arXiv:2601.13167v1 [math.AP] 19 Jan 2026

洛伦兹情形下动态最优传输的偏微分方程方面

Nicola Gigli、Felix Rott、Matteo Zanardini [1]

2026年1月21日

摘要 黎曼流形上最优传输的一个关键特征，是该问题的“静态”（原始）表述与基于研究连续性方程的“动态”表述等价。这为 Wasserstein 几何与偏微分方程之间建立了关键联系，并在过去20年中催生了众多应用。

本文研究时空上的这类等价关系。在偏微分方程层面，这需要从连续性方程转向一种合适的“连续性不等式”，我们将其称为“因果连续性不等式”。

作为研究结果的直接推论，我们得到了著名的 Benamou–Brenier 公式的洛伦兹版本。

目录

1 引言 **1**

2 预备知识 **3**

2.1 洛伦兹最优传输.32.2 Kantorovich 对偶.6

3 因果连续性不等式 **9**

3.1 全局双曲时空上的分析 .93.2 Hopf–Lax 型公式 .133.3 Kuwada 对偶 .173.4 时空上的 Benamou–Brenier 公式 .21

1 引言

我们来回顾一下 W_p黎曼流形上测度的 - 绝对连续曲线与连续性方程弱解之间的标准联系，该联系由 [3]（严格来说，在 [3] 中只考虑了 $M=\mathbf{R}^d$ 这一情形，但借助纳什嵌入，推广到一般情形就相当直接了）。

[1]SISSA，ngigli@sissa.it，frott@sissa.it，mzanardi@sissa.it

定理 1.1。 设 M 为一个光滑完备黎曼流形， $p \in (1, +\infty)$ 以及 $(\mu_t) \subset \mathcal{P}_p(M)$ 为一条弱连续曲线。那么：

(A) 假设 满足 (μ_t)是 W_p-绝对连续的。那么存在向量场 (v_t) 使得

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(v_t \mu_t) = 0 \quad \textit{in the sense of distributions} \tag{CE}$$

并且

$$|\dot{\mu}_t| \geq \|v_t\|_{L^p_{\mu_t}} \qquad a.e.\ t \in [0,1],$$

其中 $|\dot{\mu}_t| := \lim_{h \to 0} \frac{W_p(\mu_t, \mu_{t+h})}{h}$ （ $|\dot{\mu}_t|$ 几乎处处存在，这由绝对连续性保证）。

(B) 假设 (v_t) 是一族向量场，满足 (CE) 且 $\int_0^1 \|v_t\|_{L^p_{\mu_t}} \mathrm{d}t < +\infty$。那么 (μ_t) 是 W_p-绝对连续的，并且

$$|\dot{\mu}_t| \leq \|v_t\|_{L^p_{\mu_t}} \qquad a.e.\ t \in [0,1].$$

这一结论在现代最优传输中至关重要，因为它将 Wasserstein 几何与偏微分方程联系起来。此外，它还可用于为 Otto 演算奠定严谨的基础，并为著名的 Benamou–Brenier 公式提供论证。

本文旨在推导上述结果的洛伦兹类比，其中流形 M 现在是一个光滑的全局双曲时空。为此，自然要将 W_p-测度曲线的绝对连续性替换为因果性（μ_t）。因此，一个核心问题是如何在此背景下解释连续性方程（CE）。事实证明，适宜用“因果连续性不等式”来替代它。粗略地说，严格定义见正文：给定一条因果测度曲线（μ_t）和一族v_t博雷尔且未来指向的向量场，若它们满足因果连续性不等式，则称

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \varphi \, \mathrm{d}\mu_t \geq \int \mathrm{d}\varphi(v_t) \, \mathrm{d}\mu_t \qquad a.e.\ t$$

对每个 个 φ: $M \to \mathbf{R}$ 光滑因果函数。基于此，我们的主要结果如下：

定理 1.2。 设(M, g) 为一个全局双曲时空， $0 \neq p < 1$ 且$(\mu_t) \subset \mathcal{P}(M)$ 为一条因果路径，满足spt(μ_t) $\subset K$ 对每个 $t \in [0,1]$均成立，其中某个紧集为 $K \subset M$。那么：

(A) 存在一族因果博雷尔向量场(v_t) ，使得(μ_t, v_t) 满足因果连续性不等式，并且

$$\int_0^1 \tfrac{1}{p} |\dot{\mu}_t|_p^p \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \tfrac{1}{p} \|v_t\|^p_{L^p_{\mu_t}} \, \mathrm{d}t \tag{1.1}$$

几乎处处 $t \in [0,1]$成立，其中 $|\dot{\mu}_t|_p = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \ell_p(\mu_t, \mu_{t+h})$ （ $|\dot{\mu}_t|_p$的几乎处处存在性可由曲线的因果性推出——参见 *[6,*定理 *2*。*23]*）。

(B) 对于任意一族$(v_t)^{t \in [0,1]}$ 因果博雷尔向量场，满足 $\int_0^1 \frac{1}{p} \|v_t\|^p_{L^p_{\mu_t}} \mathrm{d}t > -\infty$ 且(μ_t, v_t) 满足因果连续性不等式，我们有

$$\tfrac{1}{p} |\dot{\mu}_t|_p^p \geq \tfrac{1}{p} \|v_t\|^p_{L^p_{\mu_t}} \qquad a.e.\ t. \tag{1.2}$$

由此，很容易得到 Benamou–Brenier公式的洛伦兹版本，见定理 3.17。据我们所知，在这一方向上唯一类似的结果是在 [21],相当更强的假设下得到的。

我们对上述定理1.2的证明作一些说明。

对于第（A）部分，我们依赖于 [6, 定理 243]中建立的因果路径提升定理：随后，我们将利用提升，以适当取平均的方式，根据曲线的速度构造所需的向量场。我们指出，这一总体上十分自然的过程在黎曼度规号差下同样适用；但据我们所知，这一观察此前并未出现在文献中（至少没有明确出现，不过可参见 [15, 定理 2.3.24 和注记 2.326]）。

对于第（B）部分，我们则通过 [17]中的Kuwada引理（的洛伦兹版本） [17]来论证。该过程最初旨在将偏微分方程信息转化为度量信息，适用于亚历山德罗夫空间这一非常抽象的框架；此后，它已成为RCD 空间理论的基石（例如参见 [13] 以获取参考文献）。在椭圆度规号差下，这一思路曾被用于 [1] （另见 [20]）证明定理B的第（1.1）部分：我们论证中的一些技术方面受到了这些参考文献的启发。

2 预备知识

2.1 洛伦兹最优传输

本节汇集测度论、最优传输和洛伦兹几何中的一些重要结果与参考文献。

我们将经常用到解体定理，这是测度论中的一项基本结果；例如， [2, 8, 11]中可以找到其证明。请注意，我们所研究的时空——光滑且定向于时间的洛伦兹流形——远不如所引文献中的情形一般。

关于洛伦兹几何，基础概念的全面综述可参见 [5, 23] 。我们采用度规号差约定（$+$， $-$，……， $-$），这与 [5, 23]中使用的约定不同。事实上，虽然我们的约定在一般的洛伦兹几何中较少使用，但我们更倾向于采用这一约定，因为它似乎更适合我们的研究情形：例如，因果函数的梯度是未来指向的；我们不必对原本为负的标量积取绝对值；此外，许多其他符号上的细节也因此变得更简单。另一方面，另一种度规号差约定的一项理由，即类空切片具有真正的黎曼（也就是正定）度规，对我们而言并不重要。

我们将用 $\leq$ 和 $\ll$ 分别表示时空 (M, g) 上的因果关系和类时关系，它们表示两点何时可以由一条分段的 C^1 曲线 γ 连接，使得对所有 t，$g_{\gamma_t}(\dot{\gamma}_t, \dot{\gamma}_t) \geq 0$ （分别为 > 0）。在光滑情形中，这类曲线通常称为因果曲线和类时曲线。我们还将使用记号 $J^+(x) = \{y \in M : x \leq y\}$，以及其对偶记号 $J^-(x)$。我们用 $I^{\pm}(x)$ 表示与 $\ll$ 相关的相应集合。

以下约定对我们很有用：给定 M 中的一个序列 $(x_n)_n$，若 $x_n \to x$ 且对每个 n 都有 $x_n \leq x_{n+1} \leq x$，我们就记作 $x_n \uparrow x$。对偶地，我们将使用 $x_n \downarrow x$。

定义 2.1 (整体双曲性)。 若时空 (M, g) 满足 $\leq$ 是偏序，且对所有 $x, y \in M$，因果菱形 $J(x, y) := J^+(x) \cap J^-(y) = \{z \in M : x \leq z \leq y\}$ 都是紧集，则称其为整体双曲时空。

注意，在整体双曲性的假设下，我们有“因果祖母绿”

$$J(A,B)=\{x\in M:\exists a\in A,b\in B:a\le x\le b\}$$

是紧的，只要 A， $B\subset M$ 是紧的，见 [19, 第 6 小节6]。

给定 $z\in M$ 和 $v\in T_zM$，我们定义

$$\|v\|_g:=\begin{cases}\sqrt{g_z(v,v)} & \text{if } v\in J^+(0)\subset T_zM,\\ -\infty & \text{otherwise}.\end{cases}\tag{2.1}$$

则 $(M,\ g)$上的时间分离函数记为 ℓ，定义如下 s:

$$\ell(x,y):=\sup\int_0^1\|\dot\gamma_t\|_g\,\mathrm{d}t\,,\tag{2.2}$$

其中，上确界取遍连接 x和 y 的所有分段 C^1 未来指向因果曲线（按照通常约定，$\sup\emptyset=-\infty$）。

回顾一下，对于全局双曲时空，众所周知，$\max\{\ell,\ 0\}$ 是有限且连续的，参见 [23, 定理 4.124]。

我们还想提及定义在任意余切空间 T_x^*M上的对偶双曲范数这一概念，例如， [6] 附录第一节中对此有所讨论（另见 [16]）。事实上，若 $x\in M$且 $\omega\in T_x^*M$是因果的，即只要 $v\in J^+(0)\subset T_xM$，就有 $\omega(v)\ge 0$，那么

$$\|\omega\|_{g^*}:=\inf_{\|v\|\ge 1}\omega(v)\,.\tag{2.3}$$

注意到可立即推出 $\omega(v)\ge\|\omega\|_{g^*}\|v\|_g$。我们还回顾一下： $v\in J^+(0)\subset T_xM$当且仅当对所有 $w\in J^+(0)$，都有 $g_x(v,\ w)\ge 0$。

现在我们引入本文中出现的核心函数类。

定义 2.2 （因果函数/陡函数与因果向量场）。 设 (M,g) 是一个全局双曲时空。称函数 $f:M\to\mathbf{R}$ 为因果函数，若其 $\le$ 单调不减；也就是说，若 $x\le y$，则 $f(x)\le f(y)$。

我们称 f 是 L-陡峭的，若对每个 x、$y\in M$，都有 $f(y)-f(x)\ge L\ell(x,y)$。满足该条件的最大 $L>0$ 称为 f 的陡峭度常数，记作 $\mathbf{st}(f)$。若 f 对某个 $L>0$ 是 L- 陡峭的，则称 f 是陡峭的。

