我们可以从 V_0 连续地到达 V_1，并且可以从 V_1 连续地到达 V_2，那么我们就可以从 V_1 连续地到达 V_0，并且可以从V_0 连续地到达 V_2。

这个概念有一个有趣的性质：函数 $t \in$ »0,1... ⊦! π_{W_t}„v” 对所有 v 都是连续的。事实上，格拉姆–施密特过程是连续的，因此 t ⊦!$\pi_{W_t^\perp}$„v” 是连续函数， t ⊦! π_{W_t}„v” 也是如此。

现在让我们聚焦于我们的情形 $k = d - 2$。我们的目标是在任意两个可容许正交补之间连续移动，同时确保任意时刻至多出现一次退化，正如定理 1.1 所述。让我们用更新后的术语重新表述一下：

定理 4.1（在格拉斯曼流形中行走）。设 P 是一个 d 维多胞体。我们可以从任意一个可容许正交补连续地变到任意另一个可容许正交补，使得沿路径仅有有限次退化，并且在每次退化中，只有一个二维面类发生退化。

注。研究投影的正交补比研究投影平面更方便。事实上，对于正交补，我们需要避开维数为 1 或 2 的空间，而这两种情况很容易处理。

我们将证明分解为若干引理，以使其类似于路径连通性的通常证明：我们将选取一个参考正交补 $W_r^\perp$，然后从任意可容许正交补走到 $W_r^\perp$。在开始证明定理 4.1 之前，我们还需要一个几何概念：

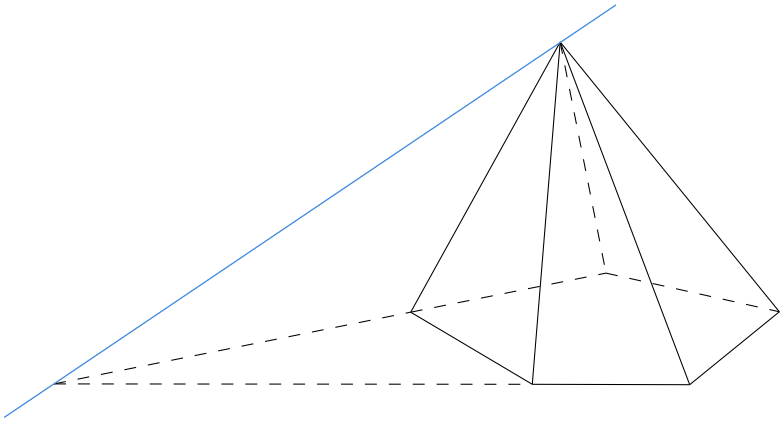
定义 4。设 F 和 F' 是 P 的两个不平行的二维面。那么

1. 要么 Span»F... \ Span»F'... = f0g，且我们称 F 和 F' 相离；2. 要么 Span»F... \ Span»F'... ≠ f0g，且该交集是一条由某个向量张成的向量直线

某个称为禁定方向的向量。

y

注。• 每个二维面 F 都满足：Span»F... 至少包含一个禁定方向，因为棱方向是禁定方向的一种特殊情况。此外，每个多胞体都只有有限多个禁定方向。



Fi图 4：一个禁定方向的示例，它不是棱方向

- 如图 4 所示，即使在三维中，指定方向也可能不是边的方向。

- 必须考虑这些方向，因为如果 W 至少包含其中一个，我们就能确定有多个类同时退化。
- 在三维情形下，只需避开所有禁定方向即可证明定理 4.1；但当 $d \geq 4$ 时则并非如此，因为我们可以找到这样的多胞体：任意多个两两相离的二维面同时退化（见下一小节中的明确构造）。

引理 4.2（选择参考对象的正交补）。对多胞体 P施加一个$\mathbb{R}^d$上的等距变换，可以得到以下性质：

- 没有禁定方向属于 $e_{\perp 1}$。在这种情况下，对每个二维面 F，$Span[F... \backslash e_{\perp 1}$ 都是由某个非零向量 η_F张成的直线。
- 每个 η_F 的最后一个坐标都非零。我们假设 $\eta_{F,\ d} = 1$

证明。对于禁定方向，如果其中某个方向不满足要求，我们可以施加一个旋转，只改变第一个坐标和它的一个非零坐标。若旋转角足够小，这个等距变换的作用就相当于对多胞体及其禁定方向作扰动。由于这样的方向只有有限个，我们可以选取一个角度，使扰动后的等距变换不会将任何满足要求的禁定方向变为不满足要求的方向。我们可以用同样的方法处理向量 η_F的最后一个坐标。□

注。 应用引理 4.2 中的等距变换后，所有二维面类的集合与所有 η_F 的集合之间存在一一对应关系。

在引理 4.2 的条件下，根据以交集表述的可容许性刻画，以及由 η_F 和 F 的任一指定方向组成的族构成 Span»F.... 的一组基这一事实，我们可以证明 W_r = Span„e_1, e_d" 是可容许的。

为了从任意一个可容许正交补转到 $W_r^{\perp}$，我们将路径分为两部分。第一部分由以下引理给出：

引理4.3。 设 P 是满足引理 *4.2* 中性质的多胞体，则我们可以在满足定理*4.1* 中性质的同时，连续地从任意一个可容许正交补转到包含于 $e_1^{\perp}$ 中的另一个可容许正交补。

证明。 设 $W_0^{\perp}$ 是一个不属于 $e_1^{\perp}$ 的可容许正交补。令 „u_1、.....、 u_{d-2}" 为 $W_0^{\perp}$ 的一组基。根据格拉斯曼公式，我们可以假设 u_2、.....、 $u_{d-2} \in e_1^{\perp}$，但不能假设 u_1：我们只需将后者映入 $e_1^{\perp}$。令 v 属于

$$\mathscr{V} = \mathbb{R}^d \backslash \left[e_1^{\perp} \cup \bigcup_{F\ 2-face} \mathrm{Span}(W_0^{\perp}, \eta_F) \right]$$

