arXiv:2601.13135v1 [math.GN] 19 Jan 2026

平面中弧连通紧子集集合的描述复杂性

GABRIEL DEBS 和 JEAN SAINT RAYMOND

Abstract. 我们计算了 $\boldsymbol{R}^2$中所有紧弧连通子集构成的集合的精确描述类。结果表明，该描述类严格高于解析集和余解析集的经典$\mathbf{\Sigma}^1_1$ 与$\mathbf{\Pi}^1_1$ 类，但严格低于 $\mathbf{\Pi}^1_2$ 类；后者正是 $\boldsymbol{R}^3$中所有紧弧连通子集构成的集合的精确描述类。

若 X 是任意波兰空间，则根据定义很容易得出，所有 X的紧弧连通子集构成的集合 $\mathcal{KC}_{\rm arc}(X)$，是空间 $\mathcal{K}(X)$的一个 $\mathbf{\Pi}^1_2$ 子集；该空间由X的所有紧子集构成，并赋予 Vietoris拓扑。此外，Ajtai 和 Becker 独立证明（见[4, 定理 37.11），集合 $\mathcal{KC}_{\rm arc}(\boldsymbol{R}^3)$实际上是 $\mathbf{\Pi}^1_2$-完备的。

本文旨在计算集合$\mathcal{KC}_{\rm arc}(\boldsymbol{R}^2)$的精确描述复杂性。更一般地，给定任意空间 X，我们考察集合 $\mathcal{C}_{\rm arc}(X)$，它由 X的所有弧连通闭子集构成，并将其视为空间 $\mathcal{F}(X)$的子集；该空间由 X的所有闭子集构成，并赋予 Effros博雷尔结构。

所谓平面波兰空间，是指 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个子空间，其上的诱导拓扑为波兰拓扑；换言之，它是 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个 $\boldsymbol{G}_\delta$ 子集。我们的第一个主要结果如下：

定理A.对于任意平面波兰空间 X，集合 $\mathcal{C}_{\rm arc}(X)$ 是一个 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ 集。

其中，$\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ 表示由 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集经过苏斯林运算 $\mathcal{A}$ 得到的所有集合的补集所构成的类。我们回顾一下，Ajtai 和 Becker 的工作已经表明，集合$\mathcal{KC}_{\rm arc}(\boldsymbol{R}^2)$ 不是 $\mathbf{\Pi}^1_1$ （见 [4]）。

定理A的证明依赖于 [3] 中的近期结果。此外，作为该证明的副产品，我们还得到以下性质。该性质是平面拓扑所特有的，因为在 $\boldsymbol{R}^3$中，相应的结论已不再成立。

定理B.对于任意平面弧连通波兰空间 X，存在一个博雷尔映射，它将 X 中任意一对不同点 (x, y) 映射到一条弧 $J \subset X$，其端点为 x 和 y。

事实上，定理A的证明依赖于定理B的一个参数化版本，其中空间 X 被替换为 X 的一个可变闭子集，并附有一个来自辅助空间的编码。后一结果（定理 6.9）的精确陈述需要若干预备知识，详情请参阅第 6 节。

第二个主要结果是，如果 $X = \boldsymbol{R}^2$ 或单位正方形 $\mathbb{I}^2$，那么定理A给出的复杂度界是最佳的。更确切地说，我们证明：

定理 C。集合 $\mathcal{C}_{\rm arc}(\mathbb{I}^2)$ 是 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Pi}^1_1)$-完备的。

我们还在第 6 节给出了若干情形，在这些情形中，集合 $\mathcal{C}_{\rm arc}(X)$ 所属的类严格低于类 $\mathbf{\Pi}^1_2$。

2020 AMS Subject Classification. 54H05，03E15。*Key words and phrases.* 博雷尔集，弧连通，连续统，平面拓扑，苏斯林运算。

值得注意的是，类 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ 早已出现在超空间 $\mathcal{F}(X)$ 的复杂度计算中。我们列出 [2] （定理 6.3 和 6.4 ）中的以下两个结果，其中 $\mathcal{C}_{\rm loc}(X)$ 表示 X 的所有局部连通闭子集组成的集合:

a) 对任意波兰空间 X ，集合 $\mathcal{C}_{\rm loc}(X)$ 是一个 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ 集合。
b) 存在一个波兰空间 $X \subset \mathbb{I}^3$ ，使得集合 $\mathcal{C}_{\rm loc}(X)$ 是 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Pi}^1_1)$-完备的 e
然而请注意，与 $\mathcal{C}_{\rm arc}(X)$ 的情形不同，若 X 是紧空间，则集合 $\mathcal{C}_{\rm loc}(X)$ 是博雷尔集（[2]命题 6.1）。

1. Some descriptive preliminaries

在本文中，“空间” 始终指某个波兰空间的子集，不过，在某些情况下，我们会在最初给定的空间上引入额外的（可能不可分的）度量或拓扑。但我们所考虑的所有描述性概念，始终都指从波兰拓扑继承而来的博雷尔结构。

我们将讨论各种经典的以及较不经典的描述类。对于这样的类 $\mathbf{\Gamma}$ ，我们用 $\check{\mathbf{\Gamma}}$ 表示其对偶类，即由 $\mathbf{\Gamma}$中集合的所有补集构成的类，并用 $\Delta(\mathbf{\Gamma}) = \Delta(\check{\mathbf{\Gamma}})$表示自对偶类 $\mathbf{\Gamma} \cap \check{\mathbf{\Gamma}}$。于是，对于任意空间 X（它是某个波兰空间 $\tilde{X}$的子空间），我们用 $\mathbf{\Gamma}(X)$表示 $\tilde{}$的所有子集构成的集合，其中每个子集都是 X 上某个属于 $\mathbf{\Gamma}$的 X 子集的迹。如果类 $\mathbf{\Gamma}$ 在博雷尔同构下封闭（本文中始终如此），那么 $\mathbf{\Gamma}(X)$ 便不依赖于所选的环境空间 X。注意，一般而言，$\mathbf{\Gamma}(X)$ 是 $\mathcal{P}(X) \cap \mathbf{\Gamma}(X)$ 的真子集，而 $\Delta(\mathbf{\Gamma})(X)$ 是 $\Delta(\mathbf{\Gamma}(X))$ 的真子集。

对于任意类 $\mathbf{\Gamma}$ ，我们还考虑通过苏斯林运算 $\mathcal{A}$从 $\mathbf{\Gamma}$ 得到的类 $\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$，并用 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Gamma})$表示其对偶类。由于可数并和可数交都是运算 $\mathcal{A}$的特例，由运算 $\mathcal{A}$ 的幂等性可知，类 $\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$ 和 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Gamma})$ 对可数并和可数交封闭。

按照逻辑学家的记法，我们用 $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 和 $\mathbf{\Pi}^1_n$ 表示经典射影类，并令$\mathbf{\Delta}^1_n = \Delta(\mathbf{\Sigma}^1_n) = \Delta(\mathbf{\Pi}^1_n)$。特别地， $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 和 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 分别表示解析集类和余解析集类， $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 表示 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集的投影类， $\mathbf{\Pi}^1_2$ 表示其对偶类。

我们回顾一下，若映射 $f : X \to Y$ 满足-可测，则称其为 $\mathbf{\Gamma}$；如果任意开子集的逆像都属于 $\mathbf{\Gamma}(X)$。此外，若 $\mathbf{\Gamma}$对可数并和交封闭，则任意博雷尔子集的逆像都属于 $\mathbf{\Gamma}$。由此可知，对于任意类 $\mathbf{\Gamma}$， $\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$-可测与 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Gamma})$-可测这两个概念是相同的。另外，由于 $\mathbf{\Sigma}^1_1 = \mathcal{A}(\mathbf{\Delta}^1_1)$ 且 $\mathbf{\Pi}^1_1 = \check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Delta}^1_1)$，我们有以下性质:

命题 1.1。 任意 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ （分别为 $\mathbf{\Pi}^1_1$）集在一个 $\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$-可测映射下的逆像属于 $\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$ （分别属于 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Gamma})$）。

特别地， $f \circ g$ 与博雷尔映射 g右复合后， f 这一 $\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$-可测映射仍是 $\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$-可测的；并且如果 $\mathbf{\Gamma}$ 在博雷尔同构下封闭，那么 f 与博雷尔映射 h 左复合后，$h \circ f$ 也仍是 $\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$-可测的。

与我们的研究尤其相关的是双解析性的概念，下面回顾一下。

定义 1.2。给定空间 X, Y:
X 的子集 A 称为在 X 中双解析 的，如果 A 属于$\mathbf{\Sigma}^1_1(X) \cap \mathbf{\Pi}^1_1(X)$。
映射 $f : X \to Y$ 称为双解析 的，如果 f 是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ *(*等价地， $\mathbf{\Pi}^1_1$*)*-可测的
因此， X 的双解析子集集合为 $\Delta(\mathbf{\Sigma}^1_1(X)) = \Delta(\mathbf{\Pi}^1_1(X))$，而 X 的博雷尔子集集合为 $\Delta(\mathbf{\Sigma}^1_1)(X) = \Delta(\mathbf{\Pi}^1_1)(X)$。注意，根据解析集分离定理，若 X 是解析的，则双解析与博雷尔这两个概念一致。事实上，双解析性这一概念主要在非解析空间，尤其是余解析空间的框架下才有意义。此外，在

后一语境中，博雷尔集（映射）的许多性质也适用于双解析集（映射）；接下来我们将陈述其中两个所需的性质。

命题 1.3。设 X 和 Y 为余解析空间。任意部分双解析映射 $f\colon D\to Y$，只要满足 $D\subset X$，就可以延拓为双解析映射 $f\colon D\to Y$，其定义域为余解析集 $D\subset D\subset X$。

命题 1.3 的证明沿用标准论证。注意，若此外 f 的图是某个余解析集 $Z\subset X\times Y$ 的子集，那么对映射 $(Id_D,\ f)\colon D\to Z$ 应用前述结果，就可以要求映射 f 的图也包含在 Z 中。

我们还需要第二个性质，它不那么初等，是经典事实的双解析版本：具有紧截面的博雷尔集的投影仍是博雷尔集（这是阿尔谢宁－国贵定理的一个特例）。这个结果或许并不新，但由于没有找到已知的参考文献，我们在此略述证明的基本论证。

定理 1.4。对于任意空间 X 以及任意标准博雷尔空间 Y，若 B 是 $X\times Y$ 的双解析子集，且在 Y 中具有紧截面，则 P 在 X 上的 B 的投影是双解析的，映射 $\Phi\colon x\mapsto B(x)$ 从 P 到 $\mathcal{K}(Y)$ 是双解析的，并且存在一个双解析选择（即存在一个双解析映射 $\varphi\colon P\to Y$，使得对于所有 $x\in P$，$\varphi(x)\in B(x)$）。

证明。我们将 X 嵌入波兰空间 $\tilde X$ 中，并在 $\tilde X\times Y$ 中固定一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 子集 A 和一个 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 子集 C，使得 $B=A\cap(X\times Y)=C\cap(X\times Y)$。我们还在 Y 上固定一个有界距离 d 以及拓扑的一个基 $(U_s)_{s\in S}$，其中 $S\subset 2^{<\omega}$ 是一棵树，并且对于所有 $s\in S$，$\operatorname{diam}(U_s)<2^{-|s|}$，且当 $s\neq\emptyset$ 时 $U_s\subset U_{s^*}$（其中 s^* 是 s 对 $|s|-1$ 的限制）；并令 $\tilde S_n=S\cap 2^n$。

令 $\pi\colon X\times Y\to X$ 为典范投影。那么对所有 $s\in S$，集合 $P_s=\pi(A\cap(X\times U_s))$ 是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$，因此 $A_n=\bigcup_{s\in S_n}P_s\times U_s$ 也为 $\mathbf{\Sigma}^1_1$，且 $\tilde A=\bigcap_{n\in\omega}\downarrow A_n$ 也为 $\mathbf{\Sigma}^1_1$。此外

$$(x,y)\in\tilde A\iff\forall n,\ \exists s\in S_n,\ y_n\in U_s,\ (x,y_n)\in A$$

并且由于 B 的每个截面 $B(x)$ 都是紧致的，因此 $B\subset A$。

于是，根据类 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 的归约性质，我们可以固定一个由两两不相交的 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合构成的序列 $(C_n)_{n\in\omega}$，使得对所有 n，$C_n\subset(\tilde X\times Y)\setminus A_n$ 且 $\tilde C:=\bigcup_{n\in\omega}C_n=\bigcup_{n\in\omega}(\tilde X\times Y)\setminus A_n=(X\times Y)\setminus A$。因此 $C'_n:=\bigcup_{m\le n}C_m\subset(X\times Y)\setminus A_n$ 且 $C''_n:=C\setminus C'_n=\bigcup_{m>n}C_m$，故 C'_n 是 C 的一个双解析子集，并且 $A_n\subset C_n=C''_n\cup C$。

注意，根据定义，对所有 $s\in 2^n$：

$$P_s\subset\{x\in\tilde X:\ \{x\}\times U_s\subset A_n\}\subset\{x\in\tilde X:\ \{x\}\times U_s\subset\tilde C_n\}:=R_s$$

且 R_s 是 $\mathbf{\Pi}^1_1$。再由类 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 的归约性质，我们可以找到一个双解析集 $P_s\subset Q_s\subset R_s$，使得 $R_s\times U_s\subset C_n$。

因此，$B\subset\bigcap_n\bigcup_{s\in S_n}Q_s\times U_s$ 和 $P=\pi(B)\subset X\cap\bigcap_n\bigcup_{s\in S_n}Q_s$。反之，若 $x\in X\cap\bigcap_n\bigcup_{s\in S_n}Q_s$，则由 $B(x)$ 的紧致性可知 $x\in P$，这证明了 P 是 X 的双解析子集。于是，对于 Y 中的任意开集 V，由于 $B\cap(X\times V)$ 在 $X\times Y$ 中是双解析的，集合 $\pi(B\cap(X\times V)$ 是 X 的双解析子集。因此，映射 $\Phi\colon P\to\mathcal{K}(Y)$ 是双解析的；如果 $\mathbf{c}\colon\mathcal{K}(Y)\to Y$ 是 $\mathcal{K}(Y)$ 上的任意博雷尔选择映射（即 $\mathbf{c}(K)\in K$ 对所有 $K\in\mathcal{K}(Y)$），那么 $\varphi=\mathbf{c}\circ\Phi$ 满足定理 1.4 的结论。□

1.5. 类 $\mathbf{\Sigma}$：我们用 $\mathbf{\Sigma}$ 表示包含类 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 和 $\mathbf{\Pi}^1_1$、且对可数并与可数交封闭的最小类；因此 $\mathbf{\Sigma}\subset\mathcal{A}(\mathbf{\Pi}^1_1)\cap\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Pi}^1_1)$。我们回顾以下经典结果：

定理 1.6. *(*Yankov - von Neumann*)* 对于乘积空间中的任意 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合 $A \subset X \times Y$，若 P 是 A 在 X 上的投影，则存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测映射 $f\colon P \to Y$，其图包含于 A。

最后，我们给出定理 1.6 的以下两个补充结果。

引理 1.7. 设 X 和 Y 是两个波兰空间，且 $\hat{}Y := Y \cup \{*\}$，其中 $* \notin Y$。设 D 是一个可数集，f 是一个从 X 到 $\hat{}Y^D$ 的 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数。若对每个 $x \in X$，集合 $\{d \in D\colon f_d(x) \neq *\}$ 都是无限集，则存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数 $f\colon X \to Y^\omega$，使得对所有 $x \in X$

$$\{f_d(x) : d \in D \text{ and } f_d(x) \neq *\} = \{\tilde{f}_n(x) : n \in \omega\}$$

证明。将 D 枚举为一个序列 $(d_k)_{k\in\omega}$，并对所有 $x \in X$，记 D_x 为可数无限集 $\{d \in D\colon f_d(x) \neq *\} = \{d \in D\colon f_d(x) \in Y\}$。然后，令 $\tilde{f}_n(x)$ 为带部分定义域的无限序列 $\big(f_{d_k}(x)\big)_{k\in D_x}$ 中的第 n^{th} 项。由此可知

$$Y \supset \{f_d(x) : d \in D \text{ and } f_d(x) \neq *\} = \{f_d(x) : d \in D_x\} = \{\tilde{f}_n(x) : n \in \omega\}$$

˜要证明 f 是 $\mathbf{\Sigma}$-可测的，我们必须证明对于所有 $n \in \omega$ 以及所有开集 $V \subset Y$，集合 $\tilde{f}_n^{-1}(V)$ 属于 $\mathbf{\Sigma}$。对于所有 $u \in \omega$，集合 $L_u = \{x \in X\colon f_{d_u}(x) \neq *\}$ 属于 $\mathbf{\Sigma}$，$L_u^V = \{x \in L_k\colon f_{d_u}(x) \in V\}$也属于 $\mathbf{\Sigma}$。那么集合 $\{x\colon \tilde{f}_n(x) \in V\}$ 等于

$$\bigcup_{u_1<u_2<\cdots<u_n=k} \Big(L_k^V \cap \bigcap\nolimits_{i\leq n} L_{u_i} \cap \bigcap\nolimits_{i\in k\setminus\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}} (X \setminus L_{u_i}) \Big)$$

它属于 $\mathbf{\Sigma}$。 □

引理 1.8。设 X 和 Y 是波兰空间，$* \notin Y$ 和 Z 是 $X \times Y$ 的解析子集。那么 $\hat{}$存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数 $f = X \to Y = Y \cup \{*\}$，使得 $(x, f(x)) \in Z$ 当且仅当 x 属于 Z 在 $\mathscr{X}$ 上的投影 $\pi(Z)$，且 $f(x) = * \iff x \notin \pi(Z)$。

证明。由定理 1.6 可知，存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数 $f\colon \pi(Z) \to Y$ 使得 $f(x) \in \{y \in Y\colon (x, y) \in Z\}$，只要 x 属于解析集 $\pi(Z)$ 即可。然后在余解析集 $X \setminus \pi(Z)$ 上用 $*$ 扩展 $f\hat{}$，便得到一个从 X 到 Y 的 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数。□

