arXiv:2601.13127v1 [math.AG] 19 Jan 2026

# 微分模空间拓扑的代数几何视角

DAWEI CHEN 和 FEI YU

Abstract. 黎曼曲面上的微分对应于带有锥形奇点的平移曲面，而作用于这些曲面的仿射变换会保留这些奇点的阶数。这一视角使微分形式模空间以多种面貌出现在诸多领域中，包括代数几何、动力系统、组合计数和数学物理。过去几十年来，人们在计算这些模空间的不变量、分类线性子簇、理解退化与紧化，以及发展这些空间上的交理论等方面取得了显著进展。尽管取得了这些进步，我们对微分形式模空间拓扑的理解仍然有限，许多基本问题依然悬而未决。在这篇综述中，我们旨在从代数几何视角介绍有关微分形式模空间拓扑的已知结果与未解问题，以及它们与该领域其他方面的联系，希望能激发未来十年的进一步发展。

Contents

1. 引言 1 2. 微分形式分层预备知识 2 3. 微分层的连通分支 4 4. 微分层的基本群 10 5. 微分层的欧拉示性数 14 6. 微分层的典范环与仿射几何 16 参考文献 20

## 1. Introduction

黎曼曲面上的全纯微分对应于具有锥形奇点的平移曲面，其中微分的零点阶数决定相应的锥角。具有预定零点个数和阶数的微分所构成的轨迹将微分的模空间分层，而各分层之间的邻接关系则源于零点的合并。平移曲面上的仿射变换作用保持其奇点的锥角不变，因此在具有固定零点类型的每个微分分层上诱导出一个 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-作用，

*Date*: 2026年1月21日。D.C. 的研究部分由美国国家科学基金会 DMS-2301030 号资助，以及数学家西蒙斯旅行资助计划资助。

通常称为 Teichm¨uller 动力系统。除去标量乘法的影响，全纯微分对应于典范除子，而典范除子决定了底层代数曲线的内蕴几何。这些彼此关联却出于不同动机的观点，使微分及其分层的研究成为多个数学领域交汇处的核心课题。

过去几十年来，关于微分及其模空间的研究在多个方向上取得了显著进展，包括对平移曲面上动力学不变量的研究、$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-轨道闭包的分类、微分层的紧化、交数与循环类的计算，以及双有理几何的发展。关于这些主题，已有许多优秀的综述和讲义；此处仅请读者参阅[Zor06、M¨ol13、Wri15、Che17b、MSS18、Fil24、AM24] 等文献。

然而，我们对微分层拓扑性质的理解仍相当有限。在这篇综述中，我们从代数几何的视角探讨微分层的拓扑。乍看之下，使用代数几何方法研究拓扑问题或许显得有些冒昧。然而，微分层的许多拓扑不变量在代数几何中都有自然的对应物。此外，代数几何中的标准技术——例如模空间的紧化、奇点的变形，以及特征类的构造与正性——为探索与拓扑相关的现象提供了有力工具。

具体而言，我们将讨论以下主题：微分层的连通分支，其中通过双曲结构和自旋结构来区分额外的分支；微分层的轨形基本群以及 $K(\pi, 1)$ 型问题，这些问题与带框架映射类群、奇点变形和稳定性条件存在深刻联系；微分层的欧拉示性数，这些示性数可以通过紧化分层上的交理论获得；以及微分层上的重言特征类，其正性性质为分层的仿射几何、边界结构和上同调维数提供了洞见。除了全纯微分之外，我们还将讨论亚纯微分分层、 $k$-微分分层以及带有留数约束的广义分层中的类似问题。

由于本综述所涵盖的主题处于多个领域的交汇处，我们旨在优先阐释相关概念和思想背后的几何直觉，同时在不牺牲严谨性的前提下尽量减少技术细节，从而保持自然连贯的论述。本文绝非面面俱到，遗漏或偏颇在所难免。尽管如此，我们仍希望不同背景的读者，即使只是初读或快速浏览，也能觉得本文易于理解且富有启发性。

**致谢**。 本综述的部分内容源自第一作者在2025年代数几何暑期研究所“模空间几何”专题研讨会上的报告。作者感谢会议及专题研讨会的组织者给予他们展示研究成果并为会议论文集撰稿的机会。

## 2. Preliminaries on strata of differentials

本节简要回顾微分及其相关模空间的基本性质；更全面的介绍请参见 [Zor06，第 3] 节。

设 $\mu=(m_1,\dots,m_n)$ 是 $2g-2$ 的一个整数分拆，其中 $m_i\geq 0$ 对所有 $i$ 均成立。给定亏格为 $g$ 的光滑黎曼曲面 $X$ 上的一个非平凡全纯微分 $\omega$ （也称为阿贝尔微分），假设 $\omega$ 在$z_1,\dots,z_n$ 处有 $n$ 个互不相同的零点，其中每个 $z_i$ 都是 $m_i$ 阶零点。那么我们称 $\omega$ 为 $\mu$ 型。

全纯微分与具有锥形奇点的平移结构之间存在着引人入胜的相互作用。除去 $\omega$的零点后，我们可以局部选取一个解析坐标 $u$ ，使得 $\omega=du$。将 $u=x+\mathrm{i}y$ 视为欧几里得平面上的标准坐标， $\omega$便在 $X\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$上诱导出一个平坦度量。如果 $v$是另一个满足 $\omega=dv$的局部坐标，那么 $u$ 与 $v$ 相差一个平移，而平移会保持所诱导的平坦度量不变。

在一个阶数为 $m_i$的零点 $z_i$ 处，可以找到一个局部坐标 $w$ ，使得 $\omega=w^{m_i}dw$。将此式与邻近处的表达式 $\omega=du$相比较，可得 $w=u^{m_i+1}$ ，相差一个标量因子。因此，当沿着 $z_i$绕行一周时，由 $du$ 诱导的平坦度量下的总角度为 $2\pi$（$m_i+1$）。从这个意义上说， $\omega$ 在 $X$ 上诱导出一个平移结构，其锥点位于 $z_1$，……， $z_n$，且每个 $z_i$处的锥角等于 $2\pi$（$m_i+1$）。

$\mathcal{H}(\mu)$ 是参数化 $\mu$ 类型的微分 ($X$， $\omega$) 的模空间。在 ($X$， $\omega$) 处的局部，空间 $\mathcal{H}$ ($\mu$) 有一个由相对上同调 $H^1(X,\ \{z_1,\dots,z_n\};\ \mathbb{Z})$ 给出的坐标系。更确切地说，假设

$$\gamma_1,\dots,\gamma_{2g};\gamma_{2g+1},\dots,\gamma_{2g+n-1}$$

构成相对同调 $H_1(X,\ \{z_1,\dots,z_n\};\ \mathbb{Z})$ 的一组基，其中前 $2g$ 条路径是闭合的，并张成绝对同调 $H_1(X;\mathbb{Z})$，其余每条路径 $\gamma_{2g+i}$ 都连接 $z_i$ 与 $z_n$，其中 $i=1,\ \dots,\ n-1$。那么

$$\int_{\gamma_1}\omega,\dots,\int_{\gamma_{2g}}\omega;\int_{\gamma_{2g+1}}\omega,\dots,\int_{\gamma_{2g+n-1}}\omega$$

给出 $\mathcal{H}(\mu)$ 的局部坐标，称为周期坐标。

从 $\omega$ 所诱导的平移曲面结构的角度看，对这些周期坐标进行变形，相当于改变围成平移曲面的平行边，同时保持奇点的数量和锥角不变，从而确定 $\mathcal{H}(\mu)$ 中 ($X$， $\omega$) 的一个邻域。因此， $\mathcal{H}(\mu)$ 是一个维数为

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}(m_1,\dots,m_n)=2g+n-1,$$

其中，轨形结构源于具有非平凡自同构的特殊 $(X,\omega)$。我们还将记

$$\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)=\mathcal{H}(\mu)/\mathbb{C}^*$$

其射影化，它参数化类型为 $\mu$ 的典范除子。

注意，对于固定的 $g$，所有分拆 $\mu$ of $2g-2$ 对应的 $\mathcal{H}(\mu)$ 之并，就是亏格为 $g$ 的黎曼曲面的模空间 $\mathcal{M}_g$ 上全纯微分的霍奇丛 $\mathcal{H}_g$ （去掉零截面）。缩短连接两个阶数分别为 $m_i$ 和 $m_j$ 的零点的短周期，会使它们合并，从而在 $\mathcal{H}_g$ 上诱导出自然分层，其分层为 $\mathcal{H}(\mu)$；当且仅当 $\mu$ 可通过合并其各部分特化为 $\mu'$ 时， $\mathcal{H}(\mu)$ 才将 $\mathcal{H}$ ($\mu'$) 包含在其边界中。从这个意义上说， $\mathcal{H}(\mu)$ 被称为类型为 $\mu$ 的全纯微分层。

从黎曼曲面上的动力系统角度看，全纯微分的一个关键特征是，$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$通过仿射变换作用于它们，并保持

其零点的阶数不变。因此，这在每个具有指定零点阶数的全纯微分层上诱导出自然的 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 作用，对这一作用的研究通常称为 Teichm¨uller 动力系统。利用分层的周期坐标对 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 作用的轨道闭包进行分类，是该领域的核心问题。Eskin、Mirzakhani 和 Mohammadi[EMM15, EM18] 的一项突破性成果证明，每个 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 轨道闭包在局部都由周期坐标中的线性方程定义；Filip [Fil16] 后来证明，这些方程的系数是代数数。尽管 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 轨道闭包表现出与周围分层相似的几何特征，但其分类及相关拓扑性质仍远未得到充分理解。关于这一主题的详细介绍及更多参考文献，请参阅[Wri16, Fil24] 。

除了全纯微分外，还可以考虑具有指定零点阶数与极点阶数的亚纯微分分层，以及 $k$-微分的分层；后者是典范丛的 $k$ 次幂的截面。从平坦度量和平移结构的角度来看，亚纯微分对应于一个无限面积的平移曲面，其中极点被视为无穷远点。同样， $k$-微分对应于一个 $\frac{1}{k}$ -平移曲面，其转移函数由平移和旋转组成，旋转角是 $2\pi/k$ 的整数倍。关于亚纯微分和 $k$-微分的分层的详细介绍，分别请参阅 [Boi15、BCG+19] 。