这个集合是零测集的补集，因此非空。此外，它在乘以非零标量后保持不变，因此我们可以假设对 $u_1 - v \in e_1^{\perp}$ 进行缩放，使其满足 v。我们考虑如下路径：

$$t \in [0,1] \mapsto (u_1 - tv, u_2, ..., u_{d-2}) \tag{2}$$

这是从 $W_0^{\perp}$ 连续通往某个 $W_1^{\perp} \subset e_1^{\perp}$ 的有效路径。我们必须检查 $W_1^{\perp}$ 是否可容许。对于任意 $v \in$ V，若 $W_{\perp 1} \setminus$ Span»F... $\neq$f0g 属于某个二维面 F，则 $\mu\eta_F = \lambda_1$„$u_1 - v$”，$\lambda_2 u_2$，...，$\lambda_{d-2}u_{d-2}$。由于 W_0 可容许，我们有 $\lambda_1 \neq 0$，因此 $v \in$Span„$W_0^{\perp}, \eta_F$”。这就产生了矛盾，因此 $W_{\perp 1}$ 可容许。

我们必须确保定理 4.1 的其他条件均得到满足。设 F 是 P 的一个二维面，且 „f_1, f_2” 是 Span»F.... 的一组基。我们关心函数的根的数量

$$D_F : t \in [0,1] \mapsto \det(u_1 - tv, u_2, .., u_{d-2}, f_1, f_2)$$

由于 D_F„t_0” $= 0$ 等价于沿 $u_1 - t_0 v$、u_2、.....、u_{d-2}” 投影时二维面 F 的退化。根据关于 W_0的假设，D_F 是一个在原点处纵坐标非零的仿射函数。因此，无论如何选择 v，它在 »0,1... 中至多有一个零点。

现在我们需要研究至少两个不同的类同时退化时会发生什么，以及如何解决这个问题。在这种情况下，设 F 和 F' 为两个不平行的二维面。我们可以通过求解关于 t的方程 D_F„t” $= 0$和 $D_{F'}$„t” $= 0$，来表示它们的退化时刻。当

$$\det(v, u_2, ..., u_{d-2}, f_1, f_2)\det(u_1, ..., u_{d-2}, f_1', f_2') = \det(v, u_2, ..., u_{d-2}, f_1', f_2')\det(u_1, ..., u_{d-2}, f_1, f_2).$$

两边都在 v中定义了一个线性形式，我们将 $\varphi_{F,F'}$„v”称为左端，将$\varphi_{F',F}$„v”称为右端。我们想要找到一个 $v \in$V，使得 $\varphi_{F,F'}$„v” $\neq \varphi_{F',F}$„v”。

让我们找出此类向量 v 存在的条件。若 $\varphi_{F,\,F'} = \varphi_{F',\,F}$，则它们具有相同的核，即张成空间„$u_2$, .., u_{d-2}, f_1, f_2” = 张成空间 „u_2, .., u_{d-2}, f_1', f_2'”。反过来，若这两个空间相同，则 $\varphi_{F,\,F'}$ 和 $\varphi_{F',\,F}$ 成比例。将关系式 $\varphi_{F,\,F'} = \lambda\varphi_{F',\,F}$ 代入 u_1，得到 $\lambda = 1$，因此 $\varphi_{F,\,F'} = \varphi_{F',\,F}$。

因此，如果张成空间„u_2, .., u_{d-2}, f_1, f_2” $\neq$ 张成空间„u_2, .., u_{d-2}, f_1', f_2'”，那么就可以扰动 v，使扰动后仍属于 V（因为 V 是一个开集），从而消除至少一个同时退化，同时不引入新的退化，因为 D_F 的零点关于 v连续。在三维中，在 F与 F' 不平行的假设下，v 存在扰动这一条件总是成立。因此，我们假设维数 d 严格大于 3。如果这两个空间相同，那么我们按如下方式扰动 u_2。特别地，我们有 det„u_2, .., u_{d-2}, f_1, f_2, f_1'” $= 0$。令 $w \notin$张成空间„u_3, .., u_{d-2}, f_1, f_2, f_1'”，则 det„u_2, εw, .., u_{d-2}, f_1, f_2, f_1'” $\neq 0$；并且通过沿 F 中的一个指定方向平移 w，我们可以假设 $w \in e_1^{\perp}$。由于函数 D_F 的零点连续

关于 u_2，可以找到一个足够小的 $\varepsilon > 0$，使得不会引入新的同时退化。此外，由于可容许性是 $W_0^{\perp}$任意基上的一个开条件，因此再次缩小 ε后，路径

$$\gamma : s \in [0, \varepsilon] \mapsto (u_1, u_2 + sw, u_3, ..., u_{d-2})$$

使得对于所有 s，张成空间„γ„s""均为可容许的。这种对 u_2 的扰动可能无法解决 F 和 F' 的同时退化。但在这种情况下，我们可以保证$\varphi_{F,\ F'} \neq \varphi_{F',\ F}$（注意，函数的表达式取决于投影的正交补！）这确保了存在一种对 v 的扰动，可以解决这种同时退化。

由于退化次数有限（每个二维面类至多一次），只要存在同时退化，我们就可以反复进行这一扰动过程，并将所有必需的有限次 γ 与一条和方程（2）同类的路径首尾相接，从而得到所需的路径。□

