arXiv:2601.13129v1 [math.AP] 19 Jan 2026

穿孔区域中诺伊曼特征值的分裂

VERONICA FELLI、LORENZO LIVERANI 和 ROBERTO OGNIBENE

Abstract. 我们研究奇异区域扰动下诺伊曼拉普拉斯算子特征值的分裂问题。我们考虑通过挖去一个逐渐缩小至内部某点的小球形孔洞而受到扰动的区域。我们的主要结果表明，重特征值的分裂是一种一般性性质：如果孔洞中心位于豪斯多夫维数为 $N-1$ 的集合之外，且半径足够小，那么重特征值就会分裂为重数更低的分支。证明依赖于扰动特征值关于缩放参数的渐近展开式成立。这一渐近公式本身也具有独立价值，并推广了以往的结果；特别是，在维数为$N \geq 3$时，该公式对任意形状的孔洞均成立。

1. 引言

微分算子特征值的研究在偏微分方程理论中发挥着至关重要的作用，并对从物理学、化学到工程学等各个应用学科产生了重大影响。事实上，特征值和特征函数对于分析复杂系统的稳定性、共振及动态行为至关重要。

大量文献致力于研究扰动下的谱响应，例如区域的小幅变化。本论文正是在这一背景下展开的，主要旨在进一步推进 [FLO25], 关于穿孔区域中诺伊曼拉普拉斯算子谱稳定性的研究。

在带小孔区域中狄利克雷拉普拉斯算子的扰动谱理论里，特征值变化的渐近展开中的相关量，最终证明是被移除集合的容量，参见论文 [Cou95] 和 [AFHL19], , 以及 [FR23]对其推广到多调和算子的研究。如果在孔洞上施加诺伊曼边界条件，则会呈现出更丰富、更复杂的现象。继 Rauch and Taylor [RT75], 关于诺伊曼谱稳定性条件的研究之后，已有多项研究探讨了扰动特征值的渐近行为，例如 [Oza83], [LNS11], [LdC12], [Jim15], [BLMN25]。近期论文 [FLO25]分析了由小型内部孔洞穿孔的区域中，诺伊曼拉普拉斯算子的单特征值的渐近行为。在该研究中，展开式中的首阶项通过一个类似于（边界）扭转刚度的几何量表示；在诺伊曼情形下，该几何量所发挥的作用类似于容量在 Dirichlet 情形中的作用。

本文研究穿孔区域中诺伊曼特征值的单重性是否具有一般性。具体而言，在外边界和孔洞边界上均施加诺伊曼条件时，我们关注的是：当区域受到奇异扰动时，重特征值是否会分裂为单特征值（或至少分裂为重数更低的特征值分支）；若会，这一性质又如何取决于挖除孔洞的位置。为此，我们首先分析孔洞缩小至一点时的特征值分支，并推导重特征值变化的渐近展开式。随后，我们探究特征值分支彼此分离的条件：对于二重特征值和球形孔洞，我们证明，几乎对所有孔洞位置，这种分离都会发生。顺带一提，我们的方法也可直接用于狄利克雷边界条件的情形，从而重新得到 Flucher 已在 [Flu95]中建立的一些关于狄利克雷特征值分裂的结果。相关讨论见附录。值得一提的是，Flucher 的证明基于 Courant极小极大原理，并通过选取适当的扰动特征函数来估计瑞利商；这些特征函数则是利用恰当的调和修正方法构造的。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35J20；35B25；35P15。*Key words and phrases.* 诺伊曼特征值；谱稳定性；分裂；重特征值。

特征值重数在扰动下是否保持不变，是一个经典而富有挑战性的问题。这方面最早的研究可追溯至 20 世纪 70 年代，尤其是 A. M. Micheletti [Mic72b, Mic72a, Mic73, Mic76], K. Uhlenbeck [Uhl72, Uhl76] 和 J. H. Albert[Alb75, Alb78]的相关工作。这些研究的结果表明，微分算子的整个谱具有单重性是一种一般性质。一般来说，这意味着对于具有重特征值的算子，几乎所有足够小的扰动都会使算子仅有单特征值。上述所有研究（涉及各种类型的扰动）有一个共同点：它们都研究特征值问题的正则扰动，即存在一个微分同胚，可将每个扰动问题映射到未扰动问题。 [Tey99]中还包含了这些结果的进一步发展。谱的一般单重性证明已推广至其他情形，其中包括（但不限于）： [BW80], 研究黎曼流形上度量的扰动, [CKL16] 研究斯托克斯算子， [LZ22]研究麦克斯韦特征值，以及 [FGMP23, GMP24] 中作者对分数阶拉普拉斯算子特征值的分裂与重数保持问题所作的研究。然而，在奇异扰动的背景下，相关文献仍然相当有限。一项值得注意的结果由 [Flu95] 给出（另见 [Dab21, ALM22]），其中给出了带小孔区域中狄利克雷特征值的渐近展开公式。由此可以推导出任意重特征值的分裂，即它分解为重数更低的特征值分支（更多细节见 A 节）。据我们所知，本文是首篇研究奇异扰动下诺伊曼特征值分裂的工作。

1.1. 主要结果。我们研究有界、连通的开利普希茨集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ 上的诺伊曼特征值问题,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + \varphi = \lambda\varphi, & \text{in } \Omega, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}}\varphi = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{\nu}$ 表示边界 $\partial\Omega$ 的外单位法向量。我们通过从 Ω 的内部挖去一个小孔来扰动上述问题。

设 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ 为一个开、有界的利普希茨集合，使得

$$\overline{\Sigma} \subset B_{r_0} \quad \text{and} \quad B_{r_0} \setminus \overline{\Sigma} \text{ is connected}, \tag{1.2}$$

对某个 $r_0 > 0$，其中 $B_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < r_0\}$。我们定义

$$\Sigma_\varepsilon^{x_0} := x_0 + \varepsilon\Sigma, \tag{1.3}$$

其中 $x_0 \in\Omega$，且 $\varepsilon > 0$ 为一个小扰动参数。更准确地说，令

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0, \Omega, \Sigma) := \frac{\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)}{1 + r_0} > 0, \tag{1.4}$$

我们注意到，对于所有 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，都有 $\operatorname{dist}(\Sigma_\varepsilon^{x_0}, \partial\Omega) \geq \varepsilon_0$，因此

$$\overline{\Sigma_\varepsilon^{x_0}} \subset \Omega \quad \text{for all } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

我们指出，假设（1.2）（在 [FLO25]，中未明确提出）是必要的，以确保带有缩放孔洞的区域上的索Sobole夫空间具有一致延拓性质。关于此类延拓结果的证明，以及一个展示缺少条件（1.2）时该性质如何失效的例子，请参见 [SW99] 以及 [FRS25] 的附录。

令

$$\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma} := \Omega \setminus \overline{\Sigma_\varepsilon^{x_0}},$$

我们考虑如下扰动问题

$$(\mathcal{P}_\varepsilon^{x_0,\Sigma}) \qquad \begin{cases} -\Delta\varphi + \varphi = \lambda\varphi, & \text{in } \Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma}, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}}\varphi = 0, & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma}. \end{cases}$$

我们将 $\{\lambda_k(\Omega)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 记作未扰动问题（1.1）的特征值（按照其重数重复），将 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 记作相应的一列 $L^2(\Omega)$-正交归一特征函数，并将 $E(\lambda_k(\Omega)) \subseteq H^1$记作与特征值 $\lambda_k(\Omega)$相关联的特征空间。注意到， $\lambda_0(\Omega) = 1$ 对任意区域 Ω 都成立，因此在区域扰动下保持不变，与我们的分析无关。此外， $\lambda_0(\Omega) = 1$ 是单特征值，因此 $\lambda_k(\Omega) > 1$ 对每个 $k \geq 1$均成立。

类似地，我们将 $\{\lambda_k(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma},)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 记作扰动特征值，即（$\mathcal{P}^{x_0,\varepsilon}$ $^{\Sigma}$）的特征值，并将 $E(\lambda_k(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma},))$ $\subseteq H^1(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma},)$ 记作与 $\lambda_k(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma},)$ 相对应的特征空间。对于每个 $k\geq 1$，我们还记作

$$\mathfrak{m}_k^{x_0,\Sigma}(\varepsilon)=\dim\left(E(\lambda_k(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma}))\right)$$

$\lambda_k(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma},)$ 作为 ($\mathcal{P}^{x_0,\varepsilon}$ $^{\Sigma}$) 的特征值的重数。

正如奠基性工作 [RT75], 所表明的，诺伊曼拉普拉斯算子的谱对于上述引入的区域扰动是稳定的，其意义在于

$$\lambda_k(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma})\to\lambda_k(\Omega)\quad\text{as }\varepsilon\to 0,\ \text{for all } k\in\mathbb{N}. \tag{1.5}$$

我们注意到，对于每个 $k\in\mathbb{N}$, $\lambda_k(\Omega)=\lambda_k(\Omega\setminus\{x_0\})=\lambda_k(\Omega_0^{x_0,\Sigma},)$，这是由于单点$\{x_0\}$ 具有零容量。

(1.5) 中的收敛速率一直是定量分析的广泛研究主题，包括近期的工作 [FLO25]。相比之下，扰动下谱的定性 行为仍较少受到关注。特别是，当 $\lambda_k(\Omega)$ 是一个重特征值时，自然会问其重数在扰动下是否保持不变。我们的主要结果恰恰回答了这一问题。

在本文中，我们考虑一个固定特征值 $\lambda_n(\Omega)$（对应于（1.1））。令

$$m:=\dim E(\lambda_n(\Omega))$$

表示其重数；因此，指标 n 可以选取为使得

$$\lambda_{n-1}(\Omega)<\lambda_n(\Omega)=\cdots=\lambda_{n+m-1}(\Omega)<\lambda_{n+m}(\Omega). \tag{1.6}$$

由于 $\lambda_0(\Omega)=1$ 是单特征值，因此

$$\text{if } m=\dim E(\lambda_n(\Omega))>1,\ \text{then } \lambda_n(\Omega)>1. \tag{1.7}$$

在 存在球形孔洞 $\Sigma=B_1$ 的情况下，我们的主要结果表明，从 m 个特征值分裂而出的扰动特征值源自 m 多重特征值 $\lambda_n(\Omega)$ 的重数都严格小于 $m=\dim E(\lambda_n(\Omega))$。

定理 1.1。设 $N\geq 2$ 和 $m>1$。存在一个相对闭集 $\Gamma\subseteq\Omega$，使得 $\dim_{\mathcal{H}}\Gamma\leq N-1$，并且满足以下性质（其中 $\dim_{\mathcal{H}}\Gamma$ 表示 Γ的豪斯多夫维数）：对于每个 $x_0\in\Omega\setminus\Gamma$，都存在 $\varepsilon_s=\varepsilon_s(x_0)>0$，使得

$$\mathfrak{m}_{n+i-1}^{x_0,B_1}(\varepsilon)<m\quad \textit{for all } \varepsilon\in(0,\varepsilon_s)\ \textit{and}\ i=1,\dots,m.$$

作为定理 1.1 的直接推论，我们得到以下关于双重特征值分裂的泛性结果。

推论 1.2。设 $N\geq 2$ 和 $m=2$。存在一个相对闭集 $\Gamma\subseteq\Omega$，使得 $\dim_{\mathcal{H}}\Gamma\leq N-1$，并且满足以下性质：对于每个 $x_0\in\Omega\setminus\Gamma$，都存在 $\varepsilon_s=\varepsilon_s(x_0)>0$，使得

$$\lambda_n(\Omega_\varepsilon^{x_0,B_1})<\lambda_{n+1}(\Omega_\varepsilon^{x_0,B_1})$$

对所有 $0<\varepsilon\leq\varepsilon_s$。特别地，对于每个 $x_0\in\Omega\setminus\Gamma$，$\lambda_n(\Omega_\varepsilon^{x_0,B_1},)$ 和 $\lambda_{n+1}(\Omega_\varepsilon^{x_0,B_1},)$ 都是单特征值，前提是ε足够小。

1.2. **证明策略**。为证明定理 1.1，出发点是奇异摄动区域中诺伊曼特征值的一般渐近展开式，该展开式在定理 1.3中确立。这在诺伊曼拉普拉斯算子的研究中尚属首创。事实上，证明中用到的所有辅助结果似乎也都是新的，并对 [FLO25]的分析形成了很好的补充。我们指出，关于特征值变化的渐近公式本身也具有独立价值，例如可应用于证明最优形状不存在（参见 [BLMN25]）。

在情 况 $N\geq 3$中，我们回顾 [FLO25] 中给出的以下扭转刚度概念：对于任意 $f\in L^2(\partial$ $\Sigma)$

$$\tau_{\mathbb{R}^N\setminus\Sigma}(\partial\Sigma,f):=-2\min\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Sigma}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Sigma}fu\,\mathrm{d}S\colon u\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)\right\},$$

其中，空间 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)$ 定义为关于该范数对 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)$ 取完备化所得

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)}:=\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Sigma}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

我们还用 $U_{\Sigma,f} \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N \setminus \Sigma)$ 表示达到 $\tau_{\mathbb{R}^N\setminus\Sigma}(\partial\Sigma, f)$ 的唯一极小化子。等价地，$U_{\Sigma,f}$ 是以下方程的唯一弱解

$$\begin{cases} -\Delta U = 0, & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Sigma}, \\ \partial_\nu U = f, & \text{on } \partial\Sigma, \end{cases}$$

从而

$$\tau_{\mathbb{R}^N\setminus\Sigma}(\partial\Sigma, f) := -\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Sigma} |\nabla U_{\Sigma,f}|^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_{\partial\Sigma} f U_{\Sigma,f} \,\mathrm{d}S = \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Sigma} |\nabla U_{\Sigma,f}|^2 \,\mathrm{d}x.$$

