arXiv:2601.13226v1 [cond-mat.quant-gas] 19 Jan 2026

无无序原子混合物中的反常扩散与局域化

S. Finelli,[1,2,*] B. Restivo,[2,3] A. Ciamei,[1,3] A. Trenkwalder,[1,3] M.Inguscio,[3] D. S. Petrov,[4,†] S. E. Skipetrov,[5,‡] 以及 M. Zaccanti[1,3]
[1] *Istituto Nazionale di Ottica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (INO-CNR), 50019 Sesto Fiorentino, Italy*
[2] *Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Firenze, 50019 Sesto Fiorentino, Italy*
[3] *European laboratory for Non-Linear Spectroscopy (LENS), 50019 Sesto Fiorentino Italy*,,,,,,
[5] *Université Grenoble Alpes, CNRS, LPMMC, Grenoble, 38000, France*
[4] *Université Paris-Saclay CNRS LPTMS Orsay 91405 France*

随机游走的概念——粒子或波与周围介质的微观组成部分发生多次碰撞——是理解众多研究领域中扩散输运的核心 [1–5]。然而，在复杂系统中，这一范式可能会失效：量子干涉和记忆效应会使粒子传播呈现反常特性 [6]，，往往还会促成局域化 [7, 8]。在此，我们报告了在一个极简体系中观测到的此类反常动力学：由两种费米气体组成的三维超冷质量不平衡混合物。我们将轻杂质释放到较重原子的气体中，并追踪它们在不同碰撞区间中的演化。在种间相互作用较强时，随着温度降低，我们揭示了从正常扩散 [9, 10]到亚扩散的交叉转变。与此同时，轻气体中出现了一部分局域化粒子，在数百次碰撞期间未呈现出可辨别的动力学变化。我们的发现与传统的费米液体图像 [9–13], 不相符，反而可由一个模型加以描述：原子在由点状散射体构成的（准）静态无序势景中传播 [14–16]。这些结果凸显了量子干涉在我们的混合物中的关键作用；该混合物由此成为探索无无序局域化现象 [17, 18]的多功能平台。

理解“测试粒子”——电子、分子、波或更复杂的实体——如何在多体环境中传播，是一个横跨物理学、化学、生物学乃至社会和经济科学的基础问题 [3–5]。玻尔兹曼动理学理论及其相关的随机游走概念 [1, 2], 是解答这一问题的里程碑式框架；它描述粒子如何通过与周围介质微观组成部分的独立碰撞而随机运动，并由此产生粒子扩散。值得注意的是，通过朗道费米液体理论的准粒子概念 [11, 12]，这一图景也适用于一大类相互作用费米子系统 [12, 19, 20], 。然而，在某些机制下，经典范式和基于准粒子的范式会失效：金属-绝缘体转变附近的无序电子物质 [21]，以及石墨烯基低维系统中的反常电子输运 [22]，都是电子运动偏离预期布朗行为的典型例子。在这些情况下，记忆效应和量子干涉效应可能导致反常亚扩散输运和安德森局域化 [7]。

在此，我们报告了在超冷三维费米子锂（^{6}Li）和铬（^{53}Cr）原子混合物中观测到反常扩散的结果 [23]。具体而言，我们研究了一小团锂原子的轴向膨胀动力学。这些锂原子作为轻的杂质粒子，被释放到理想的铬玻尔兹曼气体中；后者由重量比为 $M/m = 8.8$的点状散射体组成，充当热浴。通过调节锂-铬短程相互作用，经过费什巴赫共振 [24], ，我们在不同的铬温度和密度条件下探索了不同的输运状态。在高温下，随着相互作用增强，我们观测到从弹道输运到扩散输运的交叉转变。半经典模拟多个相互独立的锂-铬散射事件，定量再现了这一交叉转变。在共振条件下，我们测得仅为几个扩散量子的较小扩散系数$\hbar/m$，与先前在同核混合物中的观测结果一致 [10]。然而，与后者不同的是，当温度降低且相互作用调节至共振附近时，我们揭示了锂原子的亚扩散动力学。在这一反常区域中，半经典模拟无法再现该现象；锂原子云的均方尺寸随时间呈次线性增长：$\langle x^2(t)\rangle \propto t^\alpha$，其中 $\alpha < 1$。此外，锂密度分布还表现出一个空间局域化部分，该部分不呈现任何动力学，其权重随着温度降低而单调增加。这些观测结果有别于同核系统中自旋扩散的理论预测 [25, 26], ，但可由点状散射体随机洛伦兹气体中的波传播模型定量再现 [15, 16]。我们的研究揭示了在共振重-轻费米混合物中量子干涉效应所发挥的关键增强作用：重组分作为轻组分的准静态随机介质，并指向平移不变系统中丰富的输运与无序自由局域化现象 [17, 18], ，其唯一驱动因素是巨大的质量不平衡。

按照其他地方所述的流程 [23, 27]，，我们在一个水平取向的光学偶极阱（ODT）中制备了弱相互作用、非简并的 ^{6}Li-^{53}Cr费米混合物

* stefano.finelli@unifi.it
† dmitry.petrov@universite-paris-saclay.fr
‡ sergey.skipetrov@lpmmc.cnrs.fr

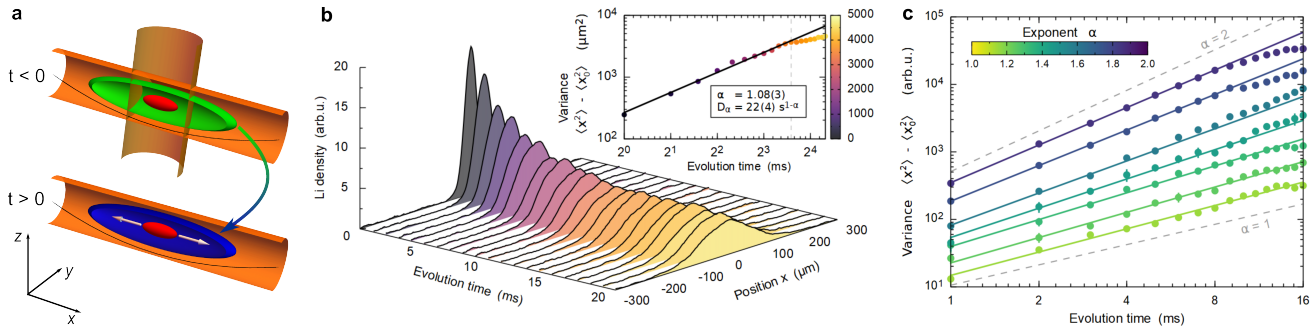


图 1. **实验方案与数据分析**。**a**，实验序列：Li|1⟩ 原子（红色）最初被束缚在 Cr|2⟩ 储库（绿色）的中心。一个 0.持续 9 毫秒的射频脉冲使铬转移至 Cr|1⟩态（蓝色）的过程达到最大值，此时接近 Li|1⟩-Cr|1⟩费什巴赫共振。随后立即关闭垂直光束，使 Li云在弱谐振束缚中沿轴向膨胀；Li（Cr）组分的束缚频率分别为 17 Hz（13 Hz）。**b**，膨胀中的 Li云径向积分剖面示例。插图：相应均方位移的时间演化，该位移决定主图中的颜色标度。**c**，不同 $\langle x^2(t)\rangle$ 值下记录的动力学示例 R^*/a （圆点），以及对式（1）进行的最佳拟合（实线）；拟合范围限于 $t < t_{\max}$ 正文中定义的范围，得到不同的 α 值，见颜色图例。误差棒表示 4–6 次测量的标准误。为便于展示，数据沿垂直方向任意平移。

沿 x轴方向，见图1a。磁场曲率提供了较弱的额外轴向束缚。锂原子处于最低塞曼态（记作 Li|1⟩，图1a 中以红色示意），铬原子处于次低塞曼态（Cr|2⟩，以绿色示意），典型的铬锂数目比为 10:1，且 $N_{\mathrm{Cr}} \approx 1.2\times10^5$。施加第二个垂直取向的光学偶极阱，可控地压缩锂的轴向尺寸，而几乎不影响铬云团；其高斯轴向尺寸为 $1/\sqrt{\mathrm{e}}\sigma_{x,\ \mathrm{Cr}}$ 典型轴径比约为 10:1。第二个光学偶极阱对两种原子的径向束缚贡献较弱；根据温度区间不同，铬（锂）气体的径向尺寸约为 7–10 μm（5–8 μm）。

种间相互作用迅速增强，同时关闭垂直光偶极阱，使 Li云沿轴向穿过 Cr气体膨胀。相互作用淬火通过将铬转移到 Cr|1⟩态来实现（图 1a 中以蓝色示意），其附近有一个较窄的 Li|1⟩-Cr|1⟩ 费什巴赫共振，中心位于 $B_0 \approx$1413.9 G [23, 27]。相应的散射振幅具有布赖特-维格纳形式： $f(k) = -(1/a + R^*k^2 + ik)^{-1}$ [28, 29]。这里， $R^* = 6017\ a_0$ 表示有效程参数， a_0 表示玻尔半径， $\hbar k$ 表示碰撞动量， a表示散射长度；散射长度随磁场失谐量 $\delta B = B - B_0$ [29] 色散变化，使得 $R^*/a \approx -0.3\ \delta B/\mathrm{mG}$（见方法）。对于任意 k，散射截面$\sigma(k) = 4\pi|f(k)|^2$与局部铬密度 n共同决定平均自由程 $l(k) = 1/(n\sigma(k))$ 和散射率 $\gamma(k) = n\sigma(k)v$，其中 v 表示相对速度。

我们通过追踪 Li 分布沿 x 轴的二阶矩随时间的演化来表征动力学， $\langle x^2(t)\rangle$该二阶矩由对径向积分的原位分布进行广义高斯分布包络拟合得到，见图1b 和方法。为尽量减小弱残余谐振束缚 [6, 30] 以及密度非均匀性的影响，我们将分析限制在低于最大演化时间 $t_{\max}$的时段内，该时间由以下条件之一确定：（ R^*/a依赖于 $\langle x^2(t_{\max})\rangle = \sigma^2_{x,\ \mathrm{Cr}}$或由 $t_{\max} = 30$ 毫秒确定。后一上限仅在共振附近才相关，此时 Li 的尺寸在 30 毫秒内不会达到 Cr 的尺寸。该上限确保磁场峰峰值稳定性达到 ≤ 3 mG，且相对原子损失 [27] 低于 10%（见方法）。在此限制下，所有数据均可方便地用以下形式的幂律拟合来表征，见图1c：

$$\langle x^2(t)\rangle = \langle x_0^2\rangle + 2D_\alpha t^\alpha, \qquad (1)$$