借助这个引理，我们现在只需关注包含在 $e_1^{\perp}$ 中的可容许正交补。根据引理 4.2 的性质，接下来只需处理 $e_1^{\perp}$ 的超平面，而退化是由向量 η_F 所张成的直线引起的，因此这样更为方便。此外，$e_1^{\perp}$ 中的一条路径就足够了，因为 $W_r^{\perp}$ 包含在 $e_1^{\perp}$ 中。

引理 4.4. 设 P 是满足引理 *4.2* 所述性质的多胞体，那么我们可以从 $e_1^{\perp}$ 中任意一个可容许正交补连续地变换到 $W_r^{\perp}$，同时满足定理 *4.1* 的性质。

证明. 设 $W_0^{\perp} \subset e_1^{\perp}$ 是一个不等于 $W_r^{\perp}$ 的可容许正交补。通过高斯消元，它具有如下形式的基

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ (0) & & 1 & & & \\ x_2 & \dots & x_{i-1} & & & \\ & & & 1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

其中每一列表示用“e_2、……、e_d”书写的基向量。按照引理4.3证明中的扰动 γ 所用的相同论证，我们可以连续地从 $W_0^{\perp}$变到某个扰动 $\tilde{W}_0$，同时确保沿整个路径始终可容许，其中

$\tilde{W}_0^{\perp}$有一个基

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ (0) & & 1 & & & \\ x_2 & \dots & x_{i-1} & \varepsilon & & \\ & & & 1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

通过高斯消元，这一操作可以使 x_j 所在的行下移一行。重复这一过程后，我们只需考虑形如以下形式的基

$$\Gamma(x) := \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \\ x_2 & \dots & x_{d-1} \end{pmatrix}$$

接着，我们考虑路径

$$t \in [0,1] \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \\ (1-t)x_2 & \dots & (1-t)x_{d-1} \end{pmatrix} (= \Gamma((1-t)x))$$

并希望研究有限多个函数的根

$$D_F : t \in [0,1] \mapsto \begin{vmatrix} 1 & & (0) & \eta_{F,2} \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & \eta_{F,d-1} \\ (1-t)x_2 & \dots & (1-t)x_{d-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$_{d-1}$经过计算，我们得到 $D_F\text{„}t\text{”} = \text{„}1-t\text{”} \sum \eta_{F,\ i}x_i, 1$。它们是仿射函数$_{i=2}$且 $D_F\text{„}1\text{”} = 1$，因此均不为零。它们在 »0， 1... 中至多有一个根，因此沿着这类路径只会出现有限次退化。

如果两个不平行的二维面同时退化，那么

$$\varphi_F(x) = \sum_{i=2}^{d-1} \eta_{F,i}x_i = \sum_{i=2}^{d-1} \eta_{F',i}x_i = \varphi_{F'}(x)$$

其中 φ_F 和 $\varphi_{F'}$ 是 $x \in \mathbb{R}^{d-2}$ 中的线性形式。和之前一样，我们扰动“x_i”$_i$ 以打破这个等式。我们只需找到一个“$\tilde{x}_i$”$_i$，使得 $\varphi_F\text{“}\tilde{x}\text{”} \neq \varphi_{F'}\text{“}\tilde{x}\text{”}$，并且

那么，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们就可以连续地从 Span„Γ„x”” 变到 Span„Γ„x , $\varepsilon\tilde{x}$””，同时确保不会引入任何新的同时退化。如果不存在这样的 $\tilde{x}$，那么 $\varphi_F = \varphi_{F'}$。在 R^{d-2} 的标准基下计算这个关系可得，对于所有坐标都有 $\eta_{F,\,i} = \eta_{F',\,i}$。因此 $\eta_F = \eta_{F'}$，这就产生了矛盾。所以存在一个 $\tilde{x}$，使得 φ_F“$\tilde{x}$” $\neq \varphi_{F'}$“$\tilde{x}$”。

然后，将有限个所需的扰动与路径t ↦ Γ„„$1 - t$”x”拼接起来，对于某个 x，我们便得到所需的路径。□

有了这些引理，我们现在可以证明定理 4.1：

定理 *4.1* 的证明。 记 f 为引理 4.2 中的等距变换。若 $W_0^{\perp}$对于P是可容许的，则 f„$W_0^{\perp}$”对于 f„P”也是可容许的。将引理 4.3 和 4.4 中的路径拼接起来，我们得到一条路径 γ，它连续地从 f„$W_{\perp 0}$”延伸至 $W_r^{\perp}$，并满足我们所需的性质。于是，$f^{-1} \circ \gamma$是一条从$W_{\perp 0}$到 f^{-1}„$W_{\perp r}$”的连续路径，它同样是可容许的，且不依赖于 $W_0^{\perp}$。然后，利用弧连通性论证，我们便得到所需的结果。□

该定理的主要结论是，我们只需研究仅有一个二维面类发生退化时的情形。

4.2 具有许多退化的多胞体

现在来看看前面提到的例子：一个允许任意多个相离的二维面同时退化的多胞体。我们先关注四维情形，因为更高维的例子可以通过按维数递归构造得到。

设 n 是一个大于 2 的整数。为了构造一个至少有 n 个相离的二维面同时退化的 4 维多胞体，我们考虑如下平面族

$$F_\theta = \mathrm{Span}\left(f_{1,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}; f_{2,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right)$$

其中 θ 属于$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$。它们构成一个两两相离的平面族，且它们在 W = 张成空间„e_1, e_2”上的正交投影是直线。

设 $\varepsilon > 0$，族 Y_θ = „$f_{1,\,\theta}$, „$1 - \varepsilon$” $f_{2,\,\theta}$, „1 , ε” $f_{2,\,\theta}$” 描述了一个包含在 F_θ 中的三角形，其在 W 上的投影是一个长度为 2ε 的线段，其定向与相对于 e_1 、角度为 θ 的射线相同，并以点 „cos θ, sin θ” 为中心（见下方图 5）。