2. The arc-connection relation

本节简要介绍弧连接关系的主要概念和已知结果，具体而言，是关于平面中的弧连接关系；在下文中我们将广泛使用这些内容。更多详情请参阅 [3]。

2.1. 弧：通常，我们所说的弧 I 是指一个与单位区间同胚的紧空间 $\mathbb{I} = [0, 1]$。对于一条弧 I，我们用 $e(I)$ 表示其端点集合，并记作 $I = I \setminus e(I)$。某个空间 X 中的所有弧构成的集合 $\mathcal{J}(X)$，视为空间 $\mathcal{K}(X)$ 的子集时，是博雷尔集（事实上$\mathbf{\Pi}^0_3 = \boldsymbol{F}_{\sigma\delta}$），且映射 $e\colon \mathcal{J}(X)$ 到 $\mathcal{K}(X)$ 是博雷尔的（见 [1]）。

出于实际考虑，我们将把单点集 $\{a\}$ 视为一个以 a 为唯一端点的退化弧。关于弧的所有概念和记号都可平凡地推广到退化弧。若一个集合是弧或单点集，则称其为可能退化的弧，并记作*p.d.* 弧。$\hat{}$我们用 $\mathcal{J}(X)$ 表示所有可能退化的弧构成的集合。

如果 I 是弧，对于任意 $\{a, b\} \subset I$，我们将 I 中端点为 $\{a, b\}$的子弧记为 $I^{\{a,b\}}$。将任意弧 I 及任意一对 $\{a, b\} \subset I$ 映射为弧 $I^{\{a,b\}}$的映射是博雷尔的，因为其图：$\{(I, J) \in \mathcal{J}(X)^2\colon J \subset I$ 且 $e(J) = \{a, b\}\}$ 是博雷尔的。

2.2. 三叉树: 空间 X 中的一个简单三叉集 是 X 的一个紧子集 $T = J_0 \cup J_1 \cup J_2$，它是三条弧 J_i 的并，且对于所有 $i \neq j$， $J_i \cap J_j = \{c\}$ 都是单点集。弧 J_i在置换意义下唯一确定，被称为 T的分支，而 c 被称为 T的中心。

在本文中，我们不会考虑 Moore 最初在 [7], 中引入的更一般的三叉树 概念；此后，文中的“三叉树” 始终指“简单三叉集”。

由于所有弧的集合 $\mathcal{J}(X)$ 是 $\mathcal{K}(X)$ 的博雷尔子集，且 $\cup$ 和 $\cap$ 运算在 $\mathcal{K}(X)$ 上是博雷尔的，根据简单三叉集分解的几乎唯一性可知，若 X是波兰空间，则 X 中所有简单三叉集构成的集合 $\mathcal{T}(X)$ 是 $\mathcal{K}(X)$ 的博雷尔子集，并且映射$\mathbf{c}: \mathcal{T} \to X$ 将任意简单三叉集 T 映射到其中心，且该映射是博雷尔的。

2.3. 弧连通分支: 我们用 E_X 表示 X上的弧连通等价关系。若 X 是波兰空间，则 E_X 是解析的，因为它是以下博雷尔集合在 X^2 上的投影

$$B = \{\big((x,y),J\big) \in X^2 \times \hat{\mathcal{J}}(X):\ e(J) = \{x,y\}\}.$$

空间 X 中的任意弧连通分支 C 都是:

– 或者是一个单点集,

– 或者允许一一连续参数化 $\varphi: I \to C$，其中 I 是一个（闭集、开集、半开）区间 $\boldsymbol{R}$ 或单位圆，此时我们称 C 为一条曲线。

– 或者包含一棵三叉树，此时我们称 C 为一个三叉分支。

我们将 Θ^X 定义为 X中所有三叉分支的并集，并称之为三叉部分；若空间 X 满足 $\Theta^X = \emptyset$, 则称其为无三叉的 。如果空间 X 是波兰空间，那么等价关系 E_X 是解析的，因此每个三叉分支以及三叉部分都是解析的。注意，在 $\boldsymbol{R}^3$ 中存在具有非博雷尔弧连通分支的紧子集（见 [6]）。

2.4. 典范弧度量与弧拓扑: 给定任意度量空间 (X,d)，我们可以考虑映射 $\delta: X \times X \to [0,+\infty]$，定义如下:

$$\delta(x,y) = \inf\{\operatorname{diam}(H):\ H \text{ arc-connected s. t. } \{x,y\} \subset H \subset X\}$$

其中 $\inf \emptyset = \infty$。因此，如果 $x \neq y$ 属于同一个弧连通分支，那么

$$d(x,y) \leq \delta(x,y) = \inf\{\operatorname{diam}(J):\ J \in \mathcal{J}(X) \text{ s.t. } e(J) = \{x,y\}\} < \infty$$

如果没有t，则 $\delta(x,y) = \infty$。此外，按照约定，令 $\alpha + \infty = \infty$ 适用于任意 $\alpha \in [0,\infty]$ w e 具有 所有 $x,\ y,\ z \in X$

$$\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$$

因此，严格来说，δ 并不是 X上的距离，但 δ 在 X的任意弧连通分支上都诱导出一个距离。我们将 δ 称为由定义的典范弧伪度量$(X,\ d)$，并将其限制在 X 某个弧连通分支的任意子集 A 上所得的度量称为由 d定义在 A 上的典范弧度量。

所有有限半径的 δ-开球构成X上的可度量化拓扑 τ 的一个基；该拓扑比由 d定义的初始拓扑 t 更细。注意:

$$x = \lim_n x_n \text{ in } (X,\tau) \iff \begin{cases} \exists (J_n)_n \text{ in } \mathcal{J}(X,t):\ \forall n,\ e(J_n) = \{x, x_n\} \\ \text{and } \{x\} = \lim_n J_n \text{ in } \mathcal{K}(X,t) \end{cases}$$

因此，拓扑 τ 实际上可以直接由拓扑 t定义，我们称 τ 为由 t定义的典范弧拓扑。

我们强调，即使初始拓扑 t 是可分的，拓扑 τ 通常也不是。举例来说，若我们在 $\boldsymbol{R}^2$ 的单位圆中固定一个康托尔空间的副本 C，那么所有连接中心与 C中某个元素的射线之并，是一个弧连通紧空间 X。但是，如果 δ表示由欧几里得度量在 X 上定义的典范弧度量，那么对于 C中任意两个不同的元素 $a \neq b$， $\delta(a,\ b) \geq 1$。

典范伪度量 δ 最初是在 [3] 中为波兰平面空间 X引入的。但读者很容易验证，以下从 [3], 中提取的性质（我们不加证明地陈述）并不依赖这一额外假设。

定理 2.5. 设 δ 为由度量空间 (X,d) 定义的典范弧伪度量，并设 t 和 τ 分别为 X 上的 d-拓扑和 δ-拓扑。

(1) 若 (X,d) 完备，则 (X,δ) 完备；*(2)* $\mathcal{J}(X,t)=\mathcal{J}(X,\tau)$；*(3)* 对任意弧 $J\subset X$, d-直径$(J)=\delta$-直径(J)；*(4)* 对任意弧 $J\subset X$，$(J,t)=(J,\tau)$；*(5)* 所有有限半径的开 δ-球都是弧连通的，

注意，根据性质 (2)，(X,d) 和 (X,δ) 的弧连通子集相同，因此下列性质中对弧和弧连通性的指称没有歧义。

平面弧连接关系： 平面中弧连接关系的所有特定性质都源于平面拓扑的以下基本性质。

The理 2.6. (Moore) 平面上任意一族两两不相交的三叉树都是可数的。

特别地，任意平面集合至多有可数个三叉分支。

定义 2.7. </style}若 是某个空间(X,t)的典范弧拓扑，则 X的三叉树核 （记作 Σ^X） 是(X,t)中所有三叉树中心的集合的 τ-闭包。

以下定理综合概述了 [3]的主要结果。

定理 *2.8.* 设 *(X,t)* 是一个平面波兰空间，且 τ 是相应的弧拓扑。*a)* Σ^X是 τ-可分的，因此 *(*Σ^X*,* τ*)* 是一个波兰空间，且 Σ^X是 *(X,t)* 的博雷尔子集。*b)* 集合 $B=\{(x,J)\in X\times\mathcal{J}(X):\ J\subset X,\ e(J)=\{x,y\}$且 $J\cap\Sigma^X=\{y\}\}$是博雷尔集，并且对所有 $x\in X\setminus\Sigma^X$，*card(B(x))* ≤ 2。*c)* 等价关系 E_X 是博雷尔的。

注 2.9. 注意，在性质 b) 中，集合 B在 X上的投影是集合 $\Sigma'=\Theta^X\setminus\Sigma^X$。由于 B 是一个具有有限截面的博雷尔集合，因此它存在博雷尔一致化。因此，存在博雷尔映射 $\Psi:\Sigma'\to\mathcal{J}(X)$ 和 $\psi:\Sigma'\to\Sigma^X$，使得对所有 $x\in\Sigma'$，$e(\Psi(x))=\{x,\psi(x)\}$且 $\Psi(x)\cap\Sigma^X=\{\psi(x)\}$。

3. The partial operation $\bigvee$ on oriented arcs.

3.1. 定向弧： 定向弧是一个三元组 $\vec{I}=(I,\ a,\ b)$，其中 I（ $\vec{I}$ 的定义域 ）是一条弧，且由两个元素组成的集合 $e(I)=\{a,b\}$ 按照有序对 $(a,\ b)$ 排序。于是我们称 I 为一条连接 a 与 b 的弧，并定义：

$$dom\,(\vec{I})=I\ ;\ e(\vec{I})=(a,b)\ ;\ a=e_0(\vec{I})\text{ and }b=e_1(\vec{I})$$

因此， $e(I)$ 是 X 的一个二元素子集，而 $e(\vec{I})\in X^2$。我们将把翻转运算 $\mathfrak{f}$ 记作：它将任意定向弧 $\vec{I}=(I,\ a,\ b)$ 映射为弧 $\mathfrak{f}(\vec{I})=(I,\ b,\ a)$。

给定任意定向弧 $\vec{I}=(I,\ a,\ b)$，在 I 上定义关系如下：

$$x\leq_{\vec{I}}y\iff I^{\{a,x\}}\subset I^{\{a,y\}}\iff I^{\{y,b\}}\subset I^{\{x,b\}}$$

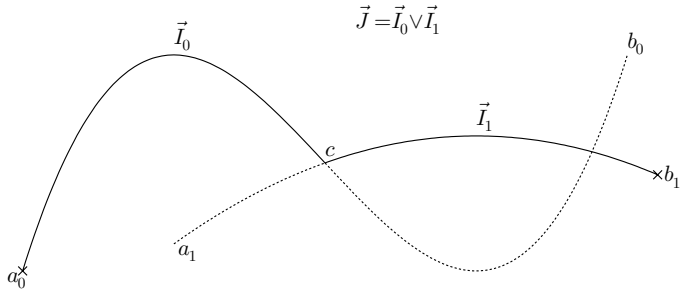
是一个全序，我们将相应的严格序记为$<_{\vec{I}}$，并称其为由 I定义在 I 上的全序 $\vec{\ }$ $\vec{\ }$。下文中，记号 I 总是默认假设$dom(\vec{I})=I$。此外，为简便起见，当 I 的方向没有歧义时，我们令$e_0(I)=e_0(\vec{I})$、 $e_1(I)=e_1(\vec{I})$，并将由 $\vec{I}$定义在 I 上的全序记为 $<_I$。

所有定向弧组成的集合 $\vec{\mathcal{J}}(X) = \{(I,\ a,\ b) \in \mathcal{J}(X) \times X^2 \colon\ e(I) = \{a,b\}\}$ 显然是博雷尔集。因此，集合 $\{(\vec{I},\ x,\ y) \in \vec{\mathcal{J}}(X) \times X^2 \colon\ x <_{\vec{I}} y\}$ 也是博雷尔集，而翻转运算 $\mathfrak{f}$ 是博雷尔的。

定义 3.2. 给定两条定向弧 $\vec{I}_0 = (I_0, a_0, b_0)$ 和 $\vec{I}_1 = (I_1, a_1, b_1)$，满足 $I_0 \cap I_1 \neq \emptyset$ 和 $a_0 \neq b_1$，我们定义定向弧:

$$\vec{I}_0 \vee \vec{I}_1 = (I, a_0, b_1) \text{ with } \begin{cases} I = I_0^{\{a_0,c\}} \cup I_1^{\{c,b_1\}} \\ \text{and} \\ c = \min_{<_{\vec{I}_0}} (I_0 \cap I_1) \end{cases}$$

FIGURE 1



$\vec{\ }$ $\vec{\ }$由前面的定义可直接得出，若 $I_0 \vee I_1$ 有定义，则

$$\mathrm{dom}(\vec{I}_0 \vee \vec{I}_1) \subset I_0 \cup I_1 \quad \text{and} \quad e(\vec{I}_0 \vee \vec{I}_1) = (a_0, b_1)$$

定义 3.3. *a)* 对于任意有限序列的定向弧 $(\vec{I}_m)_{m \leq n}$，我们归纳地定义其 e 定向的 弧:

$$\vec{J}_0 = \bigvee_0 \vec{I}_0 = \vec{I}_0 \quad \text{and} \quad \vec{J}_n = \bigvee_{m \leq n} \vec{I}_m = \vec{J}_{n-1} \vee \vec{I}_n.$$

b) 若 $(\vec{I}_n)_{n \in \omega}$ 是 $\vec{\mathcal{J}}(X)$ 中的一个无限序列，则称 $\vec{J} = \bigvee_{n \in \omega} \vec{I}_n$ 有定义，当且仅当对所有 n，$\vec{J}_n = \bigvee_{m \leq n} \vec{I}_m$ 都有定义，且 $\vec{J} =$ 极限 $\vec{J}_n$。

注记 3.4. a) 我们强调，$\bigvee$ 是一个偏运算，因此仅当其定义中的所有项都有定义时，$\vec{J}_n = \bigvee_{m \leq n} \vec{I}_m$ 才有定义，也就是说，对所有 $0 < m \leq n$：

$$J_{m-1} \cap I_m \neq \emptyset \quad \text{and} \quad e_1(\vec{J}_m) \neq e_0(\vec{J}_0)$$

若如此，则:

$$J_n \subset \bigcup_{m \leq n} I_m \qquad \text{and} \quad e(\vec{J}_n) = (e_0(\vec{I}_0), e_1(\vec{I}_n))$$

b) 若对所有 $0 < m \leq n$，$e_0(\vec{I}_m) = e_1(\vec{I}_{m-1}) \neq e_0(\vec{J}_0)$，则 $e_1(\vec{I}_{m-1}) \neq e_0(\vec{J}_m) = e_0(\vec{J}_0)$，且 $e_1(\vec{J}_{m-1}) = e_0(\vec{I}_m) \in J_{m-1} \cap I_m$，因此 $\vec{J}_n = \bigvee_{m \leq n} \vec{I}_m$ 有定义。

引理 3.5. 所有满足 $\vec{J}_N = \bigvee_{n<N} \vec{I}_n$ 有定义的有限或无限序列 $(\vec{I}_n)_{n<N}$ *in* $\vec{\mathcal{J}}(X)$ 的集合是博雷尔集，并且将 $\vec{J}_N$ 映射到 $(\vec{I}_n)_{n<N}$ 的映射是博雷尔映射。

证明. 根据定义，所有满足 $\vec{I}_0 \vee \vec{I}_1$有定义的有序对 $(\vec{I}_0, \vec{I}_1) \in \left(\vec{\mathcal{J}}(X)\right)^2$ 构成的集合 $\mathcal{D}_2$ 是博雷尔集。由于 $\cap$an $\cup$在 $\mathcal{K}(X)$ 中的运算，以及映射 $(I, a, b) \mapsto I^{\{a,b\}}$ 都是博雷尔的，因此映射 $(\vec{I}_0, \vec{I}_1) \mapsto \vec{I}_0 \vee \vec{I}_1$ 在 $\mathcal{D}_2$ 上是博雷尔映射。这就证明了 $N = 2$ 的情形，而一般的有限情形可由直接的归纳法得出；无限情形则由定义得出。□

3.6. 细分：设 $\vec{J} = (J, a, b)$ 是一条定向弧，并设 $<$ 是 J 上由 $\vec{J}$ 定义的全序。$\vec{J}$ 的一个细分是 $\vec{\mathcal{J}}(J)$ 中的一个有限序列 $(\vec{J}^k)_{0 \le k \le \ell}$，满足：

$$a = e_0(J^0) < e_1(J^0) = e_0(J^1) < \cdots < e_1(J^{k-1}) = e_0(J^k) < \cdots < e_1(J^{\ell-1}) = e_0(J^\ell) < e_1(J^\ell) = b$$

定理 3.7。设 X 是一个空间，且 $(\vec{I}_n)_{n\in\omega}$ 是 $\vec{\mathcal{J}}(X)$ 中的一个序列，满足：

a) 对所有 n，$\vec{J}_n = \bigvee_{m \le n} \vec{I}_m$ 有定义，

b) 序列 $(I_n)_{n\in\omega}$ 在 $\mathcal{K}(X)$ 中收敛到单点集 $\{b\}$，且 $b \neq a = e_0(I_0)$。于是 $\vec{J} = \bigvee_{n\in\omega} \vec{I}_n$ 有定义，且 $e(\vec{J}) = (a, b)$。

证明。对所有 n, $\vec{I}_n = (I_n, a_n, b_n)$ 和 $\vec{J}_n = (J_n, a, b_n)$，令 $b_n \neq a$。对所有 $s, t \in \omega^{<\omega}$，记 $s \wedge t$ 为 $s \cap t$的最大初始段；若 $s \neq \emptyset$，则令：$s^* = s_{|s|-1}$。

然后从 $s_0 = \langle 0 \rangle$ 和 $\hat{s}_0 = \langle J_0 \rangle = \langle I_0 \rangle$出发，归纳地构造两个序列 $(s_n)_{n\in\omega}$ 和 $(\hat{s}_n)_{n\in\omega}$，分别属于 $\omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ 和 $\mathcal{J}(X)$，使得对所有 n, $|\hat{s}_n| = |s_n|$，且$\hat{s}_n = (J_n^j)_{j<|s_n|}$ 是 $\vec{J}_n$的一个细分；并且对所有 $m < n$:

(1) s_n 是一个递增整数序列 $\le n$，其中 $s_n(0) = 0$；**(2)** 对所有 $j < |s_n|$, $J_n^j \subset I_{s_n(j)}$；**(3)** $s_n \preceq s_{n-1}$ 或 $s_n = s^\frown\langle n \rangle$，其中 $s \preceq s_{n-1}$；

