arXiv:2601.13159v1 [math.MG] 19 Jan 2026

平面上的离散对数闵可夫斯基问题

TOM BAUMBACH

摘要。本文刻画了锥体积集 $C_{cv}(U)$ 的闭包的凸包。该集合由满足外单位法向量包含于 U 的多边形的所有锥体积向量组成，其中 $U \subseteq \mathbb{R}^2$,pos(U) $= \mathbb{R}^2$ 是任意有限集。我们通过给出顶点表示和半空间表示，证明该凸包只有有限个极点。由此，我们推导出关于在 $\mathbb{R}^2$中对数闵可夫斯基问题存在解的新必要条件，这些条件取决于 U。

1. 引言

本文讨论的空间是 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$。对于两个向量 $x, y \in \mathbb{R}^n$，我们用 $\langle x, y\rangle$ 表示 x 与 y 的标准标量积，而 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ 表示相应的欧几里得范数； $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ 是 $(n-1)$-球面。非空集 $M \subset \mathbb{R}^n$ 的凸包记作 conv M，若 M 是有限集，则 conv M 称为多面体；将多面体表示为 $P = \text{conv}(M)$，称为其 $\mathcal{V}$-表示。根据一个归功于 Minkowski 和 Weyl 的结果， $P \subset \mathbb{R}^n$ 是多面体当且仅当

$$P = P(U, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : U^\intercal x \leq b\} = \bigcap_{i=1}^{m} H^-(u_i, b_i)$$

对于矩阵 $U = (u_1, \ldots, u_m) \in (\mathbb{S}^{n-1})^m$，满足 pos($U$) $= \mathbb{R}^n$ 且 $b \in \mathbb{R}^m$。这称为多面体的$\mathcal{H}$-表示。这里，pos(U)表示正包，即向量 $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{S}^{n-1}$ 的所有非负线性组合构成的集合。显然，我们可以假设这些列向量两两不同，因此令

$$\mathcal{U}(n, m) = \left\{U = (u_1, \ldots, u_m) \in (\mathbb{S}^{n-1})^m : \text{pos}(U) = \mathbb{R}^n, u_i \neq u_j, i \neq j\right\}.$$

对于 $1 \leq i \leq m$，令

$$F_i(b) = F(u_i, b) = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u_i, x\rangle = b_i\}$$

它始终是 P 的一个面，并且可能为空。如果 dim $F_i(b) = \dim P - 1$，则 $F_i(b)$ 称为 P 的一个面。对于 $M \subset \mathbb{R}^n$，我们用 vol (M) 表示其体积，即其 n 维勒贝格测度。如果 M 包含于一个 k 维平面 A 中，则 vol $_k(M)$ 表示相对于 A 的 k 维勒贝格测度。

关键词与短语。 对数 Minkowski 问题，子空间集中条件，锥体积测度，拟阵基多面体。

我们主要假设 $b \geq 0$。这意味着 $0 \in P$；如果 $b > 0$，那么 $0 \in \operatorname{int} P$，即 0 是 P 的一个内部点，因此 $\dim P = n$。如果 $F_i(b)$ 是 $P(U, b)$ 的一个面，那么 $\frac{1}{n} b_i \operatorname{vol}_{n-1}(F_i(b))$ 就是锥体（金字塔）$\operatorname{conv}(\{0\} \cup F_i(b))$ 的体积。至于 $U \in \mathcal{U}(n, m)$，$P(U, b)$ 是所有这些锥体的内部不交并，我们可以写成

$$\operatorname{vol}(P(U, b)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} b_i \operatorname{vol}_{n-1}(F_i(b)).$$

$\gamma(U, b)$的锥体积向量，其分量为锥体 $\operatorname{conv}(\{0\} \cup F_i)$ 的体积

$$\gamma(U, b) = \left(\frac{1}{n} b_1 \operatorname{vol}_{n-1}(F_1(b)), \ldots, \frac{1}{n} b_m \operatorname{vol}_{n-1}(F_m(b)) \right),$$

而锥体积集为 $C_{\mathrm{cv}}(U) = \{\gamma(U, b) : b \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}, \text{体积 } _n(P(U, b)) = 1\}$，参见 [3]。

对于这样的 $P = P(U, b)$，维数为 $\dim P = n$，我们考虑其锥体积测度 V_P，它是有限的非负博雷尔测度 $\mathrm{V}_P : \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，其中$\mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})$包含 $\mathbb{S}^{n-1}$的所有可测子集，定义为

$$\mathrm{V}_P(\eta) = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{n} \operatorname{vol}_{n-1}(F_i(b))\, \delta_{u_i}(\eta) = \sum_{u_i \in \eta} \frac{b_i}{n} \operatorname{vol}_{n-1}(F_i(b)).$$

这里，$\eta \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ 是博雷尔集，$\delta_{u_i}(\cdot)$是 u_i中的狄拉克测度，即$\delta_{u_i}(\eta) = 1$ 若 $u_i \in \eta$成立，否则为 0。

Böröczky、Lutwak、Yang 和 Zhang 提出的离散对数 Minkowski（存在性）问题 [9] 要求给出一有限离散博雷尔测度的必要且充分条件，使得

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \mu(\eta) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i\, \delta_{u_i}(\eta)$$

其中 $u_i \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\gamma_i > 0$ 是多面体的锥体积测度。我们也将这种测度记为 $\mu(U, \gamma)$，其中 $\gamma \in \mathbb{R}^m_{>0}$ 是由元素 γ_i 组成的向量。

这一离散问题可以推广到连续情形，即推广到所有凸体构成的空间；相应的一般对数 Minkowski 问题是现代凸几何的基石。关于其历史、意义和影响，请参见 [5–9, 11, 14, 15, 22, 23] 及其中的参考文献。本文将只关注离散情形。

为了研究平面中的离散对数闵可夫斯基问题，我们考虑锥体积集 $C_{\mathrm{cv}}(U)$，其中 $U \in \mathcal{U}(2, m)$。

Stancu [20, 21] 在一些特殊情形下研究了离散平面对数闵可夫斯基问题的解的存在性。具体而言，Stancu 针对特殊的外单位法向量集合 U 研究了该问题，并分析了解的数量 [21]。Pollehn [18] 计算了梯形的锥体积集。Liu 等人 [16] 针对中心对称多边形提出了平面情形下一个新的必要条件，并考察了四边形的解。

对于偶对数 Minkowski 问题，我们考虑集合 $U = U^s \in \mathcal{U}(n, 2m)$，满足 $u_i = -u_{i+m}$ for $i = 1, \ldots, m$，并将注意力限制在原点对称多面体 $P = P(U^s, b^s)$ 上，其中右端

项对称为 $b_i^s = b_{i+m}^s, i = 1, \ldots, m$。相应的对称锥体积集为

$$C_{\mathsf{cv}}^s(U^s) = \{\gamma(U^s, b^s) : b^s \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{2m}, \operatorname{vol}_n(P(U^s, b^s)) = 1\}.$$

Stancu [20] 给出了平面上对称锥体积集的完整刻画。下文中，relint(M) 表示 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 的相对内部，即相对于由 M 仿射包所确定的环境空间而言的内部点集，其中 M 为点集。

定理 I. *[20, 定理 1.2.]* 设 $U^s \in \mathcal{U}(2, 2m)$ 和 $m > 2$。则有

$$C_{\mathsf{cv}}^s(U^s) \cap \mathbb{R}_{>0}^{2m} = \operatorname{relint}(P_{\mathsf{scc}}(U^s)) \cap \left\{x \in \mathbb{R}^{2m} : x_i = x_{m+i},\ 1 \leq i \leq m\right\}.$$

在预备知识中，我们将回顾多面体 $P_{\mathsf{scc}}(U)$ 的定义，其中 $U \in \mathcal{U}(2, m)$; 该多面体由 [3], 引入，称为（ U 的）子空间集中多胞体。经过缩放后，多面体 $P_{\mathsf{scc}}(U)$ 就是由 U 的列向量构成的拟阵基多面体。

定理 I 后来在开创性的论文 [9] 中得到了推广。研究表明，偶有限正博雷尔测度 $\mu(U, \gamma)$ 是某个原点对称多面体 $P(U, b)$ 的锥体积测度，当且仅当 $\mu(U, \gamma)$ 满足由 Böröczky 等人 [9] 提出的子空间集中条件 (scc)。若有限离散博雷尔测度 $\mu = \mu(U, \gamma) : \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ with$U \in \mathcal{U}(n, m)$, $\gamma > 0$ 满足 scc，则称其满足该条件:

i) 对每个真线性子空间 $L \subset \mathbb{R}^n$，都有

$$\mu(L) = \sum_{u_i \in L} \gamma_i \leq \frac{\dim L}{n} \mu(\mathbb{S}^{n-1}), \tag{1.1}$$

ii) 当且仅当存在一个与 L 互补的子空间 L，使得 $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset \overline{L} \cup L$ 时，等式 (1.1) 成立。

这一刻画可以利用锥体积集重新表述（另见 [17, 定理 4.7]）。对于 $U^s \in \mathcal{U}(n, 2m)$，有

$$C_{\mathsf{cv}}^s(U^s) \cap \mathbb{R}_{>0}^{2m} = \operatorname{relint}(P_{\mathsf{scc}}(U^s)) \cap \left\{x \in \mathbb{R}^{2m} : x_i = x_{m+i},\ 1 \leq i \leq m\right\}.$$

在非对称情形下，以下等式成立。考虑集合$U \in \mathcal{U}(n, m)$。当且仅当 $m = 2n$时，$C_{\mathsf{cv}}(U) = P_{\mathsf{scc}}(U)$，且经过重新编号后有 $u_{n+i} = -u_i$, $1 \leq i \leq n$ ([3, 定理 2.11])。

对于 $\mathbb{R}^2$中的非对称离散测度，Stancu [20]给出了其存在的一些充分条件。

定理 II. *[20, 定理 1.1.]* 设 $U \in \mathcal{U}(2, m)$ 且 $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,$\mu(\eta) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \delta_{u_i}(\eta)$，其中 $\gamma_i > 0$ 对 $i = 1, \ldots, m$成立。假设以下条件之一成立:

i) $m \geq 4$ 且 U 由两两线性无关向量组成。

ii) $m > 4$ 和 U 至少包含两个线性相关向量。对于任意满足 $u_j = -u_k$ 的 j、k，我们有

$$\gamma_j + \gamma_k < \sum_{i \neq j,k} \gamma_i.$$

iii) $m = 4$、U 包含一对唯一的相反向量，即 $u_1 = -u_3$ 和 $\gamma_1 + \gamma_3 < \gamma_2 + \gamma_4$。