## 3. Connected components of strata of differentials

对一个空间的连通分支进行分类——等价地，确定其$\pi_0$——是理解其拓扑最基本的一步。

本节首先回顾用于区分微分层连通分支的双曲结构和自旋结构。随后，我们讨论有关全纯微分、亚纯微分、二次微分和 $k$-微分分层的连通分支分类的已知结果与未解决问题，以及带有留数约束的微分广义分层。

**3.1. 超椭圆结构**。设 $X$ 是亏格为 $g \geq 2$ 的光滑超椭圆曲线，令 $\tau \in \mathrm{Aut}(X)$ 表示诱导双覆盖 $X \to X/\tau \cong \mathbb{P}^1$ 的双曲对合。

任意非平凡的全纯微分 $\omega$ on $X$ 的零点具有如下形式

$$\sum_{i=1}^{s} 2k_i w_i + \sum_{j=1}^{t} l_j (p_j + q_j),$$

其中每个 $w_i$ 都是由 $\tau$ 固定的 Weierstrass点，每一对 $(p_j,\ q_j)$ 则由被 $\tau$ 互换的点组成。在这种情况下有 $\tau^*\omega = -\omega$，在相应平移曲面上，这对应于旋转 $180°$。

此类超椭圆微分的轨迹维数为 $2g - 1 + t$，而与

$$\mu = (2k_1, \ldots, 2k_s, l_1, l_1, \ldots, l_t, l_t)$$

维数为 $2g-2+s+2t$。特别是，当且仅当 $\mu = (2g-2)$ 或 $\mu = (g-1,\ g-1)$ 时，这两个维数相等；比较见下文第3.3节。

3.2. **自旋结构**。设 $\mu=(2k_1,\ \ldots,\ 2k_n)$ 是 $2g-2$ 的一个分拆，其各项均为偶数。对于任意 $(X,\ \omega)\in\mathcal{H}(\mu)$，线丛

$$L=\mathcal{O}_X(k_1z_1+\cdots+k_nz_n)$$

满足 $L^{\otimes 2}\cong K_X$，因此是一个 θ-特征。在这种情形下，Atiyah [Ati71] 和 Mumford [Mum71] 的经典结果表明

$$\dim H^0(X,L)\pmod 2$$

是一个形变不变量，我们称之为与 $\omega$ 相关联的自旋奇偶性。

还有一种方法，可以通过 $\omega$ 所诱导的平移结构来确定自旋奇偶性。给定 $\gamma$ 中的一条闭路径 $X$，且它不经过 $\omega$ 的零点，记 $\mathrm{Ind}_\gamma(\omega)$ 为 $\gamma$ 相对于由 $\omega$ 定义的平坦度量的绕数。若将 $\gamma$ 变形为经过一个阶数为 $m$ 的零点，其绕数会改变 $m$。因此，如果 $\omega$ 只有偶数阶零点，那么 $\mathrm{Ind}_\gamma(\omega)$（模 2）只取决于 $\gamma$ 所代表的同调类。在这种情况下，令 $\{(\alpha_i,\ \beta_i)\}_{i=1}^g$ 为 $H_1(X;\mathbb{Z})$ 的一组辛基，并选取它使得所有曲线都不与 $\omega$ 的零点相交。于是可定义 Arf不变量

$$\mathrm{Arf}(\omega)=\sum_{i=1}^{g}(\mathrm{Ind}_{\alpha_i}(\omega)+1)(\mathrm{Ind}_{\beta_i}(\omega)+1)\pmod 2.$$

Johnson [Joh80] 证明了 Arf不变量与自旋奇偶性一致，即，

$$\mathrm{Arf}(\omega)=\dim H^0(X,L)\pmod 2. \tag{1}$$

3.3. **全纯微分分层的连通分支**。利用上述超椭圆结构和自旋结构，Kontsevich 和 Zorich 获得了全纯微分分层连通分支的完整分类。简而言之（见 [KZ03，定理 1 和 2]），全纯微分分层 $\mathcal{H}(\mu)$至多有三个连通分支，额外的分支源于超椭圆结构或自旋结构。更确切地说，当且仅当 $\mu=(2g-2)$ 或 $\mu=(g-1,\ g-1)$ 时，才会出现超椭圆分支；而当 $\mu$ 的每一项都是偶数时，才会出现奇、偶自旋分支。

例如，当 $g\geq 4$ 时，最小分层 $\mathcal{H}(2g-2)$有三个连通分支：$\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{hyp}}$、$\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{odd}}$ 和 $\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{even}}$。其中，$\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{hyp}}$参数化唯一零点位于 Weierstrass点的超椭圆微分，而 $\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{odd}}$（分别为 $\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{even}}$）参数化的是$\omega$对应自旋结构维数为 $H^0(X,\ (g-1)z)$（模 2）为奇（分别为偶）的非超椭圆微分。值得注意的是，在低亏格情形下，某些超椭圆分支与自旋分支会重合；例如，当 $g=3$ 时，$\mathcal{H}(4)^{\mathrm{hyp}}=\mathcal{H}(4)^{\mathrm{even}}$。

存在双曲结构或自旋结构时，不难看出它们会在全纯微分的分层中产生额外的连通分支。然而，困难之处在于证明这些是导致不连通的唯一因素——也就是说，要确定不存在其他隐藏的不变量将更多连通分支区分开来。

Kontsevich 和 Zorich 的证明依赖一种精妙的解析手术，称为鼓泡加柄，它通过归纳从亏格 $g$的微分构造亏格 $g+1$ 的微分。第二个关键要素来自与区间交换变换相关的 Rauzy 类理论，该理论确保高亏格中的每个连通分支都可以通过反复应用

这种手术到达。这些思想结合起来，为全纯微分分层的连通分支提供了完整的分类。

截至目前，尚无 Kontsevich–Zorich 分类的其他证明；尤其是，目前还没有适用于 $\mathbb{C}$ 以外域的代数几何证明。一个有希望的方向可能在于近期关于微分层的多尺度紧化 [BCG+18、BCG+24] 的研究进展：其边界类似于曲线模空间的 Deligne–Mumford 紧化的边界，由亏格更低或具有更特殊奇点类型的分层构成。人们或许可以利用这一紧化，通过归纳确定这些分层的连通分支。然而，这种归纳策略要求我们知道每个连通分支都包含特定类型的边界微分，例如由鼓泡加柄产生的边界微分；在这一点上，Kont- sevich 和 Zorich 关键性地使用了 Rauzy 类这一非代数工具。

我们在下面的问题中总结这些考量。

**问题 3.1**。不使用 *Rauzy* 类，找出一种代数论证，证明全纯微分分层的每个连通分支都包含通过鼓泡加柄得到的边界微分。

由此，找出 *Kontsevich–Zorich* 分类的代数证明，使其能够推广到 $\mathbb{C}$ 以外的域。

最后，我们指出，也可以研究带有 Teichm¨uller 标记的曲面上的全纯微分分层，即定义在 Teichm¨uller 空间上的霍奇丛中的分层。Calderon 和 Salter [Cal20, CS21] 完成了这类带标记分层的连通分支分类。与未标记平移曲面的情形不同，Teichm¨uller 空间上会出现更多连通分支。特别地，对于 $g \geq 3$，存在无穷多个超椭圆连通分支；而对于 $g \geq 5$，只要一个公因数 $r$ 整除微分的所有零点阶数，$r$-自旋结构（推广了 $r = 2$ 的情形）就恰好区分出 $r^{2g}$ 个非超椭圆分支；另请参阅 [Ham21]，了解一些相关结果。这一视角与研究分层的轨形基本群及其在映射类群中的单值化像密切相关；参见第 4.1 节。

3.4. **亚纯微分分层的连通分支**。还可以考察具有规定零点阶数与极点阶数的亚纯微分分层。Boissy [Boi15], 利用双曲结构和自旋结构，以及类似于 Kontsevich 和 Zorich 工作中的归纳程序，对它们的连通分支进行了分类。然而，在亚纯微分的情形下还会出现两个新特征。

首先，设 $\mu = (m_1, \ldots\ldots, m_n)$ 是亏格一中亚纯微分的一个指标，并记 $\gcd(\mu) = \gcd(m_1, \ldots\ldots, m_n)$。给定椭圆曲线 $E$ 上的一个 $\omega$ 类型为 $\mu$ 的亚纯微分，定义旋转数

$$\mathrm{rot}(\omega) = \gcd(\mathrm{Ind}_\alpha(\omega), \mathrm{Ind}_\beta(\omega), m_1, \ldots, m_n),$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 构成 $H_1(E;\mathbb{Z})$ 的辛基，而 Ind 表示相对于由 $\omega$ 诱导的平坦度量，闭路径在 $E$ 中的绕数。Boissy 证明，这些旋转数能够区分亏格一亚纯微分分层的连通分支；参见 [Boi15，定理 4.3]。

也可以从代数几何的角度理解旋转数。令 $m_1z_1+\cdots+m_nz_n\sim K_E\cong\mathcal{O}_E$ 为与 $\omega$ 相关联的亚纯典范除子。令 $d$ 为 gcd($\mu$) 的最大除子，使得

$$(m_1/d)z_1+\cdots+(m_n/d)z_n\sim\mathcal{O}_E,$$

其中， $d$ 被称为 $\omega$的扭数。不难看出，扭数也可用于区分类型为 $\mu$的亏格一亚纯微分分层的连通分支；例如参见 [CC14，第3节2]。事实上， $\omega$ 的旋转数与扭数相同；参见 [Tah18，第3节4]以及[CG22，命题313]。

其次，亚纯微分的极点位于相应平移曲面结构下的无穷远点处。在垂直测地流下，亚纯微分（不含垂直鞍连接）可分解为由（破碎的）半无限圆柱（对于单极点）和（破碎的）半平面（对于高阶极点）组成的部分，其中这些圆柱和平面的边界由实部为正的鞍连接首尾相接而成。这使 Boissy 能够采用一种更具几何性的论证，而非使用 Rauzy 类：通过将某些较短的边界鞍连接缩短，可以从低亏格通过鼓泡加柄到达高亏格中的每个连通分支；参见 [Boi15，命题61]。

3.5. **二次微分分层的连通分支**。 黎曼曲面 $X$ 上的二次微分 $q$ 是双典范丛$K_X^{\otimes 2}$ 的一个截面。对 $q$ 取局部平方根，会在$X$上诱导出半平移曲面结构，其中转移函数是平移以及旋转角为~的 $\pi$倍的旋转。此外，还存在一个典范双覆盖 $\pi\colon\ X\to X$ ，使得 $\pi^*q=\widetilde{\omega}^2$，其中 $\pi$ 在 $q$的奇异点处分支， $\widetilde{\omega}$ 是 $X$上全局~定义的阿贝尔微分，并且 $\widetilde{\omega}$ 在典范双覆盖的对合下是反不变的。注意，当且仅当 $q$ 至多具有单极点时， $\widetilde{\omega}$ 才是全纯的；其中， $q$ 的一个单极点对应于相关半平移曲面中角度为$\pi$的锥形奇点。