(4) 如果 $|s_m \wedge s_n| = k + 1$，则对所有 $j < k$, $J_n^j = J_m^j$，且 $J_n^k \subset J_m^k$

假设$(J_n^k)_{k<|s_n|}$ 已定义，且满足条件(1)至(4)。那么根据定义$J_{n+1} = J_n^{\{a,c\}} \cup I_{n+1}^{\{c,b_{n+1}\}}$，其中 $c \in J_n \cap I_{n+1}$。令

$$k = \min\{-1 \le j < |s_n| : c \le_{J_n} e_1(J_n^j)\} < |s_n|\}$$

采用约定 $e_1(J_n^{-1}) = e_0(J_n^0) = a$，因此当 $c = a$时 $k = -1$。接下来我们区分两种情形：

(*i*) if $c = b_{n+1}$ then $J_{n+1} = J_n^{\{a,b_{n+1}\}} = J_n^{\{a,a_n^k\}} \cup J_n^{\{a_n^k,b_{n+1}\}} = \left(\bigcup_{j<k} J_n^j\right) \cup J_n^{\{a_n^k,b_{n+1}\}}$

并且我们设：$s_{n+1} = s_{n|k+1}{}^\frown\langle n+1 \rangle$ 且 $J_{n+1}^j = \begin{cases} J_n^j & \text{若 } j < k \\ J_n^{\{a_n^k,b_{n+1}\}} & \text{若 } j = k \end{cases}$

(*ii*) 若 $c \neq b_{n+1}$ 则 $J_{n+1} = J_n^{\{a,c\}} \cup I_{n+1}^{\{c,b_{n+1}\}} = \left(\bigcup_{j<k} J_n^j\right) \cup J_n^{\{a_n^k,c\}} \cup I_{n+1}^{\{c,b_{n+1}\}}$

and we set: $s_{n+1} = s_{n|k+1}{}^\frown\langle n+1 \rangle$ and $J_{n+1}^j = \begin{cases} J_n^j & \text{if } j < k \\ J_n^{\{a_n^k,c\}} & \text{if } j = k \\ I_{n+1}^{\{c,b_{n+1}\}} & \text{if } j = k+1 \end{cases}$

特别地，若 $c = a$ 则 $k = -1$，因此 $s_{n|k+1} = \emptyset$ 且 $s_{n+1} = \langle n+1 \rangle$ 的长度为 1，而 $J_{n+1}^0 = I_{n+1}^{\{a,b_{n+1}\}}$ 是$\hat{s}_{n+1}$的唯一元素。至此，s_{n+1} 和$\hat{s}_{n+1}$的定义完成，它们显然满足条件 (1)、(2)、(3)；现在我们证明条件 (4)。

因此，假设 $m < n+1$和 $u = s_m \wedge s_{n+1}$，那么根据条件 (3)，$u \preceq s_n$，于是 $u \preceq s_m \wedge s_n$。如果 $m < n$，则由归纳假设可得 (4)；如果 $m = n$，则 $u \preceq s_n$，并且由 s_{n+1}的定义可得 (4)。

至此，序列 $(s_n)_{n\in\omega}$ 和 $(\hat{s}_n)_{n\in\omega}$的构造便完成了，并令 $s_{-1} = \hat{s}_{-1} = \emptyset$。

引理 3.8. 对于所有 n:

(5) 若 $\ell < m < n$ 且 $s_\ell \preceq s_n$，则 $s_\ell \preceq s_m$ *(6)* 若 $\ell < n$ 且 $s_\ell \prec t \prec s_n$，则存在 m 使得 $\ell < m < n$ 且 $t = s_m$

证明。 证明对 n 进行归纳。对于 $n = -1$，这些陈述是显然的。因此，假设它们对 n 成立。

假设 $\ell < m < n+1$ 和 $s_\ell \preceq s_{n+1}$。由于 $\ell < n+1$，因此必然有 $s_\ell \preceq s^*_{n+1} \preceq s_n$。如果 $m < n$，则根据归纳假设有 $s_\ell \preceq s_m$；而如果 $m = n$，则有 $s_\ell \preceq s_n = s_m$。这就证明了对于 $n+1$，(5) 成立。

假设 $\ell < n+1$ 和 $s_\ell \prec t \prec s_{n+1}$。由于 $t \neq s_{n+1}$，因此有 $t \preceq s^*_{n+1} \preceq s_n$。于是，要么 $t = s_n$，此时结论成立；要么 $t \prec s_n$，进而根据归纳假设，存在 m，使得 $\ell < m < n$ 和 $t = s_m$。这就证明了对于 $n+1$，(6) 成立。□

引理 3.9。 以下两个备选项之一成立：

(I) 存在 $m \geq -1$，使得集合 $N_m = \{n > m : \ s_n = s_m$ 或 $s^*_n = s_m\}$ 是无限的；*(II)* 存在一个递增序列 $(n_i)_{i\geq -1}$，使得对所有 i以及所有 $n \geq n_i$、$s_{n_i} \preceq s_n$.,

证明。 注意到，根据条件（6），集合 $S = \{s_n : \ n \geq -1\}$ 是一棵树，并考虑集合 $S' = \{s_m \in S : \ \forall n > m, \ s_n \succeq s_m\}$ 由于 $\emptyset = s_{-1} \in S'$，该集合非空。由条件（5）可知，如果 $\ell < m$ 和 s_ℓ，s_m 属于 S'，那么 $s_\ell \preceq s_m$，因此 S' 是一个 $\preceq$-链。

– 如果 S' 是有限的，令 s 为 S' 的 $\preceq$-最大元，并令 $m = \min\{\ell : \ s_\ell = s\}$。那么对所有 $n > m$、$s_m \preceq s_n$，因此 $s_n = s_m$、$s^*_n = s_m$二者之一成立，或者 $|s_n| > |s_m|+1$，然后由条件（6）（应用于 $t = s_{n||s_m|+1}$）可知存在 n'，使得 $m < n' < n$ 和 $t = s_{n'}$，从而 $s^*_{n'} = s_m$；因此备选项（I）成立。

– 若 S' 是无限的，则存在唯一的递增序列 $(n_i)_{i\in\omega}$，属于 ω，使得 $S' \setminus \emptyset = \{s_{n_i} : \ i \in \omega\}$，且显然满足备选情形 (II)。□

在定理 3.7 的证明余下部分中，我们根据引理 3.9 区分两种情形。为使表述更清晰，我们还将备选情形 (I) 分为两个子情形。

情形 *(I.a)*：存在 m，使得集合 $N = \{n \in \omega : \ s_n = s_m\}$ 是无限的

令 $|s_m| = k+1$；则 $H = \bigcup_{j<k} J^j_m$ 是一条弧，且 $e(H) = \{a, b^{k-1}_m\}$，并且对所有 $n \in N$，$J_n = H \cup J^k_n$，都有 $e(J^k_n) = \{a^k_n, b^k_n\} = \{b^{k-1}_m, b^k_n\}$ 且 $J^k_n \supset J^k_{n+1}$，因此 $J' = \bigcap_{n\geq m} J^k_n$ 是一条弧，且 $e(J') = \{b^{k-1}_m, b\}$，并且 $J = \lim_{n\in N} J_n = H \cup J'$ 存在，且是一条弧，满足 $e(J) = \{a, b\}$。

令 $(n_i)_{i\in\omega}$ 为 N 的递增枚举。若 $n_i \leq n < n_{i+1}$，则根据 N 的定义，我们有 $s_{n_i} \preceq s_n$；因此由条件 (4) 得 $J_{n_i} \subset J_n$，而由条件 (2)

$$J_n \setminus J_{n_i} \subset \bigcup \{I_{s_n(j)} : \ |s_{n_i}| \leq j < |s_n|\}.$$

若 $k_i = |s_{n_i}| - 1$，则 $p_i = s_n(k_i) = s_{n_i}(k_i) \nearrow \infty$，并且由于 $\lim I_n$ 是单点集，因此 $\operatorname{diam}(J_n \setminus J_{n_i}) \leq \operatorname{diam}(\bigcup_{p\geq p_i} I_p) \searrow 0$。此外，由于 $e_0(I_{p_i}) = e_0(I_{s_{n_i}(k_i)}) = e_0(J^{k_i}_{n_i})$，因此$I_{p_i} \cap J_{n_i} \neq \emptyset$。所以，若 d_H 是 $\mathcal{K}(X)$ 上由 X 上某个相容距离诱导的豪斯多夫距离，则 $d_H(J_n, \ J_{n_i})) = \operatorname{diam}(J_n \setminus J_{n_i}) \searrow 0$，这证明 $\lim_n J_n = \lim_i J_{n_i} = J$。

情形 *(I.b)*：存在 m，使得集合 $N^* = \{n \in \omega : \ s_n = s_m{}^\frown\langle n\rangle\}$ 是无限的

论证基本相同。令 $|s_m| = k+1$ 和 $H = \bigcup_{j<k} J^j_m$ 如 (I.a) 中所示，注意到如果 $n \in N^*$，由于 $s_n = s_m{}^\frown\langle n\rangle$，那么 $|s_m| = k+2$ 和 $J_n = H \cup J^k_n \cup J^{k+1}_n$。按照 (I.a) 中相同的论证，$J = \lim_{n\in N^*} H \cup J^k_n$ 是一条弧，且 $e(J) = \{a, b\}$。但根据条件 (2)，附加项 J^{k+1}_n 是 $I_{s_n(k+1)}$ 的子集；根据定理的假设 b)，该子集收敛到单点集 $\{b\}$；因此 $J = \lim_{n\in N^*} J_n$。其余论证与 (I.a) 完全相同

情形 *II*： S' 是无限的。

设集合 $S' \setminus \{\emptyset\} = \{s_n;\ n \in M\}$并且对于所有 $n \in M$, $|s_n| = k_n + 1$和 $H_n = \bigcup_{j<k_n} J_n^j \subset J_n$。根据条件 (4)（$H_n$）$_{n\in M}$ 是一个弧的递增序列，其中 $e(H_n) = \{a, c_n\}$ 且 $c_n = b_n^{k_n-1} = a_n^{k_n} \in I_{s_n(k_n)}$。因此，$\lim_{n\in M} c_n = b$ 和 $J = \overline{\bigcup_{n\in M} H_n} = \lim_{n\in M} H_n$ 存在，并且是一个满足 $e(J) = \{a, b\}$的弧。最后，与情形 (I.a) 中一样，如果 $(m_i)_{i\in\omega}$ 是 M的递增枚举，则由条件 (2) 可知，对于所有 $m = m_i \le n < m_{i+1}$，若 $p_m = s_m(|s_m| - 1)$，则 $d_H(J_n, H_{m_i}) = \operatorname{diam}(J_n \setminus H_{m_i}) \searrow 0$，这证明了 $\lim_n J_n = J$。□

注 3.10. 令 $(I_n)_{n\in\omega}$ 是 $\mathcal{J}(X)$ 中的一个无限序列，使得：

a) 对所有 n, $e(I_n) = \{a_n, a_{n+1}\}$，其中某个序列 $(a_n)_{n\in\omega}$ 属于 X。 b) 序列 $(I_n)_{n\in\omega}$ 在 $\mathcal{K}(X)$ 中收敛于单点集 $\{b\}$，且满足 $b \neq a_0$。那么根据注释 3.4.b)，对所有 n, $\bigvee_{m\le n} I_m$ 都有定义，因此根据定理 3.7，定向弧$\bigvee_{n\in\omega}(I_n, a_n, a_{n+1}) = (J, a_0, b)$ 有定义；我们将记作 $\bigvee_{n\in\omega} I_n = J$。

此外，根据命题 3.5，将任意此类序列 $(I_n)_{n\in\omega}$ 映射为弧$\bigvee_{n\in\omega} I_n$ 的映射是博雷尔的。

4. Arc-lifting

我们回顾一下，E_X 表示给定空间 X上的弧连通等价关系。

定义 4.1。给定某个空间 X的任意子集 S，S in X 的一个弧提升 是一个映射$\psi\colon S^2 \cap E_X \to \hat{}\,\mathcal{J}(X)$，使得对所有 $(x, y) \in S^2 \cap E_X$, $e(\psi(x, y)) = \{x, y\}$均成立。若 $S = X$，我们称 ψ 是弧提升 X。

若 X 是波兰空间，则等价关系 E_X 是解析的，因此由定理 1.6 可知，X 存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测弧提升。但正如我们接下来将看到的，对于一个空间而言，存在博雷尔弧提升是一个非常强的假设。

命题 4.2。若波兰空间 X 存在博雷尔弧提升，则等价关系E_X 是博雷尔的。

证明。设 $\psi\colon E_X \to \hat{}\,\mathcal{J}(X)$ 是一个博雷尔弧提升。由于 E_X 和 $\hat{}\ \mathcal{J}(X)$ 是博雷尔的，根据经典结果，ψ 存在一个博雷尔延拓 $\tilde{\psi}\colon \mathcal{D} \to \hat{}\,\mathcal{J}(X)$，其定义域为博雷尔集 $E_X \subset \mathcal{D} \subset X^{2^-}$，且对所有 $(x, y) \in \mathcal{D}$，$e(\psi(x, y)) = \{x, y\}$均成立；因此必然有 $E_X = \mathcal{D}$，从而 E_X是博雷尔的。□

我们回顾一下（见定理 2.8）：如果 $X \subset \boldsymbol{R}^2$，那么 E_X 是博雷尔集；但在 $\boldsymbol{R}^3$ 中存在弧连通分支非博雷尔的紧空间，因此它们不承认博雷尔弧提升。

定义 4.3. 给定空间 X 的任意子集 S 以及任意元素 $a \in X$，一个以 a 为顶点的、S在 X中的 $\star$-弧提升，是一个映射 $\varphi\colon S \to \mathcal{J}(X)$，使得对所有 $x \in S$, $e(\varphi(x)) = \{a, x\}$。

注意，如果 S 承认一个以 a 为顶点的 $\star$-弧提升，那么 a 不一定是 S 的元素，但 $S \cup \{a\}$ 是 X 的某个弧连通分支的子集。

注 4.4. 令 Θ 表示部分映射：它将任意一对 $(J_0, J_1) \in \mathcal{J}(X)$（满足 $e(J_0) = \{a, x\}$ 且 $e(J_1) = \{a, y\}$，其中 $x \neq y$）映射到由 $(J, x, y) = \hat{}\,(J_0, x, a) \vee (J_1, a, y)$ 定义的弧 J。那么，对于任意 S 在 X 中以 a 为顶点的 $\star$-弧提升 $\varphi\colon S \to \mathcal{J}(X)$，以及 S 中的 $x \neq y$，该弧

$$J = \psi(x, y) = \begin{cases} \Theta(\varphi(x), \varphi(y)) & \text{if } x \neq a \text{ and } y \neq a \\ \varphi(y) & \text{if } x = a \\ \varphi(x) & \text{if } y = a \end{cases}$$

定义良好，且 $e(J) = \{x, y\}$。如此定义的映射 $\psi\colon S^2 \to \mathcal{J}(X)$ 显然是 S in X 的弧提升。此外，由引理 3.5 可知，若 φ是博雷尔集，则 ψ 也是博雷尔集。我们将 φ 定义的 ψ 称为典范弧提升 。

定理 4.5。 设(M,δ) 是一个完备、弧连通且局部弧连通的度量空间。那么， M 的任意可分子集 S 都存在一个取值于某个可分子空间 $N\supset S$ 中的博雷尔弧提升。

证明。 固定一个元素 $a\in S$，我们将构造一个以 a 为顶点的 S 的 $\star$ 弧提升。由于 S 中孤立点的集合是可数的，我们可以假设 S 没有孤立点。此外，用 S 替换 S 后，我们可以假设 S 是闭集。

由于 S 是可分的，我们可以固定一个由 $\mathcal{U}$ 个开弧连通子集组成的可数族，它们属于 M，其在 S 上的限制构成 S 的拓扑基。然后从 $U_\emptyset=X$ 出发，我们可以构造一个族 $(U_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$，它属于 $\mathcal{U}$，并且对所有 $s\in\omega^{<\omega}$ 和所有 $n\in\omega$，均满足：

(1) $S\cap U_s\neq\emptyset$, $\operatorname{diam}(U_s)<2^{-|s|}$ and $\overline{U_{s^\frown\langle n\rangle}}\subset U_s$,
(2) $S\cap U_s\subset\bigcup_{n\in\omega}U_{s^\frown\langle n\rangle}$.