其中 D_α 表示广义扩散常数，而α 表示标度指数。对于 $\alpha = 2$和 1，式（1）分别描述弹道输运和扩散输运。中间值 $1 \leq \alpha \leq 2$ 表明存在一种瞬态“超扩散”行为 [8], ，这是通过将扩散介质中谐束缚粒子的预测结果拟合到式（1）而预期得到的 [30] ，适用于早期演化时间 $t \leq 1/\gamma_T$，其中$\gamma_T = \langle\gamma(k)\rangle_T$ 表示热平均（及密度平均）散射率。相较之下， $\alpha \leq 1$ 的取值无法与这一图景相符，说明存在一种更复杂的情形：超出独立散射近似（ISA）的反常亚扩散输运 [6]。因此， D_α 和 α 可作为不同相互作用区间下杂质输运的有效唯象量度 [31]。

图 2a、b（圆点）分别显示了标度指数和广义扩散常数的变化趋势——后者归一化为扩散量子 $\hbar/m$ 适用于$\alpha=1$——随 R^*/a变化的情况；对于温度为$T_{\mathrm{Cr}} = 550$纳开尔文的Cr气体，随着接近共振，散射率 γ_T 增加，动力学从弹道型（$\alpha \approx 2$）跨越转变为扩散型（$\alpha \approx 1$），见图2a，同时 D_α显著降低，见图2b。在整个相互作用跨越过程中，基于独立散射近似的半经典蒙特卡罗模拟都能非常出色地再现这些数据；该模拟还考虑了我们的

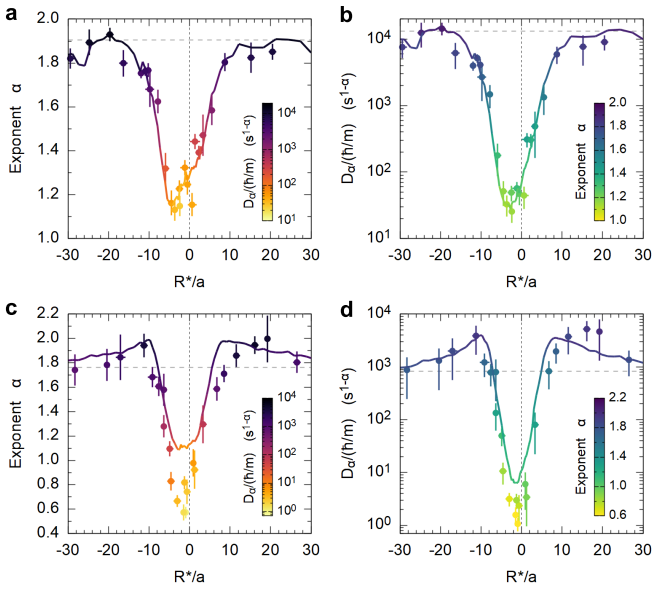


图 2. **锂在锂-铬费什巴赫共振处的动力学。a**，标度指数 α 和 **b**，广义扩散常数 D_α，在不同的 R^*/a 取值下测得，Cr温度为 $T_{\mathrm{Cr}} = 550$nK。实验数据（圆点）和半经典模拟预测（实线）由对 $\langle x^2(t)\rangle$ 拟合到方程（1）得到，误差棒表示拟合不确定度。水平虚线标出相互作用消失时测得的数值。（**c**，**d**），与面板（**a**，**b**）相同，但 $T_{\mathrm{Cr}} = 350$ nK时的Cr温度更低。

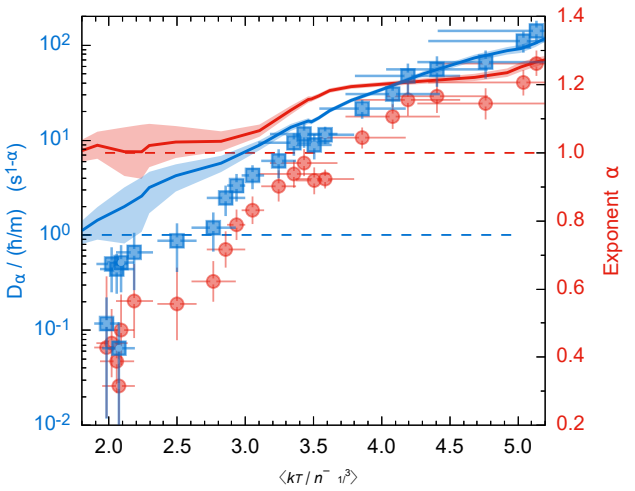


图3。**共振机制下从正常输运到亚扩散输运的交叉转变**。广义扩散系数 D_α （蓝色方块，左轴）和幂律指数α （红色圆圈，右轴）随无量纲参数 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$的变化。实验数据与独立散射近似模拟的结果（对应颜色的实线）进行比较，模拟基于对公式（1）的拟合。当系统从正常（$\alpha \geq 1$）行为跃迁至亚扩散（$\alpha < 1$）行为时，模拟结果在定性上偏离实验观测。误差棒和阴影区域分别表示实验数据和模拟数据的拟合不确定度。

系统性质（密度和动量分布、共振参数），并将Li-Cr s-波碰撞视为独立散射事件（见方法）。

最慢的动力学出现在共振的负-a 侧，这与平均散射率 γ_T随失谐变化并在 $R^*/a \approx -(k_T R^*)^2 < 0$ [32]处达到最大值 γ_M这一事实一致，其中 $k_T = \sqrt{k_B T m/\hbar}$表示平衡时锂的热波数。对于图2a、b中的数据，我们有$k_T \approx (7000\, a_0)^{-1} \approx 1/R^*$，这解释了最小值的偏移。在这一最佳失谐处，尽管所考察的时间窗口看似很短，仍建立了扩散输运，因为 $\gamma_M t_{\max} \approx 400$ [30]，见方法部分。这里我们测得 $D_1 = 15(5)\ \hbar/m$，这一数值与相似相空间密度下、宽共振处同核 ^{6}锂混合物所得结果一致 [10, 33]。图2c、d则展示了较低Cr温度下呈现的动力学。对于 $R^*/|a| \gg 1$，数据仍与我们的半经典独立散射近似模拟相符。然而，在共振附近，我们的模型预测为正常扩散（$\alpha \approx 1$），且扩散能力有所降低 $D_1 < 10\,\hbar/m$；这与质量平衡情形下的自旋输运结果一致 [10, 25, 32]，而实验中我们观察到亚扩散动力学，幂律指数低至 $\alpha = 0.6$（图2c）。

为进一步洞察这种反常行为，我们将共振时的锂动力学（在实验不确定度范围内，我们将其调谐至 $R^*/a = 0$）表征为 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$ 的函数，其中 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$ 定义为锂的乘积热波数与 Cr 原子的平均粒子间距，按 Li 密度分布加权，并在我们的观测时间窗口内取时间平均，见方法。在共振时，$\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$ 有效量化了混合物中相互作用的强度以及多重散射效应的重要性。由此得到的 α （红色圆点，右轴）和 D_α （蓝色方块，左轴）的变化趋势见图3。随着 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$ 降低，系统从弱超扩散（$\alpha > 1$）转变为正常扩散（$\alpha \approx 1$），继而进入显著的亚扩散区间，此时测得的 α 值低至 0.3。这种交叉转变伴随着 D_α的大幅单调抑制。高温下的弱超扩散行为可由我们的独立散射近似模拟（见图3中的实线）很好地描述；这可归因于残余的瞬态弹道行为（$\gamma_T t_{\max} \sim 1$），以及 Li 气体与 Cr 气体之间初始的温度失配。反过来，考虑到该机制下观测到近乎瞬时的热化（$\gamma_T t_{\max} \gtrsim 400$，见方法），低温下的亚扩散无法用这一图景解释；对于 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle \lesssim 4$，模拟结果与实验数据之间的差异不断增大，这也印证了这一点。我们通过实验排除了这种异常减速源于 LiCr二聚体形成的可能性；在独立散射近似模拟中纳入平均场效应和延迟效应，也不会定性改变模拟结果（见方法）。因此，我们得出结论：共振区揭示的亚扩散与独立碰撞随机游走图景相矛盾