下面的定理描述了当区域因移除收缩至 λ_n的1.1式中的固定特征值 $\Sigma_\varepsilon^{x_0}$的小孔而受到扰动时，从该固定特征值分离出的特征值分支的渐近行为；当 x_0 时 $\varepsilon \to 0$。

定理 1.3。 设 $N \geq 3$ 和 $x_0 \in\Omega$。设 $\{\ell_i^{x_0,\Sigma}\}_{i=1,\dots,m}$ 是双线性型的特征值（按降序排列），其中

$$\mathcal{L}_{x_0,\Sigma}(\varphi,\psi) := \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Sigma} \nabla U_{\Sigma,\nabla\varphi(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}} \cdot \nabla U_{\Sigma,\nabla\psi(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}} \,\mathrm{d}x + |\Sigma| \left(\nabla\varphi(x_0)\cdot\nabla\psi(x_0) - (\lambda_n(\Omega)-1)\varphi(x_0)\psi(x_0)\right), \tag{1.8}$$

该双线性型对每个 $\varphi,\psi \in E(\lambda_n(\Omega))$均有定义。于是，对每个 $i = 1,\dots,m$，有

$$\lambda_{n+i-1}\left(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma}\right) = \lambda_n(\Omega) - \ell_i^{x_0,\Sigma}\varepsilon^N + o(\varepsilon^N) \quad as\ \varepsilon \to 0.$$

定理 1.3 的证明基于 小特征值引理，该引理由 Colin de Verdi`ere [CdV86]提出，后经 [Cou95]和 [ALM22], 重新审视，并结合了对扭转函数（2.1）进行的爆破分析，其思路源自 [FLO25]。事实上，基于相同的结果，还可以得到与 $\lambda_n(\Omega)$ 相关的任意特征函数与其在相应扰动特征子空间直和上的投影之间能量差的渐近展开。

定理 1.4。 设 $N \geq 3$ 和 $x_0 \in \Omega$。对于每个 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$，令

$$\mathcal{E}_\varepsilon^n := \bigoplus_{i=1}^m E(\lambda_{n+i-1}(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma}))$$

and

$$\Pi_\varepsilon^n \colon L^2(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma}) \to \mathcal{E}_\varepsilon^n \subseteq L^2(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma})$$

为正交投影。则

$$\left\| \varphi - \frac{\Pi_\varepsilon^n\varphi}{\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma})}} \right\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma})} = \varepsilon^N \left\|\nabla U_{\Sigma,\nabla\varphi(x_0)\cdot\nu}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)} + \mathcal{R}(\varphi,\varepsilon)$$

对于所有满足 $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1$ 的 $\varphi \in E(\lambda_n(\Omega))$，其中余项 $\mathcal{R}(\varphi,\varepsilon)$ 关于 $\varepsilon \to 0$ 一致地为 $o(\varepsilon^N)$，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n(\Omega)) \\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \frac{|\mathcal{R}(\varphi,\varepsilon)|}{\varepsilon^N} = 0.$$

建立了一般框架后，我们现在聚焦于具体情形 $\Sigma = B_1$。对于每个 $N \geq 2$和 $x_0 \in\Omega$，我们考虑双线性型

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_{x_0} : E(\lambda_n(\Omega)) \times E(\lambda_n(\Omega)) \to \mathbb{R}, \\ &\mathcal{B}_{x_0}(\varphi,\psi) = \omega_N \left(\frac{N}{N-1} \nabla\varphi(x_0)\cdot\nabla\psi(x_0) - (\lambda_n(\Omega)-1)\varphi(x_0)\psi(x_0) \right), \end{aligned} \tag{1.9}$$

其中 $\omega_N = |B_1|$ 是 B_1 的 N 维勒贝格测度。令

$$\{\gamma_i^{x_0}\}_{i=1,\dots,m}$$

表示 $\mathcal{B}_{x_0}$ 的特征值（按降序排列）。

若 $N \geq 3$，我们可以给出极限双线性形式（1.8）的显式表达式，并证明它与 $\mathcal{B}_{x_0}$一致。

命题 1.5。 设 $N \geq 3$, $x_0 \in \Omega$，以及 $\mathcal{L}_{x_0,\,B_1}$: $E(\lambda_n(\Omega)) \times E(\lambda_n(\Omega)) \to \mathbb{R}$ 为 (1.8) 中定义的双线性型，且 $\Sigma = B_1$。则

$$\mathcal{L}_{x_0,B_1}(\varphi,\psi) = \mathcal{B}_{x_0}(\varphi,\psi), \quad \textit{for every } \varphi,\psi \in E(\lambda_n(\Omega)).$$

如果 $N = 2$，我们的策略需要进行一些调整。事实上，对于 $N \geq 3$有效的扭转刚度及相应扭转函数的爆破分析，在$N = 2$的情形下并不可用。然而，利用 [FLO25第 6 节中对扭转函数所进行的研究，2], 在球形孔洞的情形下，即使对于平面区域，我们仍然能够得到与上述针对 $N \geq 3$所得的同类型渐近展开式。

定理 1.6。设 $N = 2$ 且 $x_0 \in \Omega$。设$\{\gamma_i^{x_0}\}_{i=1,\,\dots,\,m}$ 是双线性型(1.9)的特征值（按降序排列）。那么，对于每个 $i = 1,\ \dots,\ m$，我们都有

$$\lambda_{n+i-1}\left(\Omega_\varepsilon^{x_0,B_1}\right) = \lambda_n(\Omega) - \gamma_i^{x_0}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad \textit{as } \varepsilon \to 0.$$

综合定理1.3、命题1.5和定理1.6的结果，我们直接得到以下推论。

推论 1.7。 设 $x_0 \in \Omega$ 和 $N \geq 2$。那么，对每个 $i = 1,\dots,m$,

$$\lambda_{n+i-1}\left(\Omega_\varepsilon^{x_0,B_1}\right) = \lambda_n(\Omega) - \gamma_i^{x_0}\varepsilon^N + o(\varepsilon^N) \quad \textit{as } \varepsilon \to 0.$$

这个推论是我们证明定理 1.1所需的最后一步，同时还能刻画使不同指标对应的特征值重合的点 x_0，对于这些点，特征值 $\gamma_i^{x_0}$具有不同的指标。

1.3. **记号**。 这里汇总全文将使用的一些记号：

- $\lambda_n := \lambda_n(\Omega)$;
- 我们可以省略对 x_0 和 Σ的依赖，简记为 $\lambda_n^\varepsilon := \lambda_n(\Omega_\varepsilon^{x_0\ \Sigma,})$;
- 类似地，我们可以记 $\Omega_\varepsilon := \Omega_\varepsilon^{x_0\ \Sigma,}$以及 $\Sigma_\varepsilon := \Sigma_\varepsilon^{x_0}$。

本文概述。 下一节中，我们回顾边界扭转刚度的概念，并证明与特征函数相关的扭转函数的一些初步估计，旨在获得在特征空间内保持一致的表述。在第 3 节中，我们应用 Y. Colin de Verdi`ere [CdV86]关于小特征值的引理，推导从重特征值 $\lambda_n(\Omega)$分叉出的特征值分支的渐近展开式，从而证明定理 1.3、1.6 和 1.4。第 4 节致力于证明定理1.1，其证明基于推论1.7 以及以下观察：特征值 x_0 在不同指标下$\gamma_i^{x_0}$重合的点 i 对应于某些解析函数的零点。第 5 节介绍了一些理论结果未涵盖情形下的数值实验，为未来研究提供了有趣的方向。最后，附录A讨论 Dirichlet 情形，展示我们的方法如何重新得到 Flucher 在 [Flu 95]中建立的已知结果。

2. Preliminaries

我们回顾 [FLO25] 中提出的边界扭转刚度概念，该概念适用于处理穿孔区域上的诺伊曼问题，另见 [BGI24]。在其他背景下也出现了相关的扭转刚度概念，但仍处于奇异摄动特征值问题的框架内，参见例如 [AO24，FNOS23，Ogn25]。

对于任意满足 $E \subseteq \Omega$ 的开利普希茨集 $\overline{E}$ 以及任意 $f \in L^2(\partial E)$，我们定义相对于 $\Omega \setminus E$ 的 f-扭转刚度∂E，为

$$\mathcal{T}_{\overline{\Omega\setminus E}}(\partial E, f) := -2\min\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus E}(|\nabla u|^2 + u^2)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial E} uf\,\mathrm{d}S \colon u \in H^1(\Omega\setminus\overline{E})\right\}.$$

我们将唯一极小值点记为$U_{\Omega,E,f} \in \overline{H^1}(\Omega \setminus E)$。下文中，若无歧义，对于任意 $\varphi \in E(\lambda_n)$ 和 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$，我们简记为

$$U_\varepsilon^\varphi := U_{\Omega,\Sigma_\varepsilon,\partial_{\boldsymbol{\nu}}\varphi}. \tag{2.1}$$

容易验证， U_ε^φ满足

$$\int_{\Omega_\varepsilon}(\nabla U_\varepsilon^\varphi\cdot\nabla u + U_\varepsilon^\varphi u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Sigma_\varepsilon} u\,\partial_{\boldsymbol{\nu}}\varphi\,\mathrm{d}S \quad \text{for all } u \in H^1(\Omega_\varepsilon). \tag{2.2}$$

以下引理给出了函数 U_ε^φ as$\varepsilon \to 0$ 的能量消失阶估计。

引理 2.1。设 $N=2$ 和 $\Sigma=B_1$，或 $N\geq 3$。我们有

$$\sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|U_\varepsilon^\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla U_\varepsilon^\varphi|^2+|U_\varepsilon^\varphi|^2\right)\mathrm{d}x = O(\varepsilon^N) \quad as\ \varepsilon\to 0.$$

证明。令 $\varphi\in E(\lambda_n)$ 满足 $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1$。我们可以将 φ 写为

$$\varphi=\sum_{i=1}^m a_i\varphi_{n+i-1},$$

其中 $\sum_{i=1}^m a_i^2=1$。由线性性，有 $U_\varepsilon^\varphi=\sum_{i=1}^m a_i U_\varepsilon^{\varphi_{n+i-1}}$，因此根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\|U_\varepsilon^\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \left(\sum_{i=1}^m |a_i|\,\|U_\varepsilon^{\varphi_{n+i-1}}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right)^2\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^m \|U_\varepsilon^{\varphi_{n+i-1}}\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right) \leq m\max_{i=1,\dots,m}\|U_\varepsilon^{\varphi_{n+i-1}}\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.\end{aligned}$$

在 [FLO25] 中，我们证明了

$$\|U_\varepsilon^{\varphi_{n+i-1}}\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}=O(\varepsilon^{N+2k_i-2}) \quad \text{as } \varepsilon\to 0,$$

其中 $k_i\geq 1$ 是 $\varphi_{n+i-1}-\varphi_{n+i-1}(x_0)$ 在 x_0 处的消失阶，但 $N=2$ 和 $k_i=2$ 的情形除外；对于该情形，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\|U_\varepsilon^{\varphi_{n+i-1}}\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}=O(\varepsilon^4|\log\varepsilon|)$。特别地，$N\geq 3$ 的情形已在 [FLO25，引理 5.4] 中得到证明（另见注 3.5），而 $N=2$ 和 $\Sigma=B_1$ 的情形可见于 [FLO25，命题 6.3]。证明完毕。□

我们还注意到以下性质：当 $\varepsilon\to 0$ 时，函数的 L^2 质量相对于其能量具有可忽略性，并且关于 $E(\lambda_n)$ 一致。

引理 2.2。设 $N\geq 2$。则

$$\sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \frac{\|U_\varepsilon^\varphi\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}{\|U_\varepsilon^\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}}\to 0 \quad as\ \varepsilon\to 0. \tag{2.3}$$

特别地，令

$$\omega(\varepsilon):=\sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|U_\varepsilon^\varphi\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)},$$

若 $N=2$ 和 $\Sigma=B_1$ 或 $N\geq 3$ 中任一条件成立，则有 $\varepsilon^{-N}\omega(\varepsilon)\to 0$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时。

证明。在 为了证明（2.3），我们采用反证法。为此，假设存在 ist 序列 $\{\varepsilon_i\}_i\subset(0,+\infty)$ 和 $\{\varphi^i\}_i\subset E(\lambda_n)$，使得 $\lim_{i\to\infty}\varepsilon_i=0$，$\|\varphi^i\|_{L^2(\Omega)}=1$，并且

$$\frac{\|U_{\varepsilon_i}^{\varphi^i}\|^2_{L^2(\Omega_{\varepsilon_i})}}{\|U_{\varepsilon_i}^{\varphi^i}\|^2_{H^1(\Omega_{\varepsilon_i})}}\geq C \quad \text{for all } i\in\mathbb{N}, \tag{2.4}$$

对于某个 $C>0$。众所周知（例如参见 [SW99] 和 [FRS25]），对于每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0$，都存在一个延拓算子 E_ε：$H^1(\Omega_\varepsilon)\to H^1(\Omega)$，使得

$$\|\mathsf{E}_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)}\leq \mathfrak{C}\,\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \text{for all } u\in H^1(\Omega_\varepsilon) \text{ and } \varepsilon>0,$$

其中 $\mathfrak{C}$ 是一个与 ε 无关的正常数。因此，令

$$U_i:=\frac{\mathsf{E}_{\varepsilon_i}U_{\varepsilon_i}^{\varphi^i}}{\|\mathsf{E}_{\varepsilon_i}U_{\varepsilon_i}^{\varphi^i}\|_{L^2(\Omega)}},$$