那么对所有 $\sigma\in\omega^\omega$，$\bigcap_{n\in\omega}U_{\sigma|n}$ 都是一个单点集 $\{\varphi(\sigma)\}\subset S$，并且由此定义的映射 $\psi:\omega^\omega\to S$ 是满射、连续且开映射，因此存在一个博雷尔截面 $\varphi:S\to\omega^\omega$。

取 $a_\emptyset=a$。由于 S 没有孤立点，因此对所有 $s\in T\setminus\{\emptyset\}$，我们都可以固定一个元素 $a_s\in S\cap U_s\setminus\{a_{s|k};\ k<|s|\}$。所以，若 $s^*=s_{||s|-1}$，则根据构造， $a_s\neq a_{s^*}$ 且 $\{a_{s^*},a_s\}\subset U_s$；又由于 U_s 是弧连通的，我们可以固定一条弧 $I_s\subset U_s$，使得 $e(I_s)=\{a_{s^*},a_s\}$，因此 $\operatorname{diam}(I_s)<2^{-|s|}$。于是，对于任意 $\sigma\in\omega^\omega$， $a_\sigma=\lim^k a_{\sigma|k}$ 都存在；若 $a_\sigma\neq a$ （见注 3.10），则弧 $\bigvee_{k\in\omega}I_{\sigma|k}=(J_\sigma,\ a,\ a_\sigma)$ 有定义，并且映射 $\sigma\mapsto J_\sigma$ 是博雷尔的。

因此，由 $\Phi(x)=J_{\varphi(x)}$ （若 $x\neq a$，且 $\Phi(a)=\{a\}$）定义的映射 $\Phi:S\to\hat{}\mathcal{J}(X)$ 是一个以 a 为顶点的 S 在可分空间 $N=S\cup\bigcup_{s\in\omega^{<\omega}}I_s$ 中的博雷尔$\star$-弧提升，因此根据注 4.4，S 在 N 中存在博雷尔弧提升。在 X 中。□

推论 4.6。 任何局部连通的波兰空间都存在博雷尔弧提升。

证明。 众所周知，任何局部连通的波兰空间都是局部弧连通的。因此，X 有可数多个弧连通分支 $\{C_n;\ \ n\in\omega\}$ 且每个 C_n 都是 X 的开闭子集，因而是波兰空间。因此，根据定理 4.5，每个 C_n 都在 X 中存在博雷尔弧提升 Ψ_n，于是 $\Psi=\bigcup_{n\in\omega}\Psi_n$ 显然是 X 的博雷尔弧提升。□

推论 4.7。 设(X,t) 是一个波兰空间，且令 τ 为由(X,t)定义的弧拓扑。那么， X 的某个弧连通分支 C 中的任意 τ-可分子集 S 都在 X中具有博雷尔弧提升。

证明。取 X 上的一个与 t相容的完备距离 d。那么，拓扑 τ 可由由(X,d)定义的伪弧度量 δ 定义，且 δ 是 X上的 C的一个度量。于是(C,δ)是完备、弧连通且局部弧连通的度量空间，因此由定理 4.5，存在一个 $\tau\hat{}$ 可分空间 $N\supset S$，以及一个从(C,τ)到 $\mathcal{J}(N,\tau)$的博雷尔弧提升映射。又由于 C是$\hat{}\ \hat{}t$-博雷尔的，且从 $\mathcal{J}(N,\tau)$到 $\mathcal{J}(N,t)$的恒等映射是连续的，因此 Φ 在 X中诱导出 $S=(S,t)$的博雷尔弧提升。□

定理 4.8。 任意平面波兰空间 X 都具有博雷尔弧提升。

证明。 设 d 是 X上的一个相容完备距离。我们分别将 X的无三叉部分和三叉部分记为 Y 和 Z。由于 X 是一个平面子集，因此 Z 至多有可数多个弧连通分支（Z_n）$_{n\in N}$；又由于等价关系 E_X 是博雷尔的（定理 2.8.c)），所以所有的 Z_n以及 Y 都是 X的博雷尔子集。注意到

$$E_X=E_Y\cup\bigcup_{n\in N}E_{Z_n}=E_Y\cup\bigcup_{n\in N}Z_n^2$$

我们将在 X 中分别为 Y 以及每个 Z_n 定义博雷尔弧提升。

对于 Y，这很直接：由于集合

$$B=\{(x,y,J)\in Y^2\times\hat{\mathcal{J}}(X):\ J\subset X\text{ and }e(J)=\{x,y\}\}$$

是博雷尔集，并且对于所有 $(x,y) \in Y^2 \cap E_X$，截面 $B(x,y) = \{J_{(x,y)}\}$ 都是单点集，因此映射 $(x,y) \to J_{(x,y)}$ 是 X中 Y的博雷尔弧提升。

现在固定 n、集合 $C = Z_n$ 和 $S = \Sigma^X \cap Z_n$，并固定某个元素 $a \in S$。要构造 C 在 X中的弧提升，只需构造一个 $\star$-弧提升 $\Phi\colon C \to \mathcal{J}(X)$，将 C 提升到 X中；同样，我们将分别在 S 和 $C \setminus S$上定义 Φ。

根据定理 2.8.a)，集合 S 是 τ-可分的，因此由推论 4.7可得一个弧提升 $\Psi_S : S^2 \to \mathcal{J}(X)$，将 S提升到 X中。特别地，$\Phi_S = \Psi_S(a, \cdot)\colon S \to \mathcal{J}(X)$ 是一个以 a为顶点的 $\star$-弧提升，将 S 提升到 X中；现在我们构造一个以 a 为顶点的 $\star$-弧提升 $\Phi_{S'}$，将 $S' = C \setminus S$ 提升到 X中。

根据注 2.9，我们可以固定两个博雷尔映射 $\Psi\colon S' \to \mathcal{J}(X)$ 和 $\psi\colon S' \to S$，使得对于所有 $x \in S'$，若 $J = \Psi(x)$，则 $e(J) = \{x, \psi(x)\}$ 且 $J \cap S = \{\psi(x)\}$。于是，对于所有 $x \in S', x \neq a$，并且由于 $e(\Phi_S(\psi(x))) = \{a, \psi(x)\}$，因此 $\psi(x) \in \Psi(x) \cap \Phi_S(\psi(x))$，故定向弧 $(\Psi(x)\ x, \psi(x)) \vee (\Phi_S(\psi(x))\ \psi(x)\ a)$ 有定义，且形式为 $(\Phi_{S'}(x)\ x, a)$。于是，根据引理 3.5，如此定义的映射 $\Phi_{S'}\colon S' \to \mathcal{J}(X)$ 是博雷尔映射；根据构造，$\Phi_{S'}$ 是 S' 在 X 中、顶点为 a 的一个 $\star$-弧提升。□

5. Uniform arc-liftings

定义 *5.1.* 给定空间 X和 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}(X)$，令 $E_{\mathcal{G}} = \{(F,x,y) \in \mathcal{G} \times X^2 : (x,y) \in E_F\}$。$\mathcal{G}$ 的一致弧提升是一个映射 $\Psi : E_{\mathcal{G}} \to \hat{}\mathcal{J}(X)$，满足对于任意 $F \in \mathcal{G}$，部分映射 $\hat{}\,\Psi(F,\cdot)\colon E_F \to \mathcal{J}(X)$ 是 F（在 F中的）一个弧提升。

正如我们将看到的，集合 $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$ 的复杂性与 $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$ 的潜在一致弧提升的复杂性密切相关。注意，如果 X 是一个波兰空间，且 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}(X)$ 的解析子集，那么集合 $E_{\mathcal{G}}$是解析的，因此集合 $\mathcal{B} = \{\big((F,x,y)\ J\big) \in E_{\mathcal{G}} \times \mathcal{J}(X)\colon J \subset F \text{ 和 } e(J) = \{x,y\}\}$ 也是解析的。于是由定理 1.6 可知，$\mathcal{G}$ 具有一个$\mathbf{\Sigma}$-可测的一致弧提升。此外，如果 $X \subset \boldsymbol{R}^2$，那么根据定理 4.8，任意 $F \in \mathcal{G}$ 都具有一个博雷尔弧提升，因此自然会问，在这种情况下，$\mathcal{G}$ 是否具有一个博雷尔一致弧提升。正如我们将看到的，如果集合 $\mathcal{G}$ 足够丰富，那么即使存在一个双解析一致弧提升，也是一个非常强的要求。

命题 5.2。对于任意波兰空间 X 和所有 $n \geq 1$，集合

$$\mathcal{C}^{[n]}_{\mathrm{arc}}(X) = \big\{F \in \mathcal{F}(X) : \forall x,y \in F,\ \exists^{\leq n} J \in \mathcal{J}(X) :\ J \subset F \text{ and } e(J) = \{x,y\}\big\}$$

具有双解析一致弧提升。

证明。注意到集合 $\mathcal{B} = \{(F,\ x,\ y,\ J) \in \mathcal{F}(X) \times X^2 \times \mathcal{J}(X) :\ J \subset F$和 $e(J) = \{x,y\}\}$是博雷尔集合，因此由命题 1.4，集合

$$\mathcal{C} = \{(F,x,y) \in \mathcal{F}(X) \times X^2 :\ \exists^{\leq n} J \in \mathcal{J}(X) :\ (F,x,y,J) \in \mathcal{B}\}$$

是 $\mathbf{\Pi}^1_1$，且 $\mathcal{B} \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{J}(X))$ 是定义在 $\mathcal{C}$ 上的双解析映射 Φ 的图；该映射对任意 $(F,\ x,\ y) \in \mathcal{C}$赋予 $\mathcal{J}(X)$ 中的一个非空有限集合 $\{J_1, \cdots, J_n\}$，且其图包含于 $\mathcal{B}$ 中。于是，由命题 1.4 给出的任意双解析截面 $\Psi : \mathcal{C} \to \mathcal{J}(X)$ 都是 Φ 的一致弧提升，适用于 $\mathcal{C}^{[n]}_{\mathrm{arc}}(X)$。□

命题 5.3。假设 $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$ 属于 $\mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X))$，即 $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$，其中$\mathcal{H}$ 是$\mathbf{\Pi}^1_1$。如果 $\mathcal{G}$ 具有双解析一致弧提升，那么 $\mathcal{G}$ 就是$\mathbf{\Pi}^1_1$。

证明。令 $\Psi : E_{\mathcal{G}} \to \hat{}\mathcal{J}(X)$ 是一个双解析一致弧提升。由于条件“$J \subset F$ 且 $e(J) = \{x,y\}$”是博雷尔的，根据命题 1.3 Ψ 可将其延拓为一个双解析映射，其 $\mathbf{\Pi}^1_1$定义域为 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \times X^2$，并且如果 $J = \tilde{\Psi}(F,x,y)$，那么 $J \subset F$且$e(J) = \{x,y\}$. 于是集合 $\mathcal{C}_* = \{F \in \mathcal{H} :\ \forall x,y \in F, (F,x,y) \in \mathcal{D}\}$是 $\mathbf{\Pi}^1_1$。如果 $F \in \mathcal{G}$那么

$F \in \mathcal{H}$且 $E_F = F^2$因此 $\{F\} \times F^2 \subset E_{\mathcal{G}} \cap (\mathcal{H} \times X^2) \subset \mathcal{D}$; 所以 $F \in \mathcal{C}_{*}$。反之，如果 $F \in \mathcal{C}_{*}$，那么 $F \in \mathcal{H}$，且映射 Ψ 证明了 $F \in \mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$，从而 $F \in \mathcal{G}$。由此可知$\mathcal{G} = \mathcal{C}_{*}$ 是 $\mathbf{\Pi}^1_1$。□

推论 5.4. 对于任意波兰空间 X，如果 $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$ 具有双解析一致弧提升，那么$\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$是$\mathbf{\Pi}^1_1$。

推论 5.5. 对于任意波兰空间 X，以下 $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$ 的每个子集都是 $\mathbf{\Pi}^1_1$，并具有双解析一致弧提升:

a) 集合 $\mathcal{C}^{\breve{\Theta}}_{\text{弧}}(X)$ 中所有无三叉的闭弧连通子集的集合，其中 X,
b) 集合 $\mathcal{C}^0_{\mathrm{arc}}(X)$ 中所有不含若尔当曲线的闭弧连通子集的集合，其中 X。特别地，若 X 无三叉或不含若尔当曲线，则 $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$ 是 $\mathbf{\Pi}^1_1$。

证明。a) 若 $F \in \mathcal{C}^{\Theta}_{\mathrm{arc}}(X)$，则 F 的任意弧连通分支都是一条曲线（见第 2.3 节），因此$\mathcal{C}^{\breve{\Theta}}_{\mathrm{arc}}(X) \subset \mathcal{C}^{[2]}_{\mathrm{arc}}(X)$，故由命题 5.2，$\mathcal{C}^{\breve{\Theta}}_{\text{弧}}(X)$ 存在双解析一致弧提升。此外，$\mathcal{C}^{\breve{\Theta}}_{\mathrm{arc}}(X) = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$，其中 $\mathcal{H}$ 是 X 的所有无三叉闭子集构成的集合，故由命题 5.3，$\mathcal{C}^{\breve{\Theta}}_{\mathrm{arc}}(X)$ 是 $\mathbf{\Pi}^1_1$。

b) 论证类似：若 $F \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{arc}}(X)$，则 F 的任意弧连通分支都是实数轴上某个子区间的连续像，因此 $\mathcal{C}^0_{\mathrm{arc}}(X) \subset \mathcal{C}^{[1]}_{\mathrm{arc}}(X)$，并由命题 5.2，$\mathcal{C}^{\breve{\Theta}}_{\mathrm{arc}}(X)$ 存在双解析一致弧提升。此外，$\mathcal{C}^0_{\mathrm{arc}}(X) = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$，其中 $\mathcal{H}$ 是 X 中不包含任何若尔当曲线的所有闭子集构成的集合，故由命题 5.3，$\mathcal{C}^{\breve{\Theta}}_{\mathrm{arc}}(X)$ 是$\mathbf{\Pi}^1_1$。□

6. Uniform arc-liftings in the codes

正如之前提到的，Becker 的研究已表明，集合 $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(\mathbb{I}^2)$ 不是 $\mathbf{\Pi}^1_1$，因此根据命题 5.3，$\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(\mathbb{I}^2)$ 不存在双解析一致弧提升。尽管如此，我们将证明，对于任意波兰 $X \subset \boldsymbol{R}^2$，集合 $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$ 都存在一种较弱形式的双解析一致弧提升。注意，由于根据推论 5.5，集合 $\mathcal{C}^{\Theta}_{\mathrm{arc}}(X)$ 确实存在双解析一致弧提升，我们可以将研究限制在集合 $\mathcal{C}^{\Theta}_{\mathrm{arc}}(X) = \mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X) \setminus \mathcal{C}^{\Theta}_{\mathrm{arc}}(X)$ 上，即 X 的所有三叉的弧连通闭子集。为准确陈述主要结果，我们需要先引入一些预备概念。

6.1. 编码 δ-可分子集: 对于所有 $F \in \mathcal{F}(X)$，令 d_F 表示由 d 诱导的 F 上的距离，并令 δ^F 表示由度量结构 (F, d_F) 在 F 上定义的弧伪度量。我们的目标是对满足以下条件的对 (S, F) 进行编码: $F \in \mathcal{F}(X)$，且 S 是 F 的一个 δ^F-可分闭子集，并包含于 F 的某个弧连通分支中（因此 δ^F 在 S 上诱导出一个真正的距离）。由于空间 (S, δ^F) 是可分的，它完全由 δ^F 在 S 的任意可数稠密子集 D 上的限制所确定。

从现在起，固定一个波兰空间 X，并令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$、$\mathcal{J} = \mathcal{J}(X)$ 和 $\boldsymbol{A} = X^\omega \times \mathcal{J}^\omega$。

定义 6.2。令 $\boldsymbol{C}$ 为所有满足以下条件的 $(\alpha, F) \in \boldsymbol{A} \times \mathcal{F}$ 的集合: 对于所有 $m, n \in \omega$，$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1) = \big((a_n)_{n\in\omega},\ (I_p)_{p\in\omega}\big)$:

$$\begin{cases} (1)\ a_n \in F \quad \text{and} \quad I_n \subset F, \\ (2)\ \delta^F(a_m, a_n) = \inf\{\operatorname{diam}(I_p) :\ e(I_p) = \{a_m, a_n\}\} \ \textit{if}\ a_m \neq a_n. \end{cases}$$

然后我们令: $\alpha^* = a_0$，$D_\alpha = \{a_n;\ \ n \in \omega\}$，$S_{(\alpha,F)} = D_\alpha^{\ \delta^F}$ 和 $S'_{(\alpha,F)} = F \setminus S_{(\alpha,F)}$。

一个 s 应将元素 $(\alpha, F) \in \boldsymbol{C}$视为可分度量空间 $(S_{(\alpha,F)}, \delta^F)$ 的编码 .

引理 6.3. 集合 $\boldsymbol{C}$ 是$\mathbf{\Pi}^1_1$。

证明。 条件 (1) 显然是博雷尔集。若 $\sigma(\alpha)$ 表示方程 (2) 右侧，则映射 $\alpha \mapsto \sigma(\alpha)$ 也是博雷尔的；由 δ^F 的定义可知 $\delta^F_\alpha \leq \sigma(\alpha)$，因此条件 (2) 等价于：

$$\forall\, m,n \in \omega,\ \forall\, J \in \mathcal{J},\ \text{if } (J \subset F \text{ and } e(J) = \{a_m, a_n\}) \text{ then } \sigma(\alpha) \leq \operatorname{diam}(J)$$

这显然是 $\mathbf{\Pi}^1_1$。 □

Set:

$\boldsymbol{R} = \{(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{C} \times X :\ x \in F\}$, $\boldsymbol{S} = \{(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{C} \times X :\ x \in S_{(\alpha,F)}\}$ and $\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{S}$

so

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{S}'$$

并且我们还定义：

$\boldsymbol{R}^{(2)} = \{(\alpha, F, x, y) \in \boldsymbol{C} \times X^2 :\ x, y \in F\}$ and $\boldsymbol{S}^{(2)} = \{(\alpha, F, x, y) \in \boldsymbol{C} \times X^2 :\ x, y \in S_{(\alpha,F)}\}$

引理 6.4. 对于所有 $r > 0$:

a) 集合 $\{(F, x, y) \in \mathcal{F} \times X^{(2)} :\ x, y \in F$ 且 $\delta^F(x, y) < r\}$ 是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$。

b) 集合 $\{(\alpha, F, x, y) \in \boldsymbol{S}^{(2)} :\ \delta^F(x, y) < r\}$ 在 $\boldsymbol{S}$ 中是双解析的。

同样，如果我们将 $<$ 替换为 $\leq$。

证明。 a) 根据 δ^F 的定义即可得出。对于 b)，注意到由 D_α 在 $S_{(\alpha,F)}$ 中的稠密性以及三角不等式，对于 $(\alpha, F, x, y) \in \boldsymbol{S}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\delta^F(x,\ y) \geq r &\iff \forall\, r' < r,\ \delta^F(x, y) > r' \\ &\iff \forall\, r' < r,\ \exists\, \varepsilon > 0, m, n \in \omega,\ \begin{cases} \delta^F(a_m, a_n) > r' + 2\varepsilon, \\ \delta^F(x, a_m) < \varepsilon \text{ and } \delta^F(y, a_n) < \varepsilon\,. \end{cases}\end{aligned}$$ □

引理 6.5。 *a)* 集合 $\boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{C} \times X$ 的博雷尔子集，因此是一个 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合。

b) 集合 $\boldsymbol{S}$ 属于 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\boldsymbol{R})$，因此 $\boldsymbol{S}'$ 是一个 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合。

证明。 a) 部分显然，b) 部分由引理 6.4 得出，因为对于 $(\alpha,\ F,\ x) \in \boldsymbol{R}$:

$$(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{S} \iff \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n,\ \delta^F(a_n, x) < \varepsilon.$$

□

定理 6.6。 存在一个双解析映射 $\Phi = (\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}) :\ \boldsymbol{S} \to \omega^\omega \times \hat{}\mathcal{J}$，使得对所有 $(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{S}$，若 $\Phi(x) = (\sigma, J)$，则:

1) $x = \delta^F\text{-}\lim_n \alpha_0(\sigma(n))$

2) $J \subset F$ 和 $e(J) = \{\alpha^*, x\}$

特别地，部分映射 $\Phi^{(1)}(\alpha, F, \cdot) :\ S_{(\alpha,F)} \to \hat{}\mathcal{J}$ 是 F 中 $S_{(\alpha,F)}$ 的一个博雷尔 $\star$-弧提升，其顶点为 α^*。

证明。 这个论证令人想起定理 4.5 的证明。我们固定一个博雷尔双射$\rho :\ n \mapsto (\ell_n,\ r_n)$，它将 ω 映到$\omega \times \boldsymbol{Q}^+$。令 $\tau :\ n \mapsto \ell_n$ 表示 ρ 的第一坐标，并且对于 $(\alpha,\ F) \in \boldsymbol{C}$，对所有 n 定义：$a_n = \alpha_0(n)$ 和 $c_n = \alpha_0(\ell_n) = \alpha_0(\tau(n))$。

然后，我们如下定义一棵树 $T = T(\alpha,\ F) \subset \omega^{<\omega}$在 ω上:

$$(i) \qquad T \cap \omega^1 = \{\langle m\rangle;\ m \in \omega\}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \text{if } t = s^\frown\langle m\rangle \in T \text{ then:} \\ t^\frown\langle n\rangle \in T \iff r_n < \min\{r_m - \delta^F(c_n, c_m)\ ,\ \dfrac{r_m}{2}\ ,\ \{\delta^F(c_n, c_{t(j)});\ j < |t|\} \end{cases}$$

对于所有的 n，令 $B_n = B_n(\alpha, F)$ 和 $\tilde{B}_n = \tilde{B}_n(\alpha, F)$ 分别表示 $S_{(\alpha,F)}$ 中以 c_n 为中心、半径为 r_n 的开 δ^F-球和闭 δ^F-球。于是，由条件（ii）以及

三角不等式可知，若 $u = t^\frown\langle n\rangle = s^\frown\langle m\rangle^\frown\langle n\rangle \in T$，则 $\tilde{B}_n \subset B_m$、 $r_n < \frac{r_m}{2}$；并且对于所有的 $j < |t|$， $c_n \neq c_{t(j)}$，因为 $r_n < \delta^F(c_n, c_{t(j)})$。

因此，如果 $s = \langle n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_k\rangle \in T$且 $k \geq 1$，那么 $B_{n_0} \supset B_{n_1} \supset B_{n_1} \cdots \supset B_{n_k} \supset B_{n_k}$和$r_{n_k} < r_{n_0} 2^{-k}$。然后令 $S = S_{(\alpha,F)}$，对于任意 $x \in S \cap B_{n_k}$，我们都可以找到 $r \in \mathbb{Q}^+$，使得

$$r < \min\{r_{n_k} - \delta^F(x, \alpha_0(n_k))\ ,\ \frac{r_{n_k}}{2}\ ,\ \delta^F(x, \alpha_0(t(j)))\text{ for all } j < |t|\}.$$

此外，根据 D_α 在 S 中的稠密性，我们可以找到某个 ℓ，使得将 x替换为 a_p时同样的不等式仍然成立；并且如果 $(\ell,\ r) = (\ell_n,\ r_n)$，那么 $s^\frown\langle n\rangle \in T$。因此，任意 $s \in T$在 T和 $B_{n_k} \subset \bigcup\{B_n$ 中都有一个（严格的）延拓: $s^\frown\langle n\rangle \in T\}$。由于根据条件 (i)， $S = \bigcup\{B_n :\ \langle n\rangle \in T\}$，于是通过归纳法， $S = \bigcup_{\sigma\in\lceil T\rceil}\bigcap_{j\in\omega} B_{\sigma(j)}$，其中对所有 $\sigma \in \lceil T\rceil$均有 $\bigcap_{j\in\omega}\downarrow B_{\sigma(j)} = \{b_\sigma\}$。

因此，对于任意 $x \in S$，至少存在一条无限分支 $\sigma \in \lceil T\rceil$，使得 $x \in \bigcap_j B_{\sigma(j)}$，故 $x = b_\sigma = \delta^F\text{-}\lim_k c_{\sigma(k)} = \delta^F\text{-}\lim_k a_{(\ell_{\sigma(k)})}$。若 $\Phi^{(0)}(\alpha, F, x) = \sigma$是集合 $\{\sigma' \in \lceil T\rceil :\ x = b_{\sigma'}\}$ 的字典序最小元，则:

$$\begin{aligned}\sigma(k) = n \quad &\iff x \in \bigcap_{j\leq k} B_{\sigma^x(j)} \setminus \bigcup\{B_m :\ m < n \text{ and } \sigma_{|k}{}^\frown\langle m\rangle \in T\}\\ &\iff \forall\, j < k,\ x \in B_{\sigma^x(j)},\ \text{and } (\forall\, m < n,\ \sigma_{|k}{}^\frown\langle m\rangle \notin T \text{ or } x \notin B_m).\end{aligned}$$

由于根据定义 6.2 的条件 (2)，对于所有 m, n，映射 $F \mapsto \delta^F(a_n, a_m)$ 在$\boldsymbol{C}$上是博雷尔的，因此对于所有 $s \in \omega^{<\omega}$，集合 $\{(\alpha, F) \in \boldsymbol{C}:\ s \in T(\alpha, F)\}$ 是 $\boldsymbol{C}$的博雷尔子集，故映射 $(\alpha, F) \mapsto T(\alpha, F)$ 在 $\boldsymbol{C}$上是博雷尔的。此外，对于所有 n，由于 $a_n \in S_{(\alpha,F)}$，根据引理 6.4，集合 $\{(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{S}:\ x \in B_n\}$ 在 $\boldsymbol{S}$中是双解析的。因此，映射 $\Phi^{(0)}$ 在 $\boldsymbol{S}$上是双解析的。

于是，由定义 6.2 的条件 (2)，对于所有 $(m, n) \in \omega^2$，我们可以在 $\boldsymbol{C}$ 上定义一个博雷尔映射 $\mu_{(m,n)}\colon \boldsymbol{C} \to \omega$，使得 $\mu_{(m,n)}(\alpha, F) = \min\{p:\ e(I_p) = \{a_m, a_n\}$ 且 $\operatorname{diam}(I_p) < 2\,\delta^F(a_m, a_n,)\}$。若 $(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{S}$ 且 $\varphi(\alpha, F, x) = \tau\circ\Phi^{(0)}(\alpha, F, x) = (\ell_{k_n})_n \in \omega^\omega$，并且 $p_n = \mu_{(\ell_{k_n},\ell_{k_{n+1}})}(\alpha, F)$，则令$\psi(\alpha, F, x) = (p_n)_n$；由此定义的映射 $\psi\colon \boldsymbol{S} \to \omega^\omega$ 在 $\boldsymbol{S}$ 上是双解析的。此外，根据 μ 的定义，对于所有 n，$e(I_{p_n}) = \{c_{k_n}, c_{k_{n+1}}\}$，$\operatorname{diam}(I_{p_n}) < 2\,\delta^F(c_{k_n}, c_{k_{n+1}})$ 且 $x = \delta^F\text{-}\lim_n c_{k_n}$，因此 $x = d\text{-}\lim_n c_{k_n}$。若 $x \neq a_0$，则由注 3.4 的 b) 可知，序列 $(I_{p_n})_n$ 满足定理 3.7 的假设，因此弧 $J = \Phi^{(1)}(\alpha, F, x) = \bigvee_{n\in\omega} I_{(p_n)}$ 定义良好，并满足 $J \subset F$ 和 $e(J) = \{a_0, x\}$。最后，根据引理 3.5，令 $\Phi^{(1)}(\alpha, F, a_0) = \{a_0\}$，如此在 $\boldsymbol{S}$ 上定义的映射 $\Phi^{(1)}$ 满足定理 6.9 的结论。□

推论 6.7。 集合 $\boldsymbol{S}$ 是 $\boldsymbol{\Pi}^1_1$，因此 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}'$ 是 $\boldsymbol{R}$的双解析子集。

证明。 令 $\varphi = \Phi^{(0)} : \boldsymbol{S} \to \omega^\omega$ 为定理 6.6 给出的双解析映射。由于 $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}$和 $\boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{\Pi}^1_1$，因此 φ 可延拓为双解析映射 $\tilde{\varphi}\colon \boldsymbol{U} \to \omega^\omega$，其$\boldsymbol{\Pi}^1_1$ 定义域$\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{R}$。此外，注意到由于 δ^F在 F上是完备的，因此对于 $(\alpha,\ F,\ x)$，有 $\in \boldsymbol{R}$和 $\sigma \in \omega^\omega$:

$$x = \delta^F\text{-}\lim_n \alpha_0(\sigma(n)) \iff x = \lim_n \alpha_0(\sigma(n)) \text{ and } (\alpha_0(\sigma(n))_n \text{ is } \delta^F\text{-Cauchy}$$

根据引理 6.4 b)，该等价关系左侧是关于 $(\alpha,\ F,\ x)$ 的双解析条件。因此，集合 $\tilde{\boldsymbol{S}} = \{(\alpha,\ F,\ x) \in \boldsymbol{U}:\ x = \delta^F\text{-}\lim_n \alpha_0(\tilde{\varphi}((\alpha,\ F,\ x))(n))\}$ 是$\boldsymbol{\Pi}^1_1$ 且$\boldsymbol{S} \subset \tilde{\boldsymbol{S}}$；由于反向包含显然成立，因此 $\boldsymbol{S} = \tilde{\boldsymbol{S}}$，从而 $\boldsymbol{S}$ 是 $\boldsymbol{\Pi}^1_1$。□

从现在起，我们将研究范围限定为给定空间 X 的闭子集 F，这些闭子集具有以下性质：三叉的、弧连通且 δ^F-可分。为此，我们考虑

$$\boldsymbol{C}_\star = \{(\alpha, F) \in \boldsymbol{C}:\ F \in \mathcal{C}^\Theta_{\mathrm{arc}} \quad \text{and} \quad S_{(\alpha,F)} \supset \Sigma^F\}$$

并且对于任意先前定义的集合 $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{C} \times Y$，我们令 $\boldsymbol{Q}_\star = \boldsymbol{Q} \cap (\boldsymbol{C}_\star \times Y)$。

定理 6.8。 存在一个双解析映射 $\Phi'\colon \boldsymbol{S}'_\star \to X \times \hat{}\mathcal{J}$，使得对于所有 $(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{S}'_\star$，若 $\Phi'(\alpha, F, x) = (y, J)$，则 $y \in S_{(\alpha,F)}$、$J \subset F$ 且 $e(J) = \{x, y\}$。

证明。 令 $\tilde{\boldsymbol{C}}_\star = \boldsymbol{C}_\star \times X^2 \times \mathcal{J}$并考虑以下集合:

$$\boldsymbol{B} = \{(\alpha, F, x, y, J) \in \boldsymbol{C}_\star\colon \quad J \subset F,\ e(J) = \{x, y\}, \quad x \in S'_{(\alpha,F)}\text{和}$$
$$y \in J \cap S_{(\alpha,F)}\}\boldsymbol{B}_0 = \{(\alpha, F, x, y, J) \in \boldsymbol{B}\colon \quad \{y\} = J \cap S_{(\alpha,F)}\}\boldsymbol{B}'_\varepsilon = \{(\alpha, F, x, y, J, z)$$
$$\in \boldsymbol{B} \times X\colon \quad z \in J \cap S_{(\alpha,F)}\text{和}\ \ d(y, z) \geq \varepsilon\},\ \text{对于}\ \ \varepsilon > 0。$$

根据推论 6.7，集合 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}'_\varepsilon$ 分别是 $\tilde{\boldsymbol{C}}_\star$ 和 $\tilde{\boldsymbol{C}}_\star \times X$ 的双解析子集。此外，根据定理 2.5 4)，对于所有的 $(\alpha,\ F) \in \boldsymbol{C}$和 $J \in \mathcal{J}$，集合 $J \cap S_{(\alpha,F)}$是紧致的，因此对于所有的 $(\alpha,\ F,\ x,\ y,\ J) \in \boldsymbol{B}$，集合 $\boldsymbol{B}'_\varepsilon(\alpha,\ F,\ x,\ y,\ J)$ 也是紧致的。于是由定理 1.4 可知，$\pi(\boldsymbol{B}'_\varepsilon)$——$\boldsymbol{B}'_\varepsilon$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的投影——在 $\boldsymbol{B}$中是双解析的，因而在 $\tilde{\boldsymbol{C}}_\star$中也是双解析的。因此，$\boldsymbol{B}_0 = \bigcap_\varepsilon \boldsymbol{B} \setminus \pi(\boldsymbol{B}'_\varepsilon)$ 在 $\boldsymbol{B}$中是双解析的。

于是，对于所有 $(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{S}'_\star$，由于 $F \in \mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$ 且 $\Sigma^F \neq \emptyset$，我们可以用一条弧 J将 x连接到 Σ^F，进而连接到 $S_{(\alpha,F)}$；并且，如果 J对于 $\subset$是极小的，且 $e(J) = \{x, y\}$，那么 $(\alpha, F, x, y, J) \in \boldsymbol{B}$；因此，$\boldsymbol{B}(\alpha, F, x)$ 非空。还要注意，如果 (y, J) 和 (y', J') 是 $\boldsymbol{B}(\alpha, F, x)$ 中两个不同的元素，那么必有 $J \neq J'$。此外，如果 $(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{S}'_\star$，那么 $x \in S'_{(\alpha,F)}$；又由于 $(\alpha, F) \in \boldsymbol{C}_\star$，因此$x \notin \Sigma^F$，特别是 x 不是三叉树的中心。由此可知，对于所有 $(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{S}'_\star$，集合$\boldsymbol{B}(\alpha, F, x)$ 至少包含一个元素，至多包含两个元素；因此，根据定理 1.4，集合 $\boldsymbol{B}$ 存在一个双解析选择 Φ'，满足定理 6.8 的结论。□

回忆一下，根据定义

$$(\alpha, F, x, y) \in \boldsymbol{R}^{(2)}_\star \iff (\alpha, F) \in \boldsymbol{C}_\star(X) \text{ and } (x, y) \in F^2$$

and

$$(\alpha, F) \in \boldsymbol{C}_\star \iff \begin{cases} - F \text{ is a } \textit{triodic, arc-connected and } \delta^F\textit{-separable} \text{ subset of } X, \\ - (\alpha, F) \in \boldsymbol{C} \text{ is a code satisfying } \Sigma^F \subset S_{(\alpha,F)} \subset F. \end{cases}$$

定理 6.9. 对于任意波兰空间 X，存在一个双解析映射 $\Psi : \boldsymbol{R}^{(2)}_\star \to \hat{}\mathcal{J}(X)$，使得对于所有 $(\alpha, F) \in \boldsymbol{C}_\star$，部分映射 $\Psi(\alpha, F, \cdot)\colon F^2 \to \hat{}\mathcal{J}$都是 F 的博雷尔弧提升。

证明. 设 Φ 和 Φ' 如定理 6.6 和定理 6.8 中所述，并令 ϕ_0 表示映射 $\Phi^{(1)}$ 在 $\boldsymbol{S}_\star$ 上的限制。因此，对于所有 $(\alpha, F) \in \boldsymbol{C}_\star$，映射 $\phi_0(\alpha, F, \cdot)\colon S_{(\alpha,F)} \to \hat{}\mathcal{J}$ 是 F 中 $S_{(\alpha,F)}$ 的一个 $\star$-弧提升，其顶点为 α^*。

此外，对于所有 $(\alpha, F, x) \in \boldsymbol{S}'_\star$，若 $y = \Phi'^{(0)}(\alpha, F, x)$ 和 $J = \phi'(\alpha, F, x)$ 是由 $(J, x, \alpha^*) = \left(\Phi'^{(1)}(\alpha, F, x)\ x, y\right) \vee (\Phi^{(1)}(\alpha, F, y)\ y, \alpha^*)$ 定义的弧，则如此定义的映射 $\phi_1\colon \boldsymbol{S}'_\star \to \hat{}\mathcal{J}$ 是双解析的，并且对于所有 $(\alpha, F) \in \boldsymbol{C}_\star$，映射 $\phi_1(\alpha, F, \cdot)\colon S'_{(\alpha,F)} \to \hat{}\mathcal{J}$ 是 F 中 $S'_{(\alpha,F)}$ 的一个 $\star$-弧提升，其顶点为 α^*。

由于 $\boldsymbol{S}_\star$ 和 $\boldsymbol{S}'_\star$ 是 $\boldsymbol{R}_\star$的双解析子集，因此 $\boldsymbol{R}_\star$ 上的映射 $\phi = \phi_0 \cup \phi_1$ 也是双解析的；并且对于所有的 $(\alpha, F) \in \boldsymbol{C}_\star$，映射 $\phi(\alpha, F, \cdot)\colon F \to \hat{}\mathcal{J}$是 $\star$的一个弧提升，其顶点为 α^*；又由于 F是波兰空间，所以 $\phi(\alpha, F, \cdot)$是博雷尔的。于是，如果 $\Psi(\alpha, F, \cdot, \cdot)$表示由 $\phi(\alpha, F, \cdot)$定义在 F 上的典范弧提升 $\hat{}$（见注 4.4），那么映射 $\Psi\colon \boldsymbol{R}_\star \to \mathcal{J}(X)$显然满足定理 6.9 的结论。□

定理 6.10。 设 X 是波兰空间，并假设对于任意 $F \in \mathcal{C}^\Theta_{\mathrm{arc}}(X)$，集合 Σ^F 是δ^F-可分的，并设 $\boldsymbol{\Gamma} \supset \boldsymbol{\Pi}^1_1$ 是一个给定的类。

a) 如果存在一个 $\boldsymbol{\Gamma}$-可测映射 $\boldsymbol{\sigma}\colon \mathcal{C}^\Theta_{\mathrm{arc}}(X) \to \boldsymbol{A}$，使得对所有 $F \in \mathcal{C}^\Theta_{\mathrm{arc}}(X)$，$(\boldsymbol{\sigma}(F)\ F) \in \boldsymbol{C}_\star$成立，那么集合 $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(X)$ 属于 $\check{}\mathcal{A}(\boldsymbol{\Gamma})$。

b) 如果存在一个 $\mathbf{\Gamma}$-可测映射 $\boldsymbol{\sigma}_0\colon \mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X) \to X^\omega$，使得对所有 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$，序列 $\boldsymbol{\sigma}_0(F)$ 的值域的 δ^F-闭包包含集合 Σ^F，那么集合 $\mathcal{C}_{\rm arc}(X)$ 属于 $\check{}\mathcal{A}(\check{}\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma}))$。