此外，若向量场 $v:\ M\to TM$ 对每个 $x\in M$ 都满足 $v(x)$ 是 T_xM 中的未来指向因果向量，则称其为因果的。

注意，我们将 0 视为因果向量。与上述在光滑情形中引入的术语不同，对我们而言，因果曲线仅由 $\gamma_s\le\gamma_t$ （对所有 $s\le t$）定义，且未必连续。

关于因果函数（及因果曲线）的一些有用性质，参见 [6, 引理 3.2、定理 A.1 和 A.2] 。注意，若 γ 是一条因果曲线，且 f 是一个因果函数，则 $f\circ\gamma$ 在经典意义下是单调不减函数。我们用 $\mathrm{LCC}([0,1];\ M)$ 表示所有左连续因果曲线 $\gamma:\ [0,1]\to M$的集合。该空间定义于 [6] ，并赋予波兰拓扑 [6, 命题 2.29]。此外，对于 $t\in[0,1]$ ，我们定义博雷尔映射 $\mathsf{e}_t:\mathrm{LCC}([0,1];\ M)\to M$，其定义为 $\mathsf{e}_t(\gamma):=\gamma_t$，即在 t处的求值映射。

定义 2.3 (渐近陡峭常数)。 设(M,g) 为一个全局双曲时空，且 $f:M\to\mathbf{R}$ 为一个因果函数。我们将渐近陡峭常数定义为

$$\mathbf{st}_a(f)(x) := \sup_{x\in U\subset M} \mathbf{st}\left(f\big|_U\right), \tag{2.4}$$

其中，上确界是在 M 中 x 的所有开邻域 U 上取的。

容易验证，若 $f:M\to\mathbf{R}$ 是因果函数，则有

$$0\le \mathbf{st}(f)\le \mathbf{st}_a(f)(x)\qquad \forall x\in M.$$

此外，注意到 $\mathbf{st}_a(f):M\to[0,\infty]$ 是一个下半连续函数

对于 $0\neq p<1$，我们定义凹非递减函数 $u_p:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得 $u_p(z):=\frac{1}{p}z^p$，当 $z>0$ 时成立，并且

$$\begin{aligned} u_p(z) &= -\infty && \text{for } z\in[-\infty,0) \text{ and any } p\le 1,\\ u_p(0) &= -\infty \quad (\text{resp. } 0) && \text{for } p<0 \ (\text{resp. } p\in(0,1]),\\ u_p(+\infty) &= 0 \quad (\text{resp. } +\infty) && \text{for } p<0 \ (\text{resp. } p\in(0,1]). \end{aligned} \tag{2.5}$$

此外，给定因果博雷尔向量场 v：$M\to TM$、概率测度 μ 和 $0\neq p<1$，我们定义

$$u_p\left(\|v\|_{L^p_\mu}\right) := \int_M u_p(\|v(x)\|_g)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

该积分定义良好，因为 μ 是一个概率测度，并且当 $p\in(0,1)$ 时，$u_p(\|v\|_g)\ge 0$；当 $p<0$ 时，$u_p(\|v\|_g)\le 0$。

下面给出一个关键定义：

定义 2.4 （因果速度）。 设 (M,g) 是一个时空，且 γ 是 M 中的一条因果曲线。则其因果速度定义为

$$|\dot\gamma_t| = \lim_{h\downarrow 0}\frac{\ell(\gamma_t,\gamma_{t+h})}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{\ell(\gamma_{t-h},\gamma_t)}{h}\qquad a.e.\ t. \tag{2.6}$$

极限几乎处处存在这一点，以及其他基本性质，已在 [6, 定理 2。23] 中针对更一般的时空得到证明，其中尤其包括给定全局双曲时空上的概率测度情形。

在我们的语境中，注意到 $\ell(x,y)=\sup\int|\dot\gamma_t|\,\mathrm{d}t$成立，其中上确界取遍 $J(x,y)$内部的任意因果曲线，即这些曲线既不必连接 x和 y，也不必连续。事实上，因果曲线几乎处处可微，且 $\|\dot\gamma_t\|=|\dot\gamma_t|$，参见 [6,定理 A.1]。此外，[6, 公式 (2.27)] 对所有 $s<t$ 以及任意因果曲线均写作 $\int_s^t|\dot\gamma_r|\,\mathrm{d}t\le\ell(\gamma_s,\gamma_t)$。最后，根据定义，$J(x,y)$内部的任意因果曲线都可以延拓为一条从 x到 y 的因果曲线，而且任何此类延拓都不会使其长度减小。

定义 *2.5*（因果传输计划）。设 (M,g) 为一个全局双曲时空。给定概率测度 $\mu,\nu\in\mathcal{P}(M)$，我们用 $\Pi_{\le}(\mu,\nu)$ 表示因果耦合的集合，即集中于因果相关点上的传输计划。更精确地说，若 $\mu=(Pr_1)_{\#}\pi,\nu=(Pr_2)_{\#}\pi$ 且 $\pi(\{\ell\ge 0\})=1$，则 $\pi\in\Pi_{\le}(\mu,\nu)$，其中 $Pr_1,Pr_2:$ $M\times M\to M$ 是分别投影到第一和第二分量的自然投影。我们还通过以下方式在 $\mathcal{P}(M)$ 上引入因果关系 $\preceq$：当且仅当 $\Pi_{\le}(\mu,\nu)\neq\emptyset$ 时，$\mu\preceq\nu$。

定义 2.6 (p-洛伦兹–瓦瑟斯坦距离)。 设 (M, g) 为一个时空，且令 $0 \neq p < 1$。 p-洛伦兹–瓦瑟斯坦距离 $\ell_p(\mu, \nu)$ 在 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(M)$ 之间定义为 $-\infty$，条件是 $\Pi_{\leq}(\mu_0, \mu_1) = \emptyset$，否则定义为 $[0, +\infty]$ 中满足以下条件的元素

$$u_p\left(\ell_p(\mu, \nu)\right) := \sup_{\pi \in \Pi_{\leq}(\mu,\nu)} \int u_p\left(\ell(x, y)\right) \, \mathrm{d}\pi(x, y) \,. \tag{2.7}$$

一般而言，我们将坚持使用 [6]中的记号。

我们论证的一个核心工具是概率测度的因果路径的提升定理，参见 [6,定理2.43]。

定理 2.7 （将测度路径提升为路径上的测度）。 设 (M, g) 是一个全局双曲时空，且 $0 \neq p < 1$。设 $K \subset M$ 是一个紧子集，并且 $[0, 1] \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(M)$ 是一个左连续因果路径，对所有 $t \in [0, 1]$均有$\mathrm{spt}(\mu_t) \subset K$。那么存在$\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{P}(\mathbf{LCC}([0, 1]; M))$，其诱导出因果路径 $t \mapsto \mu_t$，即对所有 $t \in [0, 1]$均有 $(\mathsf{e}_t)_{\#}\boldsymbol{\pi} = \mu_t$，并且

$$\int_0^1 u_p(|\dot{\mu}_t|) \, \mathrm{d}t = \iint_0^1 u_p\left(\|\dot{\gamma}_t\|_g\right) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) \,.$$

此外，如果这些是 $> -\infty$，那么对于几乎处处的 $t \in [0, 1]$，有 $u_p\left(|\dot{\mu}_t|_p\right) = \int u_p\left(\|\dot{\gamma}_t\|_g\right) \, \mathsf{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)$ 成立。

2.2 Kantorovich 对偶

在本小节中，我们提出一个适用于当前情形的 Kantorovich 对偶版本。我们的代价函数是 $c_p := u_p \circ \ell$ 对于 $0 \neq p < 1$。我们将频繁用到这样一个事实： c_p从$\{\ell \geq 0\}$ 到$\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$是连续的。定理中的某些结论可从更一般的框架中提取出来，见 [25, 定理 4.1 和 5.9], ，另一些结论也已在 [9]中给出。

洛伦兹符号下的 c_p-凹函数和 c-变换概念已在 [9] 中引入，也见于 [6], ；不过，为了更直接地与当前情形相适配，我们将在本文的设定下陈述这些概念。

定义 2.8 (c_p-凹性与变换)。 设(M, g) 是一个全局双曲时空，且设 $0 \neq p < 1$。令 $E \subset M$ 为一个紧子集。若存在函数 $\psi : E \to \mathbf{R}$ 使得，称博雷尔函数 $\varphi : E \to \mathbf{R}$ 相对于紧集 E 是 c_p-凹的

$$\varphi(x) = \inf_{y \in E \cap J^+(x)} \left\{\psi(y) - u_p(\ell(x, y))\right\} \,.$$

此外，关于 E 的 φ 的 c_p-变换定义为 $\varphi_E^{c_p} : E \to \mathbf{R}$ *an* d

$$\varphi_E^{c_p}(y) := \sup_{x \in E \cap J^-(y)} \left\{\varphi(x) + u_p(\ell(x, y))\right\} \,. \tag{2.8}$$

与通常的最优传输理论一样，当考虑输入“定义在第一个空间上”的函数时，我们需要稍微调整 c_p-变换的定义。稍微滥用一下记号，定义如下

$$\psi_E^{c_p}(x) := \inf_{y \in E} \left\{\psi(y) - u_p(\ell(x, y))\right\} \,. \tag{2.9}$$

由于我们关注的是两个具有紧支撑的概率测度之间的动态最优传输，因此可以将研究范围限制在 M 中的一个较大的紧集内。为此，我们需要找到测度的支撑的一个性质良好的邻域。下面的引理说明如何构造这样的邻域。

引理 2.9. 设(M,g) 是一个全局双曲时空，且 $K \subset M$ 是一个紧子集。那么存在一个紧翡翠集 E，使得 $K \subset E$，并且 E 是 K的一个邻域。此外，对于每个 $y \in K$，我们都有 $I^-(y) \cap E = J^-(y) \cap E$。

˜证明。由于 M 是局部紧的，因此存在一个包含 K的紧邻域 K。特别地，˜我们希望找到一个包含 K 且具有所需性质的紧翡翠集。此结论是 Geroch [12] 和 Bernal-Sanchez [7]著名的度量分裂定理的推论。事实上， M 可由柯西曲面 $(\Sigma_t)_{t\in\mathbf{R}}$光滑地分叶，而且每个˜$\Sigma_t$ 都可以假定为非因果的，见 [22]。由于 K 是紧的，因此存在˜ ˜ $t_1 < t_2$ 使得 $K \subset I(\Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2})$；此外，$\{I^-(a) : a \in \Sigma_{t_2}\}$ 是 K 的一个开覆盖，并且我们˜可以找到 $A := \{a_1, \dots, a_k\} \subset \Sigma_{t_2}$使得 $K \subset I^-(A) = I^-(a_1) \cup \cdots \cup I^-(a_k)$。我们定义$E := J^-(A) \cap J^+(\Sigma_{t_1})$。对于每个 $i = 1 \dots k$，由于 [24, 命题 5.20]， $J^-(a_i) \cap J^+(\Sigma_{t_1})$ 是紧的，因此 E 是紧的。