(2.4) 意味着

$$\|U_i\|_{H^1(\Omega)}=O(1) \quad \text{as } i\to\infty.$$

因此，经过抽取一个子列，我们有

$$U_i\rightharpoonup U \quad \text{weakly in } H^1(\Omega) \quad \text{and} \quad U_i\to U \quad \text{strongly in } L^2(\Omega) \quad \text{as } i\to\infty, \tag{2.5}$$

对于某个 $U \in H^1(\Omega)$，满足 $\|U\|_{L^2(\Omega)} = 1$。

令 $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ 满足：在 x_0 的某个邻域内有 $v \equiv 0$。因此，当 i 充分大时，$v \equiv 0$ 属于 Σ_{ε_i}；于是，根据 $U_{\varepsilon_i}^{\varphi_i}$ 所满足的方程，我们得到

$$\int_\Omega (\nabla U_i \cdot \nabla v + U_i v)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\|\mathsf{E}_{\varepsilon_i} U_{\varepsilon_i}^{\varphi_i}\|_{L^2(\Omega)}} \int_{\Omega_{\varepsilon_i}} (\nabla U_{\varepsilon_i}^{\varphi_i} \cdot \nabla v + U_{\varepsilon_i}^{\varphi_i} v)\,\mathrm{d}x = 0.$$

根据（2.5），我们可以在上面的恒等式中令 $i \to \infty$取极限；然后，由于 $\{x_0\}$ 具有零容量，我们可以将其推广到任意测试函数 $v \in H^1(\Omega)$，得到

$$\int_\Omega (\nabla U \cdot \nabla v + U v)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{for all } v \in H^1(\Omega).$$

这就迫使 $U = 0$；由于 $\|U\|_{L^2(\Omega)} = 1$，因此产生了矛盾。

陈述的第二部分由（2.3）和定理 2.1 得出。 □

若 $N \geq 3$，则扭转函数 U_ε^φ 满足以下稳定性估计。

引理2.3。设 $N \geq 3$。存在常数 $S > 0$，其取决于 N、Ω Σ, λ_n（但与ε无关），使得对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ 以及 $\varphi \in E(\lambda_n)$，

$$\|U_\varepsilon^\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq S\left(\varepsilon \|\varphi\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}\right)^2.$$

证明。 证明见 [FLO25], ，特别参见引理 5.4 中的估计 (5.7)。 □

对于 $N \geq 3$，我们可以改造 [FLO25] 中所进行的爆破分析，以量化扭转函数 U_ε^φ能量的消失阶。

引理 2.4。设 $N \geq 3$。则

$$\rho_n(\varepsilon) := \sup_{\substack{\varphi \in E(\lambda_n) \\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1}} \left| \varepsilon^{-N} \|U_\varepsilon^\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Sigma} |\nabla U_{\Sigma, \nabla\varphi(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}}|^2\,\mathrm{d}x \right| \to 0 \quad as\ \varepsilon \to 0. \tag{2.6}$$

由集合 $\{\varphi \in E(\lambda_n) : \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$ 的连续性和紧性可知，对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，(2.6) 中的上确界由某个满足 $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1$ 的 $\varphi_\varepsilon \in E(\lambda_n)$ 取得。由于 $\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 = \lambda_n$，对于任意序列 $\varepsilon_j \to 0$，存在一个仍记作 $\{\varepsilon_j\}_j$ 的子列以及某个 $\varphi \in E(\lambda_n)$，使得$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1$，且当 $j \to +\infty$ 时，$\varphi_{\varepsilon_j} \to \varphi$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛。由经典的椭圆内部估计可推出，$\varphi_{\varepsilon_j} \to \varphi$ 在 $C^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中收敛。因此，由 $\varphi \mapsto U_\varepsilon^\varphi$ 的线性性、柯西-施瓦茨不等式和引理2.3可得

$$\begin{aligned}
&\left| \|U_{\varepsilon_j}^{\varphi_{\varepsilon_j}}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_j})}^2 - \|U_{\varepsilon_j}^{\varphi}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_j})}^2 \right| = \left| (U_{\varepsilon_j}^{\varphi_{\varepsilon_j}} - U_{\varepsilon_j}^{\varphi}, U_{\varepsilon_j}^{\varphi_{\varepsilon_j}} + U_{\varepsilon_j}^{\varphi})_{H^1(\Omega_{\varepsilon_j})} \right| \\
&= \left| (U_{\varepsilon_j}^{\varphi_{\varepsilon_j} - \varphi}, U_{\varepsilon_j}^{\varphi_{\varepsilon_j} + \varphi})_{H^1(\Omega_{\varepsilon_j})} \right| \leq \|U_{\varepsilon_j}^{\varphi_{\varepsilon_j} - \varphi}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_j})} \|U_{\varepsilon_j}^{\varphi_{\varepsilon_j} + \varphi}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_j})} \\
&\leq S\left(\varepsilon_j \|\varphi_{\varepsilon_j} - \varphi\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} + \|\nabla(\varphi_{\varepsilon_j} - \varphi)\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}\right)\left(\varepsilon_j \|\varphi_{\varepsilon_j} + \varphi\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)} + \|\nabla(\varphi_{\varepsilon_j} + \varphi)\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}\right) \\
&= o(\varepsilon_j^N) \quad \text{as } j \to +\infty.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

以类似的方式，

$$\begin{aligned}
&\left| \|\nabla U_{\Sigma, \nabla\varphi_{\varepsilon_j}(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)}^2 - \|\nabla U_{\Sigma, \nabla\varphi(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)}^2 \right| \\
&\qquad \leq \|\nabla U_{\Sigma, \nabla(\varphi_{\varepsilon_j} - \varphi)(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)} \|\nabla U_{\Sigma, \nabla(\varphi_{\varepsilon_j} + \varphi)(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)} = o(1) \quad \text{as } j \to +\infty.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

此外，根据 [FLO25，定理 56]可知

$$\varepsilon^{-N} \|U_\varepsilon^\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \to \|\nabla U_{\Sigma, \nabla\varphi(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)}^2 \quad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{2.9}$$

由（2.7）、（2.8）和（2.9）可得

$$\begin{aligned}
\rho_n(\varepsilon_j) = \Bigg| &\varepsilon_j^{-N} \left(\|U_{\varepsilon_j}^{\varphi_{\varepsilon_j}}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_j})}^2 - \|U_{\varepsilon_j}^{\varphi}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_j})}^2 \right) \\
&- \left(\|\nabla U_{\Sigma, \nabla\varphi_{\varepsilon_j}(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)}^2 - \|\nabla U_{\Sigma, \nabla\varphi(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)}^2 \right) \\
&+ \left(\varepsilon_j^{-N} \|U_{\varepsilon_j}^{\varphi}\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_j})}^2 - \|\nabla U_{\Sigma, \nabla\varphi(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}}\|_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus\Sigma)}^2 \right) \Bigg| = o(1) \quad \text{as } j \to +\infty.
\end{aligned}$$

由乌雷松子列原理即可得出结论。 □

3. Asymptotics of multiple eigenvalues

在整个本节中，我们考虑问题（ $\lambda_n = \lambda_n$1.1）的一个固定特征值，其重数为$m := \dim E(\lambda_n)$，其中指标 $n \in \mathbb{N}$ 按照（1.6）中的方式选取。

对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，我们引入双线性型

$$q_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \times H^1(\Omega_\varepsilon) \to \mathbb{R}, \tag{3.1}$$
$$q_\varepsilon(u,v) := \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\,\mathrm{d}x - \lambda_n \int_{\Omega_\varepsilon} uv\,\mathrm{d}x.$$

对于每个 $\varphi \in E(\lambda_n)$ 和 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，记为

$$U_\varepsilon^\varphi := U_{\Omega,\Sigma_\varepsilon,\partial_\nu\varphi}, \quad P_\varepsilon(\varphi) := \varphi - U_\varepsilon^\varphi,$$

and

$$F_\varepsilon := \{P_\varepsilon(\varphi) : \varphi \in E(\lambda_n)\} = P_\varepsilon(E(\lambda_n)) \subseteq L^2(\Omega_\varepsilon). \tag{3.2}$$

将 $E(\lambda_n)$ 视为 $L^2(\Omega)$ 的一个子空间，并按照引理 $\omega(\varepsilon)$ 中的定义，2.2对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，有

$$\|I - P_\varepsilon\|^2_{\mathcal{L}(E(\lambda_n);L^2(\Omega_\varepsilon))} = \omega(\varepsilon),$$

其中 I 是恒等算子。如果 $N \geq 2$ 和 $\Sigma = B_1$，或 $N \geq 3$，根据引理 2.2 $\lim_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon) = 0$，因此 $P_\varepsilon : E(\lambda_n) \to F_\varepsilon$ 是一个双射，适用于充分小的 ε，且 F_ε 是 m维的。

以下 述 小特征值引理 由 Y. Colin de Verdi`ere [CdV86] (另见 [ALM22，命题 o-B.1]) 是定理 1.3证明中的关键工具。

引理 *3.1*（小特征值引理 [*CdV86*]）。设 $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_\mathcal{H})$ 是一个实希尔伯特空间，且 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$ 是其稠密子空间。设 q: $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ 是一个对称双线性型，满足 q 下有界， q 存在一个递增的特征值序列 $\{\nu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，并且存在 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基$\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $g_i \in \mathcal{D}$ 是 q 对应于特征值 ν_i 的特征向量，即对所有 $i \geq 1$ 和 $v \in \mathcal{D}$，均有 $q(g_i, v) = \nu_i(g_i, v)_\mathcal{H}$。

令 $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 $F \subseteq \mathcal{D}$ 为 m维子空间，且该子空间属于 $\mathcal{D}$。

假设存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\gamma > 0$，使得

(H1) $\nu_i \leq -\gamma$ *for all* $i \leq n-1$, $|\nu_i| \leq \gamma$ *for all* $i = n, \dots, n+m-1$, *and* $\nu_i \geq \gamma$ *for all* $i \geq n+m$;
(H2) $\delta := \sup\{|q(u,v)| : u \in \mathcal{D},\ v \in F,\ \|u\|_\mathcal{H} = \|v\|_\mathcal{H} = 1\} < \gamma/\sqrt{2}$.

若 $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,m}$ 是 q 限制在 F上的特征值（按升序排列），则有

$$|\nu_{n+i-1} - \xi_i| \leq \frac{4\delta^2}{\gamma} \quad \textit{for all } i = 1, \dots, m. \tag{3.3}$$

此外，若 Π: $\mathcal{D} \to$张成 $\{g_n, \dots, g_{n+m-1}\}$ 表示投影到由 $\{g_n, \dots, g_{n+m-1}\}$张成的 $\mathcal{D}$子空间上的正交投影，则有

$$\frac{\|v - \Pi v\|_\mathcal{H}}{\|v\|_\mathcal{H}} \leq \frac{\sqrt{2}\delta}{\gamma} \quad \textit{for all } v \in F.$$

我们将在此情形下应用定理 3.1，以证明扰动特征值的如下展开式。

命题 3.2。设 $N \geq 2$ 和 $\Sigma = B_1$ 或 $N \geq 3$。令 $\{\xi_i^\varepsilon\}_{i=1,\dots,m}$ 为双线性型 q_ε，其定义见 (3.1)，并限制在 F_ε 中；该空间在 (3.2)中引入。则

$$\lambda^\varepsilon_{n+i-1} = \lambda_n + \xi_i^\varepsilon + o(\varepsilon^N) \quad \textit{as } \varepsilon \to 0, \tag{3.4}$$

对所有 $i = 1, \dots, m$ 均成立。此外，

$$\sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|P_\varepsilon(\varphi) - \Pi_\varepsilon^n P_\varepsilon(\varphi)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^N) \quad \textit{as } \varepsilon \to 0, \tag{3.5}$$

其中 Π_ε^n 与定理 *1.4*中的相同。

证明。 为了在我们的情形下应用定理3.1 ，我们作如下选择:

$$\mathcal{H} := L^2(\Omega_\varepsilon), \quad \mathcal{D} := H^1(\Omega_\varepsilon), \quad q := q_\varepsilon, \quad F := F_\varepsilon,$$

为 q_ε 且 F_ε 分别如（3.1）和（3.2）所示，因此

$$\nu_i = \lambda_i^\varepsilon - \lambda_n \quad \text{for all } i \in \mathbb{N}.$$

下面验证，采用上述选择时，引理3.1 的假设均得到满足。由（1.5）$\lambda_i^\varepsilon \to \lambda_i$ 当 $\varepsilon \to 0$时，对所有 $i \in \mathbb{N}$均成立；因此

$$\nu_i = \lambda_i^\varepsilon - \lambda_n \le \frac{1}{2}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) < 0 \quad \text{for every } i < n,$$

$$\nu_i = \lambda_i^\varepsilon - \lambda_n \ge \frac{1}{2}(\lambda_{n+m} - \lambda_{n+m-1}) > 0 \quad \text{for every } i > n+m-1,$$

当 ε 充分小时（取决于 n）时。因此，引理3.1 的假设（H1）在

$$\gamma := \frac{1}{2}\min\{\lambda_n - \lambda_{n-1}, \lambda_{n+m} - \lambda_n\} > 0 \tag{3.6}$$

且 ε 充分小时。

为了估计 δ （H2）假设中的量，我们先固定 $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$和$v \in F_\varepsilon$，并计算 $q_\varepsilon(u, v)$。由于 P_ε是一个双射，存在唯一的 $\varphi \in E(\lambda_n)$，使得 $v = \varphi - U_\varepsilon^\varphi$，因此

$$q_\varepsilon(u, v) = q_\varepsilon(u, \varphi - U_\varepsilon^\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u \cdot \nabla(\varphi - U_\varepsilon^\varphi) + u(\varphi - U_\varepsilon^\varphi))\,\mathrm{d}x - \lambda_n \int_{\Omega_\varepsilon} u(\varphi - U_\varepsilon^\varphi)\,\mathrm{d}x.$$