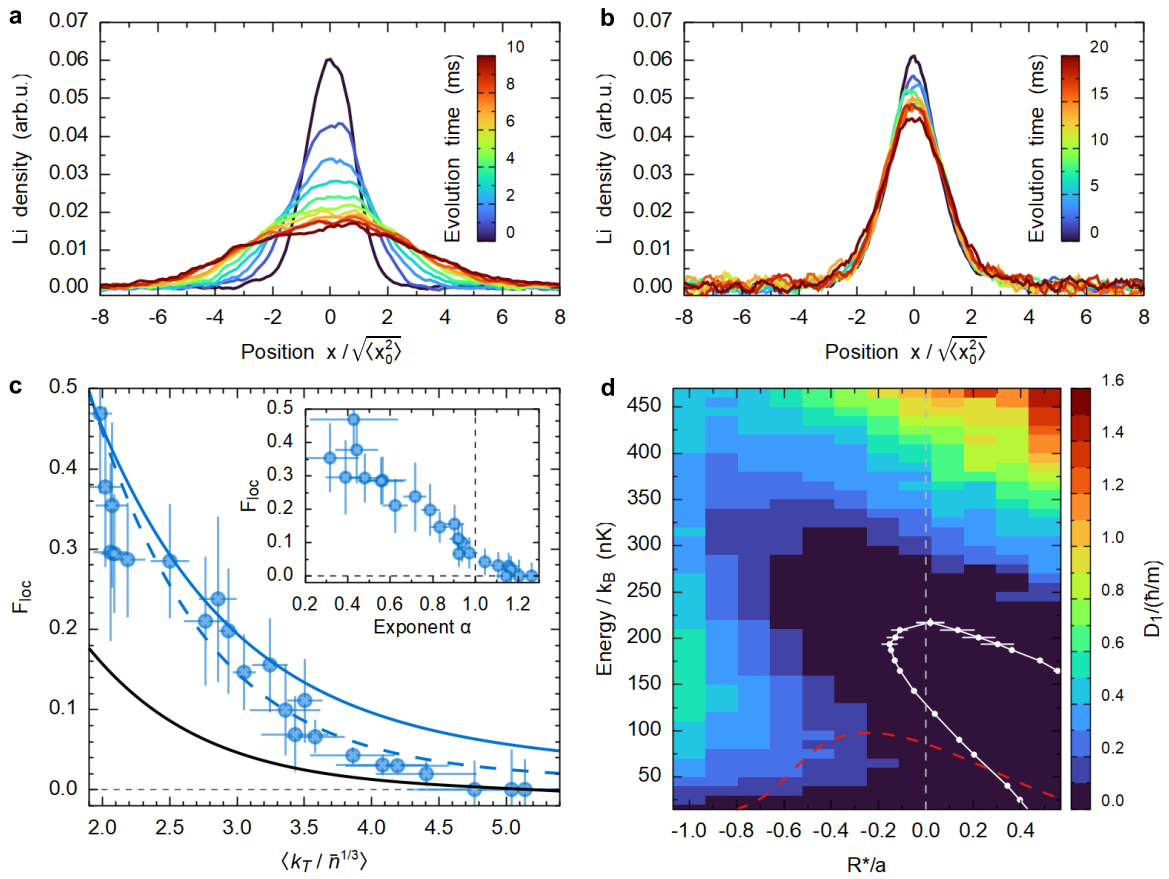


图 4. **铬热浴中涌现的锂局域化。** **(a,b)**，记录的归一化锂轴向密度分布随时间的变化，颜色图例见图，分别对应扩散机制（**a**）和亚扩散机制（**b**）。在扩散（亚扩散）情形下，数据按 1 毫秒（2 毫秒）的时间间隔展示。对于每个面板，轴向位置均以 $t = 0$ 分布的均方根尺寸归一化。**c**，实验测得的 F_{loc}（圆圈）随 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$的变化。误差棒综合了两种用于从密度分布中提取 F_{loc} 的分析方法的不确定性（见方法）。黑线表示模型预测的真正局域态所占比例，蓝色实线表示总 F^*_{loc}，其中也包括预测具有 $D_1 \leq 0.1\ \hbar/m$的延展态。蓝色虚线表示 F^*_{loc}，其计算考虑了有限相干长度和磁场涨落，见正文。**d**，随机洛伦兹气体的量子扩散常数（以 $\hbar/m$ 为单位；见颜色条图例）随共振失谐 R^*/a 和锂能量的变化，并同时标出预测的迁移率边（白点）；该随机洛伦兹气体的散射体密度为 10^{12} cm^{-3}。红色虚线划定了独立散射近似预测 $D_1^{\mathrm{ISA}} < 0.1\ \hbar/m$的区域。

事件。在低温 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$ 下，我们将模拟与实验之间的差异归因于这样一种效应：当锂德布罗意波长与 Cr 原子的平均粒子间距相当时，Li 在多个 Cr 原子上的散射会产生增强的量子干涉效应。需要指出的是，在质量平衡情形下，这一条件意味着宿主组分将达到量子简并，从而表现出费米液体行为并发生碰撞的泡利阻塞。相比之下，预计我们的混合物在适度低温 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$ 下会呈现非平凡的多重散射效应，同时仍未达到量子简并。

从正常动力学到反常动力学的交叉转变$\langle x^2(t)\rangle$ 伴随着整个 Li 密度分布演化的定性变化，图4a、b 中所示的原始数据体现了这一点。在扩散 regime 中（见图4a），整个包络始终保持高斯形状并不断扩展，正如预期 [6]。而在图4b 所示的反常区域中，云团则表现为中心部分缓慢（亚扩散）下降，同时云团的另一部分在整个（0；$t_{\max}$）时间窗口内未表现出可检测的动力学变化。Li 分布的这一部分在关闭交叉阱后迅速形成，因此至少在我们的观测时间尺度内，它是有效局域化的。我们通过对密度分布进行两种互补分析（见方法）来量化锂分布中这种局域化比例的出现 F_{loc}，所得 F_{loc} 随 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$ 变化的趋势如图4c 所示。绘制 F_{loc} 与广义扩散指数的关系 α（图4c，插图）显示出这些量之间的强相关性，表明只有当 $\alpha < 1$时才会出现非零的局域化比例。此外，F_{loc} 随着 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$的降低而单调增加，在我们最低温度和最高铬密度下达到最高 40%。

锂气体的局域分量以及反常亚扩

散输运持续数百个散射时间，这标志着我们的发现与质量平衡的费米混合物的理论预期和既往研究均有本质区别 [10, 25, 33]。相比之下，我们的发现与局域化转变附近无序势中的物质波和声波的行为十分相似 [31, 34–39], ，这类行为源于多重散射和量子干涉效应。我们的混合物存在质量不平衡，导致锂和铬的热速度显著不同，这类似于不平衡费米-哈伯德模型中的跃迁速率不等 [18, 40]。与质量平衡情形不同，锂原子可以通过散射，在一个铬散射体与另一个铬散射体之间往返数次，从而建立相干性，而此时热运动尚未显著改变铬粒子的随机构型。因而，在 m/M的主导阶下，我们的系统可以映射为一个波包在随机洛伦兹气体中传播的模型 [14] ，其中散射体为共振且固定不动的点状散射体。已知该模型支持一段安德森局域态 [16], ，它们与扩展态之间由迁移率边隔开；图4d中的白点标示了迁移率边（见方法）。此外，图4d的色彩图显示了超越独立散射近似计算得到的扩散常数D_1 （见方法）。这些结果表明，由于量子干涉， D_1 可能显著低于独立散射近似的预测$D_1^{\mathrm{ISA}} = （\hbar/m）kl（k）/3$ [41, 42]。请注意 $D_1^{\mathrm{ISA}} < 0.1\ \hbar/m$ 区域（图4d中红色虚线以下）与 $D_1 < 0.1\ \hbar/m$ 区域（最深蓝色区域）之间的差异。用于比较的阈值 $D_{\mathrm{thres}} = 0.1\ \hbar/m$ 具有实验相关性，因为扩散常数为 $D_1 \le D_{\mathrm{thres}}$ 时，在我们最长的观测时间 $t_{\max}$内，$\sqrt{\langle x^2（t）\rangle}$仅增加不到一微米，低于我们的实验分辨率。因此，这种缓慢的扩散动力学表现为有效局域化。

为了在随机洛伦兹气体模型的框架下解释观测到的 F_{loc} ，我们假设锂原子服从平衡温度 T 下的玻尔兹曼分布，并统计满足 $D_1 = 0$ 或$D_1 < D_{\mathrm{thres}}$ 的态所占比例（见方法），从而得到真正局域态比例 F_{loc} 以及有效局域化比例 F_{loc}^*的理论预测。这些函数是在 $R^*/a = 0$ 和 $D_{\mathrm{thres}} = 0.1\ \hbar/m$条件下得到的，分别以黑色和蓝色实线显示于图 4c 中。根据我们的模型，真正局域态的比例 F_{loc} 约为观测比例的一半。尽管F_{loc} 对失谐的变化很敏感，我们已确认， F_{loc}^* 在实验上合理的范围内几乎不受D_{thres} 变化的影响：将 D_{thres} 乘以或除以 2，所导致的 F_{loc}^*变化仍远在我们的实验误差范围内。

从图 4c 可以看出，理论结果 F_{loc}^* 定量上与测得的局域化比例相符（适用于$\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle \lesssim 3$），但在较高温度下会高估该比例。这种差异可能是计算中未考虑热退相干效应 [41], 所致。Cr 原子移动的距离达到锂德布罗意波长时，不同路径之间的干涉确实会被抹去。相当的距离。将相应的相干时间乘以 Li 速度，可以估算出我们系统中的相干长度为$L_{\mathrm{coh}} \sim k_T^{-1}\sqrt{M/m}$。超过这一长度后，量子干涉和局域化效应会受到抑制。具体而言，当 Li 平均自由程 $l(k)$与 L_{coh} [42]相当时，预期 D_1 会趋近于D_1^{ISA}。因此，为了在我们的 F_{loc}^* 计算中考虑 Cr 热运动，我们仅保留满足$D_1(k) \le D_{\mathrm{thres}}$ 和 $l(k) > \delta L_{\mathrm{coh}}$的态，其中 δ 是一个量级为 1 的常数，在此用作拟合参数。所得 F_{loc}^*如图 4c 中针对 $\delta = 0.6$所示的蓝色虚线所示，定量上再现了实验趋势。 F_{loc}^* 的降低也可能归因于观测时间内的磁场涨落。对于 $L_{\mathrm{coh}} = \infty$ 计算的平均 F_{loc}^* 值，若假设 R^*/a在 -0.6 至 0.6 之间均匀变化，则得到的结果与蓝色虚线几乎无法区分。我们的 ≤ 3 mG 峰峰值涨落对应于共振附近的一个区间 $-0.4 \le R^*/a \le 0.4$。因此，蓝色实线与实验数据之间的差异很可能源于这两种效应的共同作用；由于 δ 与涨落幅度高度相关，很难通过拟合将二者区分开来。

鉴于我们的单体理论框架相对简单——其中 Cr 原子固定不动，而锂原子被视为具有热能分布和有限相干长度的相干物质波包——实验观察到的吻合程度相当令人瞩目。我们还指出，我们的模型也能解释图 4b 中的非高斯 Li 包络。它们源于热系综中一系列状态的演化，这些状态具有相同的初始空间分布，但扩散常数强烈依赖于能量。另一方面，要解释图 3 中的亚扩散，则需要超越当前框架。若将 Li 和 Cr 组分置于平等地位来处理完整问题 [18, 40]，其复杂性要高得多，并属于多体局域化这一十分活跃的研究领域 [43, 44]。目前看来，要理解我们这个三维体系统的完整多体动力学，仍是一项艰巨的理论挑战，超出了本工作的范围。