这些 2-单形将在W 的一些精心选取的 θ和 ε值下退化。取一个 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$的正则细分，步长为 $2\frac{\pi}{n(n+1)}$。我们将这个细分记为 $-\frac{\pi}{4} = \alpha_0 \prec \bar{\alpha}_1 < \ldots < \alpha_n \prec \overline{\alpha_{n+1}} = \frac{\pi}{4}$。这些 α_i将作为我们的 θ值。接着，我们将每个Y_{α_i} 平移一个向量，使得这些 2-单形的像

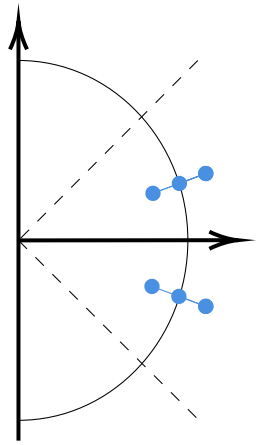


图 5：蓝色部分展示了 Y_θ 投影的不同示例

与 R^2的单位圆相切。最后，通过选取足够小的 ε，确保没有线段重叠，我们得到一些新的点 $„V_i, V_{i\pm\varepsilon}”$。取刚刚构造的$3n$ 点的凸包，便得到一个 4 维多胞体 P_n，其中至少有 n 对相离的二维面会在 W处同时退化。

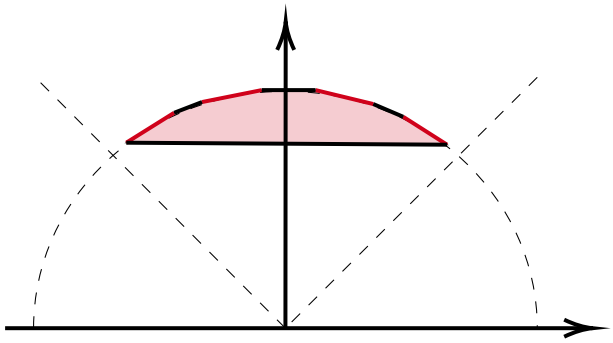


图 6： P_4 在 W上的投影示例。红色部分为退化的二维面。

对于更高维的示例，我们使用“超棱柱”：令 $„e_i”_i$ 为 R^d 的标准基。令 n 固定，并考虑由 $„P_{n,\ d}”_{d\geq 4}$ 定义的多胞体序列

$$\begin{cases} P_{n,4} = P_n \\ P_{n,d+1} = P_{n,d} + \mathrm{Conv}(0, e_{d+1} + \rho_{n,d}) \end{cases}$$

其中，$\rho_{n,\ d}$ 是 R^{d+1} 中的一个小随机向量，用来帮助防止维数大于 3 的面退化。对于所有 n 和所有 d，$P_{n,\ d}$ 是一个 d-多胞体，并且几乎必然至少有 n 对相离的二维面同时退化。

5 等投影性的刻画

首先，我们需要推广 [17] 中引入的棱面 概念。当一个二维面正在退化，且在投影边界上可见时，它消失的边只能由其他边补偿，这些边要么位于同一个二维面上，要么位于另一个同样在边界上退化的二维面上。若存在一个到平面的投影，使得只有 F （以及 F'）这一类正在退化，并且 F 和 F' 被映射到投影边界上，我们就称两个平行二维面 F 和 F' 是同时可见的 。为了涵盖 F 是其所属类中唯一在边界上退化的情形，我们允许 F' 为空。

需要注意的是，研究所有可能的平行二维面对过于繁琐，因为我们可能会发现，在维数为 $d > 3$ 的情形下，这样一对二维面永远不会同时退化到边界上。例如，在超立方体 »0，1…^{4}, 中，同一面上的两个平行二维面永远不会同时可见。如果我们只表示这个面的一个退化投影，就会发现，可以通过沿一个不与投影后的三维立方体的任何边平行的向量平移退化后的立方体，得到超立方体的投影。考察所有可能的情形后可以发现，两个二维面中必有一个落在投影内部（见下方图7）。

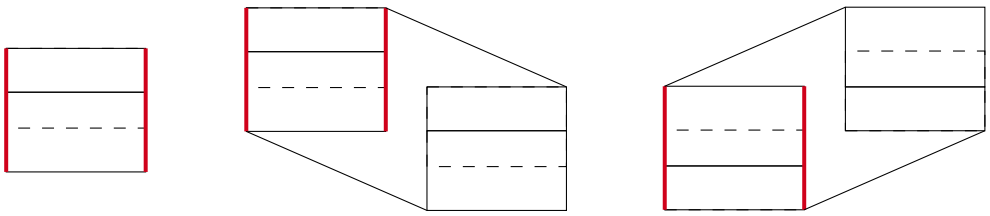


图7：左：立方体的一个退化投影；右侧和中间：超立方体退化投影的两个示例，显示红色二维面中的一个或另一个会被映入投影内部。

假设图7中描绘的两个面是与 $e_4^{\perp}$ 平行的面，且红色的二维面与 Span„e_1， e_2”平行。若存在一个将两个红色二维面都投影到边界上的投影，则它们要么被投影到投影中的同一条边上，要么被投影到投影中的两条不同的平行边上。在这两种情况下，我们都称它们的像与某个向量 u平行。在第一种情况下（分别地，在第二种情况下）， e_3 的像（分别地， e_4的像）也与 u平行，因此整个三维面都发生退化，其中包括属于不同类的其他二维面。

定义5 （边-二维面及其性质）。 设 P 是一个多胞体，设 F 和 F'是两个同时可见的平行二维面（可能还包括 $F' = \varnothing$），并设e 是 F的一条边。我们称“e， F， F'”为一个边-二维面。此外：