通过积分 分部积分并考虑到 U_ε^φ 所满足的方程，即（2.2），我们得到 t

$$q_\varepsilon(u, \varphi - U_\varepsilon^\varphi) = \lambda_n \int_{\Omega_\varepsilon} u U_\varepsilon^\varphi\,\mathrm{d}x,$$

因此，根据柯西-施瓦茨不等式,

$$\delta \le \lambda_n \sqrt{\omega(\varepsilon)}, \tag{3.7}$$

其中 ω（ε）如定理 2.2 中所述。因此，由定理 2.2 本身可知，当 ε 充分小时，条件（H2）得到满足，而展开式（3.4）则由（3.3）推出。

为了证明（3.5），我们首先注意到，根据定理 3.1 和（3.7），对于每个满足$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1$ 的 $\varphi \in E$（λ_n），都有

$$\|P_\varepsilon(\varphi) - \Pi_\varepsilon^n P_\varepsilon(\varphi)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \le \frac{2\lambda_n^2}{\gamma^2}\omega(\varepsilon)\|P_\varepsilon(\varphi)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2, \tag{3.8}$$

其中 γ 和 ω（ε）分别如（3.6）和定理 2.2 中所述。现在我们来分析最右端的项：有

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon(\varphi)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &\le 2\|\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + 2\|(P_\varepsilon - I)(\varphi)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &\le 2\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\omega(\varepsilon)\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2(1 + \omega(\varepsilon)) \end{aligned} \tag{3.9}$$

对于一个 ll $\varphi \in E(\lambda_n)$ 其中 $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1$。结论由 (3.8)、(3.9) 以及定理 2.2 . □

为了刻画在命题 $\{\xi_i^\varepsilon\}_{i=1,\dots,m}$ 中起作用的特征值 3.2，我们引入双线性型 r_ε: $E(\lambda_n) \times E(\lambda_n) \to \mathbb{R}$，定义如下

$$r_\varepsilon(\varphi, \psi) := q_\varepsilon(P_\varepsilon(\varphi), P_\varepsilon(\psi)). \tag{3.10}$$

引理 3.3。我们有

$$\begin{aligned} r_\varepsilon(\varphi, \psi) = &- \int_{\Sigma_\varepsilon} (\nabla\varphi \cdot \nabla\psi - (\lambda_n - 1)\varphi\psi)\,\mathrm{d}x \\ &- \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla U_\varepsilon^\varphi \cdot \nabla U_\varepsilon^\psi + U_\varepsilon^\varphi U_\varepsilon^\psi)\,\mathrm{d}x - \lambda_n \int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon^\varphi U_\varepsilon^\psi\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

对于所有 $\varphi, \psi \in E(\lambda_n)$。

证明。 对于每个 $\varphi,\psi\in E(\lambda_n)$，我们有

$$\begin{aligned} r_\varepsilon(\varphi,\psi) &= q_\varepsilon(\varphi-U_\varepsilon^\varphi,\psi-U_\varepsilon^\psi)\\ &= (\varphi,\psi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)}-\lambda_n(\varphi,\psi)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}-\Big((\varphi,U_\varepsilon^\psi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)}-\lambda_n(\varphi,U_\varepsilon^\psi)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\Big)\\ &\quad-\Big((\psi,U_\varepsilon^\varphi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)}-\lambda_n(\psi,U_\varepsilon^\varphi)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\Big)+(U_\varepsilon^\varphi,U_\varepsilon^\psi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)}-\lambda_n(U_\varepsilon^\varphi,U_\varepsilon^\psi)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

由于 $\varphi\in E(\lambda_n)$，我们有

$$(\varphi,\psi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)}-\lambda_n(\varphi,\psi)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}=-\int_{\Sigma_\varepsilon}(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi-(\lambda_n-1)\varphi\psi)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面，通过分部积分并分别利用 φ 和 U_ε^φ、ψ 和 U_ε^ψ 所满足的方程，可以证明

$$(\varphi,U_\varepsilon^\psi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)}-\lambda_n(\varphi,U_\varepsilon^\psi)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}=(U_\varepsilon^\varphi,U_\varepsilon^\psi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

分别

$$(\psi,U_\varepsilon^\varphi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)}-\lambda_n(\psi,U_\varepsilon^\varphi)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}=(U_\varepsilon^\varphi,U_\varepsilon^\psi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

将所有项相加，即可完成证明。 □

引理 3.4. 设 $N=2$ 和 $\Sigma=B_1$ 或 $N\geq 3$ 成立。设 $\{\xi_i^\varepsilon\}_{i=1,\dots,m}$ 是 F_ε 上 q_ε 的特征值，且 $\{\mu_i^\varepsilon\}_{i=1,\dots,m}$ 是 r_ε 的特征值。那么

$$\xi_i^\varepsilon=\mu_i^\varepsilon+o(\varepsilon^N)\quad as\ \varepsilon\to 0, \tag{3.11}$$

对于所有 $i=1$、.....、m。

证明。 令 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 如引言中所述，即 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基，其中 φ_k是问题（1.1）中与特征值 $\lambda_k(\Omega)$ 相关联的特征函数。因此，根据（1.6），$\{\varphi_{n+i-1}\}_{i=1}^m$是 $E(\lambda_n)$ 的标准正交基。

因此， r_ε 的特征值 $\{\mu_i^\varepsilon\}_{i=1、.....、m}$ 与该 $m\times m$ 实对称矩阵的特征值相同

$$R_\varepsilon=\big(r_\varepsilon(\varphi_{n+i-1},\varphi_{n+j-1})\big)_{ij}.$$

我们注意到，限制在 F_ε 上的双线性型 q_ε 与双线性型

$$(u,v)\in F_\varepsilon\times F_\varepsilon\ \mapsto\ r_\varepsilon\big(P_\varepsilon^{-1}(u),P_\varepsilon^{-1}(v)\big).$$

因此，限制在 F_ε 上的 q_ε 的特征值 $\{\xi_i^\varepsilon\}_{i=1、.....、m}$ 与该 $m\times m$实对称矩阵的特征值相同

$$B_\varepsilon=C_\varepsilon^{-1}R_\varepsilon, \tag{3.12}$$

其中

$$C_\varepsilon=\big((P_\varepsilon\varphi_{n+i-1},P_\varepsilon\varphi_{n+j-1})_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\big)_{ij}.$$

由于

$$(C_\varepsilon)_{ij}=\int_{\Omega_\varepsilon}(\varphi_{n+i-1}-U_\varepsilon^{\varphi_{n+i-1}})(\varphi_{n+j-1}-U_\varepsilon^{\varphi_{n+j-1}})\,\mathrm{d}x\quad\text{for all } i,j=1,\dots,m,$$

由柯西-施瓦茨不等式和定理2.2 可得

$$\begin{aligned} (C_\varepsilon)_{ii}&=1+o(\varepsilon^{\frac{N}{2}})\quad\text{for all } i=1,\dots,m,\\ (C_\varepsilon)_{ij}&=o(\varepsilon^{\frac{N}{2}})\quad\text{for all } i,j=1,\dots,m,\ i\neq j, \end{aligned}$$

如 $\varepsilon\to 0$。根据基本线性代数，我们进而得到

$$\begin{aligned} (C_\varepsilon^{-1})_{ii}&=1+o(\varepsilon^{\frac{N}{2}})\quad\text{for } i=1,\dots,m,\\ (C_\varepsilon^{-1})_{ij}&=o(\varepsilon^{\frac{N}{2}})\quad\text{for } i,j=1,\dots,m,\ i\neq j, \end{aligned}$$

如 $\varepsilon\to 0$。此外，由定理 3.3 和定理 2.1 可推得 $(R_\varepsilon)_{ij}=O(\varepsilon^N)$ 如 $\varepsilon\to 0$，对所有 i，$j=1$，.....，m。结合这些估计，并注意到 (3.12)，可得

$$B_\varepsilon=R_\varepsilon+o(\varepsilon^N)\quad\text{as } \varepsilon\to 0, \tag{3.13}$$

其中 $o(\varepsilon^N)$ 表示一个所有元素均为 $o(\varepsilon^N)$ 的矩阵，其中 $\varepsilon\to 0$。展开式 (3.11) 随即由 (3.13) 以及特征值的极小极大刻画得到。 □

引理 3.5。 设 r_ε 为式 (3.10)中定义的双线性型。

(i) 若 $N \geq 3$，则

$$r_\varepsilon(\varphi,\psi) = -\varepsilon^N \mathcal{L}_{x_0,\Sigma}(\varphi,\psi) + o(\varepsilon^N) \quad as\ \varepsilon \to 0,$$

对所有 φ， $\psi \in E(\lambda_n)$，其中 $\mathcal{L}_{x_0,\ \Sigma}$ 定义见 (1.8)。

(ii) 若 $N = 2$ 且 $\Sigma = B_1$，则

$$r_\varepsilon(\varphi,\psi) = -\varepsilon^2\pi\Big(2\nabla\varphi(x_0)\cdot\nabla\psi(x_0) - (\lambda_n - 1)\varphi(x_0)\psi(x_0)\Big) + o(\varepsilon^2) \quad as\ \varepsilon \to 0,$$

for all $\varphi, \psi \in E(\lambda_n)$.

证明。 若 $N \geq 3$，根据引理 3.3 和 [FLO25、定理 5.6 和引理 3。6] (另见引理 2.4 和 (2.3))，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-N} r_\varepsilon(u,u) = -\mathcal{L}_{x_0,\Sigma}(u,u) \quad \text{for all } u \in E(\lambda_n).$$

只需利用双线性即可得出结论 (i)：

$$r_\varepsilon(\varphi,\psi) = \frac{1}{4}\Big(r_\varepsilon(\varphi+\psi,\varphi+\psi) - r_\varepsilon(\varphi-\psi,\varphi-\psi)\Big),$$

$$\mathcal{L}_{x_0,\Sigma}(\varphi,\psi) = \frac{1}{4}\Big(\mathcal{L}_{x_0,\Sigma}(\varphi+\psi,\varphi+\psi) - \mathcal{L}_{x_0,\Sigma}(\varphi-\psi,\varphi-\psi)\Big), \tag{3.14}$$

对所有 φ， $\psi \in E(\lambda_n)$。

如果 $N = 2$ 且 $\Sigma = B_1$，由引理 3.3, [FLO25、命题 6.3], 以及 [FLO25、引理 3.6] （另见（2.3）），可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2} r_\varepsilon(u,u) = -\pi\left(2\left|\nabla u(x_0)\right|^2 - (\lambda_n(\Omega) - 1)u^2(x_0)\right) \quad \text{for all } u \in E(\lambda_n).$$

根据上述双线性性，结论（ii）随即得到。 □

至此，定理 1.3 和 1.6 的证明是直接的。

定理 *1.3* 和 *1.6*的证明。 证明结合了命题3.2、引理 3.4 和定理3.5。 □

现在我们可以证明定理 1.5。

定理 *1.5* 的证明。 首先，我们回顾在球形孔洞情形下，$U_{B_1,\ \nabla\varphi(x_0)\cdot\boldsymbol{\nu}}$的证明中推导出的 [FLO25，引理 6 中的极限扭转函数的显式表达式。1] 更准确地说，对所有 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^N$，我们有

$$U_{B_1,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu}}(x) = -\frac{1}{N-1}|x|^{-N}\boldsymbol{b}\cdot x.$$

因此，

$$\tau_{\mathbb{R}^N\setminus B_1}(\partial B_1, \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu}) = \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} |\nabla U_{B_1,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu}}|^2\,\mathrm{d}x = \frac{\omega_N}{N-1}|\boldsymbol{b}|^2,$$

从而

$$\mathcal{L}_{x_0,B_1}(\varphi,\varphi) = \omega_N\left(\frac{N}{N-1}|\nabla\varphi(x_0)|^2 - (\lambda_n-1)\varphi^2(x_0)\right), \quad \text{for all } \varphi \in E(\lambda_n).$$

因此，结论由（3.14）得到。 □

我们以定理1.4的证明结束本节，该定理涉及特征函数与其在扰动特征空间上的投影之差的能量的渐近行为。

定理 *1.4* 的证明。 令我们固定 $\varphi \in E(\lambda_n)$，使得 $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1$。首先，我们注意到$f_\varepsilon^\varphi := P_\varepsilon(\varphi) - \Pi_\varepsilon^n P_\varepsilon(\varphi)$ 弱解

$$\begin{cases} -\Delta f_\varepsilon^\varphi + f_\varepsilon^\varphi = \lambda_n f_\varepsilon^\varphi + \lambda_n \Pi_\varepsilon^n P_\varepsilon(\varphi) + \lambda_n U_\varepsilon^\varphi + \Delta(\Pi_\varepsilon^n P_\varepsilon(\varphi)) - \Pi_\varepsilon^n P_\varepsilon(\varphi), & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} f_\varepsilon^\varphi = 0, & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

如果我们将两边乘以 f_ε^φ，并在 Ω_ε 上分部积分，就得到

$$\|f_\varepsilon^\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \lambda_n \|f_\varepsilon^\varphi\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \lambda_n \int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon^\varphi f_\varepsilon^\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta(\Pi_\varepsilon^n P_\varepsilon(\varphi)) - \Pi_\varepsilon^n P_\varepsilon(\varphi) + \lambda_n \Pi_\varepsilon^n P_\varepsilon(\varphi)) f_\varepsilon^\varphi\,\mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