总之，通过探索在较重铬原子理想气体中释放的热锂云的输运性质，我们发现，在共振相互作用条件下会出现反常的亚扩散动力学，并伴随着非平凡局域化的产生。我们的发现与基于连续发生但彼此独立的散射事件这一图景的教科书预期存在定性上的偏离，而这一图景正是正常扩散输运的核心 [3]。我们的实验结果与描述物质波在随机洛伦兹气体共振散射体中多重散射的模型预测总体吻合，这表明量子干涉在我们的混合物中发挥着重要且增强的作用，抑制扩散并促使锂局域化。根据我们的理论解释，这

之所以能够实现，是因为我们系统中的相互作用具有共振特性，使锂的平均自由程和局域长度都缩短至与铬粒子间距相当的尺度，因此即使铬气体的热涨落限制了相干长度，量子干涉仍能持续存在。特别是，锂与铬之间巨大的质量不对称使我们能够进入一种等质量混合物中不存在的机制：两种组分均处于热态，且碰撞不受泡利抑制影响；与此同时，轻原子的德布罗意波长大于重粒子之间的平均间距。因此，我们预见，在旨在描述质量和组分数目不平衡的费米混合物的多体理论中，纳入此类效应既十分重要，也颇具挑战。

通过将我们的方案扩展到其他原子混合物，或利用物种选择性光学晶格调节铬（和锂）的有效质量，进一步探索质量不平衡的影响，将会很有意义 [45]。在晶格情形下，通过调节铬的填充率，可以研究从低填充率下的安德森绝缘体，到单位填充率下金属态或能带绝缘态的跃迁；此时，铬组分充当由点状散射体构成的完美晶体。尽管在本研究中，铬浴处于热态，产生的无序也不相关，但重组分进入量子简并态后形成的对关联及高阶关联，可能带来有趣的效应。费米气体和玻色气体中的此类关联 [46–48], 会对粒子的排布施加局域约束，形成类似“超均匀”物质的状态 [49], ，从而可能增强或抑制轻粒子的局域化。另一个引人注目的可能性来自铬和锂粒子数的可调性，这使得人们有望在单一实验装置中实现从安德森局域化 [7] 到安德森正交灾变 [50] 的跨越。最后，我们的发现也可能对超冷气体以外的强相互作用混合物产生影响，例如原子级薄半导体中的激子-电子物质 [51]。

致谢

我们衷心感谢 C. Baroni、M. Caldara、E. Demler、T. Enss、T. Gia- marchi、D. Hernandez-Rajkov、M. Kreyer、L. Pattelli、E. Pini 和 C.Texier 富有成效的讨论。

声明

资助：本研究得到欧洲研究委员会第 637738 号拨款、意大利大学与研究部 PRIN2022 项目（编号 20227F5W4N）的支持，并由欧盟 NextGenerationEU 共同资助，资助项目为“光子与量子科学综合基础设施倡议（Inte- grated infrastructure initiative in Photonic and Quantum Sciences）”I-PHOQS（CUP B53C22001750006）、PE0000023-NQSTI 项目，以及青年研究人员资助 MSCA0000042（PoPaMol，授予 A.C. 的 fellowship）。D.S. 和 M.Z. 感谢 CNR STM 2025 计划。

利益冲突：作者声明不存在利益冲突。

数据和代码可用性：论文中各图的数据和方法，以及最相关的代码，均可在 Zenodo 存储库 10.5281/zenodo.18302590 中获取。

作者贡献：A.C.、S.F.、B.R.、A.T. 和 M.Z. 完成了实验并分析了数据。D.P. 和 S.S. 建立了波散射的理论模型。S.F. 开展了半经典模拟。S.F.、D.P.、S.S. 和 M.Z. 完成了实验–理论对比。所有作者均参与了结果的解释和论文撰写。

方法

样品制备

我们通过蒸发冷却锂原子来制备锂-铬混合物，其中锂原子均匀占据 Li$|1\rangle$和 Li$|2\rangle$态；同时，通过协同冷却使极化的 Cr$|1\rangle$ 原子降温 [23, 27]。蒸发结束后，将磁场失谐设为高于 Li$|1\rangle$- Cr$|1\rangle$ 费什巴赫共振 [24], $\delta B \simeq 150$ mG，并将样品囚禁在主水平光偶极阱中（见图 1a）。该阱由一束约 1070 nm 的多模激光束产生，聚焦后的束腰分别为 $w_y = 58$ µm 和 $w_z = 45$ µm。通过约 1.5 G/cm 的磁场梯度抵消重力下垂，使铬几乎完全悬浮（磁矩为$\mu_{\mathrm{Cr}} = 6\ \mu_{\mathrm{B}}$，其中 μ_{B} 为玻尔磁子），而锂则略微过度悬浮（$\mu_{\mathrm{Li}} = 1\ \mu_{\mathrm{B}}$）。由磁场曲率提供的轴向束缚，在约 1400 G 的磁场下使 Li（Cr）的谐振频率分别约为 17 Hz（13 Hz）。由于 $\mu_{\mathrm{Li}} = \mu_{\mathrm{Cr}}/6$, 热化混合物的 $1/\sqrt{e}$ 高斯尺寸之比为 $\sigma_{x,\mathrm{Li}}/\sigma_{x,\mathrm{Cr}} = \sqrt{6}$。– 为了增大 Cr 尺寸，并相应地增大 $t_{\max}$，我们调整蒸发过程，使混合物具有温度不平衡：Cr 的有效轴向温度高于 Li 的温度，且这种状态可在数秒内近似保持稳定。这得益于较大的囚禁势长宽比，以及在这些磁场下决定 Li$|1\rangle$-Li$|2\rangle$ 和 Li-Cr 热化速率的不同散射长度：$a_{\mathrm{Li–Li}} \sim -2500\ a_0$ [52] 和$a_{\mathrm{Li–Cr}} \sim -90\ a_0$ [24]。我们还使用第二束垂直取向的红外激光（1550 nm），聚焦于磁场曲率极小值处（束腰约为 100 µm），该激光对两种原子的径向束缚贡献很小，用于压缩 Li云（见图 1a）。由于在该波长下 Li 与 Cr 的极化率比约为 3:1，且铬温度高于锂温度，Cr 气体几乎不受这一第二光偶极阱的影响。升高垂直光偶极阱功率后，我们转移

通过射频脉冲将铬转移至 Cr$|2\rangle$ 态，随后用光学脉冲移除 Li$|2\rangle$ 组分。然后将垂直陷阱功率降低至为测量选定的目标值。所得混合物包含约 1.2×10^5 Cr$|2\rangle$和 10^4Li$|1\rangle$原子；根据实验所探究的机制，云团的原位高斯尺寸为 $\sigma_{x,\,\mathrm{Cr}}\sim(80;\,150)$ μm、$\sigma_{\perp,\,\mathrm{Cr}}\sim(8;\,10)$ μm、$\sigma_{x,\,\mathrm{Li}}\sim(15;\,40)$ μm、$\sigma_{\perp,\,\mathrm{Li}}\sim(5;\,7)$ μm。通过对弱相互作用样品进行飞行时间测量，确定相应的（轴向和横向）有效温度；以原子数为权重计算其平均值，定义为混合物平衡温度 T。

我们通过施加第二个持续 0.9 毫秒的射频脉冲，在每个 δB 值处开启锂-铬相互作用；该脉冲可使铬原子尽可能多地转移回共振的 Cr$|1\rangle$ 态。随后立即关闭垂直光偶极阱，锂气体沿轴向膨胀，而在横向方向受到的激发可忽略不计。通过在原位成像锂$|1\rangle$ 和铬$|1\rangle$气体来监测系统动力学；成像由同一台 CCD 相机拍摄。每次实验运行期间，我们按照文献 [27], 中所述的方案稳定偏置磁场，残余的逐次实验噪声标准差为 2.5 mG。通过在每次数据集采集前后对锂$|1\rangle\leftrightarrow$锂$|2\rangle$ 跃迁进行射频谱学测量，监测磁场缓慢的热漂移：所有磁场漂移超过逐次实验噪声水平的测量均予以舍弃。将 $t_{\max}\le30$ 毫秒作为经验性折中，既能在足够长的时间内记录动力学并获得足够的统计数据，又能将测量期间发生磁场漂移的概率控制在约 10%。这一限制也确保由增强的非弹性散射导致的原子损失 $|\delta B|\to0$ [27] 不超过 10%。

数据分析

我们通过拟合径向积分后的 Li 分布 $\langle x^2(t)\rangle$ 来提取其参数。所用拟合对象是不同演化时间下采集的原位密度分布，见图1b，拟合采用现象学广义高斯包络：

$$n_{\mathrm{Li}}(x,t)=A\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{|x-x_0|}{\sigma_\beta(t)}\right)^{\beta}\right]. \tag{2}$$

根据 β 和 σ_β（t）的最佳拟合值，求得 $\langle x^2$（t）$\rangle$：

$$\langle x^2(t)\rangle=2^{\frac{2}{\beta}}\sigma_\beta^2(t)\frac{\Gamma[\frac{3}{\beta}]}{\beta\Gamma[\frac{\beta+1}{\beta}]}, \tag{3}$$

其中 $\Gamma[z]$ 表示欧拉伽马函数，相应的误差通过传播 $\sigma_\beta(t)$ 和 β 的拟合不确定度获得。将固定时间和失谐条件下的几次（4 到 6 次）独立测量结果合并，以获得 $\langle x^2(t)\rangle$ 的平均值和标准误，并据此表征锂动力学。

在不存在相互作用时（γ（k）$=0$），热锂云具有大小为$\sigma_{x,\,\mathrm{Li}}(t)$ 和 $\langle x^2$（t）$\rangle=\sigma^2_{x,\,\mathrm{Li}}(t)$ 的高斯形状（β=2）。由于轴向谐振约束较弱，$\sigma_{x,\,\mathrm{Li}}(t)$ 不会发生弹道膨胀，而是进行无阻尼呼吸振荡，见扩展数据图1，其频率为最终陷阱频率 $\omega_f=2\pi\times17$ Hz的两倍。具体而言，$\sigma_{x,\,\mathrm{Li}}(t)$ 在初始原位大小$\sigma_{x,\,0}=\sqrt{k_{\mathrm{B}}T_0/(m\omega_0^2)}$与最大值$\sigma_{x,\,0}(\omega_0/\omega_f)$之间振荡，进而在乘以因子 $\hbar/(m\omega_f)$ 后得到初始动量分布的大小，从而得到 T_0。