- 如果 $F' \neq \varnothing$，然后与同时包含二者的最小仿射子空间相交的 P

F 和 F' 是一个三维多胞体， F 和 F' 是它的两个面。我们按照 [17]中的定义，为形如“e， F， F'”或“e， F'， F”的每个边-二维面确定定向。

- 如果 $F' = \varnothing$ 我们任意选定 F一条边的定向，由于它的各条边构成一条闭合路径，这就可以确定其他每条边的定向。

- 如果两个边-二维面 $„e, F, F'"$ 和 $„\tilde{e}, F, F'"$ 彼此抵消，那么
  1. 要么 $F = F'$ 和 $F' = F$ 以及 e 和 $\tilde{e}$ 彼此平行且定向不同，
  2. 要么 $F = F$ 和 $F' = F'$ （可以为空）以及 e 和 $\tilde{e}$ 彼此平行且定向不同。

注。 </style}我们在 $F' = \varnothing$ 的情形下所作的选择不会改变抵消关系。

我们将定理 1.2 的证明分成两个不同的定理，分别陈述所需刻画的一个蕴含方向，而不像 [17] 那样只用一个定理。在我们的情形中，我们需要检验 Masud Hasan 和 Anna Lubiw 所用的几何直觉能否推广到高维。先来看第一个蕴含方向:

定理 5.1. 设 P 是一个多胞体。若其边-二维面可以划分为若干补偿对，则 P 是等投影的。

证明。 设 W_0 和 W_1 是两个可容许平面。我们的目标是证明 $\pi_{W_0}„P"$ 和 $\pi_{W_1}„P"$ 的边数相同。根据定理 4.1，我们可以通过有限次退化，从 $W_{\perp 0}$连续变换到 $W_1^{\perp}$，且每次只有一个二维面类发生退化。只需证明在单次退化过程中边的数量保持不变: 我们不研究整条路径，而是聚焦于单次退化附近的局部路径。我们将这些局部路径称为初等变换。

在这样的初等变换过程中，只有两种不同的可能性。在发生退化的唯一二维面类的所有代表中:

- 要么没有任何一个被映射到边界上。显然，此时投影的大小不会改变，因此我们可以忽略这种情况，
- 或者其中一个或两个被映射到边界上。

如果其中三个或更多个被送到边界上，那么投影的一条边上就至少会包含两个退化的二维面。在这种情况下，这条边的原像是多胞体的一个 k-面，其中包含至少两个不同的平行二维面，因此 k 会大于 3。于是，它的其他每个二维面也都会退化，这与假设矛盾。我们将第二种情形中的两个二维面记为 F 和 F' （可能还有 $F' = \varnothing$）。这意味着它们同时可见。

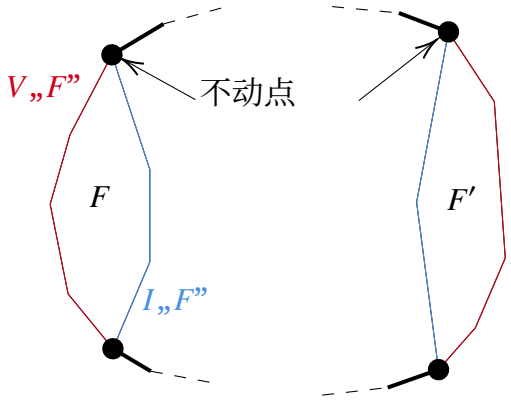


图 8：不动点、可见链和不可见链的示意图。

例如，在 F 上有两个特殊点。由于 F 正在退化，它恰好被送到投影多边形的一条边上，而该边的两个端点都对应于 F的一个顶点。这两个顶点都属于 F 之外的 P 的一条可见边（图 8 中以粗线表示）。由于这些边当且仅当发生了 F之外的其他退化时才会消失，因此它们在初等变换过程中必须始终处于边界上。特别地，F的这些特殊顶点也如此，我们称它们为 不动点。 F 的不动点确定了 F的两条边链。一条在投影边界上，另一条在退化前位于内部。我们分别称它们为可见链 $V„F”$和不可见链 $I„F”$（见图 8）。我们对 $F′$也作同样处理，约定如果 $F′ = \varnothing$，则 $V„F′”$和 $I„F′”$均为空。

发生退化时，存在两种不同的可能情况：链 $V„F”$ 和 $V„F′”$ 留在边界上，或者它们分别与 $I„F”$ 和 $I„F′”$ 互换角色。第一种情况并不值得关注，因为没有任何变化。我们假设只发生第二种情况。在这种情况下，需要注意的是， F 的两条平行边不能属于同一个可见性集合，否则就会导致同时退化。为了得出结论，我们必须证明

$$|V(F)| + |V(F′)| = |I(F)| + |I(F′)| \tag{3}$$

让我们研究 $V„F”$ 和 $V„F′”$ 中各元素的定向。如果观察用于确定 F 和 $F′$ 的边的定向的三维多胞体，我们会发现链 $V„F”$ 和 $V„F′”$ 的定向相同（例如，图 8 中均为“向上”）。因此， $V„F”$ 中的每条边都由 $I„F”$ 中的一条边或 $I„F′”$ 中的一条边补偿（ $F′$ 中的情况也类似）。由于边-二维面可以划分为补偿对，方程 (3) 对每个初等变换都成立，因此 P 是等投影的。□

注。 可见链和不可见链取决于我们所考虑的初等变换。除非有必要，否则我们不会指出这种依赖关系。

为了研究倒数，我们首先需要几个在三维情形下显而易见的引理，以便处理多胞体。首先，我们需要确保能够构造一种初等变换，使其交换可见链和不可见链。

引理 5.2. 设 F 和 F' 是 P中同时可见的二维面。那么存在一个初等变换，将 $V(F)$（分别将 $V(F')$）与 $I(F)$（分别与 $I(F')$）交换。