阿贝尔微分的许多性质都自然地延伸到二次微分。特别是，$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-作用保持二次微分的奇点阶数，因此作用于每个具有给定零点阶数与极点阶数的二次微分分层。此外，通过典范双覆盖提升到相应阿贝尔微分分层的二次微分分层的像，是$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-作用下的不变子空间。

用 $\mathcal{Q}(\mu)$ 表示类型为 $\mu$ 的本原二次微分分层，即那些不是阿贝尔微分全局平方的二次微分。当 $\mu$ 中所有项都大于或等于 $-1$ 时——等价地说，相应的半平移曲面具有有限面积—— $\mathcal{Q}(\mu)$ 的连通分支由 Lanneau [Lan08]，使用与 [KZ03] 中类似的归纳程序完成分类。当 $\mu$ 含有高阶极点时， $\mathcal{Q}(\mu)$ 的连通分支分类由 [CG22]，运用与 [Boi15] 中相近的思路完成。与亚纯微分的情形一样，二次微分也呈现出若干新特征。

首先，若存在超椭圆结构，仍可用它来区分 $\mathcal{Q}(\mu)$的连通分支；参见 [Lan04a]。然而，在这种情形下，自旋结构不会产生额外的连通分支；参见 [Lan04b]。更确切地说，若 $\mu$ 的每个条目都不等于 2（模 4），那么 $\mathcal{Q}(\mu)$可经由典范双覆盖提升为

一个阿贝尔微分的分层，其中零点阶数与极点阶数全为偶数，因此同时具有奇自旋分支和偶自旋分支。值得注意的是， [Lan04b 的定理 1.1 和 1.2]证明，这两个自旋分支中恰有一个包含 $\mathcal{Q}(\mu)$的提升像。换言之，典范双覆盖上的自旋奇偶性完全由二次微分的指标 $\mu$ 决定。为证明这一结果，Lanneau 构造了典范双覆盖的一个显式辛基，并计算了相应的 Arf不变量。鉴于关系式 (1)，通过分析相应 θ特征线丛的整体截面空间的维数来重新得到这一结果，将会很有意思。

接下来，在三阶和四阶亏格中，本原二次微分存在若干例外分层：

$$\begin{aligned} g=3\colon &\quad \mathcal{Q}(9,-1),\quad \mathcal{Q}(6,3,-1),\quad \mathcal{Q}(3,3,3,-1);\\ g=4\colon &\quad \mathcal{Q}(12),\quad \mathcal{Q}(9,3),\quad \mathcal{Q}(6,6),\quad \mathcal{Q}(6,3,3),\quad \mathcal{Q}(3,3,3,3). \end{aligned}$$

这些分层各由两个连通分支组成，分别称为“正则”和“非正则”分支；它们无法通过双曲结构或自旋结构来区分。相反，人们利用与相应二次微分的零点除子三分之一相关联的 Brill–Noether 几何来区分它们；参见 [CM14，第 6 节和 7]。

例如，设 $9z-p$ 是亏格为三的曲线 $X$ 上某个二次微分 $q$ 所对应的双典范除子，该曲线由 $\mathcal{Q}(9,-1)$ 参数化。那么，$(X,q)\in\mathcal{Q}(9,-1)^{\mathrm{reg}}$ 当且仅当 $h^0(X,3z)=1$；而 $(X,q)\in\mathcal{Q}(9,-1)^{\mathrm{irr}}$ 当且仅当 $h^0(X,3z)=2$。证明利用了 $X$ 到 $\mathbb{P}^2$ 的典范嵌入，将其嵌入为一条平面四次曲线；该曲线与一条特殊的平面三次曲线 $E$ 相交，而后者所关联的 3-挠几何能够区分这两种情形。然而，目前尚无已知的平坦几何不变量能够区分正则分支和非正则分支。

我们将上述讨论概括为以下问题。

**问题 3.2.** 对于自旋型二次微分分层——也就是说，典范双覆盖上的平方根阿贝尔微分只有偶数阶奇点时——通过相关 $\theta$特征线丛的整体截面空间的维数确定自旋奇偶性。

此外，对于亏格三和四的例外二次微分分层中的正则与非正则连通分支，请找出一种能够区分它们的平坦几何不变量。

**3.6. 微分分层的连通分支。 $k$-微分。** 一般而言，也可以研究零点阶数与极点阶数由$\mu$指定的 $k$-微分分层 $\mathcal{H}^k(\mu)$；有关 $k$-微分的介绍，参见 [BCG$^+$19] 。然而，对于 $k\geq 3$，关于 $\mathcal{H}^k(\mu)$连通分支的已知结果寥寥无几。现有少数结果中，关于 $k$-微分的双曲结构和自旋结构，参见 [CG22，定理 1.1 和 1.2] ；关于亏格二时最小分层 $\mathcal{H}^k(2k)$的连通分支分类，参见 [BG25，推论 1.6] ；而当简单零点足够多时的情形，参见第 4.4 节。

研究 $k$-微分时遇到的一个障碍是，对于 $k\geq 3$ ，缺少 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-作用。因此，即使存在高阶极点——也就是说，相应的 $\frac{1}{k}$ -平移曲面具有无限面积——由于缺少定义良好的垂直测地流，我们也无法对极区域进行清晰的分解。这与 [Boi15]，中讨论的亚纯微分情形形成对比，在那里，这种分解发挥着关键作用。特别是，缩短一条

极域边界上的短鞍连接可能会导致曲面退化；有关此问题的详细讨论，请参见 [CG22，第 6.8] 条备注。

我们在以下问题中总结这些考虑。

**问题 3.3**。 为 $k$-微分寻找新的不变量和结构（如果存在），并对所有 $k$ 的 $k$-微分层的连通分支进行分类。

**3.7. 微分的广义分层的连通分支**。 在微分层的多尺度紧化中，用于识别可平滑化的退化微分的主分支的一个关键机制是全局留数条件；参见 [BCG$^+$24，第 2.4 节（4）]。粗略地说，当黎曼曲面上的微分退化为节点微分时，如果某些节点的消失圈之和为平凡同调类，那么根据斯托克斯定理，对应节点处亚纯微分的留数便满足和为零的约束。这些亚纯微分出现在退化过程中塌缩、但在将互补分支扩展至无穷远后重新出现的子曲面分支上；参见 [Che17a，图 15 以及 16] 中的示例。

因此，研究满足指定留数关系的亚纯微分轨迹是很自然的——这些轨迹称为微分的广义分层。事实上，即使最终只关注没有留数约束的微分层，在通过多尺度紧化归纳分析边界结构时，由于全局留数条件，这类广义分层也不可避免地会出现，因此必须予以考虑。

微分的广义分层中最特殊的情形，是要求每个极点处的留数都为零；这类分层称为无剩余微分分层。Lee [Lee24], 完成了无剩余微分分层的连通分支分类，其中超椭圆结构、自旋奇偶性以及旋转数（在亏格一的情形下）仍起着主要作用。更一般地，对于某些指定的留数组合之和为零的微分广义分层，Lee 和 Wong [LW25]完成了其连通分支分类。

出人意料的是，这些研究尚未涵盖的唯一情形，是零亏格下的无剩余微分分层。这一情形与一个由来已久的 Hurwitz 实现问题密切相关：对具有指定分歧型的球面分歧覆盖进行实现；无剩余微分的积分会给出与相应分歧覆盖相关联的有理函数。

对于 $k$-微分的极点，也可以定义留数；参见 [BCG$^+$19，第 3.1] 节。一个相关的基本问题是：是否存在具有指定奇点阶数，且每个极点处留数均已指定的 $k$-微分。Gendron 和 Tahar [GT21, GT25a, GT25b] 在一系列工作中研究了这一问题。同样，唯一尚未解决的主要情形是：在零亏格下，给定零点阶数与极点阶数时，无剩余微分的实现问题。

我们将上述讨论概括为以下问题。

**问题 3.4**。 确定在零亏格下，给定零点阶数与极点阶数时，无剩余微分分层何时非空，并对其连通分支进行分类。

因此，解决具有指定分歧型的 $\mathbb{P}^1$分歧覆盖的 *Hurwitz* 实现问题。

## 4. Fundamental groups of strata of differentials

在本文综述的其余部分，按照惯例，提及分层或使用诸如 $\mathcal{H}(\mu)$ 这样的记号时，如果该分层不连通，我们指的是其中一个连通分支。

如前所述，除了连通分支分类之外，人们对微分层的大多数拓扑性质仍知之甚少。本节将回顾近年来在理解微分层基本群方面取得的进展，以及其与其他主题的联系，例如单值化表示、奇点变形和稳定性条件。

4.1. $K(\pi,1)$ **猜想**。带标记点的黎曼曲面模空间 $\mathcal{M}_{g,n}$ 是 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}_{g,n}$ 对映射类群 $\mathrm{Mod}_g^n$ 的商，这是一个经典事实。其中，$\mathcal{T}_{g,n}$ 作为 $\mathcal{M}_{g,n}$ 的轨形万有覆盖，是可缩的，而轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{M}_{g,n})$ 可以与映射类群 $\mathrm{Mod}_g^n$ 等同起来。

Kontsevich 和 Zorich [KZ97，第 4] 节猜想，全纯微分分层也满足类似的陈述，这一猜想被称为微分层的 $K(\pi,1)$ 猜想：即，$\mathcal{H}(\mu)$ 的轨形万有覆盖是可缩的，并且轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{H}(\mu))$ 与某个适当的映射类群是可公度的。

这个 $K(\pi,1)$ 猜想可以在超椭圆分层中得到验证，主要是因为，配备固定类型典范除子的超椭圆曲线轨迹，可以通过有限基变换与球面上标记点的构形空间相对应。此处，$n$ 点对应于超椭圆双覆盖的分支点，以及相应典范除子中出现的共轭对的像；而在必要时，对这些点进行标记便构成了基变换。特别是，超椭圆分层的 $K(\pi,1)$ 猜想中的映射类群是某些辫群。关于这一情形的详细讨论，请参见 [LM14, 第 1 节。