解析结果也可用于描述均匀介质中谐振囚禁粒子的 $\langle x^2(t)\rangle$ 演化，涵盖从短时间极限（$\gamma_T t\ll1$）到长时间极限（$\gamma_T t\gg1$）的交叉转变，既包括扩散情形 [30]，也包括亚扩散情形 [6]。然而，由于铬浴具有非均匀高斯分布，且在平衡时，$\sigma_{x,\mathrm{Li}}/\sigma_{x,\mathrm{Cr}}=\sqrt{6}$，这些结果难以应用于我们的系统。因此，我们将分析限制在早期动力学 $t\le t_{\max}$，使得 $\langle x^2(t)\rangle$能够方便地拟合方程（1）。实际操作中，α 和 D_α分别由对以 Log$[(\langle x^2(t)\rangle-\langle x_0^2\rangle)/\mu\mathrm{m}^2]$ 为纵坐标、以 Log$[t/\mathrm{ms}]$为横坐标绘制的数据进行线性拟合所得的斜率和截距。随后，将所得截距转换为归一化扩散系数$D_\alpha/(\hbar/m)$（单位为 $s^{1-\alpha}$）。

根据每个时刻 Cr 和 Li 分布的拟合结果，我们还计算了铬峰值密度和密度加权铬密度 $\bar{n}$。这些量在时间窗口 $(0;t_{\max})$ 内取时间平均后，作为洛伦兹气体模型的输入。结合额外的温度测量，它们还定义了参数 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$。

通过对锂密度分布进行两种互补分析，确定 F_{loc}，如图4c 所示。第一种方法采用如下形式的现象学双峰拟合函数：

$$f(x)=A\cdot\left(\frac{1-F}{\sqrt{2\pi}\sigma_G}e^{\frac{-x^2}{2\sigma_G^2}}+\frac{F}{4\sigma_E}e^{\frac{-|x|}{2\sigma_E}}\right), \tag{4}$$

该形式在总体振幅 A下，表示归一化高斯函数与指数函数的加权和。值得注意的是，尽管式（2）和（4）对数据的拟合给出的 $\langle x^2(t)\rangle$ 值一致，但鉴于拟合参数较少，分析时优先采用式（2）。正如预期，正常扩散的 Li 云在演化时间较短和较长时，均可用单个高斯分布轮廓很好地拟合，见扩展数据图 2a；相应地，用式（4）拟合时，$F=0$ 在拟合不确定度范围内。这一情况在反常区域不再成立，见扩展数据图 2b；此时，Li 分布用拉伸高斯分布式（2）且 $\beta<2$，或用式（4）且 $F>0$描述得更好。使用式（4）拟合锂包络后，我们发现，

密度分布中的高斯部分呈亚扩散演化，而指数部分在我们的观测时间内未显示出可检测的动力学变化（无论是权重 F 还是尺寸 σ_E）。因此，我们将局域化比例$F_{\mathrm{loc},1}$ 定义为在观测窗口（$0;t_{\max}$）内拟合所得 F 的时间平均值。

在第二种方法中，我们首先根据各时刻归一化后的原始密度分布，计算时间相关函数，定义如下：

$$C(t)=\frac{\sum_i n_{\mathrm{Li}}(i,t)n_{\mathrm{Li}}(i,0)}{\sum_i n_{\mathrm{Li}}(i,0)^2}, \tag{5}$$

求和遍历图像中的所有像素。随后，我们将 $C(t)$的演化拟合为：

$$g(t)=\left[\frac{2}{1+(1+2D_\alpha t^\alpha/\langle x_0^2\rangle)^{\beta/2}}\right]^{1/\beta}(1-F_{\mathrm{loc},2})+F_{\mathrm{loc},2} \tag{6}$$

对于$F_{\mathrm{loc}、\ 2}=0$，该式表示拉伸高斯包络（广义指数为 β）以给定的 α 和 D_α 值进行亚扩散膨胀时，时间相关函数的变化趋势。只要分布中没有任何部分处于局域化状态， $C(t)$就会随 $t\to\infty$趋于零；否则，它会饱和于一个非零偏移量，示例见扩展数据图 2c。然后，我们将确定的$C(t)$曲线拟合到公式（6），其中 β、 α 和 D_α 取自先前通过 $\langle x^2\rangle$ 分析确定的数值，而偏移量F_{loc},2以及分布的初始二阶矩$\langle x_0^2\rangle$则作为自由拟合参数。由此得到的F_{loc},2最佳拟合值提供了局域化比例的另一种测量方法。对于实验中探索的大多数机制，这两种截然不同的分析方法得出的结果一致（见扩展数据图 2d）；第二种方法通常给出的拟合不确定度更小，而在我们最低的 $\langle k_T/\bar{n}^{1/3}\rangle$值下，得到的局域化比例则显著更高。在图 4c中，我们绘制了平均值（$F_{\mathrm{loc}、\ 1}+F_{\mathrm{loc}}$,2）/2；误差棒定义为最高拟合不确定度与$|F_{\mathrm{loc}、\ 1}-F_{\mathrm{loc}、\ 2}|/2$中的最大值。

半经典模拟

作为对实验进行建模的初步尝试，我们开发了一种半经典蒙特卡罗模拟器，与文献 [54, 55], 中使用的模拟器类似，但针对我们的实验条件进行了调整。数值模拟基于以下假设进行：首先，由于在实验 $N_{\mathrm{Li}}\ll N_{\mathrm{Cr}}$中，锂云被视为一个由（热）杂质构成的统计系综，这些杂质不会对较大的铬热浴产生任何影响；铬热浴则采用局域密度近似处理。其次，外部（光学和磁）束缚通过谐振近似纳入：这意味着，在没有碰撞的情况下，锂原子在阱中的未受扰运动具有精确的解析解，无需对运动方程进行数值积分。第三，相互作用被纳入为（随机且相互独立的）成对弹性s波碰撞，并且我们对所利用的费什巴赫共振 [24]的特征参数有详尽了解。最后，始终假设 Li 和 Cr 原子均为沿经典轨迹运动的粒子，忽略费米统计或量子干涉的任何影响。实际上，该算法是一种离散时间模拟，将时间划分为长度相等的小片段 dt_{step}，系统状态仅在每一步之后根据该时间片内发生的事件进行更新。具体而言，在每一步中，根据局部弹性散射率 $\gamma(x,y,z,k)=n(x,y,z)\sigma(k)v$估算给定锂原子发生碰撞的概率。这里， $n(x,y,z)$表示铬气体在锂原子所在位置的局部密度， k 是碰撞波数，而 $v=\hbar k/m_{\mathrm{red}}$ （其中 m_{red} 为约化质量）表示相对速度；计算相对速度时，Cr 原子的速度从热分布中抽样。在模拟中，无量纲乘积 $P_{\mathrm{coll}}=\gamma(x,y,z,k)dt_{\mathrm{step}}$ 表示锂原子在时间间隔 dt_{step}内发生碰撞的概率。为避免低估碰撞次数，必须始终满足条件 $P_{\mathrm{coll}}\le 1$，这限制了 dt_{step}的取值。随后，在每一步中，锂原子的速度以 P_{coll}的概率发生改变。新的速度在保持 v 大小不变的同时改变其方向，方向在整个立体角范围内均匀随机选取。

该程序的输入是表征初始原子样品的主要参数，例如原子数、两个云团的轴向和径向原位尺寸、囚禁频率和有效温度（后者指相应速度分布方差的测量值，$\sigma^2_{v,\ i}=k_{\mathrm{B}}T/m_i$, $i=$ 铬、锂）。程序只计算锂原子的轨迹，并将Cr气体视为不受扰动的热储库。利用这些轨迹生成轴向位置的直方图，再用公式（2）拟合，以提取均方位移。最后，对模拟数据也采用与实验数据相同的数据分析方法。

为了理解反常区域中模拟结果与实验数据之间观测到的不匹配可能源自何处（见图 2c、d 和图 3），除了独立散射近似碰撞外，我们还测试了纳入另外两种效应：（i）维格纳延迟时间 [56], ，它源于散射相移 $\delta(k)$ 对k 的依赖；（ii）与散射振幅的实部 [32]相关的平均场能量位移。对于发生弹性散射的自由粒子，前者可写为 $\Delta t_{\mathrm{del}}=v^{-1}\mathrm{d}\delta(k)/\mathrm{d}k$，其中，对于窄 s波费什巴赫共振，$\cot(\delta(k))=-(ka)^{-1}-kR^*$。注意，$\Delta t_{\mathrm{del}}$ 既可取正值，也可取负值。对于与静止点状散射体发生散射的谐振囚禁粒子，维格纳延迟时间的一种自然推广是将“未延迟”的相空间轨迹（例如在$(\omega_x x;v_x)$平面中）偏移一个角度 $\omega_x\Delta t_{\mathrm{del}}$（ y 和 z 方向也同理）。对于运动中的

散射体，也可以将类似的考虑应用于相对粒子的运动。平均场能量项 $E_{\mathrm{mf}}(k,\ x,\ y,\ z) = -2\pi(\hbar^2/m_{\mathrm{red}})\ \Re\big[f(k)\big]\ n(x,\ y,\ z)$ 由于对 k 的强烈依赖，难以直接纳入模拟器（此处 $\Re$ 表示实部）。一种初步方法是代入 $k \to k_T$：在这种情况下，$E_{\mathrm{mf}}(x,\ y,\ z)$便表现为一个额外的势能项，其高斯形状源于Cr密度分布，并且可以轻松地对运动方程进行数值积分。更精细但也更复杂的方法，则是从包含 $E_{\mathrm{mf}}(k,\ x,\ y,\ z)$的半经典哈密顿量推导运动方程。纳入维格纳延迟时间和平均场能量修正，并未定性改变模拟结果。