证明的其余部分分为四个步骤。

步骤 1： 我们声称

$$\sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|f_\varepsilon^\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^N) \quad \text{as } \varepsilon\to 0. \tag{3.16}$$

为了推导出（3.16），我们证明（3.15）右侧的每一项都是 $o(\varepsilon^N)$，其中 $\varepsilon\to 0$，且关于 φ一致。根据（3.5）和定理2.2，可以立即看出，这对第一项成立；由柯西-施瓦茨不等式可知，对第二项也成立。至于（3.15）中的最后一项，设 $\{\varphi^\varepsilon_{n+i-1}\}_{i=1,\dots,m}$ 是 $\mathcal{E}^n_\varepsilon$ 的 $L^2(\Omega_\varepsilon)$-正交归一特征基，于是可以写成

$$\Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi) = \sum_{i=1}^m a^\varepsilon_i \varphi^\varepsilon_{n+i-1}, \quad \text{with} \quad \sum_{i=1}^m |a^\varepsilon_i|^2 = \|\Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

我们有

$$-\Delta(\Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi)) + \Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi) - \lambda_n \Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi) = \sum_{i=1}^m a^\varepsilon_i(\lambda^\varepsilon_{n+i-1}-\lambda_n)\varphi^\varepsilon_{n+i-1}$$

因此

$$\begin{aligned}\| -\Delta(\Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi)) + \Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi) - \lambda_n \Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &= \sum_{i=1}^m |a^\varepsilon_i|^2 |\lambda^\varepsilon_{n+i-1}-\lambda_n|^2\\ &\le \Big(\max_{i=1,\dots,m} |\lambda^\varepsilon_{n+i-1}-\lambda_n|^2\Big)\|\Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\\ &\le \Big(\max_{i=1,\dots,m} |\lambda^\varepsilon_{n+i-1}-\lambda_n|^2\Big)\|P_\varepsilon(\varphi)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)},\end{aligned}$$

这里我们还用到了 Π^n_ε 是一个正交投影。另一方面，根据（3.9）和引理2.2 可得

$$\sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|P_\varepsilon(\varphi)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le 2(1+\omega(\varepsilon)) = O(1) \quad \text{as } \varepsilon\to 0.$$

此外，定理1.3 意味着

$$\max_{i=1,\dots,m} |\lambda^\varepsilon_{n+i-1}-\lambda_n| = O(\varepsilon^N) \quad \text{as } \varepsilon\to 0.$$

对（3.15）中的最后一项应用柯西-施瓦茨不等式，并将上述估计与（3.5）结合，可得

$$\left|\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta(\Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi)) - \Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi) + \lambda_n \Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi)) f^\varphi_\varepsilon \,\mathrm{d}x\right| = o(\varepsilon^N) \quad \text{as } \varepsilon\to 0,$$

关于 φ一致成立。这就完成了断言（3.16）的证明。

步骤 2： 我们断言

$$\sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|P_\varepsilon(\varphi) - \Pi^n_\varepsilon\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^N) \quad \text{as } \varepsilon\to 0. \tag{3.17}$$

我们可以将 $\Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi)$ 和 $\Pi^n_\varepsilon\varphi$ 写成

$$\Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi) = \sum_{i=1}^m a^\varepsilon_i \varphi^\varepsilon_{n+i-1} \quad \text{and} \quad \Pi^n_\varepsilon\varphi = \sum_{i=1}^m b^\varepsilon_i \varphi^\varepsilon_{n+i-1},$$

从而

$$\begin{aligned}\|\Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi) - \Pi^n_\varepsilon\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &= \sum_{i=1}^m \lambda^\varepsilon_{n+i-1}(a^\varepsilon_i - b^\varepsilon_i)^2 \le \lambda^\varepsilon_{n+m-1}\|\Pi^n_\varepsilon P_\varepsilon(\varphi) - \Pi^n_\varepsilon\varphi\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\\ &\le \lambda^\varepsilon_{n+m-1}\|U^\varphi_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)},\end{aligned}$$

其中我们还用到了以下事实： Π_ε^n 是一个正交投影，以及 P_ε的定义。因此，由定理2.2 可得

$$\sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|\Pi_\varepsilon^n P_\varepsilon(\varphi)-\Pi_\varepsilon^n\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^N) \quad \text{as } \varepsilon\to 0,$$

结合式（3.16），可得式（3.17）。

步骤 3： 我们断言

$$\sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \left\| P_\varepsilon(\varphi) - \frac{\Pi_\varepsilon^n\varphi}{\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}\right\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^N) \quad \text{as } \varepsilon\to 0. \tag{3.18}$$

按照上一步的论证，可得估计

$$\left\|\Pi_\varepsilon^n\varphi - \frac{\Pi_\varepsilon^n\varphi}{\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}\right\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le \frac{\lambda^\varepsilon_{n+m-1}}{\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}\left|\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}-1\right|^2$$

对每个 $\varphi\in E(\lambda_n)$，满足$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1$。另一方面，式（3.17）和定理 2.2 给出

$$\begin{aligned}\left|\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}-1\right| &\le \left|\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}-1\right| = \left|\int_{\Omega_\varepsilon}(\Pi_\varepsilon^n\varphi-\varphi)(\Pi_\varepsilon^n\varphi+\varphi)\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_\varepsilon}\varphi^2\,\mathrm{d}x-1\right|\\ &\le \|\varphi-\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\|\varphi+\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+\int_{\Sigma_\varepsilon}\varphi^2\,\mathrm{d}x\\ &\le 2\Big(\|P_\varepsilon(\varphi)-\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+\|U_\varepsilon^\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\Big)+\int_{\Sigma_\varepsilon}\varphi^2\,\mathrm{d}x = o(\varepsilon^{N/2})\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0$时，关于 $\varphi\in E(\lambda_n)$ 满足$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)=1}$一致成立。将上述两个估计与式（3.17）结合，最终得到式（3.18）。

步骤 4： 我们断言

$$\sup_{\substack{\varphi\in E(\lambda_n)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}=1}} \left|\left\|\varphi-\frac{\Pi_\varepsilon^n\varphi}{\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}\right\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} - \|U_\varepsilon^\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right| = o(\varepsilon^N) \quad \text{as } \varepsilon\to 0. \tag{3.19}$$

事实上，

$$\begin{aligned}&\left\|\varphi-\frac{\Pi_\varepsilon^n\varphi}{\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}\right\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} - \|U_\varepsilon^\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\\ &\qquad = \left(P_\varepsilon(\varphi)-\frac{\Pi_\varepsilon^n\varphi}{\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}, P_\varepsilon(\varphi)-\frac{\Pi_\varepsilon^n\varphi}{\|\Pi_\varepsilon^n\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}+2U_\varepsilon^\varphi\right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)},\end{aligned}$$

因此（3.19）由柯西-施瓦茨不等式推出，同时考虑到（3.18）和定理 2.1。定理 1.4 的结论最终由（3.19）和定理 2.4得出。□

4. Splitting of double eigenvalues

本节致力于证明定理 1.1。因此，我们假设 $\Sigma = B_1$。

定理 *1.1*的证明。 根据推论 1.7，对于每个 $x\in\Omega$ 和 $i,\ j=1,\ \ldots\ldots,\ m$ 我们有

$$\varepsilon^{-N}\big(\lambda_{n+i-1}(\Omega_\varepsilon^{x,B_1})-\lambda_{n+j-1}(\Omega_\varepsilon^{x,B_1})\big) = \gamma_j^x-\gamma_i^x+o(1) \quad \text{as } \varepsilon\to 0, \tag{4.1}$$

其中，$\{\gamma_i^x:\ i=1、2、\ldots\ldots、m\}$是双线性型 $\mathcal{B}_x$在 $E(\lambda_n)$ 上的特征值，该双线性型定义于（1.9）中；等价地，固定 $E(\lambda_n)$ 的 $L^2(\Omega)$-标准正交基 $\{\varphi_{n+i-1}:\ i=1、2、\ldots\ldots、m\}$后，$\{\gamma_i^x:\ i=1、2、\ldots\ldots、m\}$是以下实对称矩阵的特征值（按降序排列）

$$B_x := \Big(\mathcal{B}_x(\varphi_{n+i-1},\varphi_{n+j-1})\Big)_{1\le i,j\le m}.$$

一旦我们证明了4.1，结论便可直接得出

$$\Gamma=\{x\in\Omega:\gamma_1^x=\gamma_2^x=\cdots=\gamma_m^x\} \text{ is relatively closed in } \Omega \text{ and } \dim_{\mathcal{H}}\Gamma\le N-1. \tag{4.2}$$

为证明命题4.2，我们首先注意到，实对称方阵的特征值彼此相等，当且仅当该矩阵是单位矩阵的倍数。因此，$x \in \Gamma$ 当且仅当

$$\mathcal{B}_x(\varphi_n, \varphi_n) = \mathcal{B}_x(\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1}) = \cdots = \mathcal{B}_x(\varphi_{n+m-1}, \varphi_{n+m-1}).$$

因此

$$\Gamma = \{x \in \Omega : g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_m(x)\}$$

其中

$$g_i(x) := \frac{N}{N-1}|\nabla\varphi_{n+i-1}(x)|^2 - (\lambda_n - 1)\varphi^2_{n+i-1}(x) \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

根据经典正则性结果，例如参见 [Mor58], 这些特征函数 φ_n，φ_{n+1}，……，φ_{n+m-1} 在 Ω 中是解析的。因此这些函数

$$x \mapsto g_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

在 Ω 中是解析的。这首先意味着 Γ 在 Ω 中相对闭。此外，众所周知，在 $\mathbb{R}^N$的连通开子集上，任何不恒为零的实解析函数的零点集的豪斯多夫维数小于或等于 $N-1$：文献中称之为 洛亚谢维奇分层定理，例如参见 [KP02，定理 6.3。3] 以及 [Mit20，命题 3]。因此，若 $g_1 - g_2 \not\equiv 0$ 在 Ω 中，则

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Gamma) \le \dim_{\mathcal{H}}(\{x \in \Omega : g_1(x) - g_2(x) = 0\}) \le N - 1,$$

从而完成了断言（4.2）的证明。总之，因此只需证明 at

$$g_1(x) - g_2(x) \neq 0 \quad \text{for some } x \in \Omega. \tag{4.3}$$

我们通过反证法证明（4.3）。为此，我们假设

$$\frac{N}{N-1}|\nabla\varphi_n(x)|^2 - (\lambda_n - 1)\varphi_n^2(x) = \frac{N}{N-1}|\nabla\varphi_{n+1}(x)|^2 - (\lambda_n - 1)\varphi_{n+1}^2(x) \tag{4.4}$$

对每个 $x \in \Omega$。证明的其余部分旨在说明这将导致矛盾 .

Let

$$u := \varphi_n + \varphi_{n+1} \quad \text{and} \quad v := \varphi_n - \varphi_{n+1},$$

从而（4.4）可写为

$$\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) = (\lambda_n - 1)\,\frac{N-1}{N}\,u(x)v(x) \quad \text{for all } x \in \Omega. \tag{4.5}$$

此外，u、$v \in E(\lambda_n)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中正交，并且属于 $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，见 [Win10]。因此$uv \in H^1(\Omega)$。此外，对任意 $\varphi \in C^\infty(\Omega)$，$u\varphi \in H^1(\Omega)$ 以及 $v\varphi \in H^1(\Omega)$；因此，我们可以用 u 检验其满足的方程，并用 $v\varphi$ 检验 v 所满足的方程，从而得到 $u\varphi$。

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi)v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)\varphi\,\mathrm{d}x &= (\lambda_n - 1)\int_\Omega uv\varphi\,\mathrm{d}x,\\
\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla\varphi)u\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)\varphi\,\mathrm{d}x &= (\lambda_n - 1)\int_\Omega uv\varphi\,\mathrm{d}x;
\end{aligned}$$

求和并利用（4.5），得到

$$\int_\Omega \Big(\nabla(uv)\cdot\nabla\varphi + uv\varphi\Big)\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{2(\lambda_n - 1)}{N} + 1\Big)\int_\Omega uv\varphi\,\mathrm{d}x \quad \text{for all } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.6}$$

由稠密性 由 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的……，我们得出上述恒等式对所有 $\varphi \in H^1(\Omega)$ 均成立，即 u v 满足

$$\begin{cases} -\Delta(uv) + uv = \Lambda_n uv, & \text{in } \Omega,\\ \partial_{\boldsymbol{\nu}}(uv) = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

在弱意义下，其中

$$\Lambda_n := \frac{2}{N}(\lambda_n - 1) + 1.$$

任取函数 u 的一个节点域 ω，即 ω 是 $\Omega \setminus \mathcal{N}_u$ 的一个连通分支，其中$\mathcal{N}_u = \{x \in \Omega: u(x) = 0\}$ 是 u 的节点集。不失一般性，我们假设 $u > 0$ 在 ω 上。考虑空间

$$\mathcal{H}_\omega = \{w \in H^1(\omega) : \mathsf{P}_0 w \in H^1(\Omega)\},$$

其中

$$\mathsf{P}_0 w = \begin{cases} w, & \text{in } \omega, \\ 0, & \text{in } \Omega \setminus \omega, \end{cases}$$

是 w 在 Ω 中的平凡延拓。我们注意到， $\mathcal{H}_\omega$ 是 $H^1(\omega)$ 的闭子空间，因此它是一个希尔伯特空间，其标量积与 $H^1(\Omega)$ 相同。此外，我们断言

$$\text{if } w \in H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega) \text{ and } w(x) = 0 \text{ for every } x \in \mathcal{N}_u, \text{ then } w|_\omega \in \mathcal{H}_\omega. \tag{4.7}$$