证明。设 $W^\perp$ 是根据 F 和 F'同时可见性的定义给出的正交补。设 „$u_1, ..., u_{d-2}$" 是 $W^\perp$ 的标准正交基，使得 $u_1 \in$ 张成空间»F.... 取 $v \in$ „$W^\perp$, 张成空间»F..."$^\perp$，考虑路径：

$$\varphi : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto (u_1 + tv, u_2, ..., u_{d-2})$$

其中 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得没有其他二维面发生退化。由于

$$\det(u_1 + tv, u_2, ..., u_{d-2}, f_1, f_2) = t \det(v, u_2, ..., u_{d-2}, f_1, f_2)$$

其中 „ f_1, f_2" 是张成空间»F...的一个基，我们得到所有 $W_t^\perp =$ 张成空间„φ„t"" 对 $t \neq 0$都是可容许的，因此我们得到了一个初等变换。至于交换，我们旨在研究 π_{W_t}„u_1"，因为 u_1 是导致退化的原因。

设 $w_1 \in$„张成空间„u_1、 ..... u_{d-2}， v""$^\perp$，那么对于所有 $t \in$ .....$-\varepsilon$， ε»，都有 $w_1 \in W_t$。设 w_2 是一个向量，它与 „w_1" 一起构成 W_0 的标准正交基。进一步缩小 ε 后，我们可以假设 „u_1 ,tv， u_2， ..... u_{d-2}， w_1， w_2" 都是自由族。唯一妨碍它成为正交族的因素是， w_2 可能与之前的某个向量不正交，具体来说是 u_1 , tv。于是我们写作：

$$\tilde{w}_2(t) = w_2 - t\frac{\langle v, w_2\rangle}{||u_1 + tv||^2}(u_1 + tv)$$

因此 „w_1， $\tilde{w}_2$„t"" 是 W_t 的一组正交基。由此我们可以得出：

$$\pi_{W_t}(u_1) = -t\frac{\langle v, w_2\rangle}{||u_1 + tv||^2.||\tilde{w}_2(t)||^2}\tilde{w}_2(t)$$

设 V_1， V_2 是该变换的两个不动点，„V_1， $\overline{\ }$!V_1V_2， u_1" 是 F 的仿射包的一组基。在这组基中，可见链上的每个顶点沿 u_1 的坐标都同号，假设它们为正；而不可见链上的每个顶点沿 u_1 的坐标都为负。虽然 π_{W_t}„ $\overline{\ }$!V_1V_2" 在变换过程中变化不大，但 π_{W_t}„u_1" 的变化由函数给出

$$t \mapsto \left(\langle \pi_{W_t}(u_1), w_1\rangle, \left\langle \pi_{W_t}(u_1), \frac{\tilde{w}_2(t)}{||\tilde{w}_2(t)||}\right\rangle\right) = \left(0, -t\frac{\langle v, w_2\rangle}{||u_1 + tv||^2||\tilde{w}_2(t)||}\right)$$

其中，0 源于 $\pi_{W_t^\perp}$„u_1" 和 π_{W_t}„u_1" 都属于张成空间 „u_1， v" 这一事实。注意，第二个坐标在 $t = 0$ 处变号。正是这一变号保证了 V„F" 和 I„F" 互换；在 F' 的仿射包中进行同样的研究，也会得到相同的结果。□

注。 将 v 改为 $-v$ 会使变换反向。因此，我们可以选择两条链中哪一条是可见的。

推论 5.3。 第 *2* 节末尾给出的两种退化定义，即：

1. “没有二维面被投影到投影边界上”

2. “没有二维面在投影中的任何位置被投影到一条线段上”

给出了相同的等投影性定义。

证明。 显然，条件“2”比条件“1”更强，因此满足条件“1”的等投影性蕴含满足条件“2”的等投影性。给定一个多胞体，我们希望研究那些仅使二维面在投影内部退化的投影。

设我们有 n 个不同的退化类。我们断言，其中至少有一个被投影到一条线段上。事实上，当一个二维面类被投影到一个点上时，该类中代表元的所有边也都会被投影到一个点上。这保证了每个包含这些边之一的二维面也会发生退化。如果所有退化的二维面都被投影到点上，那么根据邻近性，整个多胞体都会被投影到一个点上，这是荒谬的。

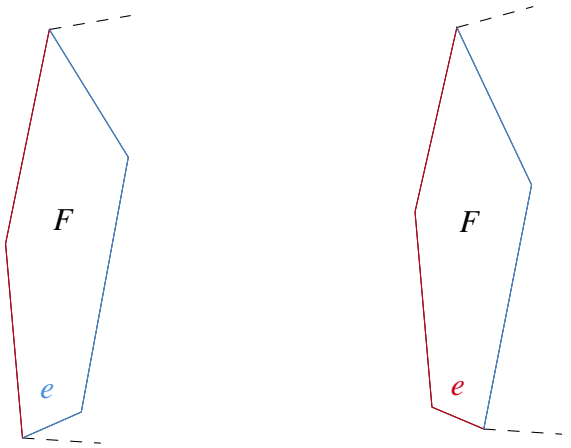
因此，设 F 是沿一条线段映射的某个退化类的代表。利用前一个证明中构造的初等变换，我们可以将 F 所属的类“去退化”，同时避免产生任何新的退化。因此，投影的组合复杂度不会改变，并且投影内部至多有 $n-1$ 个退化类，其中一个沿一条线段映射。通过递归迭代这一过程可知，满足 „2” 的投影与满足 „1” 的投影具有相同的组合复杂度。□