快速热化及 LiCr 分子的作用

根据简单估算，并经我们的半经典模拟器证实，在共振区，Li-Cr碰撞率可超过 20 kHz，这意味着热化时间短于 1 ms。我们通过进一步测量证实了这一预期，结果如扩展数据图 3a 所示，研究的是反常亚扩散机制。图中，我们将标准的亚扩散轨迹（绿色圆点）与以下动力学过程进行比较：先让锂在相互作用态下演化一段时间（0; t_{int}），随后迅速关闭相互作用，并追踪非相互作用的Li原子后续的动力学。通过施加一个持续 300 μs 的射频脉冲来切换相互作用，该脉冲经过优化，可最大程度地提高 Li$|1\rangle \to$Li$|2\rangle$ 转移效率。蓝色和红色圆点分别表示 $t_{\mathrm{int}} = 1$ 和 8 ms 时获得的结果。灰色圆点是在非相互作用的Li样品上记录的，作为参考，其最大值可用于确定$t \le 0$ 有效轴向温度，T_0=69(1) nK。可以看到，蓝色和红色轨迹的最大值都高得多；在实验不确定度范围内，两组数据的最大值相同，对应的气体温度为t_{int} 302(4) nK，与测得的铬温度一致，对应于灰色阴影区域。因此，Li动量分布似乎在不到 1 ms 的时间尺度内便达到热化，而密度分布仍以亚扩散方式演化，即使在我们最长的观测时间内也远未达到其平衡尺寸。

一个合理的问题是，我们在共振处观察到的反常Li动力学是否可能源自分子。对于我们的共振测量，若接受 $R^*/a \approx 0.4$ 作为最大的实际失谐，则要么不存在真正的分子，要么分子的尺寸（在真空中计算）与 Cr 原子之间的平均间距相当或更大。这些估算表明，我们处于这样一种机制：Li 通过从一个 Cr 跳跃到另一个 Cr 而相对自由地传播，而非以真正束缚的 LiCr 对形式传播。在实验上，由于无法通过吸收成像区分这两种情形，我们通过以下方法探查分子可能是否存在以及它们对 Li 动力学的影响：在亚扩散区间、Cr温度和密度条件相近的情况下，采用了另外两种实验方案。第一种方案基于一种对二聚体“透明”的成像流程；第二种方案则利用绿色激光束，如果存在二聚体，该激光束会导致其快速光激发损失。对于第一种方案，在经过可变的演化时间 t 后，我们施加了一个持续 300 μs 的射频脉冲，将 Li$|1\rangle \to$Li$|2\rangle$ 原子转移优化至最大，但该脉冲无法作用于二聚体。脉冲结束后，我们立即对转移后的 Li$|2\rangle$ 原子的原位分布成像，从而追踪那些确定不处于LiCr分子态的 Li粒子的 $\langle x^2(t)\rangle$ 动力学。对于第二种方案，我们追踪 Li$|1\rangle$ 云团在 532 nm 激光束照射下的演化；该激光束与主光学偶极阱共线 [23], , 功率设置为足以使 LiCr分子以 200 Hz 的速率发生光激发损失 [27]。扩展数据图3b 展示了在类似 Cr气体条件下，通过我们的标准流程（红点）以及刚才介绍的两种方案（分别以绿点和黑点表示）记录的 $\langle x^2(t)\rangle$数据。将方程（1）拟合到这三组数据后，得到的 α 和 D_α 值在拟合不确定度范围内完全一致，见扩展数据图3b图注。这些额外的检验，加上上述一般性考量，使我们能够得出结论：LiCr分子形成无法解释所观察到的反常动力学。

随机洛伦兹气体模型

为了在独立散射近似之外，分析原子通过窄费什巴赫共振与点状散射体相互作用时的动力学，我们采用标准的零程双通道模型。该模型假设原子可以处于局域在散射体 i 上的闭通道态，其振幅为 ϕ_i；也可以处于自由传播态，该态由开通道波函数 $\Psi(\mathbf{r})$描述。这个问题的耦合薛定谔方程为（推导过程参见例如[57]）

$$i\partial_t \Psi(\mathbf{r},t) = -(\nabla^2_{\mathbf{r}}/2)\Psi(\mathbf{r},t) - \sqrt{\pi/R^*}\sum_{i=1}^{N}\phi_i(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}_i), \tag{7}$$

$$i\partial_t \phi_i(t) = -(2R^*a)^{-1}\phi_i(t) - \sqrt{\pi/R^*}\Psi_{\mathrm{reg}}(\mathbf{R}_i,t), \tag{8}$$

其中，R_i 表示第 i个散射体的（固定）位置，而该散射体附近开通道波函数的正则部分定义为 $\Psi_{\mathrm{reg}}(\mathrm{R}_i,t) = \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{R}_i}\{\Psi(\mathbf{r}\ t) - [\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{R}_i}|\mathbf{r}-\mathrm{R}_i|\Psi(\mathbf{r}\ t)]/|\mathbf{r}-\mathrm{R}_i|\}$。本节中我们令 $\hbar = m = 1$。在方程（7）和（8）中，闭通道到开通道耦合振幅为$\sqrt{\pi/R^*}$，失谐等于 $-(2R^*a)^{-1}$。

为求解稳态情形下的问题，我们令$\phi_i(t) = \phi_i e^{-i\omega t}$, $\Psi(\mathbf{r}\ t) = \Psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ 并利用等式

$(-\nabla_{\mathbf{r}}^2/2-\omega)e^{i\sqrt{2\omega}r}/r=2\pi\delta(\mathbf{r})$，从方程（7）和（8）中消去开放通道场。由此得到的振幅方程 ϕ_i 为

$$(1/a+i\sqrt{2\omega}+2R^*\omega)\phi_i+\sum_{j\neq i}\phi_j e^{i\sqrt{2\omega}|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|}/|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|=0. \tag{9}$$

通过对式（9中的矩阵进行对角化，可以分析散射介质体内的多重散射和局域化。对于给定的能量 ω，与共振失谐成正比的量 $-1/a$起到本征值的作用。

文献 [16, 58]分析了随机非关联散射体情况下式（9）本征态的统计性质。具体而言，理论预测，当能量 $\omega=k^2/2$ 足够低或密度 n 足够高（即 $n\gtrsim 0.08k^3$）时，如果式（9）的本征值落在两个迁移率边之间的某个范围内，其本征向量就会发生空间局域化。在我们的情形中，这两个边界值对应于两个磁场失谐值，如图 4d 中的白点所示。这些数据取自文献 [16], ，并补充了采用相同方法计算得到的其他数据点。

由公式 (9) 可见，我们模型的定态性质主要由利用长度尺度a、 $1/n^{1/3}$和 $1/k$构造的两个无量纲参数决定。通过项 $2R^*\omega$ 引入的宽度参数 R^* 只会使本征值发生平移。因此，以 R^* 和 $1/a$ 为特征的态，其统计性质与具有 R_1^*的态相同，只是 $1/a$ 被平移了 $-2(R_1^*-R^*)\omega$。这一观察带来的一个重要物理后果是，共振越窄，局域态区域向负a 侧延伸得越远。在固定 R^*的情况下增大 n时，也会产生类似的效应。事实上，在固定 R^* 的情况下增大 n 并对 $\omega\propto n^{2/3}$ 和 $a\propto n^{-1/3}$重新缩放，实际上意味着增大 R^* 并使共振变窄。

扩散常数的计算

本节详细介绍图 4d 中所报告的扩散常数的计算方法。该方法基于以下论证。

考虑扩散方程 [3]

$$\partial_t f(t,\mathbf{r})-\nabla_{\mathbf{r}}D_1\nabla_{\mathbf{r}}f(t,\mathbf{r})=0 \tag{10}$$

其中，在半径为 R 的球体内， D_1 为常数，且在 R处设有吸收边界，即要求 $f(t,R)=0$。假设我们以 $t=0$ 驱动系统，并在$\mathbf{r}=\mathbf{r}'$处设置一个局域源。扩散剖面由满足以下条件的格林函数 G给出

$$\partial_t G(t,\mathbf{r},\mathbf{r}')-D_1\nabla_{\mathbf{r}}^2 G(t,\mathbf{r},\mathbf{r}')=\delta(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{11}$$

我们关注在球体上取平均的存活概率 $G(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{r})$

$$P(t)=\int G(t,\mathbf{r},\mathbf{r})d^3r=\mathrm{Tr}e^{D_1 t\nabla_{\mathbf{r}}^2}=\sum_{l,s}(2l+1)e^{-\epsilon_{l,s}D_1 t/R^2}, \tag{12}$$

其中，能量 $\epsilon_{l,s}$ 是单位半径球体内算符 $-\nabla_{\mathbf{r}}^2$ 的本征值，且球面上满足狄利克雷 $f=0$ 边界条件。相应的径向波函数为 $J_{l+1/2}(\sqrt{\epsilon_{l,s}}r)$，由角动量 $l=0$、1、.....和径向指标 $s=1$、2、.....标记。量 $\sqrt{\epsilon_{l,s}}$是贝塞尔函数 $J_{l+1/2}$的第 s 个零点。在短时间 $t\ll R^2/D_1$ ，方程（12）趋近渐近形式 $P(t)=R^3/[6\sqrt{\pi}D_1 t^{3/2}]$（）；而在相反的极限下，方程（12）中的求和由最低本征值的贡献主导，因此有 $P(t)=e^{-\pi^2 D_1 t/R^2}$。

现在回到方程（7）和（8），考虑被限制在半径为 R的球体中的随机散射体。我们通过在方程（8）中加入一个中心频率为 ω_c 、宽度为 τ的高斯脉冲，驱动第 i 个散射体。对于图 4d 所示的条件，我们取 τ 约为 1 毫秒，以确保在实现局域激发的同时，仍具有约 10 纳开尔文的能量分辨率。我们在频域 [中求解问题，即在方程（9）右侧] 加入一个 ω 的高斯函数来求解方程，然后通过傅里叶变换回到时域，重建轨迹 $\phi_i(t)$。随后，将存活概率 $|\phi_i(t)|^2$ 对 i求和，并用经典曲线 $const\times P(t)$进行拟合，由此得到扩散常数 $D_1(\omega_c)$。计算针对限制在半径为 ≈ 11 μm 的球体中的 $N\approx 5000$ 个散射体进行，并对每个 ω_c 取 5 个无序实现的平均值。我们忽略有限尺寸效应，因为 R远大于平均自由程；在图 4d 中，平均自由程处处约为 1 μm。拟合在 t 从几毫秒到几十毫秒的区间内进行。根据拟合质量，我们认为该方法在本研究中对 $D_1\gtrsim 0.05\ \hbar/m$是可靠的。接近局域区域时，$|\phi_i(t)|^2$ 在此时间区间内明显呈现亚扩散行为，因此无法再用此方法确定 D_1。