在同一篇论文中，Looijenga 和 Mondello 还利用相关典范曲线的几何性质及根系数据，给出了三阶亏格中若干非超椭圆层的轨形基本群表示；然而，他们的结果尚不足以确证这些分层的 $K(\pi,1)$ 猜想。

4.2.**单值化表示**。一项密切相关的研究考察了拓扑单值化表示

$$\rho\colon \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{H}(\mu)) \to \mathrm{Mod}_g^n, \tag{2}$$

其中，以一个微分（$X,\omega$）为基点的 $\mathcal{H}(\mu)$ 中的环路会诱导 $X$ 的一个自同胚，该自同胚保持 $\omega$ 的零点不变。Calderon 和 Salter [CS23] 研究了单值化表示 $\rho$，并证明对于 $g\geq 5$ 的非超椭圆层，该表示满射到映射类群中保持 $X$ 的某个固定标架 $\phi$ 的子群 $\mathrm{Mod}_g^n[\phi]$，其中 $\phi$ 由 $1/\omega$ 的水平向量场诱导。

然而，仅知道单值化表示的像 $\rho$ 并不足以完全确定分层的轨形基本群，因为 $\rho$ 即使在低亏格下也可能有很大的核。事实上，Giannini [Gia24, Gia25] 证明，对于$\mu=(4)^{\mathrm{nonhyp}}$、$(3,1)$ 和 $(6)^{\mathrm{even}}$，$\rho$ 的核包含一个秩为 2 的非阿贝尔自由群。这些结果的证明建立在 Wajnryb 的工作 [Waj99]之上，并涉及

对与$ADE$ 型奇点的 Dynkin 图相关联的 Artin 群进行分析。

我们指出，也可以从更具动力系统视角的角度研究分层的基本群。例如，Bell、Delecroix、Gadre、Guti´érrez-Romo 和 Saul Schleimer [BDG+24] 证明，带根二次微分的层分支的基本群由对角流形成的环路生成。

4.3. **奇点的变形**。为了说明在微分的研究中为何会出现这类奇点，考虑如下类型的曲线奇点 $A_{2g}$ definedby

$$y^2 - x^{2g+1} = 0.$$

其极小通用变形由下式参数化：

$$y^2 - x^{2g+1} + c_{2g-1}x^{2g-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0.$$

特别地，每个光滑变形都是一个亏格为 $g$ 的双曲曲线 $X$ ，其中双曲双覆盖由 $(x, y) \mapsto x$ 给出。此外， $X$ 带有一个全纯微分 $\omega$ ，该微分在仿射图的无穷远处有唯一零点 $z$ 。因此，我们可以将超椭圆分层 $\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{hyp}}$ 识别为 $A_{2g}$ 奇点的光滑变形轨迹。

从这个意义上说，除了 $A_{2g}$ 奇点之外，类型为 $A_{2g+1}$、 $D_{2g+1}$、 $D_{2g+2}$、 $E_6$、 $E_7$ 和 $E_8$ 的经典奇点分别对应于分层 $\mathcal{H}(g-1, g-1)^{\mathrm{hyp}}$、 $\mathcal{H}(2g-2,0)^{\mathrm{hyp}}$、 $\mathcal{H}(g-1, g-1, 0)^{\mathrm{hyp}}$、 $\mathcal{H}(4)^{\mathrm{odd}}$、 $\mathcal{H}(3,1)$ 和 $\mathcal{H}(6)^{\mathrm{even}}$，其中条目 0 表示一个普通标记点，即阶数为 0 的“零点”。值得注意的是，所有这些奇点都是 Gorenstein 的，并带有自然的 $\mathbb{G}_m$-作用。这里 Gorenstein 意味着底层奇异曲线的对偶化层仍是一个全纯线丛，而 $\mathbb{G}_m$-作用则源于对奇点定义方程中的参数赋予权重；例如，对于由 $y^2 - x^{2g+1} = 0$ 定义的 $A_{2g}$ 奇点，分别给 $x$ 和 $y$ 赋予权重 2 和 $2g+1$。

一般而言，Chen 和 Yu [CY25] 利用带有 $\mathbb{G}_m$-作用的孤立 Gorenstein 曲线奇点的变形来研究全纯微分分层。除了 $ADE$ 奇点之外，低亏格中还出现了若干新奇点，每个奇点都对应一个完整的分层（或连通分支），其中的每个微分（$X$, $\omega$）都允许退化为同一个曲线奇点的等变退化（相对于 $\mathbb{G}_m$-作用）。这类分层称为非变分层；它们最初是因其中包含的 Teichm¨uller 曲线具有一致的行为而被发现和研究的；参见 [CM12, YZ13, CM14]。关于这些非变分层是仿射簇且其典范环平凡这一特殊性质，也请参见第 6 节。然而，对于 $g \geq 6$，这种非变现象便消失了（超椭圆分层除外），这表明那些变形空间对应同一个微分分层的奇点之间存在微妙的层级结构。

回到关于微分层的原始 $K(\pi,1)$ 问题，奇点变形的研究中也有类似的情况。粗略地说，对于某些类别的奇点（例如正维孤立完全交叉奇点），人们猜想，极小全纯变形空间中的判别式补集——即光滑变形的轨迹——满足 $K(\pi,1)$ 性质。从相关 Artin 群的角度来看，这一猜想有时被归于 Arnold、Brieskorn、Pham 和 Thom；相关讨论见 [AKN88,

第 26], [Loo84 页、第 185], 页以及 [Par14] 中的相关讨论。Brieskorn 和 Deligne 已验证了 $ADE$ 奇点的这一猜想 [Bri73, Del72], ，这与相应的超椭圆分层以及低亏格中的若干非变分层的情况相呼应。然而，许多其他奇点的这一猜想仍未解决，其中包括 [CY25 中定理 12] 所分类的其余非变分层所对应的奇点。

我们将这些考量概括为以下问题。

**问题 4.1.** 对于非 $ADE$ 型全纯微分非变分层，研究相应的单值化核和相关奇点的变形空间，并确定这些情形下是否满足 $K(\pi,1)$ 性质。

对于变化分层，对相关的 *Gorenstein* 奇点进行分类，描述其变形空间如何组合形成该分层，并利用这一结构研究整个分层的拓扑。

**4.4. 具有许多简单零点的微分。** 在某一类指标中，可以理解 $\mathcal{H}(\mu)$ 的基本群和单值化表示——即简单零点数量足够多时。

设 $\mu = (1^{n-k}, m_1, \dots, m_k)$，其中 $m_i > 1$ 对应最后的 $k$ 个零点。将 $(X, \omega) \in \mathcal{H}(\mu)$ 与在高阶零点 $z_1, \dots, z_k$ 处带标记的底层曲线 $X$ 相关联，便得到一个映射

$$\mathcal{H}(\mu) \to \mathcal{M}_{g,k},$$

这表明 $\mathcal{H}(\mu)$ 是 $\mathcal{M}_{g,k}$ 上一种近乎“向量丛式”结构的开子集。纤维在 $(X, z_1, \dots, z_k)$ 上的完备化为

$$H^0(X, K - m_1 z_1 - \cdots - m_k z_k)$$

每个纤维中 $\mathcal{H}(\mu)$ 的补集是判别超曲面，在此处两个或更多零点重合。

这并不完全是一个向量丛，因为对于特殊的 $(X, z_1, \dots, z_k)$——例如具有 Brill–Noether 特殊几何的那些—— $H^0(X, K - m_1 z_1 - \cdots - m_k z_k)$ 的维数可能会跃变。然而，除子类 $K - m_1 z_1 - \cdots - m_k z_k$ 的次数为 $n - k$，这等于 $\mu$ 中简单零点的数量。因此，当简单零点足够多时，此类特殊 $(X, \omega)$ 的轨迹在 $\mathcal{M}_{g,k}$ 中具有高余维。特别是，去掉这些轨迹不会影响低余维下的基本群或（余）同调群；相关示例和讨论见 [Che19, Examples 2.3–2.5]

Salter 改进了这一思路，证明当简单零点足够多时，(2) 中的单值化表示 $\rho$ 是单射。在这种情况下，分层的轨形基本群因此可等同于带框架映射类群；关于所需简单零点数量的精确界限，参见 [Sal25, Theorem A] 。

Salter 的论证建立在 Shimada 的工作之上 [Shi10], 。Shimada 研究了那些在高余维轨迹之外表现得如同纤维丛的代数簇的基本群。一个关键例子是光滑曲线 $X$上非常丰 ample 线丛 $L$ 的线性系 $|L|$ 中约化除子轨迹 $|L|_{\mathrm{red}}$ 的基本群；其中 $L$ 在 $X$ 的皮卡群中变化，并通过相应的线性系诱导出类似纤维丛的结构。

另一个困难在于，对于诸如 $\mu = (1^{2g-2})$ 这样的指标，可以研究一般线丛 $L$ 的 $|L|_{\mathrm{red}}$ 基本群

利用阿贝尔–雅可比映射研究皮卡群中次数为 $2g-2$ 的情形

$$X^{2g-2} \to \mathrm{Pic}^{2g-2}(X).$$

然而，典范丛 $K$ 是 $\mathrm{Pic}^{2g-2}(X)$ 中一个极为特殊的点，其截面恰好对应于分层 $\mathcal{H}(\mu)$ 所参数化的微分。为弥合这一差距，Salter 使用了所谓的岛田–塞韦里方法。其核心思想是利用平面曲线塞韦里簇的连通性，在假设 $X$ 具有足够一般的魏尔斯特拉斯点的前提下，构造 $|L|_{\mathrm{red}}$ 与 $|K|_{\mathrm{red}}$的泛平面截面之间的等奇异变形。随后，这一变形会诱导出它们的基本群之间的同构；参见 [Sal25，第 5] 节。

最后，我们指出，尽管这一结论并未在[Sal25], 中明确出现，但同样的方法可以加以调整，用于处理具有足够多个简单零点的 $k$-微分分层。

**4.5. 微分与稳定性条件。** 二次微分主分层的基本群也已得到类似结果。当二次微分具有足够多个简单零点时，Walker [Wal10] 最先运用经典方法分析了相关的阿贝尔–雅可比映射及单值化表示的像。近来，King 和 Qiu [KQ20] 借助 Bridgeland 稳定性条件和范畴论方法，对具有简单零点和高阶极点的二次微分分层的基本群（即单值核）进行了完整刻画。随后，Qiu [Qiu25]将这项工作推广到包含具有简单零点、高阶极点以及二重极点的二次微分分层。