现在我们可以保证初等变换，剩下唯一要做的就是谨慎选择可见链。

引理 5.4. 设 P 是一个多胞体， F 和 F' （可能为空）是其两个同时可见的二维面，且 e 是 F 的一条边，并且 F 没有其他与 e 平行的边。那么，存在两个不同的初等变换，使得它们各自的可见链 $V_1(F)$和 $V_2(F)$满足：

$$V_1(F) = V_2(F) \sqcup \{e\} \text{ or } V_2(F) = V_1(F) \sqcup \{e\}$$

证明。 令 $W^\perp = \text{Span}„u_1$、……、$u_{d-2}$”，其中 $u_1 \in \text{Span}»F$……，且 „u_1、……、u_{d-2}” 是正交的。一个（定向）边属于两条链之一这一事实，可由该边方向与一个垂直于退化方向的向量的内积符号来判定（见图 10）。



Fi图9：引理 5.4 的示意图，为便于阅读而进行了夸张处理。

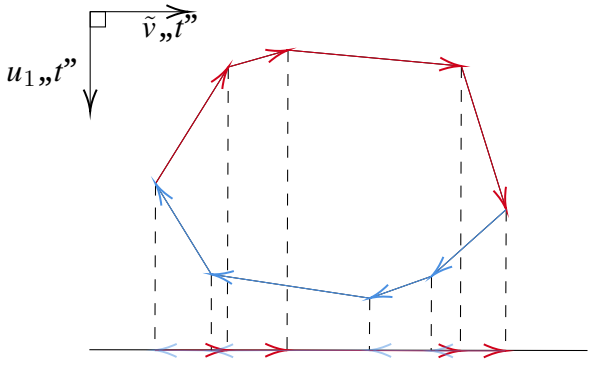


图 10：链的刻画示意图

考虑到这一点，我们的目标是找到两个正交向量，使得上述内积符号发生变化的唯一向量是 e 的定向。记其为 fi$e$ ，并假设它是单位向量。令 $v \in$Span»F..... 是一个垂直于 fi$e$ 的单位向量。因此，可以假设 $u_1 =$ fi$e$, λv ，其中 $\lambda > 0$；只需将 v 改为 $-v$ 即可。我们考虑如下变换

$$t \in [0, \lambda + \varepsilon] \mapsto (u_1 - tv, u_2, ..., u_{d-2}) = (u_1(t), u_2, ..., u_{d-2})$$

沿着这条路径， F 保持退化，而其他每个二维面 P 至多退化一次。因此，我们可以将 $\varepsilon > 0$ 取足够小，使得除 F的退化外，在»$\lambda - \varepsilon, \lambda$, ε...上只有一次退化发生（且发生在 λ处），因为 F的退化发生在线段的整个范围内。

族 „u_1„t”、 v” 对所有 t 都是自由的。让我们将其转化为正交族 „u_1„t”、 $\tilde{v}$„t””:

$$\tilde{v}(t) = -\frac{\lambda - t}{||u_1(t)||^2}\vec{e} + \left(1 + \frac{(\lambda - t)^2}{||u_1(t)||^2}\right)v$$

现在，令 fie_1 = fi$e$、fie_2、.....、fie_N 为 F 的所有边的方向。我们关注函数 t ł的符号变化! h fie_i、 $\tilde{v}$„t”i，因为变号意味着 e_i 的可见性链发生变化。根据我们对 ε 的选择，我们知道在 »$\lambda - \varepsilon$、 λ，ε..... 上只有一次这样的变化可能发生，因为 fi$e$。在这种情况下，我们有

$$\langle \vec{e}, \tilde{v}(t) \rangle = -\frac{(\lambda - t)}{||u_1(t)||^2}$$

因此，在 $\lambda - \varepsilon$ 和 λ 、 ε之间，链的唯一差异来自 e。根据前面的引理和注，我们可以找到两个不同的初等变换，使它们的可见链满足 V_1„F” = V_2„F” t feg。□

我们将在定理 5.1 的倒数证明中讨论涉及平行二维面 F' 时会发生什么：

定理 5.5。 设 P 是一个多胞体。如果 P 是等投影的，那么它的边-二维面可以划分为若干对，且每对中的两个面相互补偿。

证明。 为求完整，我们将用自己的记号重复 [17], 中所做的内容。边-二维面 „e, F, F'” 所在的组中，最多还有三个与之“相容”的边-二维面：„ $\tilde{e}, F, F'$” 与 $\tilde{e} \neq e$， „e', F', F”以及„$\tilde{e}', F', F$”与$\tilde{e}' \neq e'$ （如果它们存在）。因此，我们的目标是划分这样的组。根据逆否命题，假设有一个组包含边-二维面 „e, F, F'”，且无法划分。只有四种可能的情况：

1. F 或 F' 的其他边都不与 e 平行（F' 可能为空）。
2. F 没有其他与 e平行的边，而 F' 恰有一条方向相同的边。
3. F 没有其他与 e 平行的边，而 F' 有两条。
4. F 有另一条与 e 平行的边，而 F' 只有一条。

由于在最后两种情况下 F 和 F' 的角色具有对称性，只需假设 F 没有其他与 e平行的边。根据前面的引理，我们可以构造两个不同的初等变换，使得 V_1„F” = V_2„F” t feg。我们证明，对于其中一个初等变换，有

$$|V_i(F)| + |V_i(F')| \neq |I_i(F)| + |I_i(F')| \tag{4}$$

或者等价地，为了使 F 的所有实例都位于同一侧：

$$|V_i(F)| - |I_i(F)| \neq |I_i(F')| - |V_i(F')|$$

反证法：假设两种情况下等式都成立。将两式相减可得

$$|V_1(F)| - |V_2(F)| + |I_2(F)| - |I_1(F)| = |V_2(F')| - |V_1(F')| + |I_1(F')| - |I_2(F')|$$

在每种情况下，左端都等于 2。至于右端：在第一种情况下，两次变换之间的链不发生变化，因此右端等于 0。

在第二种情形中，平行于 e 的边原本位于 $V_1\text{„}F\text{”}$中，但最终落在 $I_2\text{„}F\text{”}$中，因此右端等于 -2。