于是存在一个多边形 $P = P(U, b)$ 使得 $\mu = V_P$。

根据定义，对于 $U \in \mathcal{U}(2, m)$，锥体积集 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 是$\{x \in \mathbb{R}^m\colon\ x \geq 0,\, x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1\}$ 的子集；根据定理 II i)，它可以达到这么大。后来，朱 [23, Thm.] 推广了这一结果。设 $U \in \mathcal{U}(n, m)$ 处于一般位置，即任意 n 列的 U 都线性无关。于是

$$\begin{aligned} C_{\mathsf{cv}}(U) \cap \mathbb{R}^m_{>0} &= \{x \in \mathbb{R}^m : x > 0,\, x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1\} \\ &= \operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_m\} \cap \mathbb{R}^m_{>0}. \end{aligned}$$

根据 Chen 等人 [11], 的一项结果，我们还有如下包含关系，这是定理 II ii) 的推广。设 $U \in \mathcal{U}(n, m)$。则有

$$C_{\mathsf{cv}}(U) \cap \mathbb{R}^m_{>0} \supseteq \operatorname{relint} P_{\mathsf{scc}}(U).$$

在一般情形下，我们知道锥体积集 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 是一个半代数集 [3, Theorem 1.3]，因此理论上可以计算（非对称）离散对数闵可夫斯基问题的充要条件。然而，这种方法并不十分实用，因为我们需要用到塔斯基–塞登伯格原理 [4,Theorem 2.2.1]。

此外，一般而言，锥体积集 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 既不是凸的，也不是闭合的 [3, 命题 2.9]。因此，我们研究锥体积集 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 的闭包的凸包的极点，记作 $\operatorname{cl}(\operatorname{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$，其中我们将范围限制在集合 $U \in \mathcal{U}(2, m)$。

为了刻画集合 $\operatorname{cl}(\operatorname{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$ 的极点，我们考虑 U 的以下子集。

定义 1.1. 设 $U \in \mathcal{U}(2, m)$。则定义以下三个集合

$$\begin{aligned} U_\Delta &\coloneqq \{u \in U :\ \text{there are vectors } v, w \in U \text{ s.t. } \operatorname{pos}\{u, v, w\} = \mathbb{R}^2\}, \\ U_\square &\coloneqq U \setminus U_\Delta \text{ and} \\ U_{\square,u} &\coloneqq \{x, y \in U : \operatorname{pos}\{u, -u, x, y\} = \mathbb{R}^2\} \text{ for } u \in U_\square. \end{aligned}$$

下面给出 $\operatorname{cl}(\operatorname{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$ 的 $\mathcal{V}$-表示。

定理 1.2. 设 $U \in \mathcal{U}(2, m)$。$\operatorname{cl}(\operatorname{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$ 的顶点由下式给出

$$\bigcup_{i : u_i \in U_\Delta} \{e_i\} \cup \bigcup_{(i,j) : u_i \in U_\square, u_j \in U_{\square, u_i}} \left\{\frac{1}{2}(e_i + e_j)\right\}.$$

此外，我们还给出了 $\operatorname{cl}(\operatorname{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$ 的$\mathcal{H}$表示。

定理 1.3。设 $U \in \mathcal{U}(2,\ m)$。那么

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))) = \left(\bigcap_{i:u_i\in U_\Delta} H^-(e_i,1)\right) \cap \left(\bigcap_{(i,j):u_i\in U_\square,-u_j=u_i} H^-\left(e_i+\frac{1}{2}e_j,\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\cap \left(\bigcap_{(i,k):u_i\in U_\square,u_k\in U_{\square,u_i}} H^-(e_i+e_k,1)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} H^-(-e_i,0)\right)$$

$$\cap H(e_1+\cdots+e_m,1),$$

一般而言，$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$ 的 $\mathcal{H}$-表示是冗余的：并非所有不等式都定义面（参见命题 3.1 及其后续讨论）。

本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾子空间集中多胞体 $P_{\mathsf{scc}}(U)$ 和锥体积集$C_{\mathsf{cv}}(U)$ 的定义及其基本性质。在第 3 节中，我们分析子集 U_Δ，$U_\square$ 和 $U_{\square,\ u}$ 的结构。利用关于这些集合结构的结果，我们进一步发展相关理论，以刻画集合 $U \in \mathcal{U}(2,\ m)$ 的锥体积集凸包的闭包，从而得到对数 Minkowski 问题所需的全部线性不等式。

2. 预备知识

本文以 [3] 中的工作为基础。为求完整，我们重新回顾其中的预备知识，但仅关注平面情形。本节回顾子空间集中多胞体以及锥体积集的基本性质。

此外，我们将注意力限制在 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{S}^1$有限集上，从而确保所有讨论和结果都具有明确定义的组合与几何背景。

对于集合 $U \in \mathcal{U}(2,m)$，我们按照 [3] 的定义子空间集中集。对于 $S \subseteq U$，我们将其称为 U 中的列子元组，并用 $\mathrm{rk}(S)$ 表示相对于这些列的线性张成的维数。

关于拟阵多胞体，有两个重要的集合，分别对应于 scc 中的两种不同情形。这两个集合都由U的子集组成：

i) $\mathcal{L}(U) := \left\{S \subseteq U : \mathrm{rk}(S) = 1 \text{ and } U \cap \mathrm{lin}(S) = S\right\}$

ii) $\mathcal{F}(U) := \left\{S \in \mathcal{L}(U) : \mathrm{lin}(S) \cap \mathrm{lin}(U \setminus S) = \{0\}\right\}.$

由于我们只处理集合 $U \in \mathcal{U}(2,m)$，因此有如下刻画。

命题 2.1。设 $U \in \mathcal{U}(2,m)$。则 $\mathcal{L}(U) \neq \varnothing$ 当且仅当对于某些 u、$v \in \mathbb{S}^1$，有 $U = \{\pm u, \pm v\}$。

证明。首先，显然有 $\{\pm v\} \in \mathcal{L}(U)$，若 $U = \{\pm u\} \cup \{\pm v\}$。

对于另一个方向，考虑满足 $S \in \mathcal{L}(U)$ 的集合 U。那么存在向量 u, $v \in \mathbb{S}^1$，使得 $S \subseteq \{\pm u\}$ 以及 $U \setminus S \subseteq \{\pm v\}$。由于成立

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{pos}(U),$$

我们得到 $U = \{\pm u, \pm v\}$。 □

子空间集中多胞体定义为集合

$$P_{\mathsf{scc}}(U) \coloneqq \Big\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ \sum_{i:u_i \in \operatorname{lin} S} x_i \leq \frac{rk(S)}{n}, \text{ for all } S \in \mathcal{L}(U) \Big\},$$

它与子空间集中条件及锥体积集密切相关，参见 [7, 9, 11, 23]。子空间集中多胞体 $P_{\mathsf{scc}}(U)$ 是拟阵多面体 [10], 的一个特例，其中拟阵由 U 和 $\mathcal{I}$ 构成；$\mathcal{I}$ 是包含 U 的所有线性无关子集的集合。

集合 $P_{\mathsf{scc}}(U)$ 是一个多胞体，也就是说， $P_{\mathsf{scc}}(U)$ 可以用半空间表示（这可直接由其定义得到），也可以用顶点表示。 $P_{\mathsf{scc}}(U)$ 的 $\mathcal{V}-$ 表示已在论文 [10, 12], 中确立，下面我们将回顾相关内容

$$P_{\mathsf{scc}}(U) = \operatorname{conv} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{u_i \in B} e_i : B \subseteq U \text{ is a linear basis of } \mathbb{R}^2 \right\}.$$

此外，拟阵多胞体的维数已在 [13] 中计算并证明。

接下来，我们考虑平面上的锥体积集。对于 $U \in \mathcal{U}(2, m)$ 和 $b \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ ，锥体积向量为

$$\gamma(U, b) = \frac{1}{2} \Big(b_1 \operatorname{vol}_1(F(u_1)), \ldots, b_m \operatorname{vol}_1(F(u_m)) \Big)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}.$$

注意，如果 $F_i(b)$ 不是多边形 $P(U, b)$ 或 $b_i = 0$ 的一条边，那么其中某些分量可能为零。锥体积集为

$$C_{\mathsf{cv}}(U) = \Big\{ \gamma(U, b) : b \in \mathbb{R}^m_{\geq 0} \text{ and } \operatorname{vol}_2(P(U, b)) = 1 \Big\}.$$

任意一个类型为 $P(U, b)$ 的二维多边形的锥体积向量 $\gamma(U, b)$，经过缩放使体积为 1 后，都是 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 中的一个元素，因为

$$\frac{1}{\operatorname{vol}_2(P(U, b))} \gamma(U, b) = \gamma \left(U, (\operatorname{vol}_2(P(U, b)))^{-1/2} b \right) \in C_{\mathsf{cv}}(U).$$

子空间集中多胞体 $P_{\mathsf{scc}}(U)$ 和锥体积集 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 均可通过考虑 U 的所谓分隔集 来分解；它们是$\mathcal{F}(U)$ 的特殊元素。

定义 2.2. 设 $U \in \mathcal{U}(2, m)$。若集合 U 满足 $\mathcal{F}(U) = \varnothing$，则称其为不可约；否则称为可约。

此外，对于分隔集 $S \in \mathcal{F}(U)$，必有 $S = \operatorname{lin}(S) \cap U$；在拟阵术语中，这也称为 S 是闭合的。注意，给定集合 U 的分隔集数量有限，因此不可约分隔集的数量也有限。利用这些分隔集，我们可以得到子空间集中多胞体 $P_{\mathsf{scc}}(U)$ 的一个简单得多的表示。

根据拟阵理论，我们推导出以下结论： [1, 定理 6.81]。

命题 2.3. *[3,* 命题 *2.3 + 2.7]* 设 $U \in U(2,m)$ 为可约的。那么，经过重新编号后，有

$$P_{\mathsf{scc}}(U) = \left\{x \in \mathbb{R}^4_{\geq 0} : x_1 + x_2 = \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^4_{\geq 0} : x_3 + x_4 = \frac{1}{2}\right\},$$