证明。再次由于根据命题 5.2，集合 $\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$ 是 $\mathbf{\Pi}^1_1$，要证明 $\mathcal{C}_{\rm arc}(X)$ 属于某个类 $\mathbf{\Lambda}\supset\mathbf{\Pi}^1_1$，我们只需证明集合 $\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$ 属于 $\mathbf{\Lambda}$。

a) 令 Ψ 为定理 6.9 给出的映射。由于映射 Ψ 的定义域 $\boldsymbol{R}^{(2)}_\star$ 是 $\boldsymbol{R}^{(2)}$ 的一个子集，而 Ψ 的图是 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 的一个子集

$$\boldsymbol{U}=\{(\alpha,F,x,y,J)\in\boldsymbol{R}^{(2)}\colon\ \Sigma^F\subset S_{(\alpha,F)},\ J\subset F\text{ and }e(J)=\{x,y\}\}$$

我们可以将 Ψ 延拓为双解析映射 $\tilde\Psi\colon \boldsymbol{Q}\to\hat{}\mathcal{J}$，其定义域 $\boldsymbol{R}^{(2)}_\star\subset\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}^{(2)}$ 以及图也包含于 $\boldsymbol{U}$ 中。由此可知集合

$$\boldsymbol{D}=\{(\alpha,F)\in\boldsymbol{C}\colon\ \forall\,(x,y)\in F^2,\ (\alpha,F,x,y)\in\boldsymbol{Q}\}$$

是 $\mathbf{\Pi}^1_1$。

对于所有 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$，由于 $(\boldsymbol{\sigma}(F)\ F)\in\boldsymbol{C}_\star$，因此根据定理 6.9，对于所有 $x,y\in F$，$(\alpha,F,x,y)\in\boldsymbol{R}^{(2)}_\star\subset\boldsymbol{Q}$；从而 $(\boldsymbol{\sigma}(F)\ F)\in\boldsymbol{D}$。反之，若 $(\boldsymbol{\sigma}(F)\ F)\in\boldsymbol{D}$，则根据 $\tilde\Psi$ 的选取，对于所有 $x,y\in F$，$\tilde\Psi(\alpha,F,x,y)$ 是 F 的一个子弧，端点为 $\{x,y\}$；因此 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$。这证明了 $\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)=(\boldsymbol{\sigma},Id)^{-1}(\boldsymbol{D})$，结论由命题 1.1 得出。

b) 固定一个博雷尔选择映射 $\mathbf{c}\colon \mathcal{F}\to X$，使得对于所有 $F\in\mathcal{F}$，$\mathbf{c}(F)\in F$。由于对于所有$r>0$，集合

$$\boldsymbol{B}=\{(F,a,b,r,J)\in\mathcal{F}\times X^2\times\mathbb{Q}^+\times\mathcal{J}\colon\ J\subset F,\ e(J)=\{a,b\}\text{ and }\operatorname{diam}(J)<r\}$$

是博雷尔集，因此存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测映射 $\boldsymbol{\tau}\colon \mathcal{F}\times X^2\times\mathbb{Q}^+\to\hat{}\mathcal{J}$，使得对于所有 $(F,a,b,r)\in\mathcal{F}\times X^2\times\mathbb{Q}^+$，若 $J=\boldsymbol{\tau}(F,a,b,r)$，则：

$$\begin{cases}(F,a,b,r,J)\in\boldsymbol{B} & \text{if } 0<\delta^F(a,b)<r\\ J=\{\mathbf{c}(F)\} & \text{if not}\end{cases}$$

因此，若我们固定集合 $\omega^2\times\mathbb{Q}^+$ 的一个枚举 $(m_p,n_p,r_p)_{p\in\omega}$，并对所有 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}$ 令 (X)：

$$\boldsymbol{\sigma}_1(F)(p)=\boldsymbol{\tau}(F,\boldsymbol{\sigma}_0(m_p),\boldsymbol{\sigma}_0(n_p),r_p)$$

那么映射 $\boldsymbol{\sigma}_1\colon \mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)\to\hat{}\mathcal{J}^\omega$ 满足定义 6.2 的条件 2)。由假设还可得，映射 $\boldsymbol{\sigma}=(\boldsymbol{\sigma}_0,\boldsymbol{\sigma}_1)\colon \mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)\to\boldsymbol{A}$ 是双解析的，并且对于所有 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$，$(\boldsymbol{\sigma}(F)\ F)\in\boldsymbol{C}_{\star\circ}$。由于 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 是 $\mathbf{\Gamma}$-可测的，且 $\boldsymbol{\tau}$ 是 $\mathbf{\Sigma}$-可测的，容易验证 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 以及 $\boldsymbol{\sigma}$ 相对于由 $\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$ 和 $\check{}\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$ 生成的 σ-代数类均可测，因此 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathcal{A}(\check{}\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma}))$-可测的，且是 $\check{}\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma}))$-可测的。于是由 a) 部分可知，$\check{}\,\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$ 属于 $\check{}\mathcal{A}(\mathcal{A}(\check{}\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})))=\big(\mathcal{A}(\mathcal{A}(\check{}\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})))\big)=\check{}\mathcal{A}(\check{}\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma}))$. □

推论 6.11. 设 X 为一个波兰空间。若 X 至多包含可数多个三叉树中心，则集合 $\mathcal{C}_{\rm arc}(X)$ 属于 $\check{}\mathcal{A}(\check{}\mathcal{A}(\mathbf{\Pi}^1_1))$。

证明。固定集合 S^X 中所有三叉树中心的一个枚举 $(c_n)_{n\in\omega}$。那么根据定义，对于所有 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$，集合 S^F是 S^X的非空子集，因此 $\Sigma^F\subset(\Sigma^X\cap F)^{\delta^F}$。

接着考虑由下式定义的博雷尔映射 $\boldsymbol{\sigma}_0\colon \mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)\to\omega^\omega$

$$\boldsymbol{\sigma}_0(F)(k)=\begin{cases}\min\{n\colon\ c_n\in F\text{ and }\forall\,j<k,\ c_n\neq\sigma_0(F)(j),\}\} & \text{if this set is nonempty}\\ \boldsymbol{\sigma}_0(F)(k-1) & \text{if not}\end{cases}$$

注意，如果 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$，那么 $S^F\neq\emptyset$，因此存在 n 使得 $c_n\in F$，所以 $\boldsymbol{\sigma}_0(F)(0)$ 有定义；由归纳法可知，对于所有 k，$\boldsymbol{\sigma}_0(F)(k)$ 都有定义。因此，$\boldsymbol{\sigma}_0$ 是

良定义的，并且对于所有 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$，若 $\boldsymbol{\sigma}_0(F)=\sigma$，则 $S^F\subset S\cap S^X=\{c_{\sigma(k)};\ \ k\in\omega\}$，因此 $\Sigma^F\subset\overline{\{c_{\sigma(k)};\ \ k\in\omega\}}^{\delta^F}$，且 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 满足定理 6.10 的 b) 部分的假设，其中 $\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Pi}^1_1$，所以集合 $\mathcal{C}_{\rm arc}(X)$ 属于 $\check{\mathcal{A}}(\check{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\Pi}^1_1))$。□

推论 6.12. 对于任意波兰空间 X，如果对所有 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$，集合 Σ^F 都是 δ^F-可分的，那么集合 $\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$ 是 $\boldsymbol{\Delta}^1_2$。

证明。注意，集合 $\boldsymbol{C}^\star=\{(F,\alpha)\in\mathcal{F}\times\boldsymbol{A}:\ \ S_{(\alpha,F)}\supset\Sigma^F\}$ 是 $\mathcal{F}\times\boldsymbol{A}$ 的一个子集，由假设可知，$\pi(\boldsymbol{C}^\star)$—— $\boldsymbol{C}^\star$ 在第一因子上的投影——包含 $\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$。根据近藤一致化定理，存在映射 $\boldsymbol{\sigma}_0:\pi(\boldsymbol{C}^\star)\to\boldsymbol{A}$，其图包含于 $\boldsymbol{C}^\star$，因而对所有 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$ 都满足 $(F,\boldsymbol{\sigma}_0(F))\in\boldsymbol{C}^\star$，所以 $(\boldsymbol{\sigma}_0(F)\ F)\in\boldsymbol{C}^\star$。由于 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 的图是 $\boldsymbol{\Pi}^1_1$，映射 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 在 $\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$ 上是 $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$（因此是 $\boldsymbol{\Delta}^1_2$）可测的。由定理 6.10 b)，$\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$ 属于 $\check{\mathcal{A}}(\check{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\Delta}^1_2)=\boldsymbol{\Delta}^1_2$，这是因为射影类在运算 $\mathcal{A}$ 下具有不变性（见 [5] 38, 定理 4）。□

7. Back to planar Polish spaces

在本节中，X 将是一个平面 波兰空间。注意，由推论 6.12 和定理 2.8 可知，集合 $\mathcal{C}_{\rm arc}(X)$ 是 $\boldsymbol{\Delta}^1_2$；本节的目标是证明以下更精确的结果。

定理 7.1。对于任意波兰空间 $X\subset\boldsymbol{R}^2$，存在一个 $\boldsymbol{\Sigma}$-可测映射 $\boldsymbol{\sigma}:\mathcal{F}(X)\to\boldsymbol{A}$，使得对于所有 $F\in\mathcal{C}^{\Theta}_{\rm arc}(X)$，$(\boldsymbol{\sigma}(F)\ F)\in\boldsymbol{C}_\star$。

于是，由定理 6.10 可知

推论 7.2。对于任意波兰空间 $X\subset\boldsymbol{R}^2$，集合 $\mathcal{C}_{\rm arc}(X)$ 属于 $\check{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\Pi}^1_1)$。

定理 7.1 的证明很大程度上依赖于以下概念。

7.3. 三叉树陷阱：三叉树陷阱是一个四元组 $p=(W,\ I_0,\ I_1,\ I_2)$，其中 W 是某条若尔当曲线 ∂W 的有界连通分支，而 $I_0,\ I_1,\ I_2$ 是 ∂W 的三条两两不相交的子弧；W 称为 p 的定义域，并记 $W=$ 为 $\mathrm{dom}(p)$，$\mathrm{diam}(p)=$ 为 $\mathrm{diam}(W)$。

若尔当三叉树 T 称为与陷阱 $(W,\ I_0,\ I_1,\ I_2)$ 相容，如果 $T=J_0\cup J_1\cup J_2\subset W$ 且对于所有 k，$J_k\cap\partial W=e(J_k)\setminus\{\mathrm{c}(T)\}\subset I_k$。

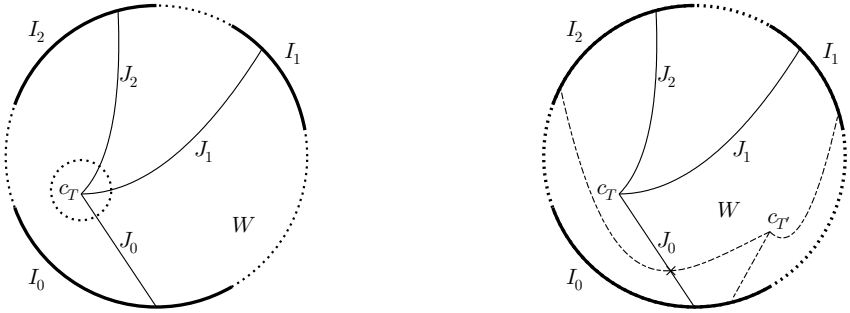
事实上，Moore 对定理 2.6（[7], 引理 1）的证明的核心可以改述如下：

Lemma 7.4. (Moore). 与同一个陷阱相容的两个三叉树有非空交集。

要从引理 7.4 推出定理 2.6，只需注意到，平面中存在一个可数的三叉树陷阱集合 $\mathbb{P}$，使得平面中的任意三叉树都与其中某个 $p\in\mathbb{P}$ 相容。例如，可以取 $\mathbb{P}$ 为所有有理圆形三叉体陷阱 构成的可数集，即所有形如 $p=(W,\ I_0,\ I_1,\ I_2)$ 的陷阱所构成的集合，其中 W 是一个半径为有理数、中心坐标为有理数的开圆盘，并且对每个 $i\in 3,\ \ I_i$ 都是 ∂W 的一个端点为有理点的子弧。

注意，如果 $T=J_0\cup J_1\cup J_2$ 与陷阱 $p=(W,I_0,I_1,I_2)$ 相容，W' 是某条若尔当曲线 $\partial W'$, $W'\subset W$ 的有界连通分支，并且 $\mathrm{c}(T)\in W'$ 每个 J_k 都与 $\partial W'$ 相交。那么，包含于 T 中的三叉树 $T=J_0\cup J_1\cup J_2$ 是唯一的，且 $J_k\subset J_k$，因此 $\mathrm{c}(T)=\mathrm{c}(T)$，并且 $J_k\cap\partial W'$ 是单点集；于是我们记作 $T=T_{|W'}$。对于固定的 和 W，此类有序对 (T,T) 的集合是博雷尔集，且映射 $T\mapsto T$ 是博雷尔的。此外，如果 $I'_0(I'_1,I'_2)$ 是 $\partial W'$ 的两两不相交子弧，并且 T 与 $p'=(W',I'_0,I'_1,I'_2)$ 相容，则称 T 与陷阱 p' 弱相容。由此，对于所有陷阱 p'，与 p' 弱相容的三叉树 T 的集合是博雷尔集。

FIGURE 2



定理 *7.1* 的证明:

令 $\mathbb{P}$ 表示 7.3 中引入的所有有理圆形三叉树陷阱的集合。对于每个三叉树陷阱 p, X 中与 p 相容的所有三叉树组成的集合 $\mathscr{T}_p(X)$ 是博雷尔集; 而 X 的闭子集 $\mathcal{M}_p(X)$ 中与 p相匹配的集合, 即包含一个与 p相容的三叉树的闭子集组成的集合, 是解析集。对于所有 $p \in \mathbb{P}$ 和所有 $\varepsilon > 0$, 我们将满足 $\mathrm{dom}(q) \subset \mathrm{dom}(p)$ 且 $\mathrm{diam}(q) < \varepsilon$的所有三叉树陷阱 $q \in \mathbb{P}$ 记为$\mathbb{P}_{p,\varepsilon}$ 。

引理 7.5。 对于所有 $p \in \mathbb{P}$, 都存在一个博雷尔函数 γ_p , 它为每一对三叉树$(T, T') \in \mathcal{T}_p(X)^2$ 指定一条与 p 相容、连接 c_T 和 $c_{T'}$ 且位于 $T \cup T'$ 内部的弧。

证明。 由引理 7.4, $T \cap T' \neq \emptyset$。众所周知, 存在一个博雷尔选择函数 ρ, 它为波兰空间 $\mathscr{X}$ 的每个非空闭子集 F 指定一个元素 F。因此, 函数 $(T, T') \mapsto \rho(T \cap T')$ 是博雷尔函数。此外, 存在唯一一条包含于 T 且连接 c_T 和 $\rho(T \cap T')$ 的弧 $\vec{J}$; 类似地, 也存在唯一一条包含于 T' 且连接 $c_{T'}$ 和 $\rho(T \cap T')$ 的弧 $\vec{J}'$。这两个映射的图都是博雷尔集; 因此, 函数 $(T, T') \mapsto \vec{J}$ 和 $(T, T') \mapsto \vec{J}'$ 都是博雷尔函数, 函数 $(T, T') \mapsto \vec{J} \vee \mathfrak{f}(\vec{J}')$ 也是博雷尔函数。后一条弧在 $T \cup T'$ 内部连接 c_T 和 $c_{T'}$。□

引理 7.6。 对于每个 $p \in \mathbb{P}$, 都存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数 φ_p , 其定义域为 $\mathcal{F}^*$ 的所有非空闭子集的集合, 使得 $\varphi_p(F) = (T, a)$, 其中 $T \in \mathcal{T}_p(X)$, $T \subset F$; 如果F 与 p 匹配, 则 $a = c_T$, 而如果不匹配, 则 $\varphi_p(F) = *$ 。

˜证明。 集合 $E_p = \{(F, T, a) \in \mathcal{F}^* \times \mathcal{T}_p \times X : T \subset F, a = c_T$以及与 $T\}$匹配的 F是博雷尔集。其在 $\mathcal{F}^*$ 上的投影 $\mathcal{M}_p$ 是解析集, 根据定理 1.6, 存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测选择˜, 它在 $\mathcal{M}_p$上取自 E_p 。将该选择通过 $*$ 延拓到 $\mathcal{F}^* \setminus \mathcal{M}_p$ 上, 我们定义一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数 φ_p。对于 $F \in \mathcal{M}_p$, 我们令 $\varphi_p^1(F) = T$, 并在 $\varphi_p(F) = (T, a)$时令 $\varphi_p^2(F) = a$。□

引理 7.7. 令 $p \in \mathbb{P}$、 $\varepsilon > 0$ 和 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数 φ_p 如引理 *7.6* 中所述。则存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数 $\lambda_{p,\varepsilon} : \mathcal{F}^* \to \mathbb{P}_{p,\varepsilon}$, 使得对所有 $F \in \mathcal{F}^*$, 若 $\varphi_p(F) \neq *$, 则三叉树 $\varphi_p^1(F)$ 与陷阱 $\lambda_{p,\varepsilon}(F)$ 弱相容。

证明. 集合 $\{F : \varphi_p(F) \neq *\}$ 是解析的, 因此属于 $\mathbf{\Sigma}$。

对于每个 $q \in \mathbb{P}_{p,\varepsilon}$ 集合 $\{T \in \mathcal{T}(X) : T$ 与 $q\}$ 弱相容是博雷尔集。因此, 集合$\mathscr{Z}_q = \{F : \varphi_p(F)$ 与 $q\}$ 弱相容, 属于 $\mathbf{\Sigma}$。并且很容易验证

$$\mathcal{M}_p = \{F : \varphi_p(F) \neq *\} \subset \bigcup\nolimits_{q \in \mathbb{P}_{p,\varepsilon}} \mathscr{Z}_q$$