容易验证， E 是 K 的一个邻域；特别地，对于每个 $y \in K$，都有 $I^-(y) \cap E \neq \emptyset$。此外，由整体双曲性可得 $I^-(y) \cap E \subset J^-(y) \cap E$。反过来，设 $z \in J^-(y) \cap E$，则由构造可知，存在 $a_i \in A$ 使得 $z \in I^-(a_i) \subset E$。设 $t_2 > r \geq t_1$ 满足 $z \in \Sigma_r$。由于 $z \in J^-(y)$，存在某个$(z_n)_n \subset I^-(y)$使得$z_n \to z$。假设 $z_n \notin E$ 最终成立（否则该命题显然成立），那么我们只需用类时测地线连接 z_n 和 y；这些测地线最终必定与柯西超曲面Σ_r 在 $p_n \in \Sigma_r \cap E \cap I^-(y)$处相交。于是 p_n 必有一个（不重新标记的）收敛子列$p_n \to p \in \Sigma_r$。然而，我们有 $p_n \geq z_n \to z$，因此 $p \geq z$。由于 Σ_r 是非因果的，可知$p = z$。 □

下面的引理是关于 c_p-变换的一个结构性结果。我们将在证明 Kantorovich 对偶定理 2.11 时用到这一结果。

引理 2.10。 设 (M,g) 是一个全局双曲时空，并设 $0 \neq p < 1$。设 $K \subset M$ 为一个紧子集，且令 $\varphi\colon M \to \mathbf{R}$ 为一个连续有界函数。则存在一个紧翡翠集 E，使得 E 是 K 的一个邻域，并且 $\varphi_E^{c_p}\colon E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ 是定义在 K 上的有界连续因果函数。

证明。 我们选取 E 如引理 2.9 中所示。容易验证 $\varphi_E^{c_p}$ 有界（例如参见引理 3.8第 (i) 点中的论证）。显然， $\varphi_E^{c_p}$ 根据定义是因果的，而且在 K上有限。由于 K 是紧的，我们只需证明连续性。令 $y \in K$。根据引理 2.9，我们有 $I^-(y) \cap E = J^-(y) \cap E$，因此特别有

$$\varphi_E^{c_p}(y) = \sup_{J^-(y)\cap E} \{\varphi(x) + u_p(\ell(x,y))\} = \sup_{I^-(y)\cap E} \{\varphi(x) + u_p(\ell(x,y)). \tag{2.10}$$

设 $(y_n)_n \subset K$ 满足 $y_n \to y$ 属于 K。令 $x \in I^-(y) \cap E$，并注意到当 $n \in \mathbf{N}$ 足够大时，我们也有 $x \in I^-(y_n) \cap E$，因此

$$\varliminf_n \varphi_E^{c_p}(y_n) \geq \varliminf_n \varphi(x) + c_p(x, y_n) = \varphi(x) + c_p(x, y).$$

对 $x \in I^-(y) \cap E$ 取上确界，并回顾 (2.10)，可得 $\varphi_E^{c_p}$ 的下半连续性。关于上半连续性，我们注意到，对每个 $n \in \mathbf{N}$，集合 $J^-(y_n) \cap E$ 都是紧集，因此 φ 和 c_p（在 $\{\ell \geq 0\}$上）的连续性保证存在 $x_n \in J^-(y_n) \cap E$ 使得

$$\varphi_E^{c_p}(y_n) = \varphi(x_n) + u_p(\ell(x_n, y_n)).$$

由于 $(x_n)_n \subset E$，取一个不重新编号的子序列后，我们可以假设 $x_n \to x \in E$。整体双曲性保证 $\{\ell \geq 0\}$ 的闭包，因此 $x_n \leq y_n$ 对每个 n 都成立，这意味着 $x \leq y$。由此可得

$$\varphi_E^{c_p}(y) \geq \varphi(\overline{x}) + u_p(\ell(\overline{x}, y)) = \lim_n \varphi(x_n) + u_p(\ell(x_n, y_n)) \geq \overline{\lim_n} \varphi_E^{c_p}(y_n),$$

如所期望。 □

定理 2.11 (Kantorovich 对偶)。 设(M, g) 为一个全局双曲时空，且$0 \neq p < 1$。考虑具有紧支撑的 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(M)$，满足 $\mu \preceq \nu$。则：

i) 存在一个 p-最优传输计划 $\pi \in \Pi_{\leq}(\mu, \nu)$，并且 $\ell_p(\mu, \nu) < \infty$。

ii) 存在 紧集 $K := J(\mathrm{spt}(\mu), \mathrm{spt}(\nu))$ 的一个紧邻域 E，使得

$$u_p\left(\ell_p(\mu, \nu)\right) = \inf\left\{\int \psi(y)\, \mathrm{d}\nu(y) - \int \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu(x)\right\}, \tag{2.11}$$

其中，下确界取遍所有有界连续的 $\varphi : E \to R$和 $\psi : E \to R$，使得在 $E \times E$上 $\psi(y) - \varphi(x) \geq u_p(\ell(x, y))$。特别地，即使我们在满足在 $E \times E$ 上 $\psi(y) - \varphi(x) \geq u_p(\ell(x, y))$ 的 $\psi \in L^1(\nu)$、 $\varphi \in L^1(\mu)$中取下确界，公式*(2.11)*仍然成立。此外，

$$u_p\left(\ell_p(\mu, \nu)\right) = \inf\left\{\int \varphi_E^{c_p}(y)\, \mathrm{d}\nu(y) - \int \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu(x)\right\}, \tag{2.12}$$

其中，下确界取遍所有在 K 上的连续、有界陡峭函数 φ 。

证明。 第一点 i) 的证明与 [25, 定理 41]相同，而 ii) 的第一部分由 [25, 定理 59]和引理2.9得出，取 E 如其中所述。接下来只需证明公式（2.12）。注意，若（ψ, φ）是（2.11）中的可行连续函数，则（$\varphi, \varphi_E^{c_p}$）也满足条件（ $\varphi_E^{c_p}$ 的连续性由引理 2.10可得），且显然 $\varphi_E^{c_p} \leq \psi$。这足以证明，在（2.11）中，我们可以只考虑形如（$\varphi, \varphi_E^{c_p}$）的函数对。因此，最后只需证明我们可以只考虑陡峭函数。

回顾 [22, 定理 13]，由整体双曲性可知，存在一个光滑 1-陡峭函数 $\mathbf{t} : M \to \mathbf{R}$。令 $\varepsilon > 0$，并注意到函数 $\varphi + \varepsilon \mathbf{t}$ 是一个连续的 ε-陡峭函数。此外，根据 c_p-变换的定义，我们有

$$(\varphi + \varepsilon \mathbf{t})_E^{c_p}(y) - \varphi_E^{c_p}(y) \leq \varepsilon \mathbf{t}(y) \qquad \forall y \in K$$

因此

$$\begin{aligned}\int (\varphi + \varepsilon \mathbf{t})_E^{c_p}\, \mathrm{d}\nu - \int \varphi + \varepsilon \mathbf{t}\, \mathrm{d}\mu &\leq \int \varphi_E^{c_p}(y)\, \mathrm{d}\nu(y) - \int \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) + \varepsilon \int \mathbf{t}\, \mathrm{d}[\nu - \mu] \\ &\leq \int \varphi_E^{c_p}(y)\, \mathrm{d}\nu(y) - \int \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) + 2\varepsilon \|\mathbf{t}\|_{C_b(K)}.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 和 φ 的任意性可得结论。 □

3 因果连续性不等式

3.1 全局双曲时空上的分析

本节首先给出因果连续性不等式的定义。该定义对本文后续内容至关重要。

定义 3.1. 设 (M, g) 是一个全局双曲时空。若 (μ_t, v_t) 满足以下条件，则称其为因果连续性不等式(因果连续性不等式)的解，或简称满足 (因果连续性不等式)：

i) (μ_t) 是在 M 上的概率测度曲线，定义于 $[0,1]$，且存在某个 $K \subset M$ 紧集，使得 $\mathrm{spt}(\mu_t) \subset K$ 对每个 $t \in [0,1]$均成立；

ii) $v_t \colon M \to TM$ 对每个 $t \in [0,1]$都是博雷尔因果向量场；

iii) 对每个光滑因果函数 $\varphi \colon M \to \mathbf{R}$，均有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_t(x)\right) - \int \mathrm{d}\varphi_x(v_t(x))\,\mathrm{d}\mu_t(x) \geq 0 \qquad a.e.\ t \in [0,1]. \tag{CCI}$$

注意，对于由（紧支撑）概率测度组成的因果曲线 μ_t 和 $\varphi \colon M \to \mathbf{R}$ 因果，定义映射 $\Phi \colon [0,1] \to \mathbf{R}$ 为

$$\Phi(t) := \int \varphi \,\mathrm{d}\mu_t \tag{3.1}$$

它是单调的，因此 (因果连续性不等式) 中的导数对几乎处处的 $t \in [0,1]$ 存在，且定义是良定的。为说明其单调性，令 $s \leq t$, $\pi \in \Pi_{\leq}(\mu_s, \mu_t)$，并注意到

$$0 \leq \int \varphi(y) - \varphi(x)\,\mathrm{d}\pi(x,y) = \int \varphi(y)\,\mathrm{d}\mu_t(y) - \int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_s(x) = \Phi(t) - \Phi(s).$$

特别地，我们看到，若 (μ_t) 是因果的，则 $(\mu_t, 0)$ 总是满足 (因果连续性不等式)。

注3.2 (（因果连续性不等式）的分布式表述)。 注意，(因果连续性不等式) 也可以等价地表述为一个分布不等式。事实上，当且仅当满足以下条件时，这一对 (μ_t, v_t) 满足 (因果连续性不等式)：

$$D\Phi \geq g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{holds in } \mathcal{D}'(0,1), \qquad \text{where} \qquad g(t) := \int \mathrm{d}\varphi_x(v_t(x))\,\mathrm{d}\mu_t(x), \tag{3.2}$$

对每个 $\varphi \colon M \to \mathbf{R}$ 光滑因果函数。注意，g 是良定义的，因为被积函数非负。

事实上，我们已经注意到 Φ 是单调的，因此其分布导数是（可表示为）一个非负测度 $D\Phi$，而勒贝格分解定理允许我们写成

$$D\Phi - g(t)\,\mathrm{d}t = [\Phi'(t) - g(t)]\,\mathrm{d}t + (D\Phi)^s.$$

单调性 Φ 确保（$D\Phi$）$^s \geq 0$，由此很容易推出（因果连续性不等式）成立当且仅当 $D\Phi - g$（t）$\mathrm{d}t \geq 0$，如前所述。

下面的引理是一个技术性引理，是证明命题 3.4 所需要的。它是 [23, 定理 2。55] 的一个略微推广，为完整起见，我们给出完整证明。

引理 3.3。 设(M,g)是一个全局双曲时空，且 K是 M中的一个紧集。设 h是 M上的一个黎曼度量，则存在常数 $C=C(K,h)\in(0,+\infty)$，使得

$$\int_0^1 \sqrt{h_{\gamma_t}(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t)}\,\mathrm{d}t \le C \tag{3.3}$$

对每条因果曲线 $\gamma:\ [0,1]\to K$。

证明。令 U_i（$i=1,\ \dots k$）为 K 的一个有限开覆盖，其中各集合均为因果凸集。选取φ_1^i、……、 φ_n^i局部坐标，使得在 U_i 上， $\nabla\varphi_j^i$ 是类时向量场（$j=1,\ \dots n$），并通过规定这些向量场相互正交归一且模长为单位模，定义 U_i 上的黎曼度量 h^i。令 $\gamma\colon[0,1]\to U_i$ 为一条因果曲线，则对几乎处处的 $t\in[0,1]$，有

$$\sqrt{h^i_{\gamma_t}(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t)}=\left[\sum_{j=1}^n \mathrm{d}\varphi_j^i(\dot\gamma_t)^2\right]^{\frac12}\le\sum_{j=1}^n \mathrm{d}\varphi_j^i(\dot\gamma_t),$$