为了证明这一断言，我们仿照 [Bre11，定理 9。17] 并考虑一个函数 $G \in C^1(\mathbb{R})$，使得

$$|G(t)| \le |t| \quad \text{for all } t \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad G(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } |t| \le 1, \\ t, & \text{if } |t| \ge 2. \end{cases}$$

对于某个 $w \in H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$，满足 $w = 0$ 在 $\mathcal{N}_u$ 上，我们引入函数序列

$$w_k : \omega \to \mathbb{R}, \quad w_k(x) := \frac{1}{k} G(k w(x)).$$

容易验证 $w_k \in H^1(\omega)$ 且 $w_k = 0$ 在 $\mathcal{N}_u$ 的某个开邻域内。因此 $\mathsf{P}_0 w_k \in H^1(\Omega)$，即 $w_k \in \mathcal{H}_\omega$。此外，仿照 [Bre11，定理 9。17], 可知 $w_k \to w|_\omega$ 在 $H^1(\omega)$ 中，当 $k \to \infty$ 时。因此， $w|_\omega \in \mathcal{H}_\omega$，从而证明了断言（4.7）。特别地，（4.7）保证

$$u|_\omega \in \mathcal{H}_\omega \quad \text{and} \quad uv|_\omega \in \mathcal{H}_\omega.$$

Let

$$\Lambda_1(\omega) := \min \left\{ \mathcal{R}_\omega(w) \colon w \in \mathcal{H}_\omega \setminus \{0\} \right\},$$

其中

$$\mathcal{R}_\omega(w) := \frac{\displaystyle\int_\omega (|\nabla w|^2 + w^2)\, \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\omega w^2 \, \mathrm{d}x}.$$

根据标准的极小化论证， $\Lambda_1(\omega)$可由某个函数 $w_0 \in \mathcal{H}_\omega \setminus \{0\}$ 取得，使得 $w_0 \ge 0$属于 ω；此外，这样的极小化子 w_0 必然满足

$$\int_\omega (\nabla w_0 \cdot \nabla \varphi + w_0 \varphi)\, \mathrm{d}x = \Lambda_1(\omega) \int_\omega w_0 \varphi \, \mathrm{d}x \quad \text{for every } \varphi \in \mathcal{H}_\omega, \tag{4.8}$$

并且，根据强最大值原理， $w_0 > 0$ 属于 ω。同样可以标准地证明，任何满足$w \in \mathcal{H}_\omega \setminus \{0\}$ 使得 $\mathcal{R}_\omega(w) = \Lambda_1(\omega)$的函数都求解变分方程（4.8），且在 Ω 中要么为 $w > 0$，要么为 $w < 0$；此外，若 w_1、$w_2 \in \mathcal{H}_\omega \setminus \{0\}$ 满足 $\mathcal{R}_\omega(w_1) = \mathcal{R}_\omega(w_2) = \Lambda_1(\omega)$，则对于某个$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$有 $w_2 = c w_1$。

取 $\varphi = u|_\omega$ 在（4.8）中，用 u 乘以 $\mathsf{P}_0 w_0$对其所满足的方程进行测试，并作差可得

$$(\Lambda_1(\omega) - \lambda_n) \int_\omega w_0 u \, \mathrm{d}x = 0,$$

因此

$$\Lambda_1(\omega) = \lambda_n.$$

此外，将满足 u 的方程乘以 $\mathrm{P}^0 u|_\omega$ 并进行测试，可得 $\mathcal{R}_\omega\big(u|_\omega\big) = \lambda_n$。

由于 $uv|_\omega \in \mathcal{H}_\omega$，我们可以用 4.6 式乘以 $\mathsf{P}_0\big(uv|_\omega\big) \in H^1(\Omega)$ 进行测试，从而得到 $\Lambda_n = \mathcal{R}_\omega\big(uv|_\omega\big)$。由此可知

$$\lambda_n = \Lambda_1(\omega) \le \mathcal{R}_\omega\big(uv|_\omega\big) = \Lambda_n = \frac{2}{N}(\lambda_n - 1) + 1 \tag{4.9}$$

由于 $\lambda_n > 1$ 根据（1.7），若 $N \ge 3$，上述不等式便直接导出矛盾。若 $N = 2$，则有 $\Lambda_n = \lambda_n$，因此（4.9）意味着 $\mathcal{R}_\omega\big(uv|_\omega\big) = \Lambda_1\ (\omega) = \lambda_n = \mathcal{R}_\omega\big(u|_\omega\big)$；这意味着$uv|_\omega = cu|_\omega$对于某个常数 $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，因此 $v \equiv c$在 ω中，这与以下事实矛盾： $-\Delta v + v = \lambda_n v$在 ω 中，且 $\lambda_n \ne 1$。 □

5. Numerical exploration of the general case

我们以简短的数值探索作为本文的收尾，补充诺伊曼情形下得到的理论结果。具体而言，我们考察孔洞并非球形时重特征值的行为。本节旨在初步展示在超出本文分析范围的情形下可能出现的现象，并为未来研究提出一些可能的方向。

在以下实验中，我们使用商业软件 MATLAB 的 PDE 工具箱计算特征值。所采用的数值方案为有限元法（FEM），基于三角形网格单元和线性基函数。各实验中使用的具体数值参数将在相应的小节中说明。

5.1. **验证实验。** 我们首先对数值方案进行验证。为此，我们考虑推论 1.2 中的设定。具体而言，我们考虑

$$\Omega = (-4, 4) \times (-2, 2) \subset \mathbb{R}^2 \tag{5.1}$$

and

$$\Sigma_\varepsilon^{x_0} = x_0 + \varepsilon B_1, \quad \text{where} \quad x_0 = (2.1, 0.1). \tag{5.2}$$

在此设定下，未扰动问题的特征值可以显式计算。我们有

$$\lambda_{m,n}(\Omega) = 1 + \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{m^2}{4} + n^2\right), \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

我们聚焦于前 10 个特征值，并按重数计数。具体而言，我们观察到

$$\lambda_{0,1} = \lambda_{2,0} \sim 1.616 \quad \text{and} \quad \lambda_{0,2} = \lambda_{4,0} \sim 3.467$$

重数为 2。

此时，取

$$\varepsilon = 2^{-i}, \quad i = 0, \dots, 7,$$

并将有限元的最大尺寸设为 $h = 0.05$，我们对未扰动和受扰动的偏微分方程分别数值求解特征值问题。结果汇总于图1。

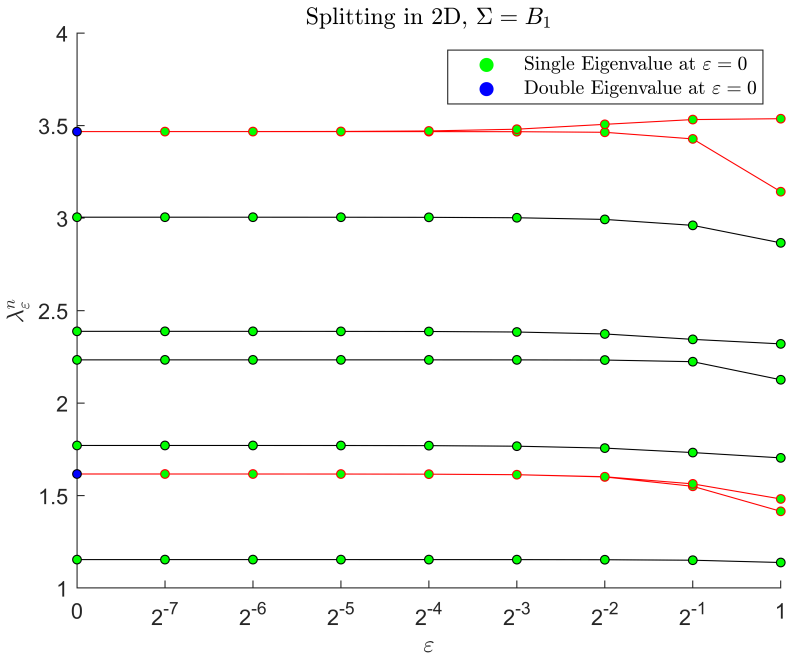


Figure 1. 情形 $\Sigma = B_1$ 下不同 ε 值对应的计算特征值。对于 $\varepsilon = 0$，我们得到未扰动问题的特征值。重特征值以蓝色标出。

如我们所见，在 $\varepsilon = 0$ 处重数为 2 的两个特征值（以蓝色标示）一旦 $\varepsilon > 0$，便分裂成不同的分支，正如推论1.2所预测的那样。请注意，尽管我们本可以将未扰动特征值的数值直接写死，但为了进一步确认求解器的精度，我们还是选择对其进行数值计算。

5.2. **二维非球形情形。** 现在我们转而研究一种理论结果未涵盖的情形。在 $\varepsilon = 0$ 处，问题的设定与上一小节所述相同：区域 Ω 为矩形（5.1），未扰动问题的特征值由（5.3）描述。我们还按照（x_0）中的方式设置孔洞中心 5.2。不过，在此情形下，Σ 为一个五角星，见图 2。具体而言，所选形状既非球形，也非凸形。

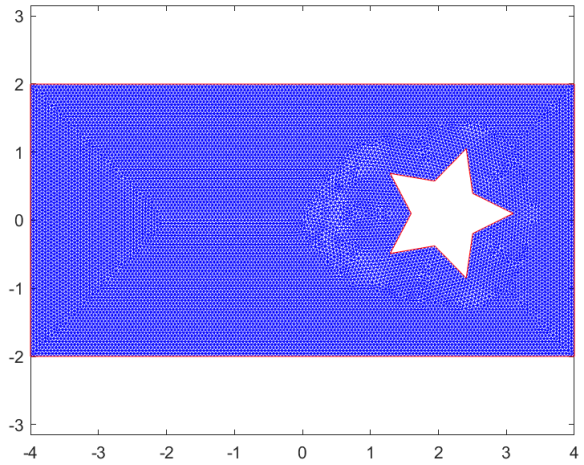


FIGURE 2. 第二次实验的设定。在此情形下，孔洞呈五角星形。这里可以看到数值求解器在情形 $\varepsilon = 1$ 下使用的有限元网格。

与前面一样，我们计算直径逐渐减小时扰动问题的特征值

$$\varepsilon = 2^{-i}, \quad i = 0, \dots, 7.$$

结果如图3所示。其行为与球形情形中观察到的非常相似，这表明非球形孔也应会发生分裂。

5.3. **三维非球形情形。** 最后，我们考虑一个三维情形。这一次，我们考虑盒状区域

$$\Omega = (-1, 1) \times (-2, 2) \times (-3, 3).$$

因此，未扰动问题的特征值满足公式

$$\lambda_{\ell,m,n}(\Omega) = 1 + \frac{\pi^2}{4}\left(\ell^2 + \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{9}\right), \quad \ell, m, n \in \mathbb{N}.$$

具体而言，谱中包含重数为 2 和 3 的特征值。在我们的实验中，我们将聚焦于

$$\begin{aligned} \lambda_{1,0,0} = \lambda_{0,2,0} = \lambda_{0,0,3} &= 1 + \frac{\pi^2}{4} \sim 3.467, \\ \lambda_{1,0,1} = \lambda_{0,2,1} &\sim 3.741, \\ \lambda_{1,1,0} = \lambda_{0,1,3} &\sim 4,084. \end{aligned}$$

孔洞形状 Σ 在本例中为一个空心圆柱，其外半径比为 R，内半径比为 $r = R/2$，高度为 $h = 2R$。我们选取基准值 $R = 0.5$，并令

$$\varepsilon = 0.05 \cdot i, \quad i = 0, \dots, 10.$$

采用线性缩放而非前几幅图中的对数缩放，是由有限元格式所决定的。事实上，若对 ε 使用对数缩放，孔洞对于网格而言就会太小，无法被网格识别

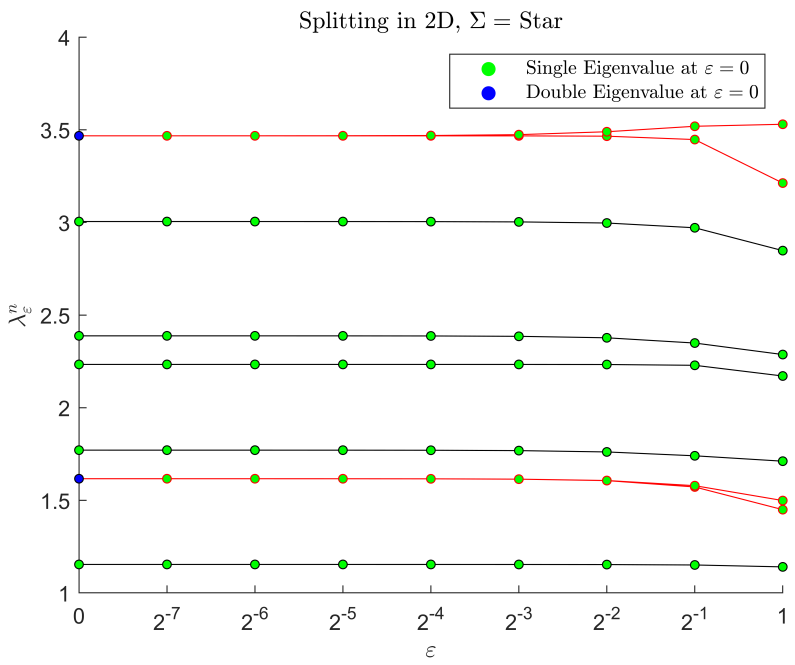


FIGURE 3. 在 ε 取不同值时计算得到的特征值，其中 Σ 为五角星的情形。对于 $\varepsilon = 0$，我们给出了未扰动问题的特征值。重特征值以蓝色标示。

，难以采用合理的网格尺寸。本实验所用穿孔区域的示例见图 4。结果见图 5。我们观察到，不仅二重特征值发生了分裂，三重特征值也分裂成了三个不同分支。有趣的是，三重特征值的分裂比二重特征值的分裂明显得多。

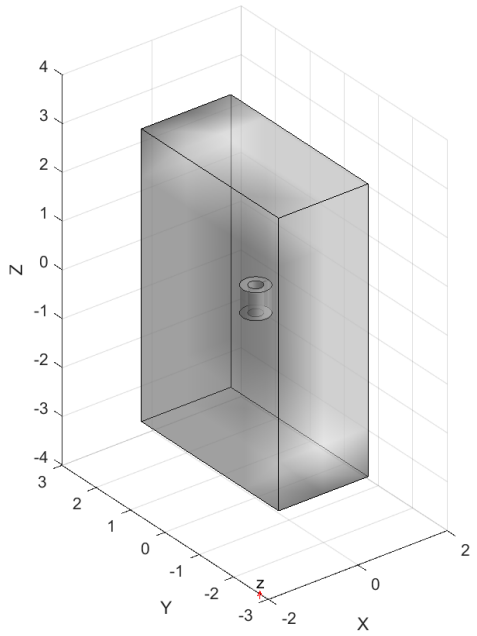


FIGURE 4. 本数值实验中使用的穿孔区域。在此情形下， $\varepsilon = 0.2$ 5.