因为对于所有 $F \in \mathcal{M}_p$，三叉树 $\varphi_p^1(F)$ 的中心都属于某个陷阱$q=(W',\ I_0',\ I_1',\ I_2')\in\mathbb{P}_{p,\ \varepsilon}$ 的定义域。因此，可以找到 $\mathcal{M}_p$ 的一个可数划分 $(\mathscr{Z}_q')_{q\in\mathbb{P}_{p,\ \varepsilon}}$，使得 $\mathscr{Z}_q'\in\mathbf{\Sigma}$ 且 $\mathscr{Z}_q'\subset\mathscr{Z}_q$。令

$$\lambda_{p,\varepsilon}(F)=q \iff F\in\mathscr{Z}_q'$$

完成证明。 □

引理 7.8. 对所有 $(p,q)\in\mathbb{P}^2$、所有 $r\in\mathbb{Q}^+$ 以及所有 $k\in\omega$，存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数$\psi_{p,q,r,k}$，定义在 $\mathcal{F}^*$ 上，使得 $\psi_{p,q,r,k}(F)$ 是一条定向弧 J，在 F 内连接 $\varphi_p^2(F)$ 与 $\varphi_q^2(F)$，且 $\mathrm{diam}(J\cup \mathrm{dom}(p')\cup \mathrm{dom}(q'))<r$，并且 $\max(\mathrm{diam}(p'),\mathrm{diam}(q'))<2^{-k}$（若存在这样的 J）；若不存在，则$\psi_{p,q,r,k}(F)=*$。

证明。如上所述，该集合

$$\hat{E}_{p,q,r}=\Big\{(F,T,T',J)\in\mathcal{F}^*\times\mathcal{T}_p(X)\times\mathcal{T}_q(X)\times\mathcal{J}(X):J,T,T'\subset F \\ \text{and } e(J)=(c_T,c_{T'}) \text{ and } \mathrm{diam}(J\cup p\cup q)<r\Big\}$$

是博雷尔集，并且在其投影 $E^*_{p,q,r}=\pi(\hat{}E_{p,q,r})$ 上存在一个 $\mathbf{\Sigma}$-可测选择 $\chi_{p,q,r}$，定义在 $\mathcal{F}^*$ 上；我们将其在余解析集 $\mathcal{F}^*\setminus E^*_{p,q,r}$ 上延拓为 $*$。若 $\chi_{p,q,r}(F)=(T,T',J)$，则记 $\chi^1_{p,q,r}(F)=T,\chi^2_{p,q,r}(F)=T'$，并记 $\chi^3_{p,q,r}(F)=J$。那么对于 $F\in E^*_{p,q,r}$，必然有 $F\in\mathcal{M}_p\cap\mathcal{M}_q$。

显然，如果 $F\in E^*_{p,q,r}$，我们也有 $F\in E^*_{p,q,r'}$ 对所有 $r'>r$；因此，集合 $\{(p,\ q,\ r):\ F\in E^*_{p,q,r}\}$ 要么是空的，要么是无限的。

对于 $p,\ q\in\mathbb{P}$, $r\in\mathbb{Q}^+$和 $k\in\omega$，我们对所有 $F\in\mathcal{M}_p\cap\mathcal{M}_q$考虑：$p'=\lambda_{p,\ 2^{-k}}(F)$，$W'=\mathrm{dom}(p')$，$q'=\lambda_{q,\ 2^{-k}}(F)$以及 $V'=\mathrm{dom}(q')$。

根据 $\lambda_{p,\ 2^{-k}}(F)$ 的定义，三叉树 $T=\varphi_p^1(F)$ 与 p' 弱相容。因此，$T_{|W'}$与 p' 相容，并且 $\mathbf{c}(T)=\mathbf{c}(T_{|W'})$。类似地，三叉树 $S=\varphi_q(F)$ 与 q' 弱相容。因此，利用引理 7.5 中的函数 $\gamma_{p'}$ 和 $\gamma_{q'}$，我们可以考虑定向弧

$$\vec{I}_{p,k,r,F}=\gamma_{p'}\big(\varphi^1_{p'}(F),\chi^1_{p',q',r}(F)\big)$$
$$\vec{J}_{q,k,r,F}=\gamma_{q'}\big(\varphi^1_{q'}(F),\chi^2_{p',q',r}(F)\big)$$

分别包含于 $W'=\mathrm{dom}(p')$ 和 $V'=\mathrm{dom}(q')$ 中，并分别连接 $\mathbf{c}(T)$ 与$e_0(\chi^3_{p',\ q',\ r}(F))$，以及 $\mathbf{c}(S)$ 与 $e_1(\chi^3_{p',\ q',\ r}(F))$。

此外，假设 $F\in E^*_{p,\ q,\ r}$。由于函数 γ_p 是博雷尔的，显然函数$\to\qquad\to F\mapsto I_{p,\ k,\ r,\ F}$和 $F\mapsto J_{q,\ k,\ r,\ F}$都是 $\mathbf{\Sigma}$-可测的，拼接函数也是如此

$$\psi_{p,q,r,k}(F)=\vec{I}_{p,k,r,F}\vee\chi^3_{p',q',r}(F)\vee\overleftarrow{f}(\vec{J}_{q,k,r,F})$$

这是连接 $\varphi_p^2(F)$ 与 $\varphi_q^2(F)$ 的一条定向弧。此外，$\psi_{p,\ q,\ r,\ k}(F)\subset\chi^3_{p',\ q',\ r}(F)\cup W'\cup V'$，因此 $\mathrm{diam}(\psi_{p,\ q,\ r,\ k}(F))<r$。 □

将引理 1.8 应用于族 $(\varphi_p^2)_{p\in\mathbb{P}}$ 以及族$\big(\psi^3_{p,\ q,\ r}\big)_{(p,\ q,\ r)\in\mathcal{T}(X)^2\times\mathbb{Q}^+}$，我们得到 $\mathbf{\Sigma}$-可测函数 $\tilde{\varphi}:\ \mathcal{F}^*\to X^\omega$ 和 $\tilde{\psi}:\ \mathcal{F}^*\to\vec{\mathcal{J}}(X)^\omega$，使得对于每个 $F\in\mathcal{F}^*$

$$\{\tilde{\varphi}_n(F):n\in\omega\}=\{\varphi_p^2(F):F\in E_p,\ p\in\mathbb{P}\}$$
$$\{\tilde{\psi}_n(F):n\in\omega\}=\{\psi^3_{p,q,r,k}(F):p,q\in\mathbb{P},\ r\in\mathbb{Q}^*,\ k\in\omega\}$$

那么，序列 $(a_n)=\big(\tilde{\varphi}_n(F)\big)_n$在 Σ^F 中是 τ-稠密的，因为对于每个由 F 匹配的陷阱 p，都存在某个 n，使得 a_n 是与 p 相容的某个三叉树的中心。

引理 7.9. 如果 $(a_m, a_n) = (\tilde{\varphi}_m(F)\ \tilde{\varphi}_n(F)) \in E_F$那么

$$\delta^F(a_m, a_n) = \inf\{\mathrm{diam}(J) : \exists k \in \omega\ J = \tilde{\psi}_k(F) \text{ and } e(J) = (a_m, a_n)\}\,.$$

证明。若 $(a_m, a_n) \in E_F$则 $\delta^F(a_n, a_m) < \infty$，并且对于所有满足 $r > \delta^F(a_n, a_m)$ 的 $r \in \mathbb{Q}^+$，存在一条弧 J_0，其端点为 a_n 和 a_m，使得 $\delta^F(a_n, a_m) \leq \mathrm{diam}(J_0) < r$，且存在一个整数 k，使得 $\mathrm{diam}(J_0) + 2^{1-k} < r$。存在 p 和 q 属于 $\mathbb{P}$，使得 $a_n = \varphi_p^2(F)$ 且 $a_m = \varphi_q^2(F)$，我们记 $p' = \lambda_{p,2^{-k}}(F)$ 和 $q' = \lambda_{p,2^{-k}}(F)$。于是 $\mathrm{diam}(\vec{I}_{p,k,r,F}) < 2^{-k}$且 $\mathrm{diam}(\vec{I}_{q,k,r,F}) < 2^{-k}$，因此

$$\mathrm{diam}\big(\vec{I}_{p,k,r,F} \vee J_0 \vee \mathfrak{f}(\vec{I}_{q,k,r,F})\big) < 2^{-k} + \mathrm{diam}(J_0) + 2^{1-k} = \mathrm{diam}(J_0) + 2^{1-k} < r\,.$$

由此可得 $F \in E^*_{p',q',r}$，并且 $J_1 = \psi_{p,q,r,F}$ 满足 $e(J_1) = (a_m, a_n)$，且 $\mathrm{diam}(J_1) < r$。˜于是存在 $k \in \omega$，使得 $J_1 = \psi_k(F)$，证毕。□

为完成定理 7.1 的证明，定义 $\boldsymbol{\sigma}\colon\ \mathcal{F}(X) \to \boldsymbol{C}$by $\boldsymbol{\sigma}(F) = \big(\tilde{\varphi}(F)\ \tilde{\psi}(F)\ F\big)$，并注意到，若 F是弧连通的，那么 $\tilde{\varphi}(F)$ 中任意两个元素 $\tilde{\varphi}_m(F)\ \tilde{\varphi}_n(F)$ 都是 E_F-等价的，然后应用引理 7.9。□

8. The exact complexity of $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(\boldsymbol{R}^2)$

由推论 7.2，平面中弧连通紧子集的集合 $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(\boldsymbol{R}^2)$ 是 $\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^2)$ 的一个ˇ$\mathcal{A}(\boldsymbol{\Pi}^1_1)$ 子集，我们现在证明这个复杂度上界是最优的。

定理 8.1。 集合 $\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}$（$\boldsymbol{R}^2$）是ˇ$\mathcal{A}$（$\boldsymbol{\Pi}^1_1$）-完备的。

证明。 我们先进行一些初步构造。

康托尔空间 $\boldsymbol{B}$： 首先，我们对所有 $\mathbb{I} = [0,1]$中的 $s \in \omega^{<\omega}$ 个实数 a_s 和 b_s 归纳定义如下:

取 $a_\emptyset = 0$、$b_\emptyset = 1$，并固定两个递增序列 $(a_n)_{n\in\omega}$、$(b_n)_{n\in\omega}$，使得:

$$a_\emptyset < a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots a_n < b_n < a_{n+1} < \cdots < b_\emptyset \quad \text{and} \quad b_\emptyset = \sup_n a_n = \sup_n b_n$$

于是对所有 $s \neq \emptyset$，若 $h_s\colon\ \xi \mapsto (1-\xi)a_s + \xi\, b_s$ 是满足 $h_s(\mathbb{I}) = [a_s, b_s]$ 的仿射函数。定义 $a_{s^\frown\langle n\rangle} = h_s(a_n)$ 和 $b_{s^\frown\langle n\rangle} = h_s(b_n)$。

于是 $\rho = \sup_{n\in\omega}(b_n - a_n) < 1$，且对所有 $s \in \mathbb{S}$，$b_s - a_s \leq \rho^{|s|}$。因此，对所有 $\sigma \in \omega^\omega$，实数 $b_\sigma = \inf_{s\prec\sigma} b_s = \sup_{s\prec\sigma} a_s$ 都有定义，并令:

$$\boldsymbol{B}_0 = \{b_s : s \in \omega^{<\omega}\}\quad;\quad \boldsymbol{B}_1 = \{b_\sigma : \sigma \in \omega^\omega\} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \cup \boldsymbol{B}_1$$

集合 $\boldsymbol{B}$ 显然是 $\mathbb{I}$ 的一个完美紧子集，且内部为空。

接下来的构造本质上归功于 Becker（参见 [4], 33.17 和 37.11）。令 $\mathscr{T} \subset 2^{\omega^{<\omega}}$ 表示 ω 上所有树组成的集合。

引理 8.2。 存在一个连续函数 $B\colon\ \mathscr{T} \to \mathcal{K}(\boldsymbol{R}^2)$，它为单位正方形 $\mathbb{I}^2$ 中的任意 $T \in \mathscr{T}$连通紧子集 $B(T)$ 赋予一个值:

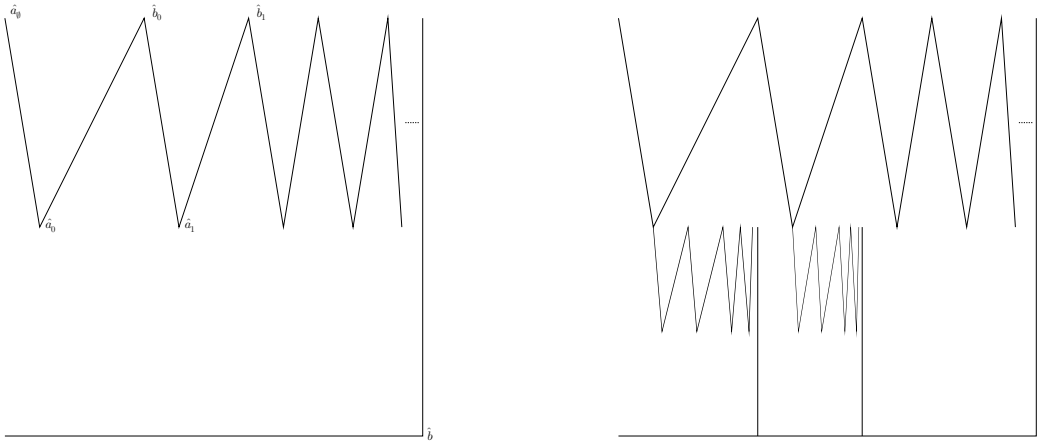
$a)$ $(0,\ 1) \in B(T)$ 和 $(\mathbb{I}\times\{0\}) \cup (\{1\}\times\mathbb{I}) \subset B(T)$，$b)$ $B(T)$ 至多有两个弧连通分支，$c)$ T 是非良基的 $\iff$ $B(T)$ 是弧连通的$\iff$在 $B(T)$ 中存在一条弧连接$(0,\ 1)$ 和 $(1,\ 0)$。

证明。对于任意 $u,\ v\in \boldsymbol{R}^2$ 我们将连接 u 与 v 的线段记为 $[u,v]$。对于所有 $s\in\omega^{<\omega}$，令 $\hat{a}_s,\ \hat{b}_s$ 为 $\boldsymbol{R}^2$ 中由 $\hat{a}_s=(a_s,\ 2^{-|s|})$ 和 $\hat{b}_s=(b_s,\ 2^{1-|s|})$ 定义的元素，并考虑由以下方式定义的 $\mathbb{I}^2$ 的紧子集族 $(R_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$：

$$R_\emptyset=(\mathbb{I}\times\{0\})\cup(\{1\}\times\mathbb{I})\cup[\hat{a}_\emptyset,\hat{a}_0]\ \cup\bigcup_{n\in\omega}\big([\hat{a}_n,\hat{b}_n]\cup[\hat{b}_n,\hat{a}_{n+1}]\big)$$

（见图 3）；并且对所有 $s\in\omega^{<\omega}$，R_s 是 $R_\emptyset$ 在将 $\hat{a}_\emptyset$ 映到 $\hat{a}_s$ 且将 $\{b_\emptyset\}\times\mathbb{I}$ 映到 $\{b_s\}\times[0,2^{-|s|}]$ 的仿射映射下的像。最后，对所有 $T\in\mathscr{T}$，令 $B(T)=\bigcup_{s\in T}R_s$。

FIGURE 3



显然，每个 R_s 都是连通但非弧连通的紧集。由于 R_s 和 $R_{s^\frown\langle n\rangle}$ 共有 $\hat{a}_{s^\frown\langle n\rangle}$ 和 $(b_s,\ 0)$，因此 $B(T)$ 中的任意点都可通过一条弧连接到 $\hat{a}_\emptyset$ 或 $b=(1,\ 0)$。因此，$B(T)$ 至多有两个弧连通分支。

集合 $B(T)$ 是紧致的：事实上，若 (z_i) 是 $B(T)$ 中的一个收敛到 $z\in\mathbb{I}^2$ 的序列，则存在一个序列 $s^{(i)}\in T$ 使得 $z_i\in R_{s^{(i)}}$，且我们可以抽取一个子序列，使得——或者 $s^{(i)}$ 是一个常值 s，此时 $z\in R_s$，因为 R_s 是闭集，

– 或者存在 $s\in T$ 以及一个收敛于 ∞ 的序列 (n_i)，使得 $s^\frown\langle n_i\rangle\preceq s^{(i)}$，然后 $z\in\{b_s\}\times[0,2^{-|s|}]\subset R_s\subset B(T)$，

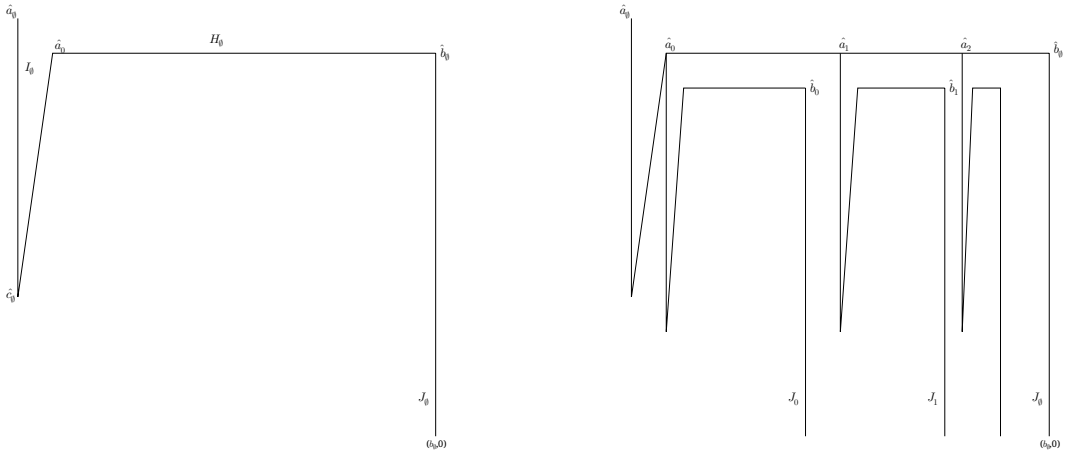
– 或者存在 $\sigma\in\omega^\omega$ 使得 $\sigma_{|i}\preceq s^{(i)}$，并且 $z_i\to(b_\sigma,\ 0)\ \in R_\emptyset\subset B(T)$。