以及

$$C_{\mathsf{cv}}(U) = \left\{\gamma \in \mathbb{R}^4_{\geq 0} : \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\gamma \in \mathbb{R}^4_{\geq 0} : \gamma_3 + \gamma_4 = \frac{1}{2}\right\}.$$

因此，可约集合具有非常特殊的形式，我们将在第 3 节中用到这一点。

最后，我们指出，$P_{\mathsf{scc}}(U)$ 和 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 特别是线性不变量，后文将会用到。

引理 2.4。 *[3,* 命题 *2.1]* 设 U 如上，并设 $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$。则 $P_{\mathsf{scc}}(AU) = P_{\mathsf{scc}}(U)$ 和 $C_{\mathsf{cv}}(U) = C_{\mathsf{cv}}(AU)$。

3. 平面情形

本节聚焦于平面情形，即考虑情形 $n = 2$。我们证明，凸体 cl(conv($C_{\mathsf{cv}}(U)$)) 实际上是一个多面体，并给出完整的$\mathcal{V}$表示和$\mathcal{H}$表示。

首先，我们考察梯形，其锥体积集已在 [18, Theorem2.14], 中得到完整刻画，从而完整刻画了定理 II iii) 中的情形。

定理 III。 设 μ是定义在 $\mathbb{S}^1$ 上的非零有限博雷尔测度，其支撑由两两不同且按逆时针顺序排列的单位向量 u_1、u_2、u_3、$u_4 \in \mathbb{S}^1$组成。此外，假设 $u_1 = -u_3$，且存在一个开半球$u_3 \in \omega \subset \mathbb{S}^1$，使得 u_2、$u_4 \notin \omega$ 和 $u_2 \neq -u_4$。

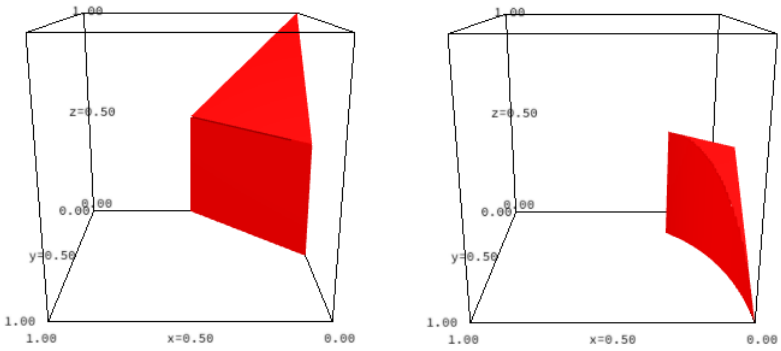
测度 μ 是一个锥体积测度，即存在一个多边形 P，其外法向量集包含于 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，使得 $V_P = \mu$，当且仅当以下条件之一成立

$$\begin{aligned} &(i)\ \mu(u_1) + \mu(u_3) < \mu(u_2) + \mu(u_4),\ or \\ &(ii)\ \mu(u_1) + \mu(u_3) \geq \mu(u_2) + \mu(u_4) \geq 2\sqrt{\mu(u_1)\mu(u_3)}\ and\ \mu(u_1) < \mu(u_3). \end{aligned}$$

我们将详细考察平行四边形和梯形的情形，以便能够给出平面情形下凸包 cl(conv($C_{\mathsf{cv}}(U)$)) 的$\mathcal{V}$-表示和$\mathcal{H}$-表示。这有助于我们更好地理解三角形、梯形和平行四边形的锥体积集，而这对于理解一般锥体积集的凸包的极点至关重要。

首先，我们考虑定理 III 的情形，并希望找到集合 cl(conv($C_{\mathsf{cv}}(U)$)) 的$\mathcal{V}$-表示和 $\mathcal{H}$-表示。从这些不等式可以清楚地看出，锥体积集 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 不是凸集，因为描述锥体积集的不等式涉及平方根不等式。如果将其绘制在三维空间中，则可以将其划分为两个子集，其中一个对应于 $P_{\mathsf{scc}}(U)$，另一个满足平方根不等式。为了将维数为 3 的锥体积集 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 可视化，我们将其投影到 $\mathbb{R}^3$ 中。包含于 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 中的子集

对应于不等式 (i) 的子集包含子空间集中多胞体$P_{\mathsf{scc}}(U)$，这意味着 $P_{\mathsf{scc}}(U) \subset C_{\mathsf{cv}}(U)$，从而 $P_{\mathsf{scc}}(U) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$。



(a) 定理 III 的情形 (i)　　(b) 定理 III 的情形 (ii)

图1。锥体积集 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 是 (A) 和 (B) 中所示子集的并集。设 $\gamma \in C_{\mathsf{cv}}(U)$。$x-$ 轴对应于 γ_1，$y-$ 轴对应于 γ_3，而 $z-$ 轴对应于 γ_2。$C_{\mathsf{cv}}(U)$ 中相应的向量由公式 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 1-\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3)$ 给出。

为建立直观认识，我们对以下命题给出可视化证明；依据本节的思路可以得到完全严格的证明，不过这需要大量计算。

命题 3.1。设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset \mathbb{S}^1$ 是一组按逆时针顺序排列的单位向量，其中 $u_1 = -u_3$，且 $\omega \subset \mathbb{S}^1$ 是一个开半球，使得 $U \cap \omega = \{u_3\}$ 且 $u_2 \neq u_4$。那么

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))) = \mathrm{conv}\left\{e_2, e_3, e_4, \frac{1}{2}(e_1+e_2), \frac{1}{2}(e_1+e_4)\right\}$$

and

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))) = \bigcap_{i=2}^{4} H^-(e_i, 1) \cap H^-\left(e_1 + \frac{1}{2}e_3, \frac{1}{2}\right) \cap H^-(e_1+e_2, 1)$$
$$\cap H^-(e_1+e_4, 1) \cap H(e_1+e_2+e_3+e_4, 1) \cap \bigcap_{i=1}^{4} H^+(e_i, 0).$$

证明。我们关注 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))$ 的 H-表示。令 U 表示球面上的点，见图2。由定理 III 的设定可知，集合 $\{u_2, u_3, u_4\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的单纯正基。因此，存在多边形 $P_2 = P(U, b_2)$ $P_3 = P(U, b_3)$ $P_4 = P(U, b_4)$，其外法向量集为 $\{u_2, u_3, u_4\}$，对应的锥体积向量分别为 e_2、e_3 和 e_4。例如，对于顶点 e_2，取图2中的三角形，并将其平移，使顶点 v_1 位于原点，再对其缩放，使体积等于 1。因此，与 u_2、u_3 和 u_4 对应的锥体积不等式分别为 $H^-(e_2, 1)$、$H^-(e_3, 1)$ 和 $H^-(e_4, 1)$，且每个不等式

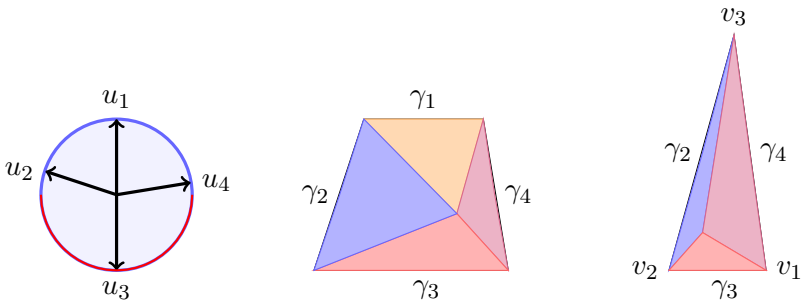


图2。在球面上绘制的集合 U，其中开放半球 $\omega \subset \mathbb{S}^1$ 以红色标出。集合 U 使我们能够构造外法向量位于 U 中的梯形和三角形。每个 γ_i 表示与由 u_i 定义的面相对应的锥体积。

也都能取到等号。为了刻画 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U))$，我们还需要向量 u_1 对应的锥体积不等式。观察图1可得，这些不等式恰为

$$H^-\left(e_1+\frac{1}{2}e_3,\frac{1}{2}\right), \quad H^-(e_1+e_2,1) \quad \text{and} \quad H^-(e_1+e_4,1).$$

这些不等式只有在取极限时才能得到，正如我们稍后将在推论 3.7 中看到的那样。我们可以将 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U)))$ 表示为半空间的交集：

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U))) = \bigcap_{i=2}^{4} H^-(e_i,1) \cap H^-\left(e_1+\frac{1}{2}e_3,\frac{1}{2}\right) \cap H^-(e_1+e_2,1) \\ \cap H^-(e_1+e_4,1) \cap H(e_1+e_2+e_3+e_4,1) \cap \bigcap_{i=1}^{4} H^+(e_i,0).$$

建立了 $\mathcal{H}$-表示后，我们可以计算 $\mathcal{V}$-表示：

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U))) = \mathrm{conv}\left\{e_2,e_3,e_4,\frac{1}{2}(e_1+e_2),\frac{1}{2}(e_1+e_4)\right\}.$$

□

我们可以在图1中看到 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U)))$ 的顶点。这些顶点依次对应于点 $(0,1,0)$，$(0,0,1)$，$(0,0,0)$，$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ 和 $(\frac{1}{2},0,0)$。命题 3.1 给出的 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U)))$ 的 $\mathcal{H}$-表示存在冗余：它包含十一条不等式，而 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U)))$ 只有五个面；见图 1。不过，由于 $\dim(C_{\mathrm{cv}}(U)) = m-1 = 3$ [3，命题 2.7]，且顶点集和一个 $\mathcal{H}$-表示均已知，因此可以通过确定哪些不等式支撑 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U)))$ 的一个 $(m-2)$ 维面，得到一个无冗余的 $\mathcal{H}$- 表示，也就是说，确定哪些不等式实际上相对于给定顶点定义了面。结合定理 1.2 和定理 1.3，这种方法适用于任意 $U \in \mathcal{U}(2, m)$。