微分与稳定性条件之间的联系，是一个令人振奋且发展迅速的研究方向：已有若干引人注目的成果，但许多基本问题仍未解决。粗略地说，带框架微分的模空间对应于稳定性流形；在此对应中，微分通过为带框架同调类赋予周期，发挥稳定性条件的作用，从而确定 Bridgeland 稳定性意义下的中心荷。这些稳定性流形具有墙与室分解，其中（实）余维一的墙对应于两个非同调类的周期变为共线的位置。此外，（半）稳定对象对应于由微分定义的平坦曲面上的某些测地线，例如连接零点的鞍连接，或填充圆柱的闭测地线。这些对象的计数与 BPS 态和唐纳森–托马斯不变量密切相关，并受跨墙现象支配。

微分与稳定性条件之间的这一联系最初由 Kontsevich 和 Soibelman [KS08, Section 1.5 4)] 提出猜想，其后又受到 Gaiotto、Moore 和 Neitzke [GMN13]所研究的 GMN 微分的启发。对于具有简单零点的亚纯二次微分，Bridgeland 和 Smith [BS15]对这一对应关系作出了完整而详细的确立。此后，Haiden、Katzarkov 和 Kontsevich [HKK17] 借助带 puncture 曲面的福井亚范畴扩展了这一框架，并从概念上阐释了这一对应关系如何适用于二次微分的所有分层。

回到 $K(\pi, 1)$ 这个问题，我们注意到，与微分层以及变形空间中奇点的判别式补集的情形类似，

也有一种关于稳定性流形可缩性的相应猜想。在微分与稳定性条件之间的对应关系下，稳定性流形（可理解为带框架微分的分层）对应于未标记微分分层的万有覆盖。从这个意义上说，稳定性流形的可缩性问题与微分层的 $K(\pi, 1)$ 猜想，是同一问题的等价表述。

我们将这些考量归纳为下面的问题。

**问题 4.2.** 利用微分与稳定性条件之间的对应关系，从两个角度研究微分层的拓扑以及与之相关的稳定性流形。

## 5. Euler characteristics of strata of differentials

如第 4 节所述，尽管在某些情况下——例如低亏格，或存在许多简单零点时——可以确定微分层的基本群和低次（上）同调群，但这些分层的一般拓扑性质仍在很大程度上不为人所知。尽管如此，即使不了解贝蒂数的全部信息，仍可通过其他方法计算欧拉示性数。尤其是，近期利用紧化分层上的交理论取得了一些进展；在某些情况下，也研究了留数已指定的亚纯微分轨迹。本节将回顾这些进展。

**5.1. 多尺度紧化的余切丛。** 给定一个光滑复代数簇 $M$，经典结果表明，欧拉示性数 $\chi(M)$（相差一个符号）可由余切丛 $\Omega^1_M$ 的顶陈类的次数计算得出。当 $M$ 是配有正规交叉边界除子 $D$ 的轨形时，同一原理仍然适用：其内部的轨形欧拉示性数 $\chi(M \setminus D)$，可由对数余切丛 $\Omega^1_M(\log D)$ 的顶陈类的次数确定。

Costantini、M¨oller 和 Zachhuber 将这一思想应用于阿贝尔微分分层的多尺度紧化，并得到了分层轨形欧拉示性数的交理论公式；见 [CMZ22，定理 1.3]。要实现此公式，需要知道每个边界分层上典范线丛类 $c_1(\mathcal{O}(-1))$ 的最高自交数；这尤其涉及施加了全局留数条件所要求的留数约束的广义分层，相关讨论见第 3.7 节。原则上，可以利用分层上的除子类关系递归计算这些交数。然而，所得计算可能极其复杂，即使在低亏格情形下，也可能需要大量计算辅助；见 [CMZ23]。

如今已有若干后续研究。同样的思想和技术可用于计算分层中线性子簇的欧拉示性数；这些子簇在局部由周期坐标的线性方程定义，例如通过典范循环 $k$-覆盖将 $k$-微分分层提升至阿贝尔微分分层；见 [CMS25]。关于最小分层和自旋分支的进一步推广见 [CSS25，Won24]。

最后，我们指出，曲线模空间的欧拉示性数$\mathcal{M}_{g,\ n}$ 也可以通过交理论方法计算；参见 [GLN23]。最初的证明源于 Harer 和 Zagier 的开创性工作 [HZ86]，，其方法则依赖于基于带状图的$\mathcal{M}_{g,\ n}$ 胞腔分解，以及图计数

和相关的组合技巧。若能为微分层发展出类似的胞腔分解，并推导出类似的应用，将是非常理想的。近期沿这一方向的进展包括研究分层上的德劳内三角剖分 [Zyk22, FZ25], ，不过系统性的框架和确定性的结果仍有待建立。

我们将上述讨论总结为以下问题。

**问题 5.1.** 利用交理论或胞腔分解，求得微分层欧拉示性数的简化表达式，并揭示这些分层的其他拓扑性质。

5.2. **等留数纤维化**。 如第 3.7 节所述，带有留数约束的亚纯微分自然出现在紧化分层的边界中。因此，研究极点处留数已指定的亚纯微分轨迹是有意义的。设 $\mathcal{H}(a_1,\dots,a_n;-b_1,\dots,-b_p)$ 为亚纯微分的一个分层，其中 $a_i \geq 0$ 和 $b_i > 0$。将每个微分映射到其在极点处的留数元组 $r=(r_1,\dots,r_p)$，由此得到一个等留数映射

$$\operatorname{res}\colon \mathcal{H}(a_1,\dots,a_n;-b_1,\dots,-b_p) \to \mathcal{R}_p \subset \mathbb{C}^p,$$

其像位于超平面 $\mathcal{R}_p$ 中，该超平面由关系式 $r_1+\cdots+r_p=0$ 定义，这与留数定理相符。因此，具有指定留数元组 $r$ 的亚纯微分轨迹恰好是映射 res 的等留数纤维 $\mathcal{F}_r$ 。

注意

$$\dim \mathcal{H}(a_1,\dots,a_n;-b_1,\dots,-b_p) = 2g-2+n+p \geq p-1 = \dim \mathcal{R}_p,$$

其中等号成立当且仅当 $g=0$ 和 $n=1$，即在 $\mathbb{P}^1$ 上只有一个零点的亚纯微分形式分层中成立。在这种情况下，每个等留数纤维 $\mathcal{F}_r$都是零维的，因此研究其拓扑就归结为确定其基数。Gendron 和 Tahar 利用平坦几何描述，计算了没有部分和为零的泛型 $r$ 对应的 $\mathcal{F}_r$ 的基数；也就是说，对于极点的任意真子集，给定留数值之和都不为零。

Chen 和 Prado [CP25], 利用交理论技术，得到了 $r$ 对应的 $\mathcal{F}_r$ 在任意部分和为零情况下的完整基数公式。其核心结论是，将微分形式与两个留数之比相对应，可在射影化分层上的泛线丛 $\mathcal{O}(1)$ 上得到一个截面；该截面的最高自交数计数了具有指定留数的微分形式数量，而当留数元组中出现部分和为零时，还需计入退化微分形式边界所带来的修正。关于这一问题的一些特殊情形，以及通过多项式映射和不动点乘子得到的相关观点，也可见于 [BR24, Sug17, Sug23]。

接下来，可以研究等留数纤维何时为一维。分两种情况： $\mathbb{P}^1$ 上有两个零点的微分，或亏格一上有唯一零点的无留数微分。对于前一种情况， [CGPT25b], 确定了泛型一维等留数纤维的欧拉示性数；对于后 [LT25]一种情况，Lee 和 Tahar 确定了欧拉示性数及连通分支。另一种变体是研究 $k$-微分和 $k$-留数的等留数纤维；参见 [CGPT25a]。我们还指出，最特殊的等留数纤维——即无留数微分轨迹——的循环类满足

在$\mathcal{M}_{g,\ n}$中构成部分上同调场论；参见 [BRZ24]。在 $\mathbb{P}^1$ 上有两个零点的无留数微分这一基本情形，见于 Eskin、Masur 和 Zorich 的奠基性工作 [EMZ03], , 该工作描述了分层的主边界，其中涉及连接两个零点的同调鞍连接；另请参见 [CC19], 了解通过 Deligne–Mumford 紧化给出的诠释。

尽管已有这些进展，我们对高维等留数纤维的几何与拓扑仍知之甚少。我们将这些讨论概括为下面的问题。

**问题 5.2.** 确定任意等留数纤维的连通分支和欧拉示性数。利用这些结果研究包含此类等留数纤维的分层的几何与拓扑。

## 6. Tautological rings and affine geometry of strata of differentials

一些源自代数几何的研究方法虽然并非纯粹的拓扑方法，却与拓扑学有着密切的对应关系，并可用于推导关键的拓扑性质。例如，周环与上同调环之间的比较——尤其是重言类与向量丛导出的特征类之间的类比——以及仿射簇与 Stein 流形之间的对应关系；后者的同调群和边界呈现出特殊结构。本节将从这些视角回顾微分形式模空间相关的最新进展。

### 6.1. 微分层上的重言类。

在模空间上，自然定义的向量丛的特征类通常称为重言类。

例如，考虑由亏格为$g$ 且有 $n$ 个标记点的曲线构成的模空间$\mathcal{M}_{g,\ n}$。令 $\lambda_i = c_i(\mathcal{H})$表示霍奇丛 $\mathcal{H}$ 的第 $i$个陈类，该丛由$\mathcal{M}_{g,\ n}$上的全纯微分构成。令 $\kappa_i = \pi_*\left[c_1(\omega_\pi)^{i+1}\right]$ 表示 Miller–Morita– Mumford 类，其中 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{M}_{g,\ n}$ 是万有曲线，而 $\omega_\pi$ 是相对对偶化丛。对于每个标记点，令 $\psi_i$ 表示这样一个线丛的第一陈类：其在带标记点曲线上的纤维是第 $i$个标记点处的余切线。这些 $\lambda$类、 $\kappa$ 类和 $\psi$类生成$\mathcal{M}_{g,\ n}$ 的典范环（作为周环或上同调环的子环）。过去几十年来，对$\mathcal{M}_{g,\ n}$的典范环以及重言类之间关系的研究一直是一个活跃且影响深远的课题。为避免偏离本综述的主要焦点，我们仅推荐有兴趣的读者从 [Vak03] 入手。