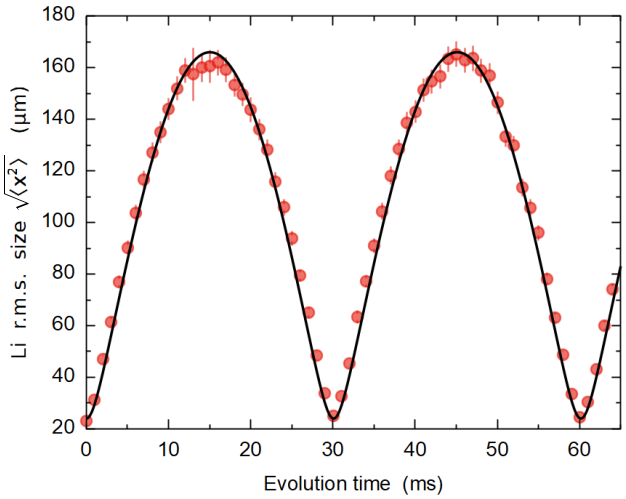
图 4d 中所示的扩散常数是在 $n=10^{12}\ \mathrm{cm}^{-3}$条件下计算的。不过，经过重新标度后，这一结果可用于另一种散射体密度。事实上，我们模型的标度性质表明，量 $mD_1(R^*/a,\omega;n)/\hbar$ 是仅由两个参数决定的无量纲函数：（$1/a+2mR^*\omega/\hbar\ n^{-1/3}$ 和 $2m\omega n^{-2/3}/\hbar$）。

因此，计算出 $D_1(R^*/a,\omega;n)$ 后，我们便可根据下式得到另一种密度 $n'=n/\lambda^3$ 对应的扩散常数

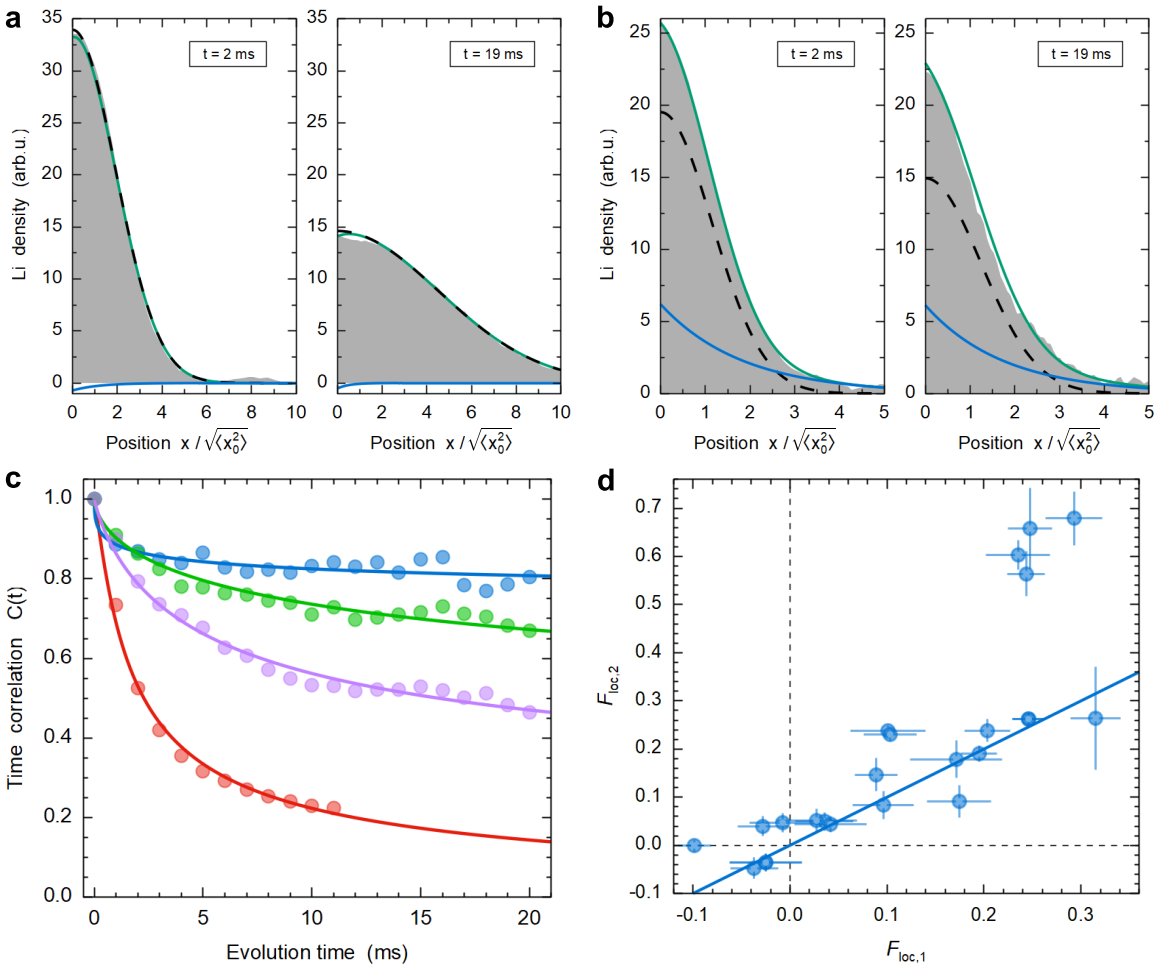
$$D_1(R^*/a,\omega;n')=D_1[\lambda R^*/a+2\lambda(1-\lambda)mR^{*2}\omega/\hbar,\lambda^2\omega;n], \tag{13}$$

我们在分析中使用这一结果来计算 F_{loc}^* ，并对径向分布进行密度平均。

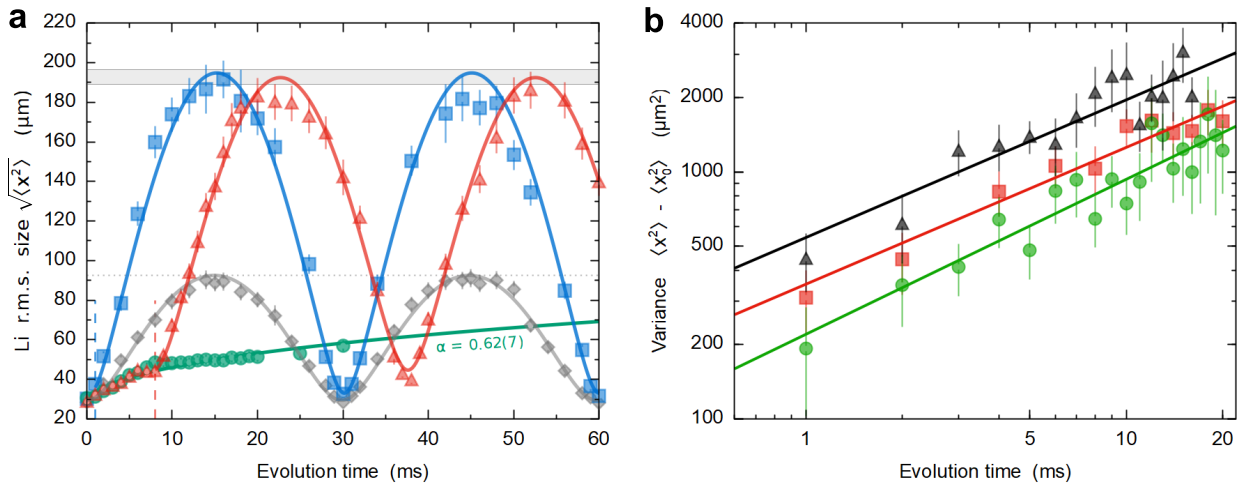
扩展数据



扩展数据图1。**释放后非相互作用锂云的轴向呼吸动力学**。圆点表示实验数据点，误差棒表示4–6次测量的标准误。实线是根据文献 [30] 对非相互作用情形的解析预测进行的最佳拟合，另见文献 [53]。



扩展数据图 2. **用于提取的实验方法** F_{loc}. **a**，正常扩散数据在短时间和长时间下的径向积分 Li 分布示例（阴影区域）。绿色曲线是根据方程（4）得到的最佳拟合，黑色虚线（蓝色实线）分别表示高斯分布部分（指数部分）。**b**，与**a**相同，但针对亚扩散数据。指数部分在实验时间尺度内未显示出任何动力学变化。**c**，扩散数据（红点）和亚扩散时间关联数据（紫色、绿色、蓝色） $C(t)$的示例，以及根据方程（6）得到的最佳拟合（实线）。**d**，比较 $F_{\mathrm{loc},1}$ 和 $F_{\mathrm{loc},2}$。蓝线为 $y = x$。



扩展数据图 3. **亚扩散区间中的热化及分子的作用。a**，亚扩散数据（绿色圆圈）及其根据方程（1）得到的最佳拟合（绿色线）与非相互作用的Li样品（灰色菱形）在相同初始条件 $T_{0,\,x,\,\mathrm{Li}} = 69(1)$ 纳开尔文和 $T_{\mathrm{Cr}} = 300(10)$ 纳开尔文下的呼吸动力学进行比较。蓝色方块（红色三角形）表示系统在相互作用态中演化 $t_{\mathrm{int}} = 1$ 毫秒（$t_{\mathrm{int}} = 8$ 毫秒）后取得的数据，随后施加一个持续 0.2 毫秒的射频脉冲，将原子转移到非共振的 Li$|2\rangle$ 态。蓝色和红色曲线是对数据的拟合，拟合对象为 $t > t_{\mathrm{int}}$，见参考文献 [53]。$\langle x^2(t) \rangle$ 在 $t > t_{\mathrm{int}}$ 下达到的最大值对应于温度为 T_{Cr} 时锂云的数值（阴影区域）。**b**，红外阱中的亚扩散数据（红色方块）与在相似的铬密度和温度条件下、但存在光激发绿光束时测得的数据（绿色圆圈）进行比较；此外，还与成像前将锂翻转至 Li$|2\rangle$ 态的数据（黑色三角形）进行比较。数据拟合结果（实线）给出的幂律指数在拟合不确定度范围内相容：$\alpha = 0.55(5)$（红色数据）、$\alpha = 0.63(7)$（绿色）和 $\alpha = 0.56(6)$（黑色）。