请注意，在 $\mathsf{cl}(\mathsf{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$ 的 $\mathcal{V}$-表示中，当且仅当 u_i 与包含在 U 中的另外两个向量构成一个三角形时，才有顶点 e_i。稍后我们也会对此给出严格证明。此外，顶点 $\frac{1}{2}(e_i + e_j)$ 对应于一些梯形，其中 $-u_i \in U$ 和 u_j 是外法向量，它们定义的面与由 u_i 定义的面相交。这并非巧合，稍后便会看到。

最后，我们简要讨论情形 $u_2 = -u_4$，即我们有一个平行多面体。

命题 3.2. 设 $U = \{\pm u, \pm v\}$，其中 $v, u \in \mathbb{S}^1, u \neq v$。则有

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))) = \mathrm{conv}\left\{\frac{1}{2}(e_3+e_2), \frac{1}{2}(e_3+e_4), \frac{1}{2}(e_1+e_2), \frac{1}{2}(e_1+e_4)\right\}.$$

以及

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))) =$$

$$\bigcap_{i=1,3,j=2,4} H^-\left(\frac{1}{2}(e_i+e_j), 1\right) \cap H(e_1+e_2+e_3+e_4, 1) \cap \bigcap_{i=1}^{4} H^+(e_i, 0).$$

证明。我们有 U 的如下表示，见图 3。

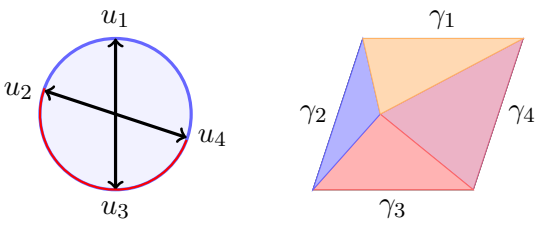


图 3. 集合 U，其中开半球 $\omega \subset \mathbb{S}^1$以红色标出。这次我们只能构造外法向量位于 U 中的平行多面体。每个 γ_i 表示由 u_i 定义的面的锥体积。

在这种情况下，集合 U 是可约的，即 $\mathbb{R}^2 = \mathsf{lin}(\pm u_1) \oplus \mathsf{lin}(\pm u_2)$。由命题 2.3 可知 $P_{\mathsf{scc}}(U) = C_{\mathsf{cv}}(U)$。因此，我们得到如下$\mathcal{V}$-表示

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))) = \mathrm{conv}\left\{\frac{1}{2}(e_3+e_2), \frac{1}{2}(e_3+e_4), \frac{1}{2}(e_1+e_2), \frac{1}{2}(e_1+e_4)\right\}.$$

以及 $\mathcal{H}$-表示

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))) =$$

$$\bigcap_{i=1,3,j=2,4} H^-\left(\frac{1}{2}(e_i+e_j), 1\right) \cap H(e_1+e_2+e_3+e_4, 1) \cap \bigcap_{i=1}^{4} H^+(e_i, 0).$$

□

正如我们稍后将看到的，前文讨论中形成的三种不同形状，即三角形、梯形和平行四边形，是“极端

情形”，也就是说，这些情形对应于锥体积集 $C_{\mathrm{cv}}(U)$ 的凸包的顶点，而这三种不同形状刻画了 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U)))$ 的所有顶点。为简化术语，梯形指任何具有两条平行边的四边形——特别地，平行四边形也是梯形。

由于我们希望能够区分 U 中可构成三角形的向量与 U 中不具备这一性质的向量，因此我们研究定义 1.1 中定义的集合 $U_{\triangle}$ 和 $U_{\square}$。$U_{\square}$ 中的下标表明，$U_{\square}$ 中包含的元素可构成具有附加性质的四边形。事实上，若 $u \in U_{\square}$，则 $-u \in U$ 和 u 可定义外法向量包含在 U中的梯形。此外，我们将看到，当且仅当 U 定义一个平行四边形时，$|U_{\square}| = 4$ 成立。要证明这些结论，我们需要一个辅助引理，下面将在更一般的框架下陈述该引理。

引理 3.3。设 $U \in \boldsymbol{U}(2, m)$，并设 $U\prime \subset U$ 是 $\mathbb{R}^n$的一组线性基。则存在包含于 $U \setminus U', k \leq n$中的线性无关向量 $x_1, \ldots, x_k$，使得 $\mathrm{pos}(U\prime \cup \{x_1, \ldots, x_k\}) = \mathbb{R}^n$ 且 $|U' \cup \{x_1, \ldots, x_k\}| \leq 2n$。

证明。这直接由 Carathéodory 定理得出。 □

引理 3.3 表明，U 中的任意向量都是一个至多有四个面的多边形的外法向量。这一观察对于理解包含在 $U_{\square}$中的向量的结构十分重要。事实上，我们证明了包含在 $U_{\square}$ 中的所有向量都对应于梯形。

引理 3.4。令 $U \in \boldsymbol{U}(2, m)$ 并考虑 $u \in U_{\square}$。以下结论成立：

(i) 对于每个满足 $\mathrm{pos}\{u, x, y, z\} = \mathbb{R}^2$的子集 $\{x, y, z\} \subseteq U \setminus \{u\}$，都有 $-u \in \{x, y, z\}$。*(ii)* 存在一个开半球 $\omega \subset \mathbb{S}^1$，使得 $\{-u\} = U \cap \omega$。

特别地，每个满足 $\mathrm{pos}\{u, x, y, z\} = \mathbb{R}^2$的子集 $\{u, x, y, z\} \subseteq U$都定义一个梯形，并且 $-u \in U$。

证明。设 $u \in U_{\square}$。存在向量 x、y、$z \in U \setminus \{u\}$，使得 $\mathrm{pos}\{u$、x、y、$z\} = \mathbb{R}^2$，由引理 3.3 可知。由于对于每个真子集 $V \subsetneq \{x$、y、$z\}$ 都有 $u \notin U_{\Delta}$，我们有 $\mathrm{pos}(\{u\} \cup V) \neq \mathbb{R}^2$。我们希望证明 i)，即 $-u \in \{x$、y、$z\}$。

首先，不失一般性，我们可以假设 $u = e_1$ 和 $x = e_2$。否则，应用线性同构 $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，它将 u 映射到 e_1，并将 x 映射到 e_2。正生成性质 $\mathrm{pos}\{e_1, e_2, y, z\} = \mathbb{R}^2$ 蕴含存在标量 $\mu_y, \mu_z > 0$，使得

$$v \coloneqq \mu_y y + \mu_z z < 0.$$

此外，我们可以假设 $y_1 < 0$。如果 $y_2 = 0$，则有 $y = -e_1$，因此得证。

因此，假设 $y_2 \neq 0$。在这种情况下，$y_2 > 0$，因为否则 $\mathrm{pos}\{e_1, e_2, y\} = \mathbb{R}^2$。因此，$z_2 < 0$。此外，如果满足 $z_1 = 0$，我们就会得到 $\mathrm{pos}\{e_1, y, z\} = \mathbb{R}^2$，这与 $u \in U_{\square} = U \setminus U_{\Delta}$ 矛盾。我们得出结论，$z_1 > 0$，与之前一样。但在这种情况下，也会有

$\operatorname{pos}\{e_1, y, z\} = \mathbb{R}^2$，这是基于以下观察

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{z_1}{-z_2} e_1 + \frac{1}{z_2} z \in \operatorname{pos}\{e_1, y, z\} \\ -e_2 &= \frac{v_1}{v_2} e_1 + \frac{-1}{v_2} v \in \operatorname{pos}\{e_1, y, z\} \\ -e_1 &= \frac{v_2}{v_1} e_2 + \frac{-1}{v_1} v \in \operatorname{pos}\{e_1, y, z\}. \end{aligned}$$

情形 $y_2 \neq 0$ 总会导致矛盾。因此， $y_2 = 0$ 必须成立，由此可得 $y = -e_1$。

我们已经证明，对每个 $u \in U_\square$ ，都有 $-u \in U$ ；并且对每个满足 $\operatorname{pos}\{u, x, y, z\} = \mathbb{R}^2$ 的子集 $\{x, y, z\} \subset U \setminus \{u\}$ ，集合 $\{x, y, z\}$都包含向量 $-u$。

现在我们来证明关于半球的断言。再次设 $u \in U_\square$。和之前一样，通过施加旋转 $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，我们可以假设 $u = e_1$，该旋转将 u 映射到 e_1。考虑一个满足以下条件的元素 $z \in U$

$$z_1 = \min_{v \in U \setminus \{-e_1\}} v_1 > -1.$$

有 $z_1 \neq -1$。若 $z_1 \geq 0$，我们可以令 $\omega \subset \mathbb{S}^1$ 为开半球$H^-(e_1, 0) \setminus H(e_1, 0)$，这样就大功告成了。因此，假设 $z_1 < 0$。由于 $z \neq -e_1$ ，要么 $z_2 > 0$ 成立，要么 $z_2 < 0$成立。我们只关注后一种情况，另一种情况也可以用类似的方法处理。

定义单位向量 $z^\perp := (-z_2, z_1)$。我们将证明，对每个 $y \in U \setminus \{-e_1\}$ ，必有$\langle y, z^\perp \rangle \geq 0$ ，由此便可定义开半球 ω 为 $H^-(z^\perp, 0) \setminus H(z^\perp, 0)$。

首先，假设 $y_2 \leq 0$。根据 z 的选取，有 $y_1 \geq z_1$ ，因此也有 $y_2 \leq z_2$ ，这等价于 $(y_2 - z_2) \leq 0$。我们计算

$$\langle y, z^\perp \rangle = (-z_2) y_1 + z_1 + y_2 \geq -z_2 z_1 + z_1 y_2 = z_1 (y_2 - z_2) \geq 0.$$

现在考虑 $y_2 > 0$ 的情形，此外还有$\langle y, z^\perp \rangle < 0$。还必有 $y_1 > 0$。因为若 $y_1 = 0$，由于假设 $z < 0$，便有 $\operatorname{pos}\{e_1, y, z\} = \mathbb{R}^2$。情形 $y_1 < 0$ 也推出 $\operatorname{pos}\{e_1, y, z\} = \mathbb{R}^2$，依据以下观察：