这里用到了对每个 i， j， $\mathrm{d}\varphi_j^i(\dot\gamma_t)\ge0$。由于任意 $t\mapsto\varphi_j^i(\gamma_t)$ 均单调不减，因此有

$$\int_0^1 \sqrt{h^i_{\gamma_t}(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t)}\,\mathrm{d}t\le\sum_{j=1}^n\varphi_j^i(\gamma_1)-\varphi_j^i(\gamma_0)\le 2n\max_{j=1,\dots n}\|\varphi_j^i\|_{L^\infty(U_i)}\,.$$

现在令 ρ_i（$i=1,\ \dots k$）为从属于开覆盖 U_i 的单位分解，并定义$h_x:=\sum_{i=1}^n\rho_i(x)h^i_x$。显然， h 是 K 上的黎曼度量，并且可以将其延拓到整个 M。令 $\gamma\colon[0,1]\to K$ 为一条因果曲线，显然，它可以表示为至多 k 条因果曲线的拼接，其中每条曲线都支撑在不同的邻域 U_i 上。特别地

$$\int_0^1\sqrt{h_{\gamma_t}(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t)}\,\mathrm{d}t\le\sum_{i=1}^k\int_0^1\sqrt{\rho_i(\gamma_t)\,h^i_{\gamma_t}(\dot\gamma_t,\dot\gamma_t)}\,\mathrm{d}t\le 2kn\max_{i,j}\|\sqrt{\rho_i}\|_{L^\infty(K)}\|\varphi_j\|_{L^\infty(U_i)}.$$

结论源于任意两个黎曼度量都局部利普希茨等价这一事实。

□

现在，我们陈述并证明关于因果连续性不等式的第一个结果，即定理 1.2 的 (A) 部分。下文中，给定一个博雷尔概率测度 μ、一个因果向量场v 和 $0\neq p<1$，我们将 $\|v\|_{L^p_\mu}$ 定义为

$$\|v\|_{L^p_\mu}:=\left(\int|v|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac1p},$$

约定若 $p\in$ (0,1)，则 0^p 等于 0；若 $p<0$，则等于 $+\infty$。我们有 e:

命题 3.4。 设 (M,g) 是一个全局双曲时空，且设 $0\neq p<1$。令$[0,1]\ni t\mapsto\mu_t\in\mathcal{P}(M)$ 为一条因果路径，使得对每个 $t\in[0,1]$，都有 $\mathrm{spt}(\mu_t)\subset K$，其中 K是 M的一个紧子集。假设 $\int_0^1 u_p(|\dot\mu_t|_p)\,\mathrm{d}t>-\infty$。

那么，存在一族因果博雷尔向量场$(v_t)^{t\in[0,1]}$，使得：

i) $u_p\left(\|v_t\|_{L^p_{\mu_t}}\right)\ge u_p\left(|\dot\mu_t|_p\right)$ *holds for almost every* $t\in[0,1]$,

ii) 这一对 (μ_t,v_t) 满足因果连续性不等式 (因果连续性不等式)。

证明。 注意，如果我们在一个零测时间集合上修改路径 $t \mapsto \mu_t$，则满足（i）和（ii）的博雷尔向量场族保持不变。因此，从现在起，我们将路径$t \mapsto \mu_t$ 替换为其左连续代表（回顾 [6, 命题 2。28]）。利用提升定理 2.7，我们可以找到 $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{P}(\mathrm{LCC}([0,1];\ M))$，使得 $(\mathsf{e}_t)_{\#}\boldsymbol{\pi} = \mu_t$ 并且

$$u_p\left(|\dot{\mu}_t|_p\right) = \int u_p\left(\|\dot{\gamma}_t\|_g\right)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) \tag{3.4}$$

对于几乎处处的 $t \in [0,1]$。我们定义博雷尔映射 $D_t\colon \mathrm{LCC}([0,1];\ M) \to TM$ 为

$$\mathrm{LCC}([0,1];M) \ni \gamma \mapsto D_t(\gamma) = \begin{cases} (\gamma_t, \dot{\gamma}_t) & \text{if } \gamma \text{ is differentiable at } t\,, \\ (\gamma_t, 0) & \text{otherwise}\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

令 $\mathrm{Pr}:\ TM \to M$ 为典范投影。于是有 $\mathrm{Pr}_{\#}\left((D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi}\right) = (\mathrm{Pr}\circ D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi} = (\mathsf{e}_t)_{\#}\boldsymbol{\pi} = \mu_t$。我们关于 Pr 对 $(D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{P}(TM)$ 作解体，得到

$$(D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi} = \int \left((D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi}\right)_x\, \mathrm{d}\mu_t(x)\,. \tag{3.6}$$

我们回忆一下，对于 μ_t-几乎处处的 $x \in M$，$\left((D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi}\right)_x$ 集中于 $T_xM = \mathrm{Pr}^{-1}(\{x\})$。如果我们现在还关于 $\mathrm{Pr}\circ D_t$ 对 $\boldsymbol{\pi}$ 作解体，那么根据解体的唯一性，我们得到 $(D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi}_x = \left((D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi}\right)_x$，对于 μ_t-几乎处处的 $x \in M$。我们旨在将 $v_t(x)$ 定义为测度 $\left((D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi}\right)_x$ 的重心，该测度定义在切空间 T_xM 上，即

$$v_t(x) := \int_{T_xM} v\ \mathrm{d}\left((D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi}\right)_x(v) = \int D_t(\gamma)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}_x(\gamma) \qquad \mu_t - a.e.\ x. \tag{3.7}$$

我们需要证明（3.7）中的定义是良定义的。为此，只需证明对于某个辅助黎曼度量 h 在 M 上，我们有

$$\int \|v\|_h\ \mathrm{d}\left((D_t)_{\#}\boldsymbol{\pi}\right)_x(v) = \int \|\dot{\gamma}_t\|_h\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}_x(\gamma) < \infty \qquad \mu_t - a.e.\ x,$$

其中 $\|v\|_h := \sqrt{h_x(v, v)}$ 对于 $v \in T_xM$。由引理 3.3，存在 $C > 0$ 使得

$$\int_0^1 \int \int \|\dot{\gamma}_t\|_h\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}_x(\gamma)\ \mathrm{d}\mu_t(x)\,\mathrm{d}t \le C < \infty, \tag{3.8}$$

因此，对于 μ_t-几乎处处的 x 以及几乎处处的 $t \in [0,1]$，我们有 $\int \|\dot{\gamma}_t\|_h\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}_x(\gamma) < \infty$。注意，对于 μ_t-几乎处处的 $x \in M$，$v_t(x)$是一个因果向量。事实上，对于每个因果向量$w \in T_xM$，我们有

$$g_x(w, v_t(x)) = \int g_x(w, \dot{\gamma}_t)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}_x(\gamma) \ge 0\,,$$

这里用到了 $\boldsymbol{\pi}_x$ 集中于因果曲线上这一点。由构造可知，除去相对于 μ_t测度为零的集合外，将 $v_t = 0$ 设为 μ_t 上的任意值后，v_t 是一个因果博雷尔向量场，使得（3.7）对几乎处处的 $t \in [0,1]$ 以及对 μ_t-几乎处处的 $x \in M$成立。

注意， i）由（3.4）中的恒等式和詹森不等式即可推出，事实上 d

$$u_p\left(\|v_t\|_{L^p_{\mu_t}}\right) = \int u_p\left(\|v_t(x)\|_g\right)\ \mathrm{d}\mu_t(x) = \int u_p\left(\left\|\int D_t(\gamma)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}_x(\gamma)\right\|_g\right)\ \mathrm{d}\mu_t(x)$$

$$\geq \int \int u_p\left(\|D_t(\gamma)\|_g\right)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}_x(\gamma)\,\mathrm{d}\mu_t(x) = \int u_p\left(\|\dot\gamma_t\|_g\right)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) = u_p\left(|\dot\mu_t|_p\right)\,.$$

现在只需证明 $ii)$，即证明这一对（μ_t，v_t）满足（因果连续性不等式）。设 $\varphi \in C^\infty(M)$ 为一个因果函数，并定义 $\Phi\colon\ [0,1]\to\mathbf{R}$ 为 $\Phi(t) = \int \varphi \mathrm{d}\mu_t$。注意到 Φ 是有界的，因为 $\|\Phi\|_{L^\infty} \leq \sup_K |\varphi|$，且单调不减（如（3.1）后所述）。因此，根据勒贝格微分定理，Φ 几乎处处可微；并且对几乎所有的 $t\in[0,1]$，我们可以应用 Fatou 引理、标准链式法则和富比尼定理，得到

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{\Phi(t+h)-\Phi(t)}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\int \frac{\varphi(\gamma_{t+h})-\varphi(\gamma_t)}{h}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\\ &\geq \int \lim_{h\downarrow 0}\frac{\varphi(\gamma_{t+h})-\varphi(\gamma_t)}{h}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) = \int \mathrm{d}\varphi_{\gamma_t}(\dot\gamma_t)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma).\end{aligned}$$

因此由

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\varphi_{\gamma_t}(\dot\gamma_t)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) &= \int \mathrm{d}\varphi_x(v)\,\mathrm{d}(D_t)_\#\boldsymbol{\pi}(x,v)\\ &= \int\int_{T_xM} \mathrm{d}\varphi_x(v)\,\mathrm{d}(D_t)_\#\boldsymbol{\pi}_x(v)\,\mathrm{d}\mu_t(x)\\ &= \int \mathrm{d}\varphi_x\left(\int_{T_xM} v\,\mathrm{d}(D_t)_\#\boldsymbol{\pi}_x(v)\right)\mathrm{d}\mu_t(x) = \int \mathrm{d}\varphi_x(v_t(x))\,\mathrm{d}\mu_t(x)\end{aligned}$$

可得结论。 □

注3.5。这里我们在一个简化但有意义的情形下，明确计算（因果连续性不等式）的左端 $M=\mathbf{R}^{1,n}$ 以展开注 3.2中的计算。设 $t\mapsto\mu_t\in\mathcal{P}(M)$ 为一条因果路径，并记 $v_t: M\to TM$ 为命题3.4证明中构造的因果博雷尔向量场。

设 $\varphi\in C^\infty(M)$ 是一个因果函数，并考虑有界单调不减函数$\Phi(t) = \int\varphi\mathrm{d}\mu_t$。特别地，其分布意义下的导数 $D\Phi$ 是在 $[0,1]$ 上的非负有限测度。利用勒贝格分解定理，我们可以将其唯一分解为

$$D\Phi = \Phi'(t)\,\mathrm{d}t + D\Phi^s \tag{3.9}$$

绝对连续部分和奇异部分；二者均为非负，因为 $D\Phi$非负。接下来我们进一步考察这两部分。利用分布导数的定义和富比尼定理，容易验证 $D\Phi = \int D(\varphi\circ\gamma)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)$。因此，简单应用沃尔珀特链式法则定理 [2, 定理 3。96] 于 $D(\varphi\circ\gamma)$，可得

$$D\Phi = \int \mathrm{d}\varphi_{\gamma_t}(\dot\gamma_t)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\,\mathrm{d}t + \int D(\varphi\circ\gamma)^s\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\,, \tag{3.10}$$