给定 $2g-2$ 的一个分拆 $\mu = (m_1, \ldots, m_n)$，用 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$ 表示类型为 $\mu$ 的全纯微分层（模去缩放）。等价地， $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$ 参数化光滑亏格为 $g$ 的复代数曲线上类型为 $\mu$ 的典范除子。注意， $\lambda$、 $\kappa$ 和 $\psi$ 类从 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 拉回至 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$。此外，令

$$\eta = c_1(\mathcal{O}(-1)),$$

其中 $\mathcal{O}(-1)$是与射影化$\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu) = \mathcal{H}(\mu)/\mathbb{C}^*$相关联的典范线丛；也就是说， $\mathcal{O}(-1)$ 在 $[(X,\omega)]$ 上的纤维由微分 $\omega$张成。因此，将 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$的典范环定义为其 Chow 环（或上同调环）中由 $\lambda$类、 $\kappa$类、 $\psi$类和 $\eta$类生成的子环，是很自然的。

一方面，与$\mathcal{M}_{g,n}$相比，全纯微分层的典范环结构简单得多：它仅由典范线丛类 $\eta$生成，正如 [Che19]所示。例如，关系

$$\eta = (m_i + 1)\psi_i \tag{3}$$

对所有 $i$均成立。这个恒等式可以直观地理解如下。在阶数为 $m_i$ 的奇点处，微分 $\omega$ 在局部（乘上一个标量后）由 $d(z_i^{m_i+1})$ 给出，而 $dz_i$ 张成该点处的余切线，其中 $z_i$ 是一个局部坐标。关于进一步的解释，包括涉及其余重言类的附加关系，参见 [Che19，命题 2.1] 。这些重言关系在研究微分层的仿射几何时也发挥着重要作用；见下文第 6.2 节。

另一方面，对于 $\eta$ 在 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$ 中是否非零，以及如果非零，$\eta$ 的哪些次幂仍不消失，目前在很大程度上仍是未知的。对于超椭圆分层以及低亏格中的非变分层，已知 $\eta$ 是平凡的，因此正次数的典范环也是平凡的；见 [Che24，定理 1.1]。相比之下，当存在足够多的简单零点时，$\eta$ 是非平凡的；见 [Che19，例 2.4]。事实上，第一作者猜想，对于全纯微分的所有变化分层，有理 Picard 群（或第二上同调群）秩为一，并由 $\eta$ 生成；进一步讨论见 [Che24，注释 3.1 和 3.2] 。

作为比较，$\mathcal{M}_g$ 的有理 Picard 群的秩为一（$g \geq 3$），这一点由 Harer [Har83] 在研究映射类群的同调时证明。时至今日，尚无不借助 Harer 的拓扑学方法、纯粹代数几何的证明。此外，分歧覆盖 $\mathbb{P}^1$ 的 Hurwitz 空间的有理 Picard 群，目前仅在某些次数和亏格范围内有所了解；参见[DE96、SF00、DP15、Mul23、LL25]。

此外，当 $\mu$ 是带有若干单极点的亚纯微分指标时，关系式 (3) 仍然成立，但对于带有 $m_i = -1$的单极点，对应的 $\psi$类的系数 $m_i + 1$ 变为零，因此 (3) 不会对该 $\psi$类施加任何约束。对于带有 $-k$阶极点的 $k$微分，这种现象也会出现。

除了分层的内部之外，还可以通过纳入边界层的循环类，研究多尺度微分紧化模空间的典范环；参见 [CMZ22，第 8]节。在零亏格情形下，Devkota [Dev25] 证明了多尺度微分模空间的上同调环由边界除子生成。然而，在高亏格情形下，多尺度空间的边界结构远比$\mathcal{M}_{g,\ n}$的边界结构复杂得多；对于微分层而言，即便是类似于$\mathcal{M}_{g,\ n}$的 Faber猜想和 Faber–Zagier关系那样的猜想性结构描述，目前也仍遥不可及。

我们在下面的问题中总结这些讨论。

**问题 6.1**。 对于全纯微分分层，确定 $\eta$ 的哪些次幂非零。特别地，对于变化的全纯微分分层，确定有理 *Picard* 群是否为秩一且由 $\eta$ 生成。

对于具有单极点的亚纯微分分层，确定与单极点相关的 $\psi$ 类的哪些次幂非零。

此外，描述 $k$-微分分层以及多尺度微分模空间的典范环。

6.2. **微分分层中的仿射几何与完备子簇**。代数几何中的仿射簇对应于复解析几何中的 Stein 流形。仿射簇可以看作射影簇中某个超曲面（即非常丰富除子）的补集。

仿射簇具有若干显著性质。例如，仿射簇$M$ 不包含完备代数曲线；其同调群在次数大于 $\dim_{\mathbb{C}} M$ 时消失；并且，任何完备代数紧化的边界 $M$ 都是连通的。因此，研究微分层的仿射几何，以推导其拓扑方面的相应结论，是很自然的。

当 $\mu$ 是亚纯微分的一个指标时，利用 $\psi$-类的正性并运用关系

$$(m_i+1)\psi_i = (m_j+1)\psi_j$$

在 (3) 中，对于具有 $m_i \geq 0$ 的零点和具有 $m_j < 0$ 的极点，可以在亚纯微分紧化分层上构造一个充足除子类，其支集完全位于紧化的边界上。这意味着亚纯微分分层是仿射簇，正如 [Che24], 所示；其中运用类似的思路证明，第4.3节讨论的全纯微分非变分层，以及无限面积的 $k$-微分分层，都是仿射簇。然而，目前尚不清楚高亏格下那些变化的全纯微分分层是否为仿射簇。

如上所述，一个密切相关的问题是，微分分层是否可能包含完备的正维子簇。由于亚纯微分分层是仿射簇，因此不含完备代数曲线；剩下的问题便是确定全纯微分分层是否可能包含完备代数曲线。

对于全纯微分的未射影化分层 $\mathcal{H}(\mu)$，Gendron [Gen20] 将最大模原理应用于相关平移曲面上最短的鞍连接，并证明 $\mathcal{H}(\mu)$ 不含完备曲线；后来， [Che23] 又利用除子类的正性给出了另一种证明。然而，全纯微分的射影化分层 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$ 是否可能包含完备代数曲线，仍然是一个未解问题。作为一个特例，极小自旋分支 $\mathbb{P}\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{odd/even}}$ 参数化（非双曲的）亚典范点，即具有唯一一个消失阶为 $2g-2$ 的零点的典范除子。Harris[Har84，第 413] 页，曾提出亚典范点轨迹中是否存在完备族这一问题；四十年来，这个问题始终悬而未决。

作为比较，曲线模空间 $\mathcal{M}_g$ 包含完备曲线$g \geq 3$，这是因为 $\mathcal{M}_g$ 的 Satake 紧化中边界的复余维大于一。众所周知， $\mathcal{M}_g$ 的任何完备子簇的维数至多为 $g-2$; 参见 Diaz [Dia84], 的原始证明，以及采用不同方法的后续证明 [Loo95, GK09] 。然而， $\mathcal{M}_g$中完备子簇维数的精确上界仍然未知；事实上，我们甚至不知道 $\mathcal{M}_4$ 是否包含一个完备代数曲面。

除了研究一个模空间是否为仿射空间之外，还可以研究该模空间在几何上具有意义的分层，使得每个分层都是仿射的。对于曲线模空间 $\mathcal{M}_g$，关于这一主题的全面综述可参见 [Mon14] 。这里，我们简要介绍众多成果和未决问题中的几个。注意， $\mathcal{M}_g$ 可以按照以下对象进行分层：

$k$-重曲线的轨迹，其中 $k = 2, \dots, g$，这称为 Arbarello 分层，其中最小的分层参数化超椭圆曲线。人们可以提出这样的问题：每个 $k$-重分层（除去更小的分层之外）是否都是仿射的；然而，Arbarello 和 Mondello [AM12]证明事实并非如此。更一般地，Looijenga 提出： $\mathcal{M}_g$ 是否存在由 $g-1$ 层组成的仿射分层；由于 Fontanari 和 Looijenga 的工作 [FL08]，目前已知 $g \leq 5$ 存在这样的分层。

回到全纯微分模空间，我们也可以类似地询问 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$ 是否存在仿射分层。对于以特殊魏尔斯特拉斯点的形式参数化亚典范点的最小分层 $\mathbb{P}\mathcal{H}(2g-2)$，一种变体是固定魏尔斯特拉斯半群 $H$，并询问每个具有固定半群 $H$ 的亚典范点轨迹 $\mathbb{P}\mathcal{H}(2g-2)^H$ 是否为仿射的。当 $H$ 属于最特殊的半群之一时，也就是说，相应的亚典范点不会进一步退化，此时已知 $\mathbb{P}\mathcal{H}(2g-2)^H$ 是仿射的 [CY25, 定理 8.5]；不过，对于一般的 $H$，这一问题仍未解决。

值得注意的是，具有固定半群的魏尔斯特拉斯点轨迹可以与相应单项式奇点的极小通用变形空间中的光滑变形轨迹相对应，正如 Pinkham 所证明的 [Pin74, 第 13] 节。一般而言，对于孤立完全交叉奇点，判别轨迹是一个超曲面，因此，其补集（参数化光滑变形）是仿射的；参见 [Loo84, 定理 4.8]。然而，单项式奇点往往不是完全交。事实上，给定任意半群，我们仍然不知道相应的光滑曲线上的魏尔斯特拉斯点轨迹是否非空。

一个相关的量是代数簇 $M$ 的 Dolbeault 上同调维数，定义为整数 $q$ 的上确界，使得对 $M$ 上的某个全纯向量丛 $E$，有 $H^{0,q}_{\bar{\partial}}(M, E) \neq 0$。Dolbeault 上同调维数衡量一个代数簇距离成为仿射簇有多远；例如，光滑仿射簇的上同调维数为零。关于上同调维数的介绍，参见 [Mon14，附录 A]。

对于全纯微分分层 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$，Mondello [Mon17] 构造了一个耗尽函数，其原型基于 $\ell^2_{\text{sys}}$ 与平移曲面面积之比，其中 $\ell_{\text{sys}}$ 表示最短闭测地线，即平移曲面上最短的鞍连接或闭测地线。利用这一耗尽函数，Mondello 证明了 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$ 的 Dolbeault 上同调维数至多为 $g$；参见 [Mon17，定理 C]。注意，该界与仿射簇的精确上同调维数零相差 $g$，这本质上是由于面积泛函的复 Hessian 的指标为 $(g, g)$；参见 [Mon17，引理 3.7(c)]。