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{-y_1}{y_2} e_1 + \frac{1}{y_2} y \in \operatorname{pos}\{e_1, y, z\} \\ -e_2 &= \frac{z_1}{z_2} e_1 + \frac{-1}{z_2} z \in \operatorname{pos}\{e_1, y, z\} \\ -e_1 &= \frac{z_2}{z_1} e_2 + \frac{-1}{z_1} z \in \operatorname{pos}\{e_1, y, z\}. \end{aligned}$$

因此，我们有 $z < 0$ 和 $y > 0$ 和 $u = e_1$。如同上面的计算，我们得出 $-e_2 \in \operatorname{pos}\{e_1, y, z\}$。我们希望证明同样有 $-e_1 \in \operatorname{pos}\{e_1, y, z\}$。为此，我们考虑 $\operatorname{conv}\{y, z\}$ 与 $\operatorname{pos}\{-e_1\}$ 这两条直线的交集，并证明

$$|\operatorname{conv}\{y, z\} \cap \operatorname{pos}\{-e_1\}| = 1.$$

由于这是两条不同的直线，交集至多包含一个元素。此外，有 $z \in H(z^\perp, 0)$，$y \in H^-(z^\perp, 0) \setminus H(z^\perp, 0)$ and$e_1 \in H^+(z^\perp, 0) \setminus H(z^\perp, 0)$，以及 $z_1 < 0$和 $y_1 > 0$。因此，存在一个

标量 $\lambda > 0$，使得 $(1-\lambda)y+\lambda z \in \operatorname{lin}\{e_1\}$。由于半空间关系，必有 $(1-\lambda)y+\lambda z \in \operatorname{pos}\{-e_1\}$。这意味着 $-e_1 \in \operatorname{pos}\{e_1,\ y,\ z\}$ 且 $e_2 = \frac{y_1}{y_2}\cdot(-e_1) + \frac{1}{y_2}y \in \operatorname{pos}\{e_1,\ y,\ z\}$。

这一矛盾意味着 $\langle y,\ z^{\perp}\rangle \geq 0$，并且我们可以选取 $\omega = H^{-}(z^{\perp},\ 0)\backslash H(z^{\perp},\ 0)$。

关于梯形的事实现在可由 ii) 轻易得出。 □

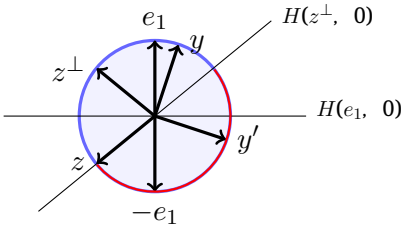


图 4。在引理 3.4 的设定下求半球。半球 $\omega \subset \mathbb{S}^1$ 以红色标出，并且我们旋转了集合 U，使得 $u = e_1$。从图中显然可见，$\operatorname{pos}\{e_1,\ z,\ y'\} = \mathbb{R}^2$。

推论 3.5. 对于集合 $U \in \mathcal{U}(2,m)$，有 $|U_{\square}| \leq 4$。此外，当且仅当 U 构成一个平行四边形时，等号成立。

证明。如果 $U_{\square} = \varnothing$，则无需证明。因此，假设 $U_{\square} \neq \varnothing$，并考虑向量 $u \in U_{\square}$。由引理 3.4 ii) 可知，存在一个开半球 $\omega \subset \mathbb{S}^1$，使得 $\omega \cap U = \{-u\}$。我们希望证明 $U := -\omega \cap (U_{\square} \setminus \{u\}) = \varnothing$。假设结论不成立，并且考虑一个向量 $v \in U$。由于 $v \in U_{\square}$，可得 $-v \in U \setminus \{-u\}$，且 $-v \in \omega$。因此，我们得出结论：$-v \in (\omega \cap U) \setminus \{-u\}$。但最后一个集合为空，这与矛盾。于是，

$$U_{\square} \subseteq \{\pm u\} \cup (\operatorname{cl}(\omega) \setminus \omega)\,.$$

现在，若 $|U_{\square}| = 4$，也就是说 $U_{\square} = \{\pm u\} \cup (\operatorname{cl}(\omega) \setminus \omega)$，则由于以下推理，必有 $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4\} = \{\pm u\} \cup (\operatorname{cl}(\omega) \setminus \omega)$。记 ω_i 为包含于 $\mathbb{S}^1$ 中的开半球，使得 $\{-u_i\} = U \cap \omega_i$。显然 $\mathbb{S}^1 = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4$，因此

$$\begin{aligned} U &= (\omega_1 \cap U) \cup (\omega_2 \cap U) \cup (\omega_3 \cap U) \cup (\omega_4 \cap U) \\ &= \{-u_1\} \cup \{-u_2\} \cup \{-u_3\} \cup \{-u_4\} = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}. \end{aligned}$$

因此，对于某个 $x \in \mathbb{S}^1$，有 $U = \{\pm u, \pm x\}$。

若 U 定义了一个平行四边形，即 $U = \{\pm u_1, \pm u_2\}$，其中向量为 $u_1, u_2 \in \mathbb{S}^1$，显然 $U = U_{\square}$。 □

注 3.6. 在推论 *3.5* 的情形下，结论 $|U_{\square}| \in \{0,1,2,4\}$ 成立。唯一值得注意的是 $|U_{\square}| \neq 3$。假设 $3 \leq |U_{\square}|$。由此可知，集合 $U_{\square}$ 至少包含两个对径点 $\pm u$（参见推论 *3.5* 的证明）。因此，对于某个开半球 ω，$U = \{\pm u\} \cup (\operatorname{cl}(\omega) \setminus \omega)$，由此得出 $U_{\square} = U$ 定义了一个平行多面体。

引理 3.4 指出，外法向量包含于U 且面数最少的每个多边形，不是三角形就是梯形。三角形的锥体积向量很容易理解，因为三角形就是二维单纯形。我们还想更深入地理解梯形；更准确地说，我们将重点研究与梯形相对应的锥体积向量的极限。这一极限过程对于研究 $C_{\mathsf{cv}}(U)$的凸包闭包的极点至关重要。

推论 *3.7.* 设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subseteq \mathbb{S}^1$。此外，假设$u_1 = -u_3$ ，且存在一个开半球 $u_3 \in \omega \subset \mathbb{S}^1$ ，使得$u_2, u_4 \notin \omega$。对于顶点 $v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ $v_2 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ $v_3 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$,$v_4 = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in P_{\mathsf{scc}}(U)$，存在右端项序列 $b_{i,n} \in \mathbb{R}^4_{\geq 0}$ ，使得对应锥体积向量序列收敛到 v_i，其中 $i = 1$，2，3，4:

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(U, b_{i,n}) = v_i, \quad for \quad i = 1, 2, 3, 4$$

and

$$\gamma(U, b_{i,n}) \in P_{\mathsf{scc}}(U) \quad for\ all \quad n \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3, 4.$$

证明。 首先注意，向量组 $\{u_1, u_2\}$、$\{u_1, u_4\}$、$\{u_2, u_3\}$ 和$\{u_3, u_4\}$ 分别线性无关。因此，向量 v_1, v_2, v_3和 v_4属于 $P_{\mathsf{scc}}(U)$。由于 $P_{\mathsf{scc}}(U) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$ 成立（命题 3.1 和命题 3.2），结论得证。□

假设满足推论 3.7 的条件。注意，推论 3.7 并未明确涉及例如顶点 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in P_{\mathsf{scc}}(U)$ 的情形。然而，对于梯形，该集合要么构成平行四边形，要么向量$\{u_2, u_3, u_4\}$ 张成一个三角形。在这两种情况下，顶点 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 都包含在 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$ 的凸包中；参见命题 3.1 和命题 3.2。

结合这一观察与推论 3.7，我们给出另一种证明，说明在平面情形下，子空间集中多胞体包含于锥体积集的凸包中（至少如此）（参见定理 II iii)）。

命题 3.8. 设 $U \in \mathcal{U}(2, m)$。则有

$$P_{\mathsf{scc}}(U) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))).$$

证明. 首先假设 U 是可约的，即存在一个子集$V \subsetneq U$，使得 $\mathbb{R}^2 = \mathrm{lin}(V) \oplus \mathrm{lin}(U \setminus V)$。在这种情况下，我们讨论的是一维空间，此时子集关系显然成立。

因此，假设 U 是不可约的。我们需要证明， $P_{\mathsf{scc}}(U)$ 的每个顶点都包含于 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$ 中。设 $v \in P_{\mathsf{scc}}(U)$ 是与线性基 $u_1, u_2 \in U$ 对应的顶点，即 $v = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$。我们分两种情况讨论。

首先，假设 u_1， $u_2 \in U_\Delta$。在这种情况下，锥体积集 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 包含向量 e_1 和 e_2，因此 $v \in \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$。

现在假设 $u_1 \in U_\square$ or $u_2 \in U_\square$。我们只考虑 $u_1 \in U_\square$ 的情形，另一种情形可类似处理。存在两个向量 y_1， $y_2 \in U$，使得 $\mathrm{pos}(u_1, u_2, y_1, y_2) = \mathbb{R}^2$，且集合 $\{u_1, u_2, y_1, y_2\}$ 是某个梯形的外法向量集，见引理 3.4。由推论 3.7 可得

存在一列包含于 $C_{\mathsf{cv}}(U)$ 的锥体积向量，并且该序列收敛于 v。因此，在这种情形下也有 $v \in \mathsf{cl}(\mathsf{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$。□

我们的下一个目标是给出 $\mathsf{cl}(\mathsf{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))$ 的$\mathcal{V}$-表示。为此，我们回顾刻画包含于 $U_\square$ 中元素的相邻外法向量的集合。考虑集合 $U \in \mathcal{U}(2, m)$。对于外法向量$u \in U_\square$，我们定义集合

$$U_{\square,u} = \{x, y \in U : \mathrm{pos}\{u, -u, x, y\} = \mathbb{R}^2\}.$$

按照定义 1.1，集合$U_{\square,u}$恰由 U 中对应于梯形面的外法向量组成；这些梯形的外法向量向量为 $\pm u$，且这些面与由 u定义的面相邻。

如命题 3.2 后所述，$\mathsf{cl}(\mathsf{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))$ 的$\mathcal{V}$-表示取决于三个集合 $U_\Delta, U_\square$ 和 $U_{\square,u}$。我们回顾定理 1.2。