其中 $D(\varphi\circ\gamma)^s$ 表示 $D(\varphi\circ\gamma)$的勒贝格分解中的奇异部分。由于 $\int D(\varphi\circ\gamma)^s\,\boldsymbol{\pi}(d\gamma)$是一个非负有限测度，我们可以再次使用勒贝格分解，将其写为

$$\int D(\varphi\circ\gamma)^s\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) = \psi(t)\,\mathrm{d}t + \nu^s\,, \tag{3.11}$$

其中 ψ 是拉东-尼科迪姆密度，而 ν^s 是奇异部分。注意，ψ 几乎处处是非负函数，并且 ν^s 是非负测度。结合式（3.10）和式（3.11），可得

$$D\Phi = \left(\int \mathrm{d}\varphi_{\gamma_t}(\dot\gamma_t)\ \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) + \psi(t)\right)\mathrm{d}t + \nu^s. \tag{3.12}$$

因此，式（3.9）和式（3.12）是 $D\Phi$的两个勒贝格分解。根据唯一性，绝对连续部分必几乎处处相等。因此，对于几乎所有的 $t \in [0,1]$，有

$$\Phi'(t) - \int \mathrm{d}\varphi_{\gamma_t}(\dot{\gamma}_t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) = \psi(t) \geq 0\,.$$

此外，由恒等式（3.11）可得，$\psi(t) = [\int D(\varphi \circ \gamma)^s \,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)]^{ac}(t)$ 对几乎处处的 $t \in [0,1]$成立。■

下面这个简单的例子说明了证明过程中哪些内容被“丢失”，以至于最终只能得到连续性不等式，而非正号差情形下的连续性方程。

例 3.6. 设 $x \leq y$ 是 $\mathbf{R}^{1,n}$ 中的两个因果相关点，并考虑映射$[0,1] \ni t \mapsto \mu_t = (1-t)\delta_x + t\delta_y \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^{1,n})$。注意，这条曲线关于 $\mathcal{P}(\mathbf{R}^{1,n})$上的窄拓扑是连续的。此外，它是因果的，并且

$$u_p(\ell_p(\mu_s,\mu_t)) = \begin{cases} \frac{1}{p}\|y-x\|^p(t-s) & p \in (0,1) \\ -\infty & p < 0\,. \end{cases}$$

容易验证，在定理 $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{P}(\mathrm{LCC}([0,1],\mathbf{R}^{1,n})$ 中构造的提升计划 2.7 由下式给出

$$\boldsymbol{\pi} = G_{\#}(\mathcal{L}^1 \llcorner [0,1])\,,$$

其中 $G\colon [0,1] \to \mathrm{LCC}([0,1],\mathbf{R}^{1,n})$ 由下式给出

$$G(s) = \gamma^s, \qquad \gamma^s_t = \gamma^s(t) = \begin{cases} x & 0 \leq t \leq s \\ y & s < t \leq 1\,. \end{cases}$$

我们注意到，给定一个光滑因果函数 $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^{1,\,n})$，显然有 $\Phi(t) = \int \varphi \mathrm{d}\mu_t = (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$，因此

$$\Phi'(t) = \varphi(y) - \varphi(x)\,.$$

此外，我们可以计算命题 3.4 中构造的博雷尔向量场族，最终得到 $v_t(x) = 0$ 对于 μ_t几乎处处成立。■

3.2 Hopf–Lax 型公式

在本小节中，我们将构建相关工具，以证明定理1.2的部分（B）。从现在开始，我们不仅研究 $0 \neq p < 1$，还研究其 H¨older 共轭函数，并始终将其记为 q。也就是说，$0 \neq q < 1$ 并且 $p^{-1} + q^{-1} = 1$。

定义 3.7（洛伦兹 Hopf–Lax 半群）。设 (M, g) 是一个全局双曲时空，且 $0 \neq p < 1$。设 $E \subset M$ 为一个紧子集，并令 $f\colon E \to \mathbf{R}$ 为一个陡函数。对于$t \in (0,1],$，我们定义 $Q_t^p f\colon E \to \mathbf{R}$ 为

$$Q_t^p f(y) := \sup_{J^-(y)\cap E} \left\{ f(x) + t\, u_p\left(\frac{\ell(x,y)}{t}\right)\right\}. \tag{3.13}$$

接下来，我们将类比黎曼情形，展示洛伦兹 Hopf–Lax 半群的一些结构性质；例如可参见 [1, 定理 16。10]。

引理 3.8 （Q_t^p 的性质）。设 (M,g) 是一个全局双曲时空，且设 $0\neq p<1$。设 $K\subset M$ 为一个紧子集，并设 $f\colon E\to\mathbf{R}$ 是一个连续的 L-陡函数，其中 $L>0$，且 E 是 K 的一个紧邻域，如引理 2.9所述。则：

(o) 对任意 $y\in E$ 和 $t>0$，(3.13) 中的上确界是最大值。

(i) 对任意 $t\in(0,1]$，我们有 $Q_t^p f\colon K\to\mathbf{R}$ 连续且具有因果性。此外，对于任意$y\in K$，我们有

$$Q_t^p f(y)=\sup\left\{f(x)+t\,u_p\left(\frac{\ell(x,y)}{t}\right):x\in E\,,\,0<\ell(x,y)\leq tL^{\frac{1}{p-1}}\right\}. \tag{3.14}$$

(ii) $Q_t^p f\colon K\to\mathbf{R}$ 对任意 $t\in(0,1]$ 都是一个 L-陡函数。

(iii) 对每个 $y\in E$，映射 $(0,1]\ni t\mapsto Q_t^K f(y)$ 在 $p\in(0,1)$ 上单调不减，在 $p<0$ 上单调不增。此外，对每个 $\varepsilon>0$，映射 $[\varepsilon,1]\ni t\mapsto Q_t^p f(y)$ 关于 $y\in K$ 一致利普希茨连续，其利普希茨常数仅由 L、p、ε 控制。

(iv) 对每个 $y\in K$，都有 $Q_t^p f(y)\downarrow f(y)=Q_0^p f(y)$，其中 $t\downarrow 0$，若 $p\in(0,1)$，且$Q_t^p f(y)\uparrow f(y)=Q_0^p f(y)$，其中 $t\to 0^+$，若 $p<0$。特别地，$Q_t f$ 在 K 上一致收敛到 f。

证明。

(o) 这是 f 在 E 上的连续性以及 $u_p(\ell(\cdot\,,y))$ 的直接推论：$J^-(y)\cap E\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$。

(i) 令 $y\in K$和 $t\in(0,1]$。首先证明 $Q_t^p f$有界。事实上，对于 $p\in(0,1)$ 我们可以用 3.13) 进行检验，取 $x=y$，从而得到 $f(y)\leq Q_t^p f(y)$。若 $p<0$，由于 E是 K 的一个紧邻域，存在 $E\ni y\ll y$，因此

$$-\infty<f(\overline{y})+t\,u_p\left(\tfrac{\ell(\overline{y},y)}{t}\right)\leq Q_t^p f(y)\,.$$

注意到 ℓ，因此 $u_p\circ\ell$ 在 $E\times E$ 上有上界，因而很容易得到一个上界。

$Q_t^p f$ 在 K 上的连续性和因果性可用与引理 2.10 相同的方法证明。接下来我们将证明 (3.14)。注意，由于 E 的选取、引理 2.9 以及待最大化函数的连续性，我们可以将 (3.13) 中的定义域限制为 $I^-(y)\cap E$。因此，要证明 (3.14)，只需证明对于 $y\in K$ 和 $x\in J^-(y)\cap E$ (3.13) 的最大化点，有 $\ell(x,y)\leq tL^{\frac{1}{p-1}}$。对于这样的 y,x，我们可以假设 $\ell(x,y)>0$ （否则无需证明），接着令 $\gamma\colon[0,1]\to M$ 为一条从 x 到 y的极大测地线。注意，E 根据构造是一个翡翠区域，因此是因果凸的，所以对所有 $\lambda\in[0,1]$，都有 $\gamma_\lambda\in E$。于是我们得到

$$f(x)+t\,u_p\left(\tfrac{\ell(x,y)}{t}\right)\geq f(\gamma_\lambda)+t\,u_p\left(\tfrac{\ell(\gamma_\lambda,y)}{t}\right)\qquad\forall\lambda\in[0,1] \tag{3.15}$$

并重新整理

$$\frac{1-(1-\lambda)^p}{pt^{p-1}}\,\ell(x,y)^p=t\,u_p\left(\tfrac{\ell(x,y)}{t}\right)-t\,u_p\left(\tfrac{\ell(\gamma_\lambda,y)}{t}\right)\geq f(\gamma_\lambda)-f(x)\geq L\ell(x,\gamma_\lambda)=L\lambda\,\ell(x,y)\,.$$

除以 λ 并令 $\lambda\downarrow 0$，我们得到所需的 $\ell(x,\ y)\leq tL^{\frac{1}{p-1}}$。—

(ii) 令 $y_1 \le y_2$ 属于 K 并选取 $x \in J^-(y_1) \cap E$ 为（3.13）的最大化点。由（i）可知 $\ell(x, y_1) \le tL^{\frac{1}{p-1}}$。然后，利用 u_p 的反三角不等式和单调性，我们计算得

$$\begin{aligned} Q_t^p f(y_2) - Q_t^p f(y_1) &\ge f(x) + tu_p\left(\frac{\ell(x,y_2)}{t}\right) - f(x) - tu_p\left(\frac{\ell(x,y_1)}{t}\right) \\ &\ge tu_p\left(\frac{\ell(x,y_1)+\ell(y_1,y_2)}{t}\right) - tu_p\left(\frac{\ell(x,y_1)}{t}\right). \end{aligned}$$

特别地，我们有

$$\lim_{y_2 \downarrow y_1} \frac{Q_t^p f(y_2) - Q_t^p f(y_1)}{\ell(y_1,y_2)} \ge u_p'\left(\frac{\ell(x,y_1)}{t}\right) \ge L\,. \tag{3.16}$$

现在我们可以证明，$Q_t^p f$ 是 K 上的 L-陡函数。取 $y_1 \le y_2$ 和 K 中的 $y_1 \le y_2$，并用一条最大化因果测地线 γ_λ 将它们连接起来，使得 $\gamma_0 = y_1$ 且 $\gamma_1 = y_2$。那么函数 $s(\lambda) := Q_t^p f(\gamma_\lambda)$ 单调不减，因此

$$Q_t^p f(y_2) - Q_t^p f(y_1) = s(1) - s(0) \ge \int_0^1 s'(\xi)\,\mathrm{d}\xi \overset{(3.16)}{\ge} L\ell(y_1,y_2).$$