不难看出，$T\mapsto B(T)$ 从 $\mathscr{T}$ 到 $\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^2)$ 是连续的。此外，如果 σ 是 T的一个分支，那么对于所有 $s\prec\sigma$，存在一条弧 $J_n\subset R_s\subset B(T)$，其端点为 $\hat{a}_{\sigma_{|n}}$和 $\hat{a}_{\sigma_{|n+1}}$。而 J_n的串接给出了一条连接 $\hat{a}_\emptyset$ 与 $(b_\sigma,\ 0)$ 的弧。因此在此情形下，$B(T)$ 是弧连通的。

反之，若 $B(T)$ 是弧连通的，令 $\gamma\colon\mathbb{I}\to B(T)$ 为连续映射，满足 $\gamma(0)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$，$\gamma(0)=\hat{a}_\emptyset$ 且 $\gamma(1)\in\mathbb{I}\times\{0\}$，并考虑 $\theta=\inf\{t:\ \gamma_2(t)=0\}>0$ and$\theta_k=\sup\{t<\theta:\ \gamma_2(t)\geq 2^{-k}\}$。那么对于 $\theta_k<t<\theta$，$\gamma_2(t)<2^{-k}$，存在某个 $s^{(k)}\in\omega^k$ 使得 $\gamma(t)\in\bigcup\{R_s;\ \ s\in T,\ 且\ s\succeq s^{(k)}\}$；因此 $s^{(k)}\in T$ 且 $s^{(k)}\prec s^{(k+1)}$。于是存在$\sigma\in\omega^\omega$ 使得对于所有 k，都有 $s^{(k)}\prec\sigma$。因此 σ 是 T 的一个分支，而 T 是非良基的。□

具有不可数多个弧连通分支的连通紧集

FIGURE 4



令 $\boldsymbol{B}$ 上述由元素 a_s、 b_s 和 b_σ 为 $s \in \omega^{<\omega}$ 和$\sigma \in \omega^\omega$构造的康托尔集，并固定一个递减序列（α_n） $\in \mathbb{I}$，使得 $\alpha_0 = 1$ 且 $\lim_n \alpha_n = \theta = \frac{2}{3}$。 –

对于所有满足 $|s| = k$ 的 $s \in \omega^{<\omega}$，令 P_s 为单位正方形以下四条线段的并（见图 4）：

– 端点为 $\hat{a}_s = (a_s, \alpha_k)$ 和 $\hat{c}_s = (a_s, \alpha_k - \theta)$ 的垂直线段 I_s（长度为 θ），– 端点为$\hat{c}_s$ 和 $\hat{}$ $a_{s^\frown\langle 0\rangle}$ 的线段，$\hat{}$ – 端点为 $\hat{}a_{s^\frown\langle 0\rangle}$ 和 $b_s = (b_s, \alpha_{k+1})$ 的水平线段 H_s，

$\hat{}$ – 端点为 b_s 和 $(b_s,0)$ 的垂直线段 J_s，其长度为 α_{k+1}。

显然，每个 P_s 都是弧连通的，并且与 $P_{s^\frown\langle n\rangle}$ 共有点 $\hat{}a_{s^\frown\langle n\rangle}$，因此 $= \bigcup_{s\in\omega^{<\omega}} P_s : P_\infty$ 是弧连通的，而紧集 $P = P_\infty$ 是连通的。

引理 8.3。集合 P 是 P_∞ 与垂直线段 $J_\sigma = \{b_\sigma\}\times[0,\theta]$ 的并集。此外， P 中不存在连接 $\hat{a}_\emptyset$ 与任意 J_σ 的弧。

证明。设 (z_i) 是 P_∞ 中收敛于 $z = (x, y) \in P$ 的点序列。存在一个 $s^{(i)} \in \omega^{<\omega}$ 使得 $z_i \in P_{s^{(i)}}$，并且再次可以提取一个子序列，使得：

– 或者 $s^{(i)}$ 是一个常数 s，于是 $z \in P_s \subset P_\infty$，因为 P_s 是闭集，

– 或者，存在 $s \in \omega^{<\omega}$ 和 n_i，它们在 ω 中收敛到 ∞，使得 $s^\frown\langle n_i\rangle \preceq s^{(i)}$，于是$z \in J_s \subset P_s \subset P_\infty$，

– 否则，存在 $\sigma \in \omega^\omega$ 使得 $\sigma_{|i} \preceq s^{(i)}$，于是 $y \le \theta$ 和 $x = b_\sigma$，因此 $z \in J_\sigma$。反过来，如果 $z = (b_\sigma,\ y) \in J_\sigma$，那么当 $s = \sigma_{|k}$时，点 $(a_s,\ y + \alpha_k - \theta)$ 属于 P_∞并收敛到 z；因此 $J_\sigma \subset P$。

如果存在一条弧 J 连接$\hat{a}_\emptyset$ 和 J_σ，那么对于每个$s \prec \sigma$， J 都应经过 H_s 中的点；并且对于每个 $s \prec \sigma$， J 都应包含 I_s，这是不可能的。因此，对于 $\sigma \in \omega^\omega$，每个 J_σ 都是 P的弧连通分支。□

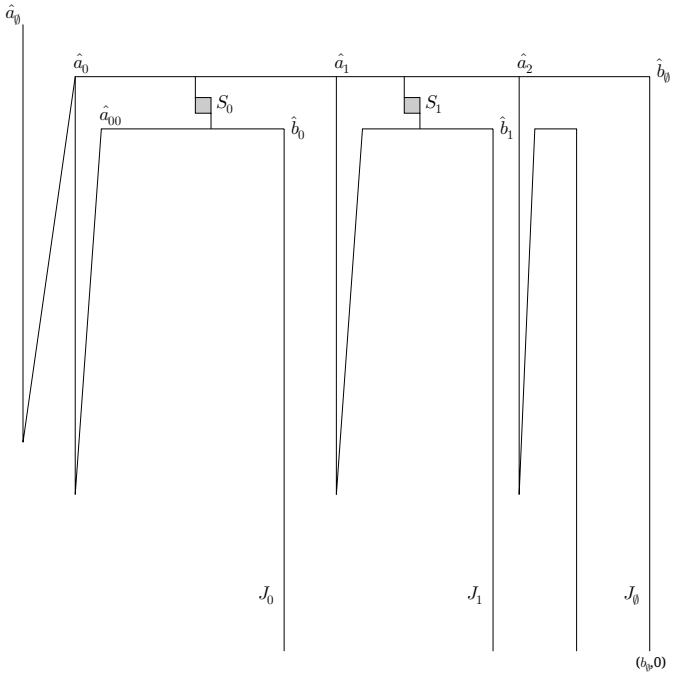
$\mathbb{I}^2$的紧致连通子集构造

我们回顾一下，对于任意长度为 $k = |s| > 0$ 的 $s \in \omega^{<\omega}$，我们用 s^* 表示长度为$k-1$ 且满足 $s^* \prec s$的序列。

现在，我们通过在 H_s 和H_{s^*} 之间添加捷径来修改上述构造的紧集 P：对每个长度为 $k \ge 1$ 的 $s \in \omega^{<\omega}$，在开矩形内选取一个小正方形 Q_s

$]a_{s^\frown\langle 0\rangle}$， $b_s[\times]\alpha_{k+1}$， $\alpha_k[$ ，并考虑将单位正方形 $\mathbb{I}^2$变换为 Q_s的正位似变换 h_s 。给定一棵树 $T_s \in \mathscr{T}$，捷径 S_s 将是 $h_s(B(T_s))$的并，其中 $B(T_s)$是引理 8.2 中定义的紧集，并由两条垂直线段分别连接$h_s(0,\ 1)$与 H_{s^*} 以及 $h_s(1,\ 0)$与 H_s （见图 5）。

FIGURE 5



那么，对于任意族 $\tilde{T} = (T_s)_{s\in\omega^{<\omega}} \in \mathscr{T}^{(\omega^{<\omega})}$，令

$$\Psi(\tilde{T}) = P \cup \bigcup_{k\geq 1} \bigcup_{s\in\omega^k} S_s.$$

引理 8.4. $\Psi(T)$ 是紧致且连通的。此外，函数 Ψ 是从紧空间 $\mathscr{T}^{(\omega^{<\omega})}$ 到 $\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^2)$的连续函数。

证明。 由于 $B(T_s)$ 的每个点都与 (0,1) 或 (1,0) 连通（若 T 是非良基的，则两者皆是），因此 S_s 的每个点都与 P_∞ 连通。所以 $\Psi(T)$ 是紧集 P 与弧连通集 $P_\infty \cup \bigcup_s S_s$的并，因而是连通的。

要证明 $\Psi(T)$ 是紧致的，只需证明：若 $\bigcup_s S_s$ 中的一个序列 (z_i) 收敛到 $z = (x, y) \in \mathbb{I}^2$，则 $z \in \Psi(\tilde{T})$。那么存在 $\omega^{<\omega}$ 中的一个序列 $(s^{(i)})$，使得 $z_i \in S_{s_i}$.同样，若 s_i 恒等于 s，则 S_s 是闭集且 $z \in S_s \subset \Psi(T)$。若存在 $s \in \omega^{<\omega}$ 以及一个趋于 ∞ 的序列 (n_i)，使得 $s^\frown\langle n_i\rangle \preceq s^{(i)}$，则 $x = b_s$ 且 $z \in J_s \subset P \subset \Psi(\tilde{T})$。最后，若存在 $\sigma \in \omega^\omega$ 使得 $\sigma_{|i} \preceq s^{(i)}$，则 $x = b_\sigma$ 且 $y = \theta$，因此 $z \in J_\sigma \subset \Psi(\tilde{T})$。

注意，对于每个 $\varepsilon > 0$，使得 $d(S_s,\ P) > \varepsilon$ 的 $s \in \omega^{<\omega}$ 只有有限多个。因此，若固定 $\omega^{<\omega}$ 的一个枚举 $(s^{(n)})_n$ ，那么 Ψ就是一列连续函数 ψ_n 的一致极限，这些函数从 $\mathscr{T}^{(\omega^{<\omega})}$ 映射到 $\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^2)$，并将任意 $\tilde{T}$ 关联到集合$\psi_n(\tilde{T}) = P \cup \bigcup_{j=0}^n S_{s^{(j)}}$；因此 Ψ 是连续的。□

由前文可知，$\Psi(T)\setminus\bigcup_{\sigma\in\omega^\omega} J_\sigma$ 是弧连通的，并且对于每个 $\sigma\in\omega^\omega$，要么是 $\Psi(T)$ 的一个弧连通分支，要么 J_σ 通过 $\Psi(T)$ 中的一条弧与 P_∞ 连通。

引理 8.5. 对于任意 $s\in\omega^{<\omega}$，$\Psi(T)\setminus H_s$ 都不连通，并且只要 $s\prec\sigma$，H_s 就将 $\hat{a}_s$ 与 J_σ 分隔开。因此，对于任意 $k\geq 0$，$\xi_k=\sup\{\xi\leq\xi^*:\gamma(\xi)\in H_{\sigma|_k}\}$ 都有定义，且 $\xi_k<\xi_{k+1}<\xi^*$。

证明。首先假设存在 $u\prec\sigma$，使得对于每个满足 $u\prec s\prec\sigma$ 的 s，T_s 都是非良基的。令 $s^{(k)}\in\omega^{<\omega}$ 为长度为 $|u|+k$ 的 σ 的起始部分。由于 $S_{s^{(k)}}$ 是弧连通的，对于每个 $k\geq 1$，存在一个连续函数 $\gamma_k:[1-2^{1-k},1-2^{-k}]\to H_{s^{(k-1)}}\cup H_{s^{(k)}}\cup S_{s^{(k)}}$，使得 $\gamma_k(1-2^{1-k})=\hat{a}_{s^{(k-1)}\frown\langle 0\rangle}$ 且 $\gamma_k(1-2^{-k})=\hat{a}_{s^{(k)}\frown\langle 0\rangle}$。由此可知，存在一个连续函数 $\gamma:[0,1[\to P_\infty\cup\bigcup_s S_s$，它扩展了所有的 γ_k，满足 $\gamma(0)\in P_\infty$，并且当 $\xi\to 1$ 时，$\gamma(\xi)\to(b_\sigma,\theta)\in J_\sigma$。这表明 J_σ 可通过一条弧在 $\Psi(T)$ 中与 P_∞ 连通。

反过来，假设存在一条连续路径 $\gamma:[0,1[\to\Psi(T)$ 使得 $\inf\{\xi:\gamma(\xi)\in J_\sigma\}>0$。容易看出，对于任意 $s\in\omega^{<\omega}$，$\Psi(T)\setminus H_s$ 都不连通，并且只要 $s\prec\sigma$，H_s 就将 $\hat{a}_s$ 与 J_σ 分隔开。因此，对所有 $k\geq 0$，$\xi_k=\sup\{\xi\leq\xi^*:\gamma(\xi)\in H_{\sigma|_k}\}$ 都有定义，且 $\xi_k<\xi_{k+1}<\xi^*$。那么，如果 $\xi^{**}=\sup\xi_k\leq\xi^*$，必然有 $\gamma(\xi^{**})\in\limsup_k H_{\sigma|_k}=\{(b_\sigma,\theta)\}\subset J_\sigma$，从而 $\xi^{**}=\xi^*$。此外，由于 γ 在 ξ^* 处连续，存在 k_0，使得对于 $\xi_{k_0}<\xi<\xi^*$：$d(\gamma(\xi)\ \gamma(\xi^*))<1-\theta$。由此可知，当 $k>k_0$ 时，没有点 $\hat{c}_{\sigma|_k}$ 能属于 $\gamma([\xi_{k_0},\xi^*[)$。因此，$\gamma$ 必须经过所有捷径 $S_{\sigma|_k}$，其中 $k>k_0$。这意味着，对所有 $k>k_0$，相应的树 $T_{\sigma|_k}$ 都是非良基的，而集合 $\{s\prec\sigma:T_s\text{ 良基}\}$ 是有限的。□

引理 8.6. 紧集 $\Psi(T)$ 是弧连通的，当且仅当对所有 $\sigma\in\omega^\omega$，仅有有限多个 T_s 满足 $s\prec\sigma$，且这些集合是良基的。

证明。紧集 $\Psi(T)$ 是弧连通的，当且仅当对每个 J_σ，$\sigma\in\omega^\omega$ 都能通过一条弧与 $\hat{a}_\emptyset$ 相连；根据前一个引理，这当且仅当仅有有限多个 T_s 满足 $s\prec\sigma$，且这些集合是良基的。□

为了完成定理 8.1 的证明，令 $Z\subset 2^\omega$ 为任意一个 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Pi}^1_1)$-集。我们要构造一个连续函数 $\Phi:2^\omega\to\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^2)$，使得 $\Phi(\zeta)$ 是弧连通的，当且仅当 $\zeta\in Z$。根据 $\check{\mathcal{A}}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ 的定义，存在一个由 $\mathbf{\Pi}^1_1$-集构成的苏斯林方案 $(\Gamma_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$，并且可以假设它是正规的，使得

$$2^\omega\setminus Z=\bigcup_{\sigma\in\omega^\omega}\bigcap_{s\prec\sigma}\Gamma_s$$

由于良基树的集合 WF 在 $\mathscr{T}$ 中是 $\mathbf{\Pi}^1_1$-完备的，因此对每个 $s\in\omega^{<\omega}$，我们都可以找到一个连续函数 $T_s:\zeta\mapsto T_s(\zeta)$，使得 $T_s(\zeta)\in WF\iff\zeta\in\Gamma_s$。于是，由 $\tilde{T}(\zeta)=(T_s(\zeta))_{s\in\omega^{<\omega}}$ 定义的函数 $\tilde{T}:2^\omega\to\mathscr{T}^{(\omega^{<\omega})}$ 也是连续的，因此 $\Phi:\zeta\mapsto\Psi(\tilde{T}(\zeta))$ 也连续。

若 $\zeta\in Z$，则对所有 $\sigma\in\omega^\omega$，$\zeta\notin\bigcap_{s\prec\sigma}\Gamma_s$ 都有此结论，因此存在 $s_0\prec\sigma$ 使得 $\zeta\notin\Gamma_{s_0}$；又由于苏斯林方案是正则的，对于 $s_0\preceq s\prec\sigma$ 我们也有：$\zeta\notin\Gamma_s$，且树 $T_s(\zeta)$ 是非良基的；由此可知，J_σ 与 $\hat{a}_\emptyset$ 由一条弧连通。由于这对所有 J_σ 都成立，紧集 $\Phi(\zeta)$ 是弧连通的。

反过来，如果存在 $\zeta\notin Z$ $\sigma\in\omega^\omega$，使得对所有 $s\prec\sigma$：$\zeta\in\Gamma_s$ 且 $T_s(\zeta)\in WF$；那么可知 J_σ 与 $\hat{a}_\emptyset$ 之间不存在弧，并且 $\Phi(\zeta)$ 不是弧连通的。

因此 $Z=\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{\mathrm{arc}}(\boldsymbol{R}^2))$，证明完毕。□

References

1. H. Becker 和 R. Pol, *Note on path-components in complete spaces*, 《拓扑学及其应用》**114** (2001), 107–114. 2. G. Debs 和 J. Saint Raymond, *The descriptive complexity of connectedness in Polish spaces*。《基础数学》**249** (2020) , n° 3, 261–286.

3. G. Debs 和 J. Saint Raymond, *On the arc-wise connection relation in the plane.*《拓扑学及其应用》, doi : 10.1016/j.topol.2024.108975, 即将出版。 4. A. Kechris, *Classical descriptive set theory*。《数学研究生教材》, **156**。施普林格出版社，纽约，1995。 5. K. Kuratowski, *Topology Vol. I.* 新版，修订并增补。J. Jaworowski 从法文译出。学术出版社，纽约-伦敦；Pa ´nstwowe Wydawnictwo Naukowe，华沙（1966）。 6. K. Kunen 和 M.Starbird, *Arc components in metric continua*,《拓扑学及其应用》**14**(1982)167–170. 7. R.L. Moore, *Concerning triods in the plane and the junction points of plane continua*,《美国国家科学院院刊》**14** (1928) 85–88.

Gabriel Debs, Sorbonne Université, Université Paris Diderot, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG, F-75005, Paris, France*Email address*: gabriel.debs@imj-prg.fr

Jean Saint Raymond, Sorbonne Université, Université Paris Diderot, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG, F-75005, Paris, France*Email address*: jean.saint-raymond@imj-prg.fr