定理 1.2。设 $U \in \mathcal{U}(2, m)$。$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$ 的顶点由下式给出

$$\bigcup_{i:u_i \in U_\Delta} \{e_i\} \cup \bigcup_{(i,j):u_i \in U_\square, u_j \in U_{\square,u_i}} \left\{\frac{1}{2}(e_i + e_j)\right\}.$$

特别地，当且仅当 U 确定一个平行四边形时，等号成立。

L让我们 h举一个 look 看一个例 le bef在证明.....之前h主要 Th定理 1.2。

例 3.9。令 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset \mathbb{S}^1$ 定义一个梯形，也就是说，我们假设 $u_1 = -u_3$，且存在一个开半球 $u_3 \in \omega \subset \mathbb{S}^1$，使得 $u_2, u_4 \notin \omega$。

在命题 3.1 和命题 3.2 中，我们已经看到存在两种不同的情形，即集合 U 定义的是梯形和三角形，或者平行四边形。

在梯形情形中，向量 u_2, u_3, u_4 属于集合 U_Δ 和 $u_4 \in U_\square$。此外，我们有 $U_{\square,u_1} = \{u_2, u_4\}$。定理 1.2 告诉我们

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))) = \mathrm{conv}\left\{e_2, e_3, e_4, \frac{1}{2}(e_1 + e_2), \frac{1}{2}(e_1 + e_4)\right\}.$$

这与我们在命题 3.1 中计算得到的$\mathcal{V}$-表示一致。

在后一种情形下，u_1, u_2, u_3, u_4均包含在 $U_\square$ 中，例如 $U_{\square,u_1} = \{u_2, u_4\}$。因此，定理 1.2 表明，$\mathsf{cl}(\mathsf{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))$ 的 $\mathcal{V}$-表示为

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))) = \mathrm{conv}\left\{\frac{1}{2}(e_1 + e_2), \frac{1}{2}(e_1 + e_4), \frac{1}{2}(e_3 + e_2), \frac{1}{2}(e_3 + e_2)\right\}.$$

定理 1.2 的证明分为几个步骤。

首先，我们证明，与向量 $u \in U_\square$ 对应的锥体积总是小于或等于 1 2。具体做法是反复移除给定多面体 $P(U,\ b)$ 的面 $b \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$，$\mathsf{vol}(P(U,\ b)) = 1$，这些面与由 u定义的面相交，即 F_u，并证明这样做只会增大与 u 对应的锥体积。我们将持续进行这一过程，直到构造出

一个具有外法向量 u 的梯形。需要注意的是，乍看之下，移除一个与 F_u 相交的面，只会增大与 u 对应的锥体积，这似乎是显而易见的。然而，我们必须对新的多边形重新缩放，使其体积等于 1。

其次，我们将给出一个$\mathcal{H}$表示，它对应于定理 1.2 中所述的$\mathcal{V}$表示，其中包含 cl(conv($C_{\text{cv}}(U)$))，并计算该$\mathcal{H}$表示的顶点。

最后，我们证明$\mathcal{H}$表示的顶点全部包含于 cl($C_{\text{cv}}(U)$) 中，由此完成定理 1.3 的证明。

我们从一个单调性陈述开始，该陈述表明，对于向量 $u \in U_\square$，锥体积小于或等于1 2。令 $U = \{u_1, \dots, u_m\} \in \mathcal{U}(2, m)$ 为一组按逆时针顺序排列的单位向量，并固定一个多边形$P = P(U, b)$， $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{|U|}$ 其体积等于 1，使得其中的每个单位向量U 都定义了 P的一个面。此外，假设对于某个固定指标 i，移除由外法向量 u_i 定义的面后得到一个有界多面体$P\prime$，即 $P\prime$是一个多边形。定义多边形 $Q := \frac{1}{\sqrt{\text{vol}(P')}} P\prime$。由于 Q 的外单位法向量集合是 U的子集，存在一个右端项 $b' \geq 0$，使得 $Q = P(U, b')$。如果相邻的外单位法向量$u_{\text{模 }(i-1)}$ 或$u_{\text{模 }(i+1)}$ 之一包含于 $U_\square$中，则以下不等式成立。对于下一个引理，我们将 $\gamma(U, b)_u$ 记为 $\gamma(U, b)$中与 $u \in U$对应的项。

引理 3.10。 对于两个多边形 $P = P(U, b)$ 和 $Q = P(U, b')$，有：

(i) If $u_{mod(i-1)} \in U_\square$, it holds $\gamma(U, b')_{u_{mod(i-1)}} \geq \gamma(U, b)_{u_{mod(i-1)}}$.
(ii) If $u_{mod(i+1)} \in U_\square$, it holds $\gamma(U, b')_{u_{mod(i+1)}} \geq \gamma(U, b)_{u_{mod(i+1)}}$.

证明。 不失一般性，假设 $i = 2$ 和 $u_1 = e_1 \in U_\square$。否则，采用旋转 $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，使得 $\phi(u_1) = e_1$。此外，注意不存在开半球 $\omega \subset \mathbb{S}^1$使得 $u_2 \in \omega$，但 u_1 和 u_3 不包含于 ω；否则，多面体 P' 将不再有界。

对于由u_i, $i = 1, 2, 3$定义的面，我们考虑面 $F_i(b) \subset P = P(U, b)$。我们知道，对于某些点 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$，有 $F_1(b) = \text{conv}(c, a)$， $F_2(b) = \text{conv}(a, b)$，以及$F_3(b) = \text{conv}(b, d)$。进一步定义 $x = (x_1, x_2) := \text{aff}(F_1(b)) \cap \text{aff}(F_3(b))$，以及三角形 $\Delta = \text{conv}(a, b, x)$。成立的是 $P' = P \cup \Delta$ and $\text{vol}(P') = \text{vol}(P) + \text{vol}(\Delta) = 1 + \text{vol}(\Delta)$ $x_1 = a_1$。下面给出体积公式

$$\gamma(U, b)_{u_1} = \frac{(a_2 - c_2) \cdot a_1}{2}$$
$$\gamma(U, b')_{u_1} = \frac{(x_2 - c_2) \cdot a_1}{2(1 + \text{vol}(\Delta))}$$
$$\text{vol}(\Delta) = \frac{(x_2 - a_2) \cdot (a_1 - b_1)}{2}.$$

我们将证明 $\gamma(U, b')_{u_1} \geq \gamma(U, b)_{u_1}$。若 $a_1 = 0$，则无需证明。因此，假设 $a_1 > 0$。该不等式等价于

$$\frac{(x_2 - c_2)}{(1 + \text{vol}(\Delta))} \geq (a_2 - c_2),$$

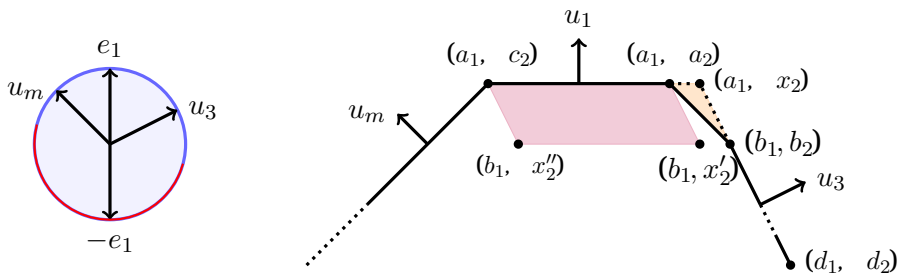


图5. 引理 3.10 的情形，其中我们假设 $u_{i-1} = e_1$。左图表示绘制在球面上的 U。将 u_3 和 u_m 分隔开的半球以红色标出。右图展示了多面体P，它由黑色直线围成。多面体 P' 是多面体 P 与橙色三角形的并集。红色区域对应平行多面体 A，橙色区域是三角形 Δ。

这可以变形为

$$(x_2 - c_2) \geq (a_2 - c_2) + \mathrm{vol}(\Delta) \cdot (a_2 - c_2).$$

由于 $x_2 - c_2 = (x_2 - a_2) + (a_2 - c_2)$，只需证明

$$(x_2 - a_2) \geq \mathrm{vol}(\Delta) \cdot (a_2 - c_2),$$

或者等价地

$$2 \geq (a_1 - b_1) \cdot (a_2 - c_2).$$

这由以下观察可知。平行多面体

$$A := H^-(e_1, a_1) \cap H^-(-e_1, b_1) \cap H^-(u_3, \langle a, u_3 \rangle) \cap H^-(-u_3, \langle c, u_3 \rangle)$$

包含于多面体 P 中，引理 3.4 ii)。因此，体积$(A) \leq$ 体积$(P) \leq 1$，进而，体积$(A) = (a_1 - b_1) \cdot (a_2 - c_2)$。□

推论 3.11。令 $U \in U(2, m)$ 且 $u \in U_\square$。对于任意 $\gamma(U, b) \in C_{\mathsf{cv}}(U)$，有 $\gamma(U, b)_u \leq \frac{1}{2}$。

证明。取一个右端项 $b \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$，并考虑多边形 $P = P(U, b)$，体积$(P) = 1$。假设 u 定义了 P 的一个面，例如 F_u；否则，相对于 u 的锥体积将为零。

如果 P 是一个具有超过 4 个面的多边形，我们就删除一个与 F_u 相邻的面，即这两个面具有非平凡的交集。所得的多面体仍将是一个多边形（参见引理 3.3）。引理 3.10 表明，如果我们可以删除 F_u 的一个相邻面，那么对应于 u 的新锥体积只会增大。我们重复这一过程，直到所得的多边形（记为 Q）恰好具有 4 个面；由于 $u \in U_\square$，它实际上是一个梯形。现在，对应于 u 的 Q 的锥体积大于或等于我们最初取的锥体积 $\gamma(U, b)_u$。但是，由于现在处理的是一个梯形，我们知道 Q 的锥体积向量的结构，特别是 $\gamma(U, b)_u \leq \frac{1}{2}$（参见定理 III 和命题 3.1）。□