在第三种情形中，平行于 e 的 F' 的两条边位于不同的可见性链中。改变 e 的可见性后，它们便交换了所在的链。因此左端等于 0。

因此，无论哪种情形都会产生矛盾。所以，方程 (4) 中的一个或另一个等式不成立，而 P 不是等投影的。□

由此得到定理 1.2 的刻画。与三维的 Hasan–Lubiw 刻画类似，这一刻画或可导出一种算法，用于判断给定的多胞体是否为等投影多胞体。高维情形的主要难点在于列出所有需要考虑的同时可见的二维面组合。此外，由于 Théophile Buffière 和 Lionel Pournin 在 [8] 中的工作依赖于 [17], 的结果，这一推广也让我们有望推广他们的工作。

致谢。本文作者感谢 Lionel Pournin 的认真审阅及所提出的建议，并感谢 Andrea Sportiello 就格拉斯曼流形展开的一场非常有趣的讨论。

参考文献

[1] Michele Barbato、Roland Grappe、Mathieu Lacroix 和 Emiliano Lancini。“盒全对偶整数性与边连通性”。载于：数学规划 198.1（2023），第307–336页。[2] Matthias Beck和Sinai Robins。《连续离散的计算》。Springer，2015。[3] Katalin Berlow、Marie-Charlotte Brandenburg、Chiara Meroni 和 Isabelle Shankar。“多胞体的交体”。载于：代数与几何论文集 63（2022），第419–439页。[4] Alexander E. Black 和 Francisco Criado。“固定多胞体的随机影子”。2024。arXiv: 2406.06936 [math.CO]。[5] Alexander E. Black、Jesús A. De Loera、Sean Kafer 和 Laura Sanità。“关于0/1-多胞体的单纯形法”。载于：运筹学数学50.2（2025），第1398–1420页。[6] Marie-Charlotte Brandenburg、Jesús A. De Loera 和 Chiara Meroni。“切割多胞体的最佳方式”。载于：计算数学 94（2025），第1003–1042页。

[7] Marie-Charlotte Brandenburg 和 Chiara Meroni。“立方体切片的组合学”。2025。arXiv： 2510.09265 [math.CO]。[8] Théophile Buffière 和 Lionel Pournin。“许多等投影多胞体”。载于：离散与计算几何 74（2025），第337–357页。[9] Jean Cardinal 和 Raphael Steiner。“完美匹配多胞体上最短路径的不可近似性”。载于：数学规划 210.1（2025），第147–163页。[10] Hallard T. Croft、Kenneth J. Falconer 和 Richard K. Guy。《几何学未解问题》。Springer纽约，纽约州，1991。[11] Daniel Dadush 和 Nicolai Hähnle。“关于曲面多面体的影子单纯形法”。载于：离散与计算几何 56.4（2016），第882–909页。[12] Daniel Dadush 和 Sophie Huiberts。“单纯形法的友好平滑分析”。载于：第*50*届*ACM SIGACT*计算理论研讨会论文集 （2018），第390–403页。[13] Antoine Deza、Shmuel Onn、Sebastian Pokutta 和 Lionel Pournin。“相切多胞体”。载于：*SIAM*离散数学杂志 38.4（2024），第2643–2664页。[14] Antoine Deza、Lionel Pournin 和 Noriyoshi Sukegawa。“格区域的直径”。载于：美国数学会论文集 148.8（2020），第3507–3516页。[15] Samuel Fiorini、Serge Massar、Sebastian Pokutta、Hans Raj Tiwary 和 Ronald de Wolf。“组合优化中多胞体的指数级下界”。载于：*ACM*学报62.2（2015），17:1–17:23。[16] Masud Hasan、Mohammad Monoar Hossain、Alejandro López-Ortiz、Sabrina Nusrat、Saad Altaful Quader 和 Nabila Rahman。“一些新的等投影多面体”。载于：几何组合学31.4（2022），第170–177页。[17] Masud Hasan 和 Anna Lubiw。“等投影多面体”。载于：计算几何40（2008），第148–155页。[18] Jeffrey C. Lagarias、Yusheng Luo 和 Arnau Padrol。“莫泽影子问题”。载于：《数学教学》64.2（2018），第477–496页。[19] Jean-Louis Loday。“Stasheff多胞体的实现”。载于：《数学文献》83.3（2004），第267–278页。[20] Lionel Pournin。“超立方体的浅截面”。载于：《以色列数学杂志》255（2023），第685–704页。[21] Thomas Rothvoss。“匹配多胞体具有指数级扩张复杂度”。载于：*ACM*学报64.6（2017），41:1–41:19。[22] Francisco Santos。“Hirsch猜想的一个反例”。载于：《数学年刊》176.1（2012），第383–412页。

[23] Geoffrey C. Shephard.《凸多面体问题二十则（第一部分）》。载于：《数学公报》52.380（1968），第136–147页。[24] Geoffrey C. Shephard.《凸多面体问题二十则（第二部分）》。载于：《数学公报》52.382（1968），第359–367页。[25] Lei Xue.《一般多胞体的 Grünbaum下界猜想证明》。载于：《以色列数学杂志》245（2021），第991–1000页。[26] Günter M. Ziegler. 多胞体讲义。第7版。Springer，1995年。