[1] L. Boltzmann, *Lectures on Gas Theory*（加利福尼亚大学出版社，1896）。[2] A. Einstein,《热分子运动理论所要求的悬浮于静止液体中的微小粒子的运动》,《物理年鉴》17，549（1905）。[3] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz, *Physical Kinetics*,《理论物理学教程》第10卷（Butterworth–Heinemann，牛津，1981）。[4] R. Z wanzig, *Nonequilibrium Statistical Mechanics*（牛津大学出版社，牛津，2001）。[5] M. E. J. Newman, *Networks: An Introduction*（牛津大学出版社，牛津，2010）。[6] R. Metzler 和 J. Klafter,《反常扩散指南：分数阶动力学方法》,《物理学报告》339，1（2000）。[7] P. W. Anderson,《某些随机晶格中扩散的缺失》,《物理评论》109，1492（1958）。[8] S. Havlin 和 D. Ben-Avraham,《无序介质中的扩散》,《物理学进展》36，695（1987）。[9] G. M. Bruun 和 H. Smith,《幺正极限下费米气体的剪切黏度与阻尼》,《物理评论A辑》75，043612（2007）。[10] A. T. Sommer、M. J. H. Ku、G. Roati 和 M. W. Zwierlein,《强相互作用费米气体中的普适自旋输运》,《自然》472，201（2011）。[11] L. D. Landau,《费米液体理论》,《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》3，920（1957）。[12] G. Baym 和 C. J. Pethick, *Landau Fermi-Liquid Theory: Concepts and Applications*（Wiley-VCH，魏因海姆，1991）。[13] T. Enss 和 J. H. Thywissen,《幺正费米子的普适自旋输运与量子界限》,《凝聚态物理年度评论》10，85（2019）。[14] H. A. Lorentz,《金属中 ′电子的运动》,《荷兰精密与自然科学档案》10，336（1905）。[15] M. Rusek、J. Mostowski 和 A. Or-lowski,《随机格林矩阵：从邻近共振到安德森局域化》,《物理评论A辑》61，022704（2000）。[16] S. E. Skipetrov 和 I. M. Sokolov,《共振点散射体模型中安德森局域化的Ioffe-Regel判据》,《物理评论B辑》98，064207（2018）。[17] A. Smith、J. Knolle、D. L. Kovrizhin 和 R. Moessner,《无序自由局域化》,《物理评论快报》118，266601（2017）。[18] T. Grover 和 M. P. A. Fisher,《量子解纠缠液体》,《统计力学杂志：理论与实验》2014，P10010（2014）。[19] N. W. Ashcroft 和 N. D. Mermin, *Solid State Physics*（Holt-Saunders，1976）。[20] W. Zwerger, 编, *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas* 2012（施普林格，）。[21] N. Mott, *Metal-Insulator Transitions*（泰勒-弗朗西斯，1990）。[22] C. R. Dean、L. Wang、P. Maher、C. Forsythe、F. Ghahari、Y. Gao、J. Katoch、M. Ishigami、P. Moon、M. Koshino、T. Taniguchi、K. Watanabe、K. L. Shepard、J. Hone 和 P. Kim,《莫尔超晶格中的霍夫施塔特蝴蝶与分形量子霍尔效应》,《自然》497，598（2013）。[23] A. Ciamei、S. Finelli、A. Cosco、M. Inguscio、A. Trenkwalder 和 M. Zaccanti，双重简并费米混合物中的 ^{6}锂和 ^{53}铬原子,《物理评论A辑》106，053318（2022）。[24] A. Ciamei、S. Finelli、A. Trenkwalder、M. Inguscio、A. Si- moni 和 M. Zaccanti，探索超冷 ^{6}Li−^{53}Cr 费米混合物中的碰撞：一种新型碱金属—过渡金属体系的费什巴赫共振与散射性质,《物理评论快报》129，093402（2022）。[25] G. M. Bruun，费米气体中的自旋扩散,《新物理学杂志》13，035005（2011）。[26] O. Goulko、F. Chevy 和 C. Lobo，谐振阱中费米气体的自旋拖曳,《物理评论快报》111，190402（2013）。[27] S. Finelli、A. Ciamei、B. Restivo、M. Schemmer、A. Cosco、M. Inguscio、A. Trenkwalder、K. Zaremba- Kopczyk、M. Gronowski、M. Tomza 和 M. Zaccanti，超冷 LiCr：通往顺磁性极性分子量子气体的新途径,《PRX量子》5，020358（2024）。[28] G. Breit 和 E. Wigner，慢中子的俘获,《物理评论》49，519（1936）。[29] C. Chin、R. Grimm、P. Julienne 和 E. Tiesinga，超冷气体中的费什巴赫共振,《现代物理评论》82，1225（2010）。[30] G. E. Uhlenbeck 和 L. S. Ornstein，论布朗运动理论,《物理评论》36，823（1930）。[31] S. Barbosa、M. Kiefer-Emmanouilidis、F. Lang、J. Koch 和 A. Widera，通过局域化稳定超冷费米气体，抵御费米加速导致的超扩散,《物理评论快报》134，253402（2025）。[32] M. Zaccanti，具有共振相互作用的质量不平衡费米混合物，恩里科·费米暑期学校讲义：超冷原子量子混合物（2023）, arXiv:2306.02736；瓦伦纳学校讲义。[33] G. Valtolina、F. Scazza、A. Amico、A. Burchianti、A. Re- cati、T. Enss、M. Inguscio、M. Zaccanti 和 G. Roati，通过自旋动力学探索排斥性费米气体的铁磁行为,《自然·物理》13，704（2017）。[34] J. Billy、V. Josse、Z. Zuo、A. Bernard、B. Hambrecht、P. Lugan、D. Cl´ement、L. Sanchez-Palencia、P. Bouyer 和 A. Aspect，在受控无序中直接观测物质波的安德森局域化,《自然》453，891（2008）。[35] G. Roati、C. D'Errico、L. Fallani、M. Fattori、C. Fort、M. Zaccanti、G. Modugno、M. Modugno 和 M. In- guscio，非相互作用玻色—爱因斯坦凝聚体的安德森局域化,《自然》453，895（2008）。[36] J. Chab´e、G. Lemari´e、B. Gr´emaud、D. Delande、P. Szrift- giser 和 J. C. Garreau，利用原子物质波实验观测安德森金属—绝缘体转变,《物理评论快报》101，255702（2008）。[37] H. Hu、A. Strybulevych、J. H. Page、S. E. Skipetrov 和 B. A. van Tiggelen，三维弹性网络中的超声波局域化,《自然·物理》4，945（2008）。[38] G. Semeghini、M. Landini、P. Castilho、S. Roy、G. Spagnolli、A. Trenkwalder、M. Fattori、M. Inguscio 和 G. Modugno，三维安德森局域化迁移率边的测量,《自然·物理》11，554（2015）。[39] L. A. Cobus、W. K. Hildebrand、S. E. Skipetrov,

B. A. van Tiggelen 和 J. H. Page，三维介观玻璃中经由安德森转变的超声波横向限域，《物理评论B辑》98，214201（2018）。[40] N. Darkwah Oppong、G. Pasqualetti、O. Bettermann、P. Zechmann、M. Knap、I. Bloch 和 S. F¨olling，探测质量不平衡费米-哈伯德模型中的输运与慢弛豫，《物理评论X》12，031026（2022）。[41] P. A. Lee 和 T. V. Ramakrishnan，无序电子系统，《现代物理评论》57，287（1985）。[42] B. Kramer 和 A. MacKinnon，局域化：理论与实验，《物理学进展报告》56，1469（1993）。[43] D. Basko、I. Aleiner 和 B. Altshuler，具有局域单粒子态的弱相互作用多电子系统中的金属—绝缘体转变，《物理学年鉴》321，1126（2006）。[44] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn，专题综述：多体局域化、热化与纠缠，《现代物理评论》91，021001（2019）。[45] P. Massignan 和 Y. Castin，原子在具有限域诱导共振的晶格中散射导致的物质波三维强局域化，《物理评论A辑》74，013616（2006）。[46] R. Yao、S. Chi、M. Wang、R. J. Fletcher 和 M. Zwier- lein，通过原子分辨显微成像测量玻色气体和费米气体中的对关联，《物理评论快报》134，183402（2025）。[47] T. de Jongh、J. Verstraten、M. Dixmerias、C. Daix、B. Peaudecerf 和 T. Yefsah，连续体中费米子的量子气体显微成像，《物理评论快报》134，183403（2025）。[48] J. Xiang、E. Cruz-Col´on、C. C. Chua、W. R. Milner、J. de Hond、J. F. Fricke 和 W. Ketterle，原位成像——超冷玻色气体中热德布罗意波长的……，Physical Review Letters 134, 183401 (2025). [49] S. Torquato，物质的超均匀态，Physics Reports 745, 1 (2018)，超均匀物态。[50] P. W. Anderson，具有局域散射势的费米气体中的红外灾变，《物理评论快报》18, 1049 (1967). [51] C. Fey、P. Schmelcher、A. Imamoglu 和 R. Schmidt，原子级薄半导体中的激子-电子散射理论，《物理评论B辑》101, 195417 (2020). [52] G. 等人 Z¨urn，利用陷阱边带分辨射频光谱精确表征弱束缚分子中的 ^{6}锂费什巴赫共振，《物理评论快报》110, 135301 (2013). [53] W. Ketterle 和 M. W. Zwierlein，制备、探测和理解超冷费米气体，新物理评论 31, 247 (2008). [54] A. C. J. Wade、D. Baillie 和 P. B. Blakie，冷原子动力学的直接模拟蒙特卡罗方法：量子碰撞区间中的经典玻尔兹曼方程，《物理评论A辑》84, 023612 (2011). [55] A. G. Sykes 和 J. L. Bohn，超冷偶极气体的非平衡动力学，《物理评论A辑》91, 013625 (2015). [56] E. P. Wigner，散射相移能量导数的下限，《物理评论》98, 145 (1955). [57] A. Journeaux、J. Veschambre、M. Lecomte、E. Uzan、J. Dalibard、F. Werner、D. S. Petrov 和 R. Lopes，Fano-费什巴赫共振附近玻色气体中的二体接触动力学（2025），arXiv:2509.03567 [cond- mat.quant-gas]. [58] S. E. Skipetrov，三维共振点散射体系综中标量波局域化转变的有限尺寸标度分析，《物理评论B辑》94, 064202 (2016).