接下来，对于给定的集合 $U \in \mathcal{U}(2,m)$，我们研究多面体 K_U，其由以下$\mathcal{H}$-表示给出：

$$\begin{aligned} K_U \coloneqq & \left(\bigcap_{i:u_i \in U_\Delta} H^-(e_i, 1) \right) \cap \left(\bigcap_{i:u_i \in U_\square, -u_j = u_i} H^- \left(e_i + \frac{1}{2} e_j, \frac{1}{2} \right) \right) \\ & \cap \left(\bigcap_{i:u_i \in U_\square, u_k \in U_{\square,u_i}} H^-(e_i + e_k, 1) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} H^-(-e_i, 0) \right) \\ & \cap H(e_1 + \cdots + e_m, 1). \end{aligned}$$

多面体 K_U 实际上是凸包 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U)))$。我们需要以下辅助命题。

引理 3.12。设 $U \in \mathcal{U}(2,m)$。则有

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathsf{cv}}(U))) \subseteq K_U.$$

证明。只需证明 $C_{\mathsf{cv}}(U) \subseteq K_U$。我们假设 $U = (u_1, \ldots, u_m)$ 是一个按逆时针顺序排列的单位向量集合元组。考虑多面体 $P = P(U,b)$，$b \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$，使得 $\mathrm{vol}(P) = 1$。唯一非平凡的包含关系是

$$C_{\mathsf{cv}}(U) \subseteq \bigcap_{(i,j):u_i \in U_\square, -u_j = u_i} H^- \left(e_i + \frac{1}{2} e_j, \frac{1}{2} \right).$$

我们假设 $u_1 \in U_\square$，且 $u_1 = e_1$。并且存在一个 $j > 2$ 使得$u_j = -e_1$。我们将由 e_1 定义的面记作 $F_1 = \mathrm{conv}(a,b)$，将由 u_j 定义的面记作 $F_2 = \mathrm{conv}(x,y)$。与引理 3.10 中一样，我们得出平行多面体

$$A \coloneqq H^-(e_1, a_1) \cap H^-(-e_1, 0) \cap H^-(u_2, \langle a, u_2 \rangle) \cap H^-(-u_2, \langle b, u_2 \rangle)$$

包含于 P 中。此外，A 的体积 $= 2 \cdot \gamma(U, b)_1$。单纯形 $\Delta \coloneqq \mathrm{conv}(0, x, y)$ 满足 Δ 的体积 $= \gamma(U, b)_j$。由于 $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(\Delta) = \varnothing$ 且也有$\Delta \cup A \subset P$，我们得出

$$2 \cdot \gamma(U,b)_1 + \gamma(U,b)_j = \mathrm{vol}(A \cup \Delta) \leq \mathrm{vol}(P) = 1,$$

这等价于

$$\gamma(U,b)_1 + \frac{1}{2} \gamma(U,b)_j \leq \frac{1}{2}.$$

□

我们的下一个目标是计算 K_U 的$\mathcal{V}$-表示。我们使用 Barvinok [2, 定理 42] 中的刻画：多面体中的一个点是顶点，当且仅当该点处活跃约束的法向量张成整个空间。

引理 3.13。成立

$$K_U = \mathrm{conv} \left\{ \bigcup_{i:u_i \in U_\Delta} \{e_i\} \cup \bigcup_{(i,j):u_i \in U_\square, u_j \in U_{\square,u_i}} \left\{ \frac{1}{2}(e_i + e_j) \right\} \right\}.$$

证明。右端项包含于 K_U 这一包含关系显然成立。通过直接计算可以验证，右端项中的每个元素都包含于 K_U。

现在，我们通过利用 [2, 定理4.2] 计算 K_U 的顶点，证明 K_U 包含于右端项。我们将考虑两种不同的情形。

首先，假设 $U_\square$ 包含两个对径点，即存在一个 $u \in \mathbb{S}^1$ 使得 $\pm u \in U_\square$。在这种情况下，U 定义了一个平行四边形（注 3.6），而我们已经确定了平行四边形的结构。

现在假设 $U_\square$ 不包含对径点。我们想利用 [2, 定理4.2] 计算 K_U 的顶点。因此，我们考虑满足不等式的不同情形。令 $v \in K_U$ 为一个顶点。

情形 1：假设 v 满足 $\langle v, e_i\rangle = 1$，其中指标为 i，且满足$u_i \in U_\Delta$。那么显然，$v = e_i$。

情形2：假设对于所有满足 $u_i \in U_\Delta$的指标 i，均有$\langle v, e_i\rangle < 1$。

情形2a)：顶点 v 满足$\langle v, e_i + e_k\rangle = 1$，其中存在满足 $u_i \in U_\square$ 且$u_k \in U_{\square,u_i}$ 的指标 i, k。由于 $v \in K_U$，对于所有 $j \neq i, k$，均有 $v_j = 0$。由于

$$\operatorname{lin}\{e_i + e_k, e_1 + \cdots + e_m, e_j : j \neq i, k\} \subsetneq \mathbb{R}^m,$$

[2, 定理4.2] 推出对于某个指标 $j \neq k$，有 $\frac{1}{2} = \langle v, e_i + \frac{1}{2}e_j\rangle = v_i$。因此，$v = \frac{1}{2}e_i + \frac{1}{2}e_k$。

情形2b)：对于所有满足 $u_i \in U_\square$ 且$u_k \in U_{\square,u_i}$的指标 i, k，顶点 v 均满足$\langle v, e_i + e_k\rangle < 1$。因此，存在满足 $u_i \in U_\square$且$u_j \in U_{\square,u_i}$的指标 i, j，并且$\langle v, e_i + \frac{1}{2}e_j\rangle = \frac{1}{2}$。由于我们假设对于所有 $k = 1, \ldots, m$，均有$v_k < 1$，因此必有 $v_i > 0$。

根据我们关于 $U_\square$ 的假设，必有 $-u_i \notin U_\square$。我们证明$v_j = 0$。因此，假设 $v_j > 0$。再次由 [2, 定理4.2] 可知，存在两个指标 k，l 使得 $k \neq i$ 且 $u_k \in U_\square$且$u_l \in U_{\square, u_k}$，并且$\langle v, e_k + \frac{1}{2}e_l\rangle = \frac{1}{2}$。不失一般性，我们假设 $v_k \neq 0$。由于 $-u_i \notin U_\square$，有$u_k \neq -u_i$。然而，在这种情况下，我们会得到

$$1 = v_i + \frac{1}{2}v_j + v_k + \frac{1}{2}v_l < v_i + v_j + v_k + v_l \leq 1.$$

因此，$v_j = 0$ 且 $v_i = \frac{1}{2}$。由于 v 上的活跃不等式集合线性张成 $\mathbb{R}^m$，再次由 [2, 定理4.2] 可知，存在指标 h，g 使得$u_h \in U_\square$、$u_g \in U_{\square, u_h}$，且$\langle v, e_h + \frac{1}{2}e_g\rangle = \frac{1}{2}$。与之前一样，我们得出$v_h = \frac{1}{2}$且 $v_g = 0$。得到 $v = \frac{1}{2}(e_i + e_h)$。

剩下要验证的是 $u_h \in U_{\square,u_i}$。这显然成立，因为 $\{\pm u_i, \pm u_h\} \in U$，根据引理 3.4，集合 $\{\pm u_i, \pm u_h\}$ 定义了一个平行四边形。

这些也都是 K_U 的顶点。因为，除了前面的情形外，若我们还假设顶点 v 满足 $\langle v, e_i + \frac{1}{2}e_j\rangle < \frac{1}{2}$ 对所有满足 $u_i \in U_\square$且 $u_j = -u_i$ 的指标 i, j 都成立，那么我们无法生成新的顶点。这是因为 v 至少有两个分量不为零，设为 v_i，$v_j \neq 0$，因此

$$\operatorname{lin}\{e_1 + \cdots + e_m, e_s : s \neq i, j\} \subsetneq \mathbb{R}^m.$$

□

现在我们证明， K_U 的顶点包含于 cl($C_{\mathtt{cv}}(U)$) 中。

引理 3.14. 令 $U \in U(2,m)$。我们有如下子集关系

$$\bigcup_{i:u_i \in U_\Delta} \{e_i\} \cup \bigcup_{(i,j):u_i \in U_\square, u_j \in U_{\square,u_i}} \left\{\frac{1}{2}(e_i+e_j)\right\} \subseteq \mathrm{cl}(C_{\mathtt{cv}}(U)).$$

证明。若 $u_i \in U_\Delta$，则显而易见；考虑命题 3.1 中的情形 $\{u_2,u_3,u_4\}$。对于指标 i,j ，满足 $u_i \in U_\square$ 和 $u_j \in U_{\square,u_i}$，推论 3.7 表明存在锥体积向量收敛到$_{1\ 2}(e_i+e_j)$。□

我们现在可以证明定理 1.2 和 1.3。

定理 *1.2 + 1.3* 的证明。引理 3.12 和引理 3.13 共同推出

$$\begin{aligned}
&\mathrm{conv}\left\{\bigcup_{i:u_i \in U_\Delta} \{e_i\} \cup \bigcup_{(i,j):u_i \in U_\square, u_j \in U_{\square,u_i}} \left\{\frac{1}{2}(e_i+e_j)\right\}\right\} \\
\subseteq &\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathtt{cv}}(U))) \\
\subseteq &K_U \\
= &\mathrm{conv}\left\{\bigcup_{i:u_i \in U_\Delta} \{e_i\} \cup \bigcup_{(i,j):u_i \in U_\square, u_j \in U_{\square,u_i}} \left\{\frac{1}{2}(e_i+e_j)\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

□

我们给出了 cl(conv($C_{\mathtt{cv}}(U)$)) 的 $\mathcal{V}$-表示和 $\mathcal{H}$-表示。此外，cl(conv($C_{\mathtt{cv}}(U)$)) 的顶点恰好是定理 1.2 中所述$\mathcal{V}$–表示所包含的元素

推论 3.15. 多面体 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathtt{cv}}(U)))$ 的顶点集合等于

$$\bigcup_{i:u_i \in U_\Delta} \{e_i\} \cup \bigcup_{(i,j):u_i \in U_\square, u_j \in U_{\square,u_i}} \left\{\frac{1}{2}(e_i+e_j)\right\}.$$