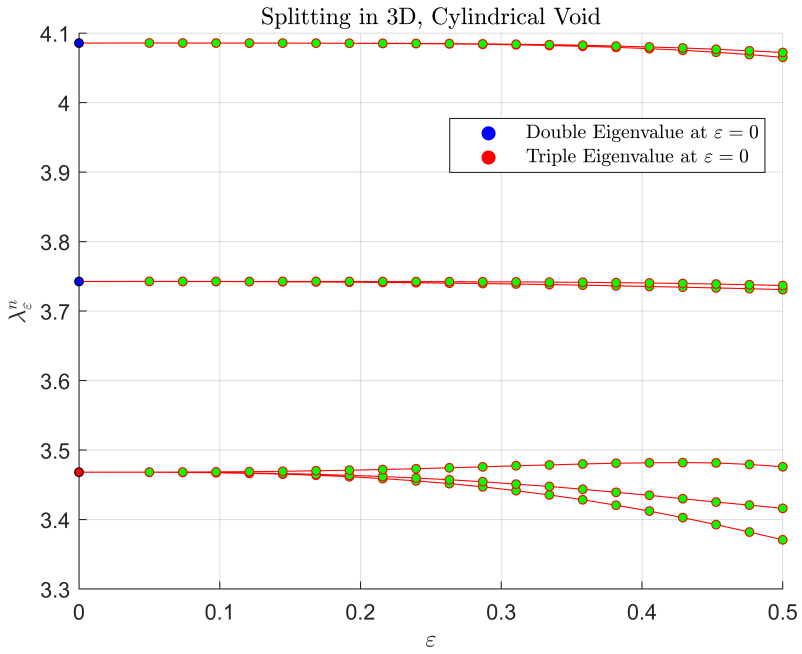


FIGURE 5. 当 Σ 为一个空心圆柱时，不同 ε 值对应的计算特征值。对于 $\varepsilon = 0$，未扰动问题存在一些重特征值。二重特征值以蓝色标示，三重特征值以红色标示。

APPENDIX A. THE DIRICHLET SETTING

在本简短附录中，我们考察狄利克雷情形。利用以下文献中的结果：[AFHL19、ALM24、FNO21]，我们重新得到狄利克雷拉普拉斯算子的已知分裂性质，例如参见[Flu95、Dab21]。我们考虑有界连通开集 Ω 中拉普拉斯算子的特征值问题 $\subseteq \mathbb{R}^N$，即

$$(D) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

已知问题（D）有一列特征值 $\{\lambda_k^{\mathrm{D}}(\Omega)\}_{k\in\mathbb{N}}$。我们将 $E(\lambda_k^{\mathrm{D}}(\Omega))$ 记为对应于特征值 $\lambda_k^{\mathrm{D}}(\Omega)$ 的特征空间。

对于某个固定的 $n \in \mathbb{N}$，令 $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 为 $\lambda_n^{\mathrm{D}}(\Omega)$ 的重数，从而

$$\lambda_{n-1}^{\mathrm{D}}(\Omega) < \lambda_n^{\mathrm{D}}(\Omega) = \cdots = \lambda_{n+m-1}^{\mathrm{D}}(\Omega) < \lambda_{n+m}^{\mathrm{D}}(\Omega).$$

令 $\{u_{n+i-1}\}_{i=1,\dots,m}$ 为 $E(\lambda_n^{\mathrm{D}}(\Omega))$ 的相应特征基，并假设其关于 $L^2(\Omega)$ 正交归一。令

$$\mathcal{N}(\lambda_n^{\mathrm{D}}(\Omega)) = \{x \in \Omega : u_{n+i-1}(x) = 0 \text{ for all } i = 1,\dots,m\}$$

为基中所有特征函数 $\{u_{n+i-1}\}_{i=1,\dots,m}$ 的节点集之交。注意，$\mathcal{N}(\lambda_n^{\mathrm{D}}(\Omega))$ 不依赖于基的选择，其勒贝格测度为零，且豪斯多夫维数至多为 $N-1$。

对于任意紧集 $K \subset \Omega$ 和 $u \in H_0^1(\Omega)$，我们记

$$\mathrm{cap}_\Omega(K,u) := \min\left\{\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x : v \in H_0^1(\Omega) \text{ and } v-u \in H_0^1(\Omega\setminus K)\right\}$$

t u-容量（相对于 Ω）以及相应的容量势 $V_{K,u} \in H_0^1(\Omega)$，即达到上述最小值的唯一函数。取 $u = \eta_K$，其中某个函数 $\eta_K \in C_c^\infty(\Omega)$ 满足
t帽 $\eta_K \equiv 1$ 在 K的一个邻域中，我们恢复经典容量概念 $\mathrm{cap}_\Omega(K) := \mathrm{cap}_\Omega(K, \eta_K)$。我们回顾以下结果，出自 [ALM22，定理 1。9]，另见 [Cou95]。

定理 A.1 ([ALM22])。设 $N \geq 2$。设 $K \subset \Omega$ 是一个紧集，满足 容量$_\Omega(K) = 0$，并设$\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是 Ω 的一个紧子集族，且该族集中于 K，即：对于任意开集

$U \subseteq \mathbb{R}^N$满足 $K \subset U$，存在 $\varepsilon_U > 0$使得 $K_\varepsilon \subset U$对所有 $\varepsilon < \varepsilon_U$成立。那么，对于每个 $i = 1$、……、m，

$$\lambda^{\mathrm{D}}_{n+i-1}(\Omega \setminus K_\varepsilon) = \lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega) + \mu^\varepsilon_i + o(\chi^2_\varepsilon) \quad as\ \varepsilon \to 0,$$

其中 $\{\mu^\varepsilon_i\}_{i=1,\dots,m}$ 是双线性型的特征值

$$r_\varepsilon(u,v) := \int_\Omega \nabla V_{K_\varepsilon,u} \cdot \nabla V_{K_\varepsilon,v}\,\mathrm{d}x - \lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega) \int_\Omega V_{K_\varepsilon,u} V_{K_\varepsilon,v}\,\mathrm{d}x \tag{A.1}$$

定义于 $u, v \in E(\lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega))$，且

$$\chi^2_\varepsilon := \sup\left\{ \mathrm{cap}_\Omega(K_\varepsilon, u) \colon u \in E(\lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega)),\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}.$$

设 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ 是任意有界非空开集，且 $\varepsilon_0 > 0$ 如（1.4）中所述。对于每个 $x_0 \in \Omega$ 和 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，令 $\Sigma^{x_0}_\varepsilon$由（1.3）定义。由 [AFHL19，命题 1。5] 可知，对于每个$u \in E(\lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega))$ 和 $x_0 \in \Omega$，

$$\mathrm{cap}_\Omega(\overline{\Sigma^{x_0}_\varepsilon}, u) = u^2(x_0)\,\mathrm{cap}_\Omega(\overline{\Sigma^{x_0}_\varepsilon}) + o(\mathrm{cap}_\Omega(\overline{\Sigma^{x_0}_\varepsilon})) \quad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{A.2}$$

此外，由 [AFHL19，推论 A。2]可得

$$\left\| V_{\overline{\Sigma^{x_0}_\varepsilon},u} \right\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}x = o(\mathrm{cap}_\Omega(\overline{\Sigma^{x_0}_\varepsilon})) \quad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{A.3}$$

若 $N = 2$， [AFHL19，命题 1。6] 给出

$$\mathrm{cap}_\Omega(\overline{\Sigma^{x_0}_\varepsilon}) = \frac{2\pi}{|\log\varepsilon|} + o\left(\frac{1}{|\log\varepsilon|}\right) \quad \text{as } \varepsilon \to 0, \tag{A.4}$$

而如果 $N \geq 3$，则有

$$\mathrm{cap}_\Omega(\overline{\Sigma^{x_0}_\varepsilon}) = \varepsilon^{N-2}\,\mathrm{cap}_{\mathbb{R}^N}(\overline{\Sigma}) + o(\varepsilon^{N-2}) \quad \text{as } \varepsilon \to 0, \tag{A.5}$$

鉴于 [FNO21，定理 2。14] 以及 [ALM24，附录A], 其中 $\mathrm{cap}_{\mathbb{R}^N}(\Sigma)$ 是 Σ的标准牛顿容量，即

$$\mathrm{cap}_{\mathbb{R}^N}(\overline{\Sigma}) = \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \colon u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N),\ u \equiv 1 \text{ in a neighborhood of } \overline{\Sigma} \right\}.$$

令 r_ε 为（A.1）中的双线性型，其中 $K_\varepsilon = \Sigma^{x_0}_\varepsilon$对于某个 $x_0 \in \Omega$。结合（A.2）、（A.3）、（A.4）和（A.5），可得

$$\begin{aligned} r_\varepsilon(u,u) &= u^2(x_0)\mathrm{cap}_\Omega(\overline{\Sigma^{x_0}_\varepsilon}) + o(\mathrm{cap}_\Omega(\overline{\Sigma^{x_0}_\varepsilon})) \\ &= \begin{cases} \dfrac{2\pi\, u^2(x_0)}{|\log\varepsilon|} + o\left(\dfrac{1}{|\log\varepsilon|}\right), & \text{if } N = 2, \\ \varepsilon^{N-2}\,\mathrm{cap}_{\mathbb{R}^N}(\overline{\Sigma})\,u^2(x_0) + o(\varepsilon^{N-2}), & \text{if } N \geq 3, \end{cases} \end{aligned}$$

如 $\varepsilon \to 0$。由于根据双线性，$r_\varepsilon(u,\ v) = \frac{1}{4}\big(r_\varepsilon(u+v,\ u+v) - r_\varepsilon(u-v,\ u-v)\big)$，因此我们推出，如$\varepsilon \to 0$，

$$r_\varepsilon(u,v) = \begin{cases} |\log\varepsilon|^{-1}\mathcal{Q}_{x_0,\Sigma}(u,v) + o(|\log\varepsilon|^{-1}), & \text{if } N = 2, \\ \varepsilon^{N-2}\mathcal{Q}_{x_0,\Sigma}(u,v) + o(\varepsilon^{N-2}), & \text{if } N \geq 3, \end{cases} \tag{A.6}$$

对每个 u，$v \in E(\lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega))$，其中

$$\mathcal{Q}_{x_0,\Sigma} : E(\lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega)) \times E(\lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega)) \to \mathbb{R}, \tag{A.7}$$

$$\mathcal{Q}_{x_0,\Sigma}(u,v) = \begin{cases} 2\pi\, u(x_0)v(x_0), & \text{if } N = 2, \\ \mathrm{cap}_{\mathbb{R}^N}(\overline{\Sigma})\,u(x_0)v(x_0), & \text{if } N \geq 3. \end{cases}$$

定理 A.1 可改述为以下更精确的版本。

命题 A.2. 对于任意 $x_0 \in\Omega$，设 $\{\zeta^{x_0,\Sigma}_i\}_{i=1,\dots,m}$ 为二次型 $\mathcal{Q}_{x_0,\Sigma}$ （定义见 (A.7)）的特征值（按升序排列）。那么，当 $\varepsilon \to 0$，

$$\lambda^{\mathrm{D}}_{n+i-1}(\Omega^{x_0,\Sigma}_\varepsilon) = \begin{cases} \lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega) + |\log\varepsilon|^{-1}\zeta^{x_0,\Sigma}_i + o\left(|\log\varepsilon|^{-1}\right), & \textit{if } N = 2, \\ \lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega) + \varepsilon^{N-2}\zeta^{x_0,\Sigma}_i + o\left(\varepsilon^{N-2}\right), & \textit{if } N \geq 3, \end{cases}$$

对于每个 $i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$。

证明。 结论由定理A.1 结合（A.6）–（A.7）可得。 □

计算特征值 $\zeta^{x_0,\ i}{}^{\Sigma}$，即可得到以下结果。

定理A.3。设 $N \geq 2$。

（i）对于每个 $x_0 \in \Omega$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，我们有：

$$\lambda^{\mathrm{D}}_{n+m-1}(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma}) = \begin{cases} \lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega) + |\log\varepsilon|^{-1} 2\pi \left(\sum_{i=1}^m u^2_{n+i-1}(x_0)\right) + o\left(|\log\varepsilon|^{-1}\right), & \text{if } N=2, \\ \lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega) + \varepsilon^{N-2}\,\mathrm{cap}_{\mathbb{R}^N}(\overline{\Sigma}) \left(\sum_{i=1}^m u^2_{n+i-1}(x_0)\right) + o\left(\varepsilon^{N-2}\right), & \text{if } N \geq 3, \end{cases}$$