(iii) 单调不增和单调不减性质可由（3.13）中的定义直接得出。接下来只需证明 Lipschitz 连续性。我们将证明 $p \in (0,1)$ 的情形，因为在（$p<0$ 中将 s 替换为 t 后，计算过程（3.17）可完全类似地处理。固定 $y \in K$，并设 $\varepsilon > 0$。考虑 $\varepsilon \le s \le t \le 1$，那么我们可以找到一个最大化点 $x \in J^-(y) \cap E$（当 $x \ll y$ 时，取 $p<0$），使其对应于 $Q_t^p f$，因此有

$$\begin{aligned} Q_t^p f(y) - Q_s^p f(y) &\le f(x) + t\,u_p\left(\tfrac{\ell(x,y)}{t}\right) - f(x) - s\,u_p\left(\tfrac{\ell(x,y)}{s}\right) \\ &\le u_p(\ell(x,y))\left[\frac{1}{t^{p-1}} - \frac{1}{s^{p-1}}\right] \le u_p\left(L^{\frac{1}{p-1}}\right)\left[\frac{1}{t^{p-1}} - \frac{1}{s^{p-1}}\right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

注意，如果交换 s 和 t 的角色，估计也类似。由 $t \mapsto t^{1-p}$ 在 $[\varepsilon, 1]$ 上是 Lipschitz 函数可得结论。

(iv) 现在我们要证明，对于某个固定的 $y \in K$，当 $t \downarrow 0$ 时，映射 $t \mapsto Q_t^p f(y)$ 单调收敛到 $f(y)$。首先，由单调性可知这样的极限存在。令 $p<1$，并固定某个 $y \in K$。对于每个 $t \in (0,1]$，令 $y_t \in J^-(y) \cap E$ 为 $Q_t^p f(y)$ 定义中的一个最大化点。注意，由于 f 的 L-陡峭性，我们有 $f(y_t) \le f(y) - L\ell(y_t, y)$；因此，再利用杨氏不等式，可得

$$Q_t^p f(y) \le f(y) - L\ell(y_t,y) + t\,u_p\left(\tfrac{\ell(y_t,y)}{t}\right) \le f(y) - t\,u_q(L)\,.$$

然后，只需在两边取 $t \to 0^+$，即可得到 $\lim_{t\downarrow 0} Q_t^p f(y) \le f(y)$。接下来要证明反向不等式。若 $p \in (0,1)$，则由 $f(y) \le Q_t^p f(y)$ 可知结论显然。若 $p<0$，考虑 $z \ll y$，并注意到

$$f(z) + t\,u_p\left(\tfrac{\ell(z,y)}{t}\right) \le Q_t^p f(y) \qquad \forall t > 0.$$

令 $t \to 0^+$，并注意到前一个方程的左端收敛于 $f(z)$，从而得出 $f(z) \le \lim_t Q_t^p f(y)$。由于 f 是连续的，并且回想引理 2.9，我们有 $\sup_{z \in I^-(y)\cap E} f = f(y)$。结论随之得出。

□

在上一引理的相同假设下，对于 $y \in K$ 和 $t > 0$，我们将 $\mathsf{L}_{\max}(y,t) \geq 0$定义为

$$\mathsf{L}_{\max}(y,t) := \sup\left\{\ell(x,y) \ : \ x \text{ is a maximizer in the definition of } Q_t^p f(y)\right\}. \tag{3.18}$$

由紧性可知，上确界实际上就是最大值。以下结论也很容易证明：即

引理 3.9. 在与引理 3.8相同的假设和记号下，以下结论成立。对于任意 $t > 0$ 映射 $\mathsf{L}_{\max}(\cdot\ t)$ 在 K上是上半连续的。

证明。 设 $(y_n) \subset K$ 收敛到某个极限点 $y \in K$，并且对每个 $n \in \mathbf{N}$，令$z_n \in J^-(y_n) \cap E$为 $Q_t^p f(y_n)$ 定义中的一个最大化点，使得 $\ell(z_n, y_n) = \mathsf{L}_{\max}(y_n, t)$。由 E的紧性，经过取一个不重新编号的子列，我们可以假设 (z_n) 收敛到极限点 $z \in E$。于是，由 $Q_t^p f$ 的连续性可得

$$Q_t^p f(y) = \lim_n Q_t^p f(y_n) = \lim_n f(z_n) + u_p(\ell(z_n, y_n)) = f(y) + u_p(\ell(z,y)),$$

p从而证明 z是 $Q_t^p f$定义中的一个最大化点。结论随即成立。 □

现在我们证明一个将洛伦兹 Hopf–Lax 半群与一类 Hamilton–Jacobi 方程联系起来的命题。在光滑范畴中，这一结果是经典结论。在度量情形下，正号差中的类似结论已在 [4] 和 [18]中得到。

命题 3.10。在引理 3.8的相同假设和记号下，以下结论成立。对于任意 $y \in K$ 映射 $t \mapsto Q_t^p f(y)$ 几乎处处可微，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_t^p f(y) + u_q\left(\mathsf{st}_a(Q_t^p f)(y)\right) \geq 0 \tag{3.19}$$

*hold*对几乎处处的 $t \in [0,1]$ 成立，其中 $0 \neq q < 1$ 是 $p < 1$ 的 ***H¨older*** 共轭。

证明。根据引理 3.8 中证明的单调性性质，映射 $t \mapsto Q_t^p f(y)$ 几乎处处可微。令 $t \in (0,1)$ 为一个可微点，我们断言

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_t^p f(y) \geq -\frac{1}{q}\left(\frac{\mathsf{L}_{\max}(y,t)}{t}\right)^p. \tag{3.20}$$

我们只证明 $p \in (0,1)$ 的情形， $p < 0$ 的情形类似（证明中只需用 $h < 0$ 替代下文的 $h > 0$）。设 $h > 0$ 满足 $t + h \in [0,1]$，且 $x \in J^-(y) \cap E$是 $Q_t^p f(y)$ 定义中的一个最大化点。由于 x 也是 $Q_{t+h}^p f(y)$ 定义中的一个竞争者，我们有

$$Q_{t+h}^p f(y) - Q_t^p f(y) \geq (t+h)\, u_p\left(\tfrac{\ell(x,y)}{t+h}\right) - t\, u_p\left(\tfrac{\ell(x,y)}{t}\right) = \tfrac{1}{p}\ell(x,y)^p \left(\frac{1}{(t+h)^{p-1}} - \frac{1}{t^{p-1}}\right).$$

进一步选取 x 使得 $\ell(x,\ y) = \mathsf{L}_{\max}(y,\ t)$，结论（3.20）便可轻易得出。

因此，要得出结论，只需证明

$$\mathsf{st}_a(Q_t^p f)(y)) \geq \left(\frac{\mathsf{L}_{\max}(y,t)}{t}\right)^{p-1}. \tag{3.21}$$

为此，设 $U \subset E$ 是 y的一个开邻域。接着取 z_1，$z_2 \in U$，使得 $z_1 \ll z_2$ 且$w \in J^-(z_1) \cap E$是 $Q_t^p f(z_1)$ 定义中的一个最大化点，并满足 $\ell(w,\ z_1) = \mathsf{L}_{\max}(z_1,\ t)$。由 u_p 的单调性和凹性，以及反三角不等式可得

$$\begin{aligned} Q_t^p f(z_2) - Q_t^p f(z_1) &\geq t\, u_p\big(\tfrac{\ell(w,z_2)}{t}\big) - t\, u_p\big(\tfrac{\ell(w,z_1)}{t}\big) \\ &\geq t\left(u_p\big(\tfrac{\ell(w,z_1)+\ell(z_1,z_2)}{t}\big) - u_p\big(\tfrac{\ell(w,z_1)}{t}\big)\right) \geq \ell(z_1,z_2)\, u_p'\Big(\tfrac{\ell(z_1,z_2)+\ell(w,z_1)}{t}\Big). \end{aligned}$$

由此可得

$$\mathsf{st}\big(Q_t^p f\big|_U\big) \geq \frac{1}{t^{p-1}}\Big(\operatorname{diam}(U) + \sup_{z\in U} \mathsf{L}_{\max}(z,t)\Big)^{p-1},$$

其中，$\operatorname{diam}(U)$ 是 U 的类时直径。当 U收缩至 y时，该直径趋于 0，因此结论（3.21）由 $\mathsf{L}_{\max}$ 的上半连续性得出，该上半连续性已在引理 3.9中确立。 □

3.3 Kuwada 对偶

现在我们将利用所谓的 Kuwada 对偶证明一些结果。其核心是借助 Hopf–Lax 半群，在函数及其 c-变换之间进行插值。我们先介绍一个简单的引理，它基于 [10] 的一些思想，使得在全局双曲时空上可以用光滑因果函数逼近因果函数。

引理 3.11。设 (M, g) 是一个全局双曲时空，且 $\varphi\colon M \to \mathbf{R}$ 是一个有界、连续且因果的函数。设 $K \subset M$ 是一个紧集。那么，存在一族$\varphi_\varepsilon\colon M \to \mathbf{R}$ 光滑因果函数，使得 $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ 逐点收敛于 $\varepsilon \to 0$，并且对每个$x \in K$，我们都有

$$\varlimsup_{\varepsilon\downarrow 0} \|(d\varphi_\varepsilon)_x\|_{g^*} \geq \mathsf{st}_a(\varphi)(x)\,.$$

证明。若 M 是闵可夫斯基时空，则结论由标准磨光得到。在一般情形下，采用类似于 [6, 定理 A.2], 中所用方法的坐标图论证即可。细节从略。 □

我们应用前一个引理，得到一个有用的初步不等式，并将在定理 3.15 的证明中使用。

引理 3.12。设 (M, g) 是一个全局双曲时空，且 (μ_t, v_t) 满足因果连续性不等式。则

$$\int \varphi(x)\ \mathrm{d}\mu_t(x) - \int \varphi(x)\ \mathrm{d}\mu_s(x) \geq \int_s^t \int \mathsf{st}_a(\varphi)(x)\, \|v_r(x)\|_g\ \mathrm{d}\mu_r(x)\ \mathrm{d}r$$

对 每个 $\varphi\colon M \to \mathbf{R}$ 有界、连续且因果的函数，以及 $t \geq s$ 属于 $[0,1]$.