我们用以下问题结束上述讨论。

**问题 6.2**。研究全纯微分分层的射影化空间 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$ 的完备曲线和上同调维数。最终，确定 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$ 是否为仿射簇。

6.3. **微分层的拓扑端**。我们以探讨微分层的拓扑端来结束关于分层拓扑的讨论。回顾一下，对于拓扑空间 $M$，$M$ 的端数定义为 $M \setminus K_n$ 的连通分支数的极限，其中 $K_n$ 是由紧子集穷竭 $M$ 得到的。Boissy [Boi15] 利用平坦几何和 Rauzy 类证明，每个连通

全纯二次微分层（包括全局一次微分的平方）的连通分支恰好有一个拓扑端。

利用微分层的多尺度紧化（作为光滑复轨形），Dozier 和 Grushevsky [DGL25, 引理 3] 指出，层分支的边界连通性意味着其恰好有一个端。利用阿贝尔微分层的连通分支分类和显式退化技术，他们证明了任意全纯或亚纯微分层分支（复维数至少为二）的边界都是连通的，从而在全纯一次微分的情形下重新得到 Boissy 关于一个端的结果，并将其推广到亚纯一次微分。在亏格一情形下，Lee [DGL25, 附录 A], 在 [LW25] 关于广义分层连通分支的工作基础上，证明了某些边界除子的连通性。

注意，在任意完备代数紧化中，维数至少为二的仿射簇的边界都是连通的 [Goo69]。在第 6.2 节中，我们已经看到，亚纯微分分层是仿射的，这从概念上解释了为什么每个亚纯微分层分支都有连通的边界，因而恰好有一个端；对于无限面积的 $k$-微分层，同样的结论也成立；见 [Che25]。

然而，由于全纯微分分层是否为仿射仍是未知的，这种概念性解释目前还无法推广到这些分层。对于 $k \geq 3$ 的有限面积 $k$-微分，由于缺乏连通分支分类，很难明确描述边界的连通性。此外，在情形 $k \geq 3$ 中，由于没有 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-作用，即便要证明每个正维有限面积 $k$-微分层分支的边界非空，也是一项非平凡的问题——直到最近，Aygun [ 才利用平坦曲面的面积函数的性质解决了这一问题（Ayg25, 引理 3.9] ）。对于全纯微分分层中的线性子簇，也可以提出类似的问题，而目前这些问题的答案大多仍是未知的。

我们以如下问题结束这段讨论。

**问题6.3.** 不依赖连通分支分类，概念性地证明每个高维全纯微分层分支的边界都是连通的。

此外，研究 $k$-微分分层以及全纯微分分层中的线性子簇的边界结构，并确定它们的拓扑端数目。

## References

[AKN88] V. I. Arnol’d、V. V. Kozlov 和 A. I. Neĭshtadt。 *Dynamical systems. III*，收录于 *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* 第3卷。Springer-Verlag，柏林，1988年。由 A. Iacob 从俄文译出。[AM12] Enrico Arbarello 和 Gabriele Mondello。关于魏尔斯特拉斯旗的两点说明。载于 *Compact moduli spaces and vector bundles*，收录于 *Contemp. Math.* 第564卷，第137–144页。美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2012年。[AM24] Jayadev S. Athreya 和 Howard Masur。 *Translation surfaces* 242 *Gradu-* ，第 卷，。 *ate Studies in Mathematics* 美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州）， [2024] ©2024年。[Ati71] Michael F. Atiyah。黎曼曲面与自旋结构。 *Ann. Sci. École Norm.* ，：–。 *Sup. (4)* 4 47 62, 1971

[Ayg25] Juliet Aygun。2025年，素数阶 $k$微分上的测地线计数。

[BCG+18] Matt Bainbridge、Dawei Chen、Quentin Gendron、Samuel Grushevsky 和 Mar- tin M¨oller。阿贝尔微分分层的紧化。 *Duke Math. J.*，167(12):2347–2416，2018年。[BCG+19] Matt Bainbridge、Dawei Chen、Quentin Gendron、Samuel Grushevsky 和 Martin M¨oller。 $k$ 微分分层。 *Algebr. Geom.*，6(2):196–233，2019年。[BCG+24] Matt Bainbridge、Dawei Chen、Quentin Gendron、Samuel Grushevsky 和 Martin M¨oller。多尺度微分模空间，2024年。[BDG +24] Mark Bell、Vincent Delecroix、Vaibhav Gadre、Rodolfo Guti´errez-Romo 和 Saul Schleimer。对角流揭示分层的拓扑，2024年。[BG25] Andrei Bogatyr¨ev 和 Quentin Gendron。可解佩尔–阿贝尔方程空间。*Compos. Math.*，161(7):1483–1511，2025年。[Boi15] Corentin Boissy。亚纯微分模空间分层的连通分支。 *Comment. Math. Helv.*，90(2):255–286，2015年。[BR24] Alexandr Buryak 和 Paolo Rossi。计数

$\mathbb{CP}^1$ *Lett.* 上的亚纯微分。，

*Math. Phys.* 114 4 97, 27, 2024
( ):论文编号。[Bri73] Egbert Brieskorn。关于编织群，

[ ` ] *Séminaire* 据 V. I. *Bourbaki* 317 *Lecture Notes in Math.*
Arnol'd 而述。在， *24ème année (1971/1972)*，收录于第 Vol. 卷，第21–44页，报告第401号。Springer，柏林—纽约，1973年。[BRZ24] Alexandr Buryak、Paolo Rossi 和 Dimitri Zvonkine。无留数亚纯微分模空间与 KP 层级。 *Geom. Topol.*，28 2824，2024 6 2793( ): –。[BS15] Tom Bridgeland 和 Ivan Smith。作为稳定性条件的二次微分。 *Publ.Math. Inst. Hautes Études Sci.*，121:155–278，2015年。[Cal20] Aaron Calderon。Teichm¨uller 空间上阿贝尔微分分层的连通分支。 *Comment. Math. Helv.*，95(2):361–420，2020年。[CC14] Dawei Chen 和 Izzet Coskun。$\mathscr{M}_1$上的极值有效除子， $n$。 *Math. Ann.*，359(3-4):891–908，2014年。[CC19] Dawei Chen 和 Qile Chen。阿贝尔微分与二次微分模空间的主边界。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，69(1):81–118，2019年。[CG22] Dawei Chen 和 Quentin Gendron。迈向 $k$微分分层连通分支的分类。 *Doc. Math.*，27:1031–1100，2022年。[CGPT25a] Dawei Chen、Quentin Gendron、Miguel Prado 和 Guillaume Tahar。 $k$微分分层中的有限等留数覆盖，2025年。[CGPT25b] Dawei Chen、Quentin Gendron、Miguel Prado 和 Guillaume Tahar。等留数曲线，2025年。[Che17a] Dawei Chen。阿贝尔微分的退化。 *J. Differential Geom.*，107(3):395–453，2017年。[Che17b] Dawei Chen。代数几何学家视角下的 Teichm ¨ *Surveys on recent developments in algebraic geometry* 95 *Proc. Sympos. Pure Math.*
uller 动力学。载于，收录于第 卷，页码171–197。美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2017年。[Che19] Dawei Chen。微分分层的典范环。 *Manuscripta Math.*，158(3-4):345–351，2019年。[Che23] Dawei Chen。微分分层中的完备曲线。

*C. R. Math. Acad. Sci.* : –。[Che24] *Paris* 361 371 373, 2023
Dawei Chen。微分分层的非变化、仿射与极值几何。

*Math.* ( ): –。[Che *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 176 2 361 371, 2024
25] Dawei Chen。微分分层边界的连通性，2025年。[CM12] Dawei Chen 和 Martin M¨oller。低亏格阿贝尔微分的李雅普诺夫指数和不变性。 *Geom. Topol.*，16(4):2427–2479，2012年。[CM14] Dawei Chen 和 Martin M¨oller。低亏格二次微分：例外分层与非变化分层。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，47(2):309–369，2014年。[CMS25] Matteo Costantini、Martin M¨oller 和 Johannes Schwab。线性子流形的陈类及其在

$k$ *Comment.* 微分空间与球 *Math. Helv.* 100 4 745
商中的应用。，( ): –809，2025年。[CMZ22] Matteo Costantini、Martin M¨oller 和 Jonathan Zachhuber。阿贝尔微分模空间的陈类与欧拉示性数。 *Forum Math. Pi*，10:论文编号 e16，55，2022年。