并且，对于每个 $i = 12, \ldots, m-1$,

$$\lambda^{\mathrm{D}}_{n+i-1}(\Omega_\varepsilon^{x_0,\Sigma}) = \begin{cases} \lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega) + o\left(|\log\varepsilon|^{-1}\right), & \text{if } N=2, \\ \lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega) + o\left(\varepsilon^{N-2}\right), & \text{if } N \geq 3. \end{cases}$$

（ii）对于每个 $x_0 \in \Omega\backslash\mathcal{N}$（$\lambda^{\mathrm{D}}_n$（$\Omega$），存在 $\varepsilon_{\mathrm{s}} = \varepsilon_{\mathrm{s}}$（$x_0$）$> 0$，使得特征值 $\lambda^{\mathrm{D}}_{n+m-1}$（$\Omega_\varepsilon^{x_0\ \Sigma,}$）为单特征值，并且特征值 $\{\lambda^{\mathrm{D}}_{n+i-1}$（$\Omega_\varepsilon^{x_0\ \Sigma,}$（$x_0$）$\}_{i=1}^{m-1}$ 的重数对于所有 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{s}}$ 都严格低于 m。

证明。 观察到A.2 号命题中的 $m \times m$ 实对称矩阵

$$\Big(u_{n+i-1}(x_0) \cdot u_{n+j-1}(x_0)\Big)_{1\leq i,j\leq m}$$

的特征值为 0（重数为 $m-1$）和 $\sum_{i=1}^m u^2_{n+i-1}(x_0)$（重数为 1）。 □

作为定理 A.3的直接推论，我们得到关于二重狄利克雷特征值分裂的以下泛性结果。

推论*A.4.* 设 $N \geq 2$ 和 $m = 2$. 存在一个相对闭集 $\mathcal{N} \subseteq \Omega$，使得 $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{N} \leq N-1$，并且满足以下性质：对于每个 $x_0 \in \Omega\backslash\mathcal{N}$，存在 $\varepsilon_{\mathrm{s}} = \varepsilon_{\mathrm{s}}(x_0) > 0$，使得对于所有 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{s}}$，$\lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega_\varepsilon^{x_0\ B_1}, (x_0)) < \lambda^{\mathrm{D}}_{n+1}(\Omega_\varepsilon^{x_0\ B_1}, (x_0))$。特别地，对于每个 $x_0 \in \Omega \setminus \mathcal{N}$，只要 ε 充分小，$\lambda^{\mathrm{D}}_n(\Omega_\varepsilon^{x_0\ B_1},)$ 和 $\lambda^{\mathrm{D}}_{n+1}(\Omega_\varepsilon^{x_0\ B_1},)$ 都是单特征值。

Acknowledgements

V. Felli 和 R. Ognibene 是 GNAMPA-INdAM 的成员。R. Ognibene 获得了欧洲研究委员会（ERC）的部分资助，资助来自欧盟的地平线2020项目 ERC VAREG——“自由边界正则性的变分方法”（资助协议编号：853404）。V. Felli 获得了欧盟“下一代欧盟”计划资助的 MUR-PRIN 项目（编号：20227HX33Z）“非线性现象中的模式形成”的支持。作者谨向 B. Velichkov 教授致谢，感谢他提供的有益讨论。

References

[AFHL19] L. Abatangelo、V. Felli、L. Hillairet和 C. Léna，移除小容量集后的谱稳定性及其在阿哈罗诺夫–玻姆算子中的应用，*J. Spectr. Theory* **9** 第2期（2019年），379–427。MR 3950657。https://doi.org/10.4171/JST/251。[ALM22] L. Abatangelo、C. Léna和 P. Musolino，穿孔区域中Dirichlet–拉普拉斯算子的重特征值分支，*J. Funct. Anal.* **283** 第 12 2022 109718 4489278 https://doi.org/ 期（），论文编号。MR。。10.1016/j.jfa.2022.109718
[ALM24] L. Abatangelo、C. Léna和 P. Musolino，广义容量的渐近行为及其在特征值扰动中的应用：高维情形，*Nonlinear Anal.* **238**（2024年），论文编号113391，34页。MR 4648492。https://doi.org/10.1016/j.na.2023.113391。[AO24] L. Abatangelo 和 R. Ognibene，一类奇异摄动问题中Dirichlet–拉普拉斯算子特征值的精确行为，*SIAM J. Math. Anal.* **56** 第 1 2024 474 500 4686384 https://doi.org/10.1137/ 期（），–。MR。。[Alb 23M1564444
75] J. H. Albert，椭圆型偏微分方程单特征值的一般性，*Proc. Amer. Math. Soc.* **48**（1975年），413–418。MR 385934。https://doi.org/10.2307/2040275。[Alb78] J. H. Albert，椭圆型偏微分算子特征函数的一般性质，（），–。MR。https://doi.org/10.2307/1997812。[BW80] D. D. Bleecker 和 L. C. Wilson *SIAM J. Math. Anal.*，黎曼流形谱的分裂，第 **11** 5 1980 813 818 586909（）期，–。MR。https://doi.org/10.1137/0511072。[BGI24] L. Brasco、M. González M. Ispizua *Commun. Contemp.* 和，一种Steklov版本的扭 *Math.* **26** 7 2024 2350037, 43 4760553 https://doi.org/10.1142/S0219199723500372 转刚度，第（）期，论文编号。MR。。

[Bre11] H. Brezis、 *Functional analysis、 Sobolev spaces and partial differential equations、 Universitext*, 施普林格，纽约，2011年。MR 2759829。[BLMN25] D. Bucur、 R. S. Laugesen、 E. Martinet和 M. Nahon，球冠并不总能使球面上的诺伊曼特征值最大化，*Geom. Funct. Anal.* **35** 第5 2025 1313 1345 4990469 https://doi.org/ 期（），–。MR。。[10.1007/s00039-025-00721-1
CKL16] Y. Chitour、 D. Kateb和 R. Long， $\mathbb{R}^{\mu}$中带狄利克雷边界条件的斯托克斯系统谱的一般性质，*Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire* **33**第1期（2016年），119–167。MR 3436429。https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2014.09.007。[Cou95] G. Courtois，带孔流形的谱， *J. Funct. Anal.* **134** 第1期（1995年），194–221。MR 1359926。https://doi.org/10.1006/jfan.1995.1142。[LdC12] M. Lanza de Cristoforis，区域中带小孔的简单诺伊曼特征值：一种泛函分析方法， *Rev. Mat. Complut.* **25** 第2 2012 369 412 2931418 https: 期（），–。MR。。[//doi.org/10.1007/s13163-011-0081-8
Dab21] A. Dabrowski，一种使拉普拉斯算子谱分裂的局部区域扰动，第（）期，–。MR。。*Complex Var.* FGMP[、23] M. M. Fall、*Elliptic Equ.* **66** 8 2021 1425 1437 4296810 https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1767084
M. Ghimenti和 A. M. Micheletti，分数阶拉普拉斯算子特征值的一般性质， A. Pistoia第8期（2023年），论文编号233，17页。MR 4645031。 *Calc. Var. Partial Differential Equations* **62** 。https://doi.org/10.1007/s00526-023-02574-8FLO[、25] V. Felli和L. Liverani，带小孔区域中诺伊曼拉普拉斯算子的定量谱稳定性， R. Ognibene第 *J. Funct. Anal.* **288** 期，论文编号。MR。。6 2025 110817, 59 4848582 https://doi.org/10. FNO[、21] V. Felli和1016/j.jfa.2024.110817
B. Noris，具有移动混合边界条件的拉普拉斯算子特征值：消失的狄利克雷区域情形， R. Ognibene第1期（2021年），论文编号12，33页。MR 4201635。 *Calc. Var. Partial Differential Equations* **60** 。 https://doi.org/10.1007/s00526-020-01878-3FNOS[、23] V. Felli、B. Noris和 R. Ognibene，具有多个汇聚极点的阿哈罗诺夫–玻姆算子的定量谱稳定性， G. Siclari， *J. Eur. Math. Soc.*（）。可见于*Online First* 2023 https://doi.org/10.4171/ 。[FR23] V. Felli 和jems/1632
G. Romani *Calc.*，带小孔区域中多调和算*Var. Partial Differential Equations* **62** 4 2023 128, 36 4568178子的扰动特征值，第（）期，论文编号。MR。。https://doi.org/10.1007/s00526-023-02467-w 。[FRS25] V. Felli、P. Roychowdhury和 G. Siclari，罗宾拉普拉斯算子的定量谱稳定性， *Preprint*（2025年）。可见于https://arxiv.org/abs/2504.05994。[Flu95] M. Flucher，带小孔区域上的狄利克雷特征值逼近， *J. Math. Anal. Appl.* **193** 第1期（1995年），169–199。MR 1338506。 https://doi.org/10.1006/jmaa.1995.1228。[GMP24] M. Ghimenti、 A. M. Micheletti和A. Pistoia，扰动下分数阶拉普拉斯算子特征值重数保持性注记， *Nonlinear Anal.* **245** （2024年），论文编号113558，7页。MR 4744963。https://doi.org/10.1016/j.na.2024.113558。[Jim15] S. Jimbo，带细管状孔区域中的拉普拉斯算子特征值，*J. Elliptic Parabol. Equ.* **1**（2015年），137–174。MR 3403416。 https://doi.org/10.1007/BF03377373。[KP02] S. G. Krantz 和H. R. Parks，第二版，*A primer of real analytic functions* *Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]* ¨ 2002 Birkhauser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿， https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8134-0。MR 1916029。[。11] A. LaurainL NS S. Nazarov、 J. Sokolowski和，三维曲边界的奇异扰动：诺伊曼拉普拉斯算子的谱， *Z. Anal. Anwend.* **30** 第2 2011 145 180 2792999 https: 期（），–。MR。。[LZ//doi.org/10.4171/ZAA/1429
22] P. Luzzini 和 M. Zaccaron *J. Differential*，*Equations* **334** 2022 342 367 4448300 https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.06.023
电磁腔中介电常数变化的若干结果，（），–。MR。。[Mic72a
] A. M. Micheletti ` *Ann. Scuola*，有界区域族的度量*Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)* **26** 1972 683 694 377306
及特征值的一般性质，（），–。MR。[Mic72b] A. M. Micheletti，拉普拉斯算子谱的扰动，与场的变化有关，*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)* **26**（1972年），151–169。MR 367480。[Mic73] A. M. Micheletti，变分型椭圆算子谱的扰动，与场的变化有关， *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **97** （1973 267 281 336109 https://doi.org/10.1007/ ），–。MR。。[MicBF02414915
76] A. M. Micheletti，变分型椭圆算子谱的扰动，与场的变化有关。II， *Ricerche Mat.* **25** 第2期（1976年），187–200。MR 481619。[Mit20] B. S. Mityagin，实解析函数的零点集， *Math. Notes* **107** 第3期（2020年），529–530（英文）。https://doi.org/10.1134/S0001434620030189。[Mor58] C. B. Morrey、 Jr.，关于解析非线性椭圆偏微分方程组解的解析性。I. 内部解析性， *Amer. J. Math.* **80** （1958 198 218 106336 https://doi.org/10. ），–。MR。。[Ogn2307/2372830
25] R. Ognibene，关于狄利克雷极限下罗宾特征值的渐近行为，第（）期，–。MR。*Comm. Partial Differential Equations*。**50** 9 2025 1174 1210 4951693
https://doi.org/10.1080/03605302.2025.2536098Oza[，带小球形诺伊曼边界区域的谱，第（）期，–。MR。83] S. OzawaRT *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 和[，剧烈扰动区域上的位**30** 2 1983 259 277 722497
势与散射理论，（），–。MR。75] J. Rauch 。

[SW99] S. A. Sauter 和 R. Warnke，含有微小几何细节的区域上的延拓算子与逼近， *East-West J. Numer. Math.* **7** 第 **1** 期（1999 年），61–77。MR 1683936。[Tey99] M. Teytel，重特征值有多罕见？， *Comm. Pure Appl. Math.* **52** 第 8 期（1999 年），917–934。MR 1686977。 https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0312(199908)52:8<917::AID-CPA1>3.3.CO;2-J。[Uhl72] K. Uhlenbeck，拉普拉斯算子的特征函数， *Bull. Amer. Math. Soc.* **78**（1972 年），1073–1076。MR 319226。 https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1972-13117-3。[Uhl76] K. Uhlenbeck，特征函数的一般性质， *Amer. J. Math.* **98** 第 4 期（1976 年），1059–1078。MR 464332。https://doi.org/10.2307/2374041。[CdV86] Y. Colin de Verdière，

Comment. Math. 关于拉普拉斯算子

Helv. **61** 2 1986 254 270 856089
第一个非零特征值的重数，期（），页码 – 。MR 。 https://doi.org/10.1007/BF02621914。[Win10] P. Winkert，非线性椭圆型纽曼边值问题的 - 估计，期（），页码 – 。MR 。 。

Veronica Felli and Roberto Ognibene
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università degli Studi di Milano–BicoccaVia Cozzi 55, 20125 Milano, Italy
Email address: veronica.felli@unimib.it, roberto.ognibene@unimib.it

Lorenzo LiveraniDepartment of Mathematics
FAU Erlangen-NürnbergCauerstr. 11,
91058 Erlangen (Germany)*Email address*:
lorenzo.liverani@fau.de