证明。首先回顾一下，由于 μ_t 是因果路径，且 φ 是因果函数，因此 $\Phi(s) = \int \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu_s(x)$ 单调不减。暂且假设除了有界且因果之外，φ 还是光滑的。注意，在这种情况下，φ 是因果连续性不等式的一个有效测试函数，从而得到 $\Phi'(r) \geq \int d\varphi_x(v_r(x))\, \mathrm{d}\mu_r(x)$。接下来我们计算

$$\begin{aligned} \int \varphi(x)\ \mathrm{d}\mu_t(x) - \int \varphi(x)\ \mathrm{d}\mu_s(x) &= \Phi(t) - \Phi(s) \\ &\geq \int_s^t \Phi'(r)\ \mathrm{d}r \geq \int_s^t \int \mathrm{d}\varphi_x(v_r(x))\ \mathrm{d}\mu_r(x)\ \mathrm{d}r \end{aligned}$$

$$\geq \int_s^t \int \|\,\mathrm{d}\varphi_x\|_{g^*}\,\|v_r(x)\|_g\;\mathrm{d}\mu_r(x)\;\mathrm{d}r\,,$$

其中，最后一个不等式由对偶双曲范数定义的直接推论得出（2.3）。

现在令 $\varphi\colon\ M\to\mathbf{R}$ 仅为有界、连续且因果的函数。考虑一族 φ_ε 如引理 3.11中所述。特别地， φ_ε 是因果连续性不等式的一个有效测试函数，因此我们有

$$\int \varphi_\varepsilon(x)\;\mathrm{d}\mu_t(x)-\int \varphi_\varepsilon(x)\;\mathrm{d}\mu_s(x)\geq \int_s^t\int \|(\,\mathrm{d}\varphi_\varepsilon)_x\|_{g^*}\,\|v_r(x)\|_g\;\mathrm{d}\mu_r(x)\;\mathrm{d}r\,.$$

现在我们考虑 ε 趋于 $\varepsilon\to 0$ 时这两个表达式的极限。对于左侧，我们可以应用控制收敛定理；对于右侧，我们可以应用 Fatou 引理，从而得到

$$\begin{aligned}\int \varphi(x)\;\mathrm{d}\mu_t(x)-\int \varphi(x)\;\mathrm{d}\mu_s(x)&=\varliminf_{\varepsilon\downarrow 0}\int \varphi_\varepsilon(x)\;\mathrm{d}\mu_t(x)-\int \varphi_\varepsilon(x)\;\mathrm{d}\mu_s(x)\\&\geq \varliminf_{\varepsilon\downarrow 0}\int_s^t\int \|(\,\mathrm{d}\varphi_\varepsilon)_x\|_{g^*}\,\|v_r(x)\|_g\;\mathrm{d}\mu_r(x)\;\mathrm{d}r\\&\geq \int_s^t\int \varliminf_{\varepsilon\downarrow 0}\|(\,\mathrm{d}\varphi_\varepsilon)_x\|_{g^*}\,\|v_r(x)\|_g\;\mathrm{d}\mu_r(x)\;\mathrm{d}r\,.\end{aligned}$$

因此，根据引理 3.11，结论成立。 □

现在我们陈述以下结果，其灵感来自 [1,引理 17。7]和 [20,定理 15。6]。

引理 3.13。 设 (M,g) 是一个全局双曲时空，且 (μ_t,v_t) 满足因果连续性不等式。

那么存在一个零测集 $N\subset[0,1]$，使得对于每个因果函数 $\varphi\colon\ M\to\mathbf{R}$以及 $t\notin N$，我们都有

$$\varliminf_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_{t+h}(x)-\int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_t(x)\right)\geq \int \mathsf{st}_a(\varphi)(x)\|v_t(x)\|_g\,\mathrm{d}\mu_t(x)\,.$$

证明。 我们声称存在一个零测集 $N\subset[0,1]$，使得对于每个下半连续函数 $u\colon M\to[0,\infty)$ 和 $t\notin N$，都有

$$\varliminf_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int u(x)\|v_r(x)\|_g\;\mathrm{d}\mu_r(x)\;\mathrm{d}r\geq \int u(x)\|v_t(x)\|_g\,\mathrm{d}\mu_t(x)\,.\tag{3.22}$$

结论可由以下事实推出： $\mathsf{st}_a(\varphi)\colon M\to[0,\infty)$ 对任意因果函数 φ以及引理 3.12。

首先注意，只需证明（3.22）对连续函数成立即可。事实上，对于任意下半连续函数 u，都存在一个单调不减的连续函数序列$u_n\colon\ M\to[0,\infty)$，使得 $u(x)=\sup_n u_n(x)$，对任意 $x\in M$ 都成立。假设（3.22）对 u 连续成立，则对每个 $t\notin N$，我们有

$$\varliminf_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int u(x)\|v_r(x)\|_g\;\mathrm{d}\mu_r(x)\;\mathrm{d}r\geq \varliminf_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int u_n(x)\|v_r(x)\|_g\;\mathrm{d}\mu_r(x)\;\mathrm{d}r$$

$$= \int u_n(x)\|v_t(x)\|_g \,\mathrm{d}\mu_t(x)\,.$$

现在，我们考虑两边当 $n \to \infty$ 时的极限，并利用单调收敛定理得出结论。因此，假设 $u\colon M \to [0,\infty)$ 是一个连续函数。此外，我们可以假设映射

$$[0,1] \ni t \mapsto \int u(x)\|v_t(x)\|_g \,\mathrm{d}\mu_t(x)$$

为 $L^1_{loc}(0,1)$，否则结论很容易验证。因此，我们可以应用勒贝格微分定理，从而存在 $N(u) \subset [0,1]$ 零测集，使得对于每个 $t \notin N(u)$，都有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int u(x)\|v_r(x)\|_g \,\mathrm{d}\mu_r(x)\,\mathrm{d}r = \int u(x)\|v_t(x)\|_g \,\mathrm{d}\mu_t(x)\,.$$

令 $\mathcal{D} \subset C^0(K;\mathbf{R})$（其中 $K \subset M$ 是一个包含所有 μ_t's 支集的紧集）为关于一致拓扑的可数稠密集，并定义

$$N := \bigcup_{\psi\in\mathcal{D}} N(\psi)\,.$$

特别地，$N \subset [0,1]$ 是零测集，因为它是可数个零测集的并。令$u\colon M \to [0,\infty)$ 连续，并注意到我们可以找到 $(\psi_n) \subset \mathcal{D}$，使得 $\psi_n \uparrow u$ 在 K上。令 $t \notin N$，则我们可以计算

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int u(x)\|v_r(x)\|_g \,\mathrm{d}\mu_r(x)\,\mathrm{d}r &\geq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int \psi_n(x)\|v_r(x)\|_g \,\mathrm{d}\mu_r(x)\,\mathrm{d}r\\ &\geq \int \psi_n(x)\|v_t(x)\|_g \,\mathrm{d}\mu_t(x)\,,\end{aligned}$$

再由单调收敛定理即可得到结论。 □

现在我们给出 [3, 引理 4.3。4] 的一个类似结果，将绝对连续函数换成单调函数，并由此推导出一个积分估计。

引理 3.14。设 $\eta\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbf{R}$ 是一个函数，使得对所有 $s \in [0,1]$，$\eta(\cdot\ s)$ 都是连续的，并且对每个 $\varepsilon > 0$，在 $[\varepsilon,1]$ 上一致 *Lipschitz*。另假设对每个 $t \in [0,1]$，$\eta(t,\cdot)$ 都是单调不减的。我们定义

$$r(t) := \varlimsup_{h\to 0^+}\frac{\eta(t,t)-\eta(t-h,t)}{h} + \varlimsup_{h\to 0^+}\frac{\eta(t,t+h)-\eta(t,t)}{h}\,,$$

并定义 $\delta(t) = \eta(t,t)$。那么 $\delta \in L^1$ 和 $D\delta \geq r(t)\mathrm{d}t$ 以分布的意义成立。此外，我们有

$$\delta(1)-\delta(0) \geq \int_0^1 r(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{3.23}$$

证明。显然，δ 有界且为博雷尔函数，因此属于 L^1。令 $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$ 为一个非负函数，并令 $h > 0$ 满足 $\pm h + \mathrm{spt}(\varphi) \subset (0,1)$。于是我们得到

$$-\int_0^1 \delta(t)\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(t)\frac{\eta(t,t)-\eta(t-h,t)}{h}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \varphi(t+h)\frac{\eta(t,t+h)-\eta(t,t)}{h}\,\mathrm{d}t,$$

通过在积分中加上并减去 $\eta(t-h,\ t)$，并进行变量代换。我们在等式两边对 $h \downarrow 0$ 取极限。对于第一项和第二项，我们可以

应用控制收敛定理（对于第二项，一致利普希茨假设至关重要），并对第三项应用 Fatou 引理。这就证明了所需的分布意义下的界。

W于是得到（3.23）。利用适当的测试函数，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们得到 n

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{1-\varepsilon}^{1} \delta(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{\varepsilon} \delta(t)\,\mathrm{d}t\right] \geq \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} r(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.24}$$

给定 $\varepsilon > 0$，我们估计

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{\varepsilon} \delta(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{\varepsilon} \eta(t,0)\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{1} \eta(\varepsilon T, 0)\ \mathrm{d}T,$$

因此，根据控制收敛定理，我们得到 $\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{\varepsilon} \delta(t)\,\mathrm{d}t \geq \eta(0,0) = \delta(0)$。类似地，我们有 $\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^{1} \delta(t)\,\mathrm{d}t \leq \eta(1,1) = \delta(1)$。对（3.24）取极限并利用控制收敛定理，即可得出结论。□

现在我们应用 Kuwada 对偶来证明定理B的部分1.2。

命题 3.15。 设(M, g) 为一个全局双曲时空，且(μ_t, v_t) 满足因果连续性不等式。设 $0 \neq p < 1$。

Then

$$\int_{0}^{1} u_p(|\dot{\mu}_t|_p)\ \mathrm{d}t \geq \int_{0}^{1} u_p\left(\|v_t\|_{L^p_{\mu_t}}\right)\ \mathrm{d}t\,. \tag{3.25}$$

此外，如果 $\int_0^1 u_p(\|v_t\|_{L^p_{\mu_t}})\,\mathrm{d}t > -\infty$，那么我们有

$$u_p(|\dot{\mu}_t|_p) \geq u_p\left(\|v_t\|_{L^p_{\mu_t}}\right), \quad \textit{for almost every } t \in [0,1]\,. \tag{3.26}$$

证明。 我们将证明

$$u_p(\ell_p(\mu_0,\mu_1)) \geq \int_{0}^{1} u_p\left(\|v_t\|_{L^p_{\mu_t}}\right)\ \mathrm{d}t\,. \tag{3.27}$$

经过简单的重标度论证，并回忆公式

$$\int_{0}^{1} u_p(|\dot{\mu}_t|_p)\ \mathrm{d}t = \sup\Big\{\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)u_p\big(\tfrac{\ell_p(\mu_{t_i},\mu_{t_{i+1}})}{t_{i+1}-t_i}\big)\ :\ n\in\mathbf{N},\ 0\leq t_0\leq\cdots t_n\leq 1\Big\}$$

由 [6, 定理 223], 得到，结论（3.25）随即成立。然后，（3.26）是附加的可积性假设以及勒贝格点存在性的直接推论。因此，我们着重证明（3.27）。

设 $K \subset M$ 是一个紧集，包含所有 μ_t的支集（根据我们对“满足因果连续性不等式”的定义，这样的紧集存在），再设 $E \subset M$ 是K 的一个紧邻域，如定理 2.11所述。令 $\varphi : E \to \mathbf{R}$ 为一个陡峭连续函数，设 $Q_0^p\varphi := \varphi$，并注意到 $Q_1^p\varphi = \varphi_E^{c_p}$ 在 K上成立。然后定义函数 $\eta\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbf{R}$ 如下

$$\eta(t,s) = \int Q_t^p\varphi(x)\ \mathrm{d}\mu_s(x)\,.$$

注意， $\eta(\cdot\ s)$ 在 $[\varepsilon', 1]$ 上连续且一致利普希茨，适用于任意 $\varepsilon' > 0$，这是由引理 $iii)$ 和 (iv) 中的结论得出的3.8。此外， $\eta(t,\ \cdot)$ 是单调不减的，因为 $Q_t^p\varphi$ 是因果的。

引理 r 中定义的函数3.14于是可表示为

$$r(t) = \varliminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int Q_t^p\varphi(y) - Q_{t-h}^p\varphi(y)\,\mathrm{d}\mu_t(y) + \varliminf_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int Q_t^p\varphi(y)\,\mathrm{d}[\mu_{t+h}-\mu_t](y)\,.$$