[CMZ23] Matteo Costantini、Martin M¨oller 和 Jonathan Zachhuber。 diffstrata——一个用于计算阿贝尔微分模空间典范环的 Sage 软件包。 *Exp. Math.*，32(3):545–565，2023年。[CP25] Dawei Chen 和 Miguel Prado。具有固定留数的微分计数。 *Lett. Math.* ，( ):论文编号 . *Phys.* 115 3 53, 26, 2025 .[CS21] Aaron Calderon 和 Nick Salter。Teichm¨uller 空间上的高自旋映射类群与阿贝尔微分分层。 *Adv. Math.*，389 107926, 56, 2021 :论文编号 .[CS23] Aaron Calderon 和 Nick Salter。带框架映射类群与阿贝尔微分分层的单值化。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，25(12):4719–4790，2023年。[CSS25] Matteo Costantini、Adrien Sauvaget 和 Johannes Schmitt。扭曲双重分歧循环上的 $\psi$-类积分与微分空间，2025年。[CY25] Dawei Chen 和 Fei Yu。具有 $\mathbb{G}_m$-作用的 Gorenstein 奇点与全纯微分模空间，2025年。[DE96] Steven Diaz 和 Dan Edidin。迈向 Hurwitz 空间的同调。 *J. Differential Geom.* 43 1 66 ( ): –98，1996年。[Del72] Pierre Deligne。广义辫群的建筑。 *Invent. Math.*，17 273 302，1972 : –.[Dev25] Prabhat Devkota。零亏格多尺度微分模空间的上同调，2025 年。[DGL25] Benjamin Dozier、Samuel Grushevsky 和 Myeongjae Lee。微分分层的端，2025年。[Dia84] Steven Diaz。 $\mathcal{M}_g$ *Duke Math. J.* 51 2 405 408, 1984 的完备子簇维数上界。[，( ): – . 15] DP *Algebra Number Theory*Anand Deopurkar 和 Anand Patel。次数至多为五的 Hurwitz 空间的 Picard 秩猜想。[，9(2):459–492，2015年。18] EM 2 $\mathbb{R}$ 127 95 324, Alex Eskin 2018 和 Maryam Mirzakhani。模空间上 SL( *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, ) 作用的不变测度与平稳测度。[，: – .15] EMM $\mathbb{R}$Alex Eskin、Maryam Mirzakhani 和 Amir Mohammadi。模空间上 SL(2, *Ann. of Math. (2)*) 作用的孤立性、等分布与轨道闭包。[，182 2 673 721，2015 ( ): – . 03] EMZ *Publ.*Alex Eskin、Howard Masur 和 Anton Zorich。阿贝尔微分模空间：主边界、计数问题与 Siegel-Veech常数。*Math. Inst. Hautes Études Sci.*[，(97):61–179，2003年。16] Fil *Ann. of Math. (2)* 183 2 681 713, 2016 Simion Filip。仿射不变流形上的混合霍奇结构分裂。[，( ): – . 24] Fil *EMS Surv. Math. Sci.* 11 1 63 151, 2024 Simion Filip。平移曲面：动力系统与霍奇理论。[，( ): – . 08] FL $\mathscr{M}_g$ Claudio Fontanari 和 Eduard Looijenga。 $g \leq 5$关于*Geom. Dedicata*的完美分层。[，136:133–143，2008年。25] FZ[Sam Freedman 和 Bradley Zykoski。平移曲面分层中的凸等Delaunay区域，2025年。20] Gen `C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 358 2 197 Quentin Gendron。分层不含完备簇。[，( ): –200，2020年。24] Gia *Int. Math. Res. Not. IMRN* 10 8716 8733, 2024 Riccardo Giannini。平移曲面分层的单值化核。[，( ): – . 25] Gia[Riccardo Giannini。关于四亏格平移曲面的偶最小分层，2025年。09] GK *Surveys in differen*-Samuel Grushevsky 和 Igor Krichever。普适 Whitham层级与带标记点的黎曼曲面模空间的几何。载于 *tial geometry. Vol. XIV. Geometry of Riemann surfaces and their moduli spaces* *Surv. Differ. Geom.*，第14卷（[) ，第111–129页。Int. Press，Somerville，马萨诸塞州，2009年。23] GLN´Alessandro Giacchetto、Danilo Lewa *Algebr. Geom.*nski 和 Paul Norbury。Harer-Zagier公式的交理论证明。[，10(2):130–147，2023年。13] GMN *Adv. Math.*Davide Gaiotto、Gregory W. Moore 和 Andrew Neitzke。壁穿越、Hitchin系统与WKB近似。，234:239–403，2013年。

[Goo69] Jacob Eli Goodman。代数簇的仿射开子集与丰沛除子。*Ann. of Math. (2)*，89:160–183，1969年。[GT21] Quentin Gendron 和 Guillaume Tahar。具有指定奇点的阿贝尔微分。*J. Éc. polytech. Math.*，8:1397–1428，2021年。[GT25a] Quentin Gendron 和 Guillaume Tahar。具有指定奇点的二次微分。 *Canad. J. Math.*，77(5):1762–1826，2025年。[GT25b] Quentin Gendron 和 Guillaume Tahar。具有指定奇点的 k-微分，2025年。[Ham21] Ursula Hamenst ¨ *Ann.* adt。由德恩 *H. Lebesgue* 4 1619 1658, 2021
扭转生成自旋映射类群。[, : – . 83] Har *Invent. Math.*John Harer。可定向曲面映射类群的第二同调群。[, 72(2):221–239，1983年。84] Har *Duke Math. J.*Joe Harris。光滑曲线族。[, 51(2):409–419，1984年。17] HKK*Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*F. Haiden、L. Katzarkov 和 M. Kontsevich。平坦曲面与稳定性结构。[, 126:247–318，2017年。86] HZ *Invent.* J. Harer 和 *Math.* 85 3 457 485, 1986
D. Zagier。曲线模空间的欧拉示性数。[, ( ): – . 80] Joh *J. London Math.* Dennis *Soc. (2)* 22 2 365 373, 1980
Johnson。曲面上的自旋结构与二次型。[, ( ): – . 20] KQ *Invent. Math.*Alastair King 和 Yu Qiu。簇交换群胚与带框架二次微分。[, 220(2):479–523，2020年。08] KS[Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman。稳定性结构、动机 Donaldson-Thomas 不变量与簇变换，2008年。97] KZ[M. Kontsevich 和 A. Zorich。李雅普诺夫指数与霍奇理论，1997年。03] KZ *Invent. Math.*Maxim Kontsevich 和 Anton Zorich。具有指定奇点的阿贝尔微分模空间的连通分支。[, 153 678，2003 3 631( ): – .] Lan04a *Comment. Math. Helv.*Erwan Lanneau。具有指定奇点的二次微分模空间的超椭圆分支。[, 79(3):471–501，2004年。] Lan04b*Geom. Topol.*Erwan Lanneau。二次微分所定义的自旋结构的奇偶性。[, 8:511–538，2004年。08] Lan *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*Erwan Lanneau。二次微分模空间分层的连通分支。[, 41(1):1–56，2008年。24] Lee *Geom. Dedicata* Myeongjae Lee。无留数亚纯微分分层的连通分支。[, 218(5):论文编号 101，78，2024年。25] LL[ Aaron Landesman 和 Ishan Levy。Hurwitz 空间的同调稳定性及其应用，2025年。14] LM *Geom. Dedicata*Eduard Looijenga 和 Gabriele Mondello。三亏格阿贝尔微分模空间的精细结构。[, 169:109–128，2014年。84] Loo *Isolated singular points on complete intersections*E. J. N. Looijenga。 *London Mathematical Society Lecture Note Series*，第77卷（[） 。剑桥大学出版社，剑桥，1984年。95] Loo $\mathscr{M}_g$ 121 2 411 419, Eduard 1995
Looijenga。关于 *Invent. Math.*的典范环。[, ( ): – .25] LT *Int. Math. Res. Not. IMRN* Myeongjae Lee 和 Guillaume Tahar。无留数亚纯微分的一维分层。[, (12):论文编号 rnaf165，28，2025年。25] LW[Myeongjae Lee 和 Yiu Man Wong。具有留数条件的亚纯微分广义分层的连通分支，2025年。¨M13] ol¨Martin M¨oller。Teichm *Moduli spaces of Riemann surfaces*uller 曲线：主要从代数几何的视角出发。载于 *IAS/Park City Math. Ser.*，第20卷（[） ，第267–318页。Amer. Math. Soc.，Providence，罗得岛州，2013年。14] Mon*Rend. Mat. Appl. (7)*Gabriele Mondello。曲线模空间的分层及相关问题。[, 35(3-4):131–157，2014年。17] Mon *Duke Math. J.*Gabriele Mondello。黎曼曲面模空间的上同调维数。[, 166(8):1463–1515，2017年。18] MSS *Dynamical aspects of Teichmüller theory*Carlos Matheus Silva Santos。 *Atlantis Studies in Dynamical Systems*，第7卷（ [） 。Atlantis Press，]巴黎；Springer，Cham，2018年。 $SL(2,\mathbb{R})$-作用于平坦曲面模空间。

[Mul23] Scott Mullane。《 $d > g - 1$的 Hurwitz 空间 Picard 秩猜想》。 *Adv. Math.*，430：论文编号 109211，27，2023年。[Mum71] David Mumford。代数曲线的 Theta 特征。

*Ann. Sci. École Norm.* , : –。[

*Sup. (4)* 4 181 192, 1971

Par14] Luis Paris。Artin 群的 $K(\pi, 1)$ 猜想。 *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*，23 2 361( )：–415，2014年。[Pin74] Henry C. Pinkham。 *Deformations of algebraic varieties with $G_m$ action*，*Astérisque*第 20 卷。法国数学学会，巴黎，1974年。´et´e Math´ematique de France[Qiu25] Yu Qiu。二次微分的模空间：阿贝尔-雅可比映射与变形，2025年。[Sal25] Nick Salter。低余维阿贝尔微分层的基本群，2025年。[SF00] Zvezdelina E. Stankova-Frenkel。三次曲线的模空间。

*J. Algebraic Geom.*，9 4 607( )：–662，2000年。[Shi10] Ichiro Shimada。广义 Zariski-van Kampen 定理及其在 Grassmann 对偶簇中的应用。 *Internat. J. Math.*，21(5)：591–637，2010年。[Sug17] Toshi Sugiyama。多项式映射及其不动点乘子的模空间。 *Adv. Math.*，322：132–185，2017年。[Sug23] Toshi Sugiyama。多项式映射及其不动点乘子的模空间：II。算法改进与首一中心多项式。*Theory Dynam. Systems* 43 11 3777 3795, 2023 *Ergodic* , ( )：–。

[Tah18] Guillaume Tahar。模曲线的室结构 $X_1(N)$。 *Arnold Math. J.*，4 3 4 459 481，2018年 ( - )：–。[Vak03] Ravi Vakil。曲线模空间及其典范环。

*Notices Amer. Math.* , ( )：–658,

*Soc.* 50 6 647

2003年。[Waj99] Bronislaw Wajnryb。Artin 群与几何单值。 *Invent. Math.*，138 3 563( )：–571，1999年。[Wal10] Katharine C. Walker。某些二次微分模空间分层的基本群的商群。

*Geom. Topol.*，14(2)：1129–1164，2010年。[Won24] Yiu Man Wong。一种计算微分层自旋分支基本类的算法。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(6)：4893–4962，2024年。[Wri15] Alex Wright。平移曲面及其轨道闭包：面向广大读者的介绍。 *EMS Surv. Math. Sci.*，2(1)：63–108，2015年。[Wri16] Alex Wright。从有理台球到模空间上的动力系统。

*Bull. Amer.* , ( )：–。[

*Math. Soc. (N.S.)* 53 1 41 56, 2016

YZ13] Fei Yu 和 左刚。Teichm¨uller 曲线上的 Weierstrass 过滤与李雅普诺夫指数。 *J. Mod. Dyn.*，7(2)：209–237，2013年。[Zor06] Anton Zorich。平坦曲面。载于

*Frontiers in number theory physics and geometry.* , 第 , , 页 –。

*I* 437 583 2006

Springer，柏林，。[Zyk22] Bradley Zykoski。微分阿贝尔微分层的 $l^\infty$-isodelaunay 分解，2022年。

Department of Mathematics, Boston College, Chestnut Hill, MA 02467, USA
*Email address*: dawei.chen@bc.edu

School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou, 310058, China
*Email address*: yufei@zju.edu.cn