证明. 对于满足 $u_i \in U_\Delta$ 的指标 i ，显然， e_i 是 cl(conv($C_{\mathtt{cv}}(U)$)) 的一个顶点。因此，考虑满足 $u_i \in U_\square$ 的指标 i 。令 j 为满足 $u_j \in U_{\square,u_i}$ 的一个指标。推论 3.11 表明，对于任意锥体积向量 $\gamma(U,b)$， $\gamma(U,b)_{u_i} \leq \frac{1}{2}$ ¯ cl(conv($C_{\mathtt{cv}}(U)$))。假设有两个元素 $v,w \in$ 属于 cl(conv($C_{\mathtt{cv}}(U)$))，使得

$$\frac{v+w}{2} = \frac{1}{2}(e_i+e_j).$$

因此，必有 $v_{u_i} = w_{u_i} = 1/2$，推论 3.11。又由于 $|v|_1 = |w|_1 = 1$，必有 $v_{u_j} = w_{u_j} = 1/2$ ，证毕。□

值得注意的是，集合 cl(conv($C_{\mathtt{cv}}(U)$)) 的极点对应于三角形、包含在 $U_\triangle$ 中的元素，或 $P_{\mathtt{scc}}(U)$ 的顶点。这种现象在一般维数下不再成立。

例 3.16. 考虑集合

$$U = \{u_1, \dots, u_{n+2}\} = \{-e_1, e_1, e_2, \dots, e_n, -\sqrt{n} \cdot (e_1 + \cdots + e_n)\} \in \mathcal{U}(n, n+2).$$

由于 U包含单纯形 $V = \{e_1, \dots\dots, e_n, -\sqrt{n} \cdot (e_1 + \cdots + e_n)\}$，因此我们有$e_2$, $\dots\dots$, $e_{n+2} \in \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U))$。考虑一个多面体 $P = P(U, b)$ $b \geq 0$，并假设 $-e_1$ 确定了 P的一个面，记作 $F_1(b)$。集合 $\mathrm{conv}(F_1(b)\ F_1(b) + b_1 e_1)$ 是 P的子集，因此我们得到锥体积向量 $\gamma \in C_{\mathrm{cv}}(U)$ 满足以下不等式,

$$n \cdot \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1.$$

利用这个不等式，我们得到 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U))$ 的如下$\mathcal{V}$表示:

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U))) =$$

$$\mathrm{conv}\left\{e_2, \dots, e_{n+2}, \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, 0, \dots, 0\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \frac{n-1}{n}\right)\right\}.$$

注意，这个$\mathcal{V}$表示中的顶点没有一个是 $P_{\mathrm{scc}}(U)$ 的顶点，而且并非每个顶点都对应一个单纯形。

我们现在利用 $\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U))$ 的$\mathcal{V}-$表示，给出一个替代证明，证明锥体积集合与子空间集中多胞体重合，当且仅当集合 U构成一个平行四边形（参见 [3, 定理 2.11]）。

推论3.17. 设 $U \in \boldsymbol{U}(2, m)$。当且仅当 $P_{scc}(U) = C_{\mathrm{cv}}(U)$ 时， $U = U_{\square}$成立，即 U 定义了一个平行四边形。

证明. 如果 U定义了一个平行四边形，我们已经知道 $P_{\mathrm{scc}}(U) = C_{\mathrm{cv}}(U)$。

现在假设 $P_{\mathrm{scc}}(U) = C_{\mathrm{cv}}(U)$。根据定理 1.2，我们知道

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U))) = \mathrm{conv}\left\{\bigcup_{i:u_i \in U_{\Delta}} \{e_i\} \cup \bigcup_{(i,j):u_i \in U_{\square}, u_j \in U_{\square}, u_i} \left\{\frac{1}{2}(e_i + e_j)\right\}\right\}.$$

集合 U_{Δ} 必为空，因为我们假设锥体积集等于子空间集中多胞体，并且包含在 $P_{\mathrm{scc}}(U)$ 中的元素的每个条目都小于或等于 1_2。因此， $U = U_{\square}$成立，进而 $\mathrm{pos}(U_{\square}) = \mathbb{R}^2$。所以， $U_{\square}$ 至少包含 $n + 1 = 3$ 个元素， [19,定理 4], ，并且由注 3.6 可得 $|U_{\square}| = 4$。因此，集合 U定义了一个平行四边形。□

锥体积集 $C_{\mathrm{cv}}(U)$ 的闭包的顶点表示意味着定理 II i) 的一个类似版本，至少对于锥体积集的凸包而言是如此。

推论 3.18。 对于集合 $U \in \boldsymbol{U}(2, m)$ 成立

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}(C_{\mathrm{cv}}(U))) = \mathrm{conv}\{e_1, \dots, e_m\}$$

当且仅当 $U = U_{\Delta}$。

证明。 这是定理 1.2 的直接推论。 □

推论 3.18 蕴含了定理 II i) 的一个较弱版本。考虑一个处于一般位置的集合$U \in \mathcal{U}(2, m)$。容易验证，这意味着$U = U_\Delta$，因此集合 cl(conv($C_{\text{cv}}(U)$)) 等于 conv($e_1, \ldots, e_m$)。

我们想指出，通过将定义 U_Δ 推广到任意维数，可以将推论 3.18推广到任意维数；这一工作将在另一篇论文中完成。然而，将定理 1.2推广到任意维数似乎并非易事，因为与 $U_\square$相比，我们需要考虑哪些集合尚不明确。

参考文献

[1]M. Aigner。《组合理论》。数学经典丛书。Springer-Verlag，柏林，1997。ISBN 3-540-61787-6。doi: 10.1007/ 978-3-642-59101-3。1979年原版的重印本。[2] A. Barvinok。《凸性教程》，数学研究生教程丛书第54卷。美国数学会，2002。ISBN 978-0-8218- 2968-4。doi: 10.1090/gsm/054。[3]T. Baumbach 和 M. Henk。关于多面体锥体积的多项式不等式，2025。网址 https://arxiv.org/abs/2506.15370。arXiv: 2506.15370 [math.MG].[4]J. Bochnak、M. Coste 和 M.-F. Roy。《实代数几何》。Springer，2013。ISBN 978-3-662-03718-8。doi: 10.1007/ 978-3-662-03718-8。[5]K. J. Böröczky。对数闵可夫斯基猜想与 L_p-闵可夫斯基问题。载于《调和分析与凸性》，第83–118页。柏林: De Gruyter，2023。ISBN 978-3-11-077537-2；978-3-11-077538- 9。doi: 10.1515/9783110775389-003。网址 real.mtak.hu/191895/1/2210.00194v3.pdf.[6] K. J. Böröczky 和 M. Henk。一般中心对称凸体的锥体积测度。《数学进展》，286:703–721，2016。ISSN 0001-8708。doi: 10.1016/j.aim.2015.09.021。[7] K. J. Böröczky、P. Hegedus 和 G. Zhu。关于离散对数闵可夫斯基问题。《IMRN. 国际数学研究通知》，2016(6):1807–1838，2016。ISSN 1073-7928；1687-0247/e。doi: 10.1093/imrn/rnv189。[8] K. J. Böröczky、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang。《对数闵可夫斯基问题》。预印本，arXiv:2502.05430 [math.MG] (2025)，2025。网址 https://arxiv.org/abs/2502.05430.[9] K. Böröczky、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang。对数闵可夫斯基问题。《美国数学会杂志》，26(3):831–852，2013。ISSN 0894-0347。doi: 10.1090/ S0894-0347-2012-00741-3。[10] V. Chatelain 和 J. L. R. Alfonsín。拟阵基多面体分解。《应用数学进展》，47(1):158–172，2011。ISSN 0196-8858。doi: 10.1016/j.aam.2010.04.005。[11] S. Chen、Q. Li 和 G. Zhu。非对称测度的对数闵可夫斯基问题。《美国数学会会刊》，371(4):2623–2641，2019。ISSN 0002-9947。doi: 10.1090/tran/ 7499。

[12] W. H. Cunningham。在拟阵多面体中检验成员关系。《组合理论杂志 B 辑》，36(2):161–188，1984。ISSN 0095- 8956。doi: 10.1016/0095-8956(84)90023-6。[13]E. Feichtner 和 B. Sturmfels。拟阵多胞体、嵌套集与 Bergman扇。《葡萄牙数学新系列》，62(4):437–468，2005。ISSN 0032-5155。doi: 10.48550/arXiv.math/0411260。[14] Y. Huang、D. Yang 和 G. Zhzng。几何测度的闵可夫斯基问题。2025。doi: 10.48550/ARXIV.2502.05427。arXiv: 2502.05427[math.MG].[15] Y. Liu、Q. Sun 和 G. Xiong。多面体体积分解泛函的尖锐仿射等周不等式。《数学进展》，389:107902，2021。ISSN 0001-8708。doi: 10.1016/j.aim. 2021.107902。[16]Y. Liu、X. Lu、Q. Sun 和 G. Xiong。 $\mathbb{R}^2$ 中的对数闵可夫斯基问题。《纯粹与应用数学季刊》，20(2):869– 902，2024。doi: 10.4310/PAMQ.2024.v20.n2.a5。[17] Y. Liu、Q. Sun 和 G. Xiong。利用拟阵多胞体方法研究体积分解泛函尖锐仿射等周不等式。2024。doi: 10.48550/ARXIV.2404.09152。[18] H. Pollehn。《几何测度的子空间集中》。博士论文，柏林，2019-02。[19] G. C. Shephard。正基图。《伦敦数学学会杂志》，4(1):165–175，1971。doi: 10.1112/jlms/s2-4.1. 165。[20] A. Stancu。离散平面 L0-闵可夫斯基问题。《数学进展》，167(1):160–174，2002。ISSN 0001-8708。doi: 10.1006/ aima.2001.2040。[21] A. Stancu。离散二维 L0-闵可夫斯基问题的解的数量。《数学进展》，180(1):290–323，2003。ISSN 0001-8708。doi: 10.1016/S0001-8708(03)00005-7。[22] A. Stancu。非对称凸体的对数闵可夫斯基不等式。《应用数学进展》，73(C):43–58，2016。ISSN 0196-8858。doi: 10.1016/j.aam.2015.09.015。[23] G. Zhu。多胞体的对数闵可夫斯基问题。《数学进展》，262:909–931，2014。doi: 10.1016/j. aim.2014.06.004。

柏林工业大学，数学研究所，秘书处 MA4-1，六月十七日大街136号，10623 柏林，德国
电子邮件地址： baumbach@math.tu-berlin.de