利用引理 3.13和反向杨氏不等式，我们计算得到

$$\begin{aligned}\varliminf_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int Q_t^p\varphi(y)\,\mathrm{d}[\mu_{t+h}-\mu_t](y) &\geq \int \mathsf{st}_a(Q_t^p\varphi)\,\|v_t\|_g\;\mathrm{d}\mu_t\\ &\geq \int u_q\left(\mathsf{st}_a(Q_t^p\varphi)\right) + u_p(\|v_t\|_g)\;\mathrm{d}\mu_t \qquad a.e.\ t.\end{aligned}$$

由于 $[\varepsilon',1]\ni t\mapsto Q_t^p\varphi(y)$ 是一致利普希茨的，由控制收敛定理和富比尼定理可得

$$\varliminf_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int Q_t^p\varphi(y) - Q_{t-h}^p\varphi(y)\,\mathrm{d}\mu_t(y) = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_t^p\varphi(y)\;\mathrm{d}\mu_t(y) \qquad a.e.\ t\,.$$

于是命题 3.10 蕴含 $r(t)\geq \int u_p(\|v_t\|)\,\mathrm{d}\mu_t$ 对几乎处处的 $t\in[0,1]$成立，因此由 (3.23) 可得

$$\int \varphi_E^{c_p}\,\mathrm{d}\mu_1 - \int\varphi\,\mathrm{d}\mu_0 = \delta(1)-\delta(0)\geq \int_0^1\int u_p(\|v_t\|_g)\;\mathrm{d}\mu_t\;\mathrm{d}t.$$

在所有 $\varphi\colon E\to M$ 陡峭且连续的函数中取下确界，结论 (3.27) 即由定理 2.11 得出。

□

3.4 时空上的 Benamou–Brenier 公式

我们首先回顾连接给定两个概率测度的 ℓ_p-测地线以恒定速度存在这一结论。该结果在黎曼情形中众所周知，参见例如 [14,定理 2.2。2]或 [3]。在洛伦兹情形中也能找到类似结果，例如 [6, 命题 2。47]。

引理 3.16. 设 (M,g) 是一个全局双曲时空，并设 $0\neq p<1$。令 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}(M)$ 具有紧支撑，且满足 $\mu_0\preceq\mu_1$。那么存在一条连续因果路径$t\ni[0,1]\mapsto\mu_t\in\mathcal{P}(M)$，使得

$$u_p(|\dot\mu_t|_p) = u_p(\ell_p(\mu_0,\mu_1))$$

对每个 $t\in(0,1)$，也就是说，它是一条连接 μ_0 和 μ_1 的恒定速度 ℓ_p-测地线，并且对每个 $t\in[0,1]$，$\mathrm{spt}(\mu_t)\subset J(\mathrm{spt}(\mu_0),\mathrm{spt}(\mu_1))$。

现在我们能够证明最优传输的洛伦兹 Benamou–Brenier 公式 t.

定理 3.17 (时空的 Benamou–Brenier 公式). 设 (M,g) 是一个全局双曲时空，并设 $0\neq p<1$。令 $\mu_0,\mu_1\in\mathcal{P}(M)$ 为两个具有紧支撑的概率测度。那么

$$u_p(\ell_p(\overline{\mu}_0,\overline{\mu}_1)) = \sup\int_0^1\int u_p(\|v_t(x)\|_g)\;\mathrm{d}\mu_t(x)\;\mathrm{d}t\,, \tag{3.28}$$

其中，上确界取遍因果连续性不等式的所有解 (μ_t<*style id='6'*，v_t)，且满足 $\mu_0\preceq\mu_t\preceq\mu_1$ 对每个 $t\in[0,1]$均成立。此外，若 $\mu_0\preceq\mu_1$，则右侧的上确界 (3.28) 可以取到。

证明。首先注意，若 $\mu_0 \not\preceq \mu_1$，则（3.28）成立，因为两边都等于$-\infty$；事实上，没有因果路径连接 μ_0 和 μ_1。因此，不失一般性，我们假设 $\mu_0 \preceq \mu_1$。我们将分别证明两个不等式，从而证明（3.28）。注意，不等式‘$\geq$’已在命题 3.15 中证明。现在只需证明另一个不等式。利用引理 3.16，我们找到一条连续因果路径 $[0,1] \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(M)$，使得 $\mu_0 = \mu_0$ 且 $\mu_1 = \mu_1$，其速度为 $u_p(|\dot{\mu}_t|_p) = u_p(\ell_p(\mu_0, \mu_1))$。若 $\int_0^1 u_p(|\dot{\mu}_t|_p)\,\mathrm{d}t = -\infty$，则剩下的不等式显然成立。若 $\int_0^1 u_p(|\dot{\mu}_t|_p)\,\mathrm{d}t > -\infty$，则通过命题 3.4，我们构造与曲线 μ_t相关联的向量场 v_t，得到

$$u_p(\ell_p(\mu_0,\mu_1)) = \int_0^1 u_p(|\dot{\mu}_t|_p)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \int u_p(\|v_t(x)\|_g)\,\mathrm{d}\mu_t(x)\,\mathrm{d}t\,.$$

由于‘$\geq$’已得到证明，因此足以得出该结论。此外，在 $\mu_0 \preceq \mu_1$的情形下，ℓ_p测地线与 v_t 共同使 (3.28) 右侧的问题达到最大值。 □

在下面的注释中，我们讨论动力学问题 (μ_t, v_t) 中最大化对偶 (3.28) 的一些性质。

注 3.18。 设 (M, g) 是一个全局双曲时空，且 $0 \neq p < 1$。设 $\mu_0 \preceq \mu_1$是两个具有紧支撑的概率测度。假设在引理 ℓ_p测地线 $[0,1] \ni t \mapsto \mu_t$ 3.16 中构造的 满足 $\int_0^1 u_p(|\dot{\mu}_t|_p)\,\mathrm{d}t > -\infty$，并设 $\boldsymbol{\pi}$ 是一个提升，且 v_t 是 (3.7) 中的博雷尔向量场。

那么，μ_t与 v_t构成右侧上确界问题（3.28）的最大化点，且满足

i) $t \mapsto \mu_t$ 是连续因果路径，且 $\mu_0 = \mu_0$、$\mu_1 = \mu_1$，

ii)（μ_t，v_t在因果连续性不等式（因果连续性不等式）中取等号。

第一部分由构造直接得出。接下来只需证明 ii)。给定一个光滑因果函数$\varphi \in C^\infty(M)$，定义单调不减函数 $\Phi(t) = \int \varphi\,\mathrm{d}\mu_t$。由于（因果连续性不等式）成立，我们有

$$\Phi(1) - \Phi(0) \geq \int_0^1 \Phi'(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \mathrm{d}\varphi_x(v_t(x))\,\mathrm{d}\mu_t(x) = \int_0^1 \int \mathrm{d}\varphi_{\gamma_t}(\dot{\gamma}_t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.29}$$

其中，最后一个等式由 v_t 的定义得出。此外，由于 $\boldsymbol{\pi}$ 集中在光滑测地线上，我们可以利用微积分基本定理计算得出

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \int \varphi(\gamma_1) - \varphi(\gamma_0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) = \int \int_0^1 \mathrm{d}\varphi_{\gamma_t}(\dot{\gamma}_t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma)\,.$$

特别地，（3.29）中的所有不等式均取等号，因此 Φ 绝对连续，且因果连续性不等式取等号。■

参考文献

[1] L. Ambrosio, E. Bru´e, and D. Semola. 最优传输讲义，Unitext 丛书第 130 卷。施普林格，Cham，[2021] ©2021。La Matematica per il 3+2。

[2] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara。《有界变差函数与自由间断问题》。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000年。

[3] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e。《度量空间与概率测度空间中的梯度流》。苏黎世联邦理工学院数学讲义。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，第二版，2008年。[4] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e。《度量测度空间中的微积分与热流，以及在具有里奇曲率下界的空间中的应用》。《数学发明》，195(2):289–391，2014年。[5] J. K. Beem、P. E. Ehrlich 和 K. Easley。《整体洛伦兹几何》。1981年。[6] T. Beran、M. Braun、M. Calisti、N. Gigli、R. J. McCann、A. Ohanyan、F. Rott 和 C. S¨amann。《度量测度时空上的非线性达朗贝尔比较定理与因果微分学》，2024年。预印本：https://arxiv.org/abs/2408.15968。[7] A. N. Bernal 和 M. S´anchez。《全局双曲时空中时间函数的光滑性与度量分裂》。《数学物理通讯》，257(1):43–50，2005年。[8] V. I. Bogachev。《测度论》。第I、II卷。施普林格出版社，柏林，2007年。[9] F. Cavalletti 和 A. Mondino。《洛伦兹合成空间中的最优传输、合成类时里奇曲率下界及其应用》。《剑桥数学杂志》，12(2):417–534，2024年。[10] P. T. Chru´sciel、J. D. E. Grant 和 E. Minguzzi。《论体积时间函数的可微性》。《亨利·庞加莱年刊》，17:2801–2824，2013年。[11] D. H. Fremlin。《测度论》。第4卷。Torres Fremlin，科尔切斯特，2006年。《拓扑测度空间》。第一、二部分，2003年原版的修订后的第二次印刷版。[12] R. Geroch。《依赖域》。《数学物理杂志》，11:437–449，1970年。[13] N. Gigli。《德·乔治与格罗莫夫携手合作》。载于《德·乔治研讨会》，2021—2022年。高等师范学院出版社，比萨，2024年。[14]N. Gigli。《最优传输导论：理论与应用》。IMPA 数学出版物。 [IMPA 数学出版物]。巴西纯粹与应用数学研究所（IMPA），里约热内卢，2011年。28º 巴西数学研讨会。 [28巴西第届数学研讨会]。[15] N. Gigli。《非光滑微分几何——一种专为具有里奇曲率下界的空间设计的方法》。《美国数学学会回忆录》，251(1196):v+161，2018年。[16] N. Gigli。《双曲巴拿赫空间》，2025年。预印本： https://arxiv.org/abs/2503.10467。[17] N. Gigli、K. Kuwada 和 S.-I. Ohta。《亚历山德罗夫空间上的热流》。《纯粹与应用数学通讯》，66(3):307–331，2013年。[18] N. Gozlan、C. Roberto 和 P.-M. Samson。《度量空间上的哈密顿–雅可比方程与传输熵不等式》。《伊比利亚美洲数学杂志》，30(1):133–163，2014年。[19] S. W. Hawking 和 G. F. Ellis。《时空的大尺度结构》。剑桥大学出版社，2023年。

[20] F. Maggi. 欧几里得空间上的最优质量输运，载于第 207 卷 *Cambridge Studiesin Advanced Mathematics*。剑桥大学出版社，剑桥，2023年。[21] T. Miller. 概率测度的因果演化与连续性方程。*Adv. Theor.Math. Phys.*，28(3):743–804，2024年。[22] E. Minguzzi. 关于光滑柯西陡峭时间函数的存在性。*Class. Quant. Grav.*，33(11)，2016年。[23] E. Minguzzi. 洛伦兹因果理论。*Living Rev. Relativ.*，22(3)，2019年。[24] R. Penrose. 相对论中的微分拓扑技巧，载于第 7 卷 *ConferenceBoard of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in AppliedMathematics*。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，1972年。[25] C. Villani. 最优传输，载于第 338 卷 *Grundlehren der mathematischen Wis-senschaften [*数学科学基本原理*]*。施普林格出版社，柏林，2009年。旧与新。