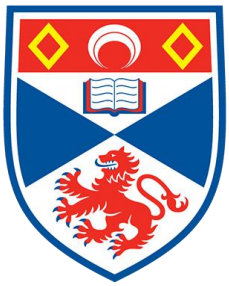
arXiv:2601.13279v1 [math.GR] 19 Jan 2026

从代数构造拓扑

Luke Elliott



University of
St Andrews

本论文为部分满足哲学博士学位要求而提交

在圣安德鲁斯大学

2021年9月

从代数构造拓扑

摘要

在本论文中，我们探讨如何通过特定半群以自然的方式构造拓扑结构。我们将采用两种方法：1）为半群对象本身赋予拓扑结构；2）为半群寻找一个可供其连续作用的拓扑空间。

我们讨论可以在任意半群上定义的各种最小/最大拓扑（在给定某些拓扑限制的条件下）。我们明确描述了定义在集合 $\mathbb{N}$ 上的二元关系、部分变换、变换和部分双射所构成的幺半群的这些拓扑。采用类似方法，我们判定这些半群是否各自具有唯一的波兰半群拓扑。我们还对以下半群进行了同样的研究： $\mathbb{N}$ 上所有单射函数构成的幺半群、希尔伯特立方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 上的连续变换构成的幺半群、康托空间 $2^{\mathbb{N}}$ 上的连续变换构成的幺半群，以及可数无限无原子布尔代数的自同态构成的幺半群。除希尔伯特立方体的连续变换幺半群外，我们还证明上述所有半群都具有第二可数半群拓扑，使得从该半群到任意第二可数拓扑半群的每个半群同态都是连续的。

在一篇近期论文中，Bleak、Cameron、Maissel、Navas 和 Olukoya 运用 Rubin 的一条定理，通过希格曼–汤普森群在康托空间上的典范 Rubin 作用，描述了这些群的自同构群。特别是，他们将这些自同构群嵌入由 Grigorchuk、Nekrashevich 和 Sushchanskii 引入的转导器有理群 $\mathcal{R}$ 中。我们将这些转导器推广，使其更适用于高维康托尔空间，并对布林–汤普森群的自同构群给出类似的描述（不过，我们没有给出嵌入 $\mathcal{R}$）。根据我们的描述，我们证明， dV_2 的外自同构群 Out(dV_2) 同构于 Out($1V_2$) 与作用在 d 个点上的对称群的冠积。

一般致谢

我谨向我的博士生导师 Collin Bleak 和 James Mitchell 致谢；自我认识他们以来，他们一直在学术及其他方面给予我极大的支持。也感谢大空昴さん总是带给我欢乐。

资金支持

本研究得到圣安德鲁斯大学（数学学院）的资助。

Contents

第 1 部分：引言 5

第2部分：预备知识与定义 6

1. 集合 6 2. 范畴 8 3. 拓扑 11 4. 结构 16 4.1. 拓扑结构 18 4.2. 波兰半拓扑群是良好的 20 4.3. 字与项 25 5. 良好作用 26 5.1. 对称群 30 5.2. 康托空间的同胚 32 5.3. 群的自动连续性 41 5.4. Rubin 定理 45

第3部分：半群与克隆 53

6. 任意半群的自然拓扑 54 7. 小指标性质与性质 **W** 60 8. 拓扑克隆 63 9. 重要半群与克隆的研究 67 9.1. 二元关系 67 9.2.（部分）变换 70 9.3. 部分双射 74 9.4. 单射函数 80 9.5. 希尔伯特方体 84 9.6. 康托空间 88 9.7. 布尔代数 93

第 4 部分。 dV_n的自同构 95

10. 高维字 96 11. 推广 Grigorchuk、Nekrashevich 和 Sushchanskii 的换能器 97 12. 推广 Bleak、Cameron、Maissel、Navas 和 Olukoya 的同步同胚 106 13. 有理性 114 14. 深入考察群 $d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 118 参考文献 131

第1. 部分 引言

本论文关注在给定背景下选择合适或“最佳”拓扑结构的方法。我们尤其感兴趣的是，在拥有一个适于研究的良好代数对象时，如何进行这种选择。这通常涉及寻找一种以某种方式与代数对象“相容”的拓扑结构，并在给定某些“合理”的拓扑假设时，探究其唯一性。

我们分为三个主要部分。第 2 部分将确立其余部分所需的定义和背景知识。特别是，我们将给出文献中一些关键定理的证明，而第 3 部分和第 4 部分都依赖于这些定理。其中最重要的定理包括：

- 群上的可比较波兰拓扑（3.25）必然相同（定理 4.27）。
- 从 $\mathbb{N}$ 上的对称群到第二可数群的所有同态都是连续的；类似地，从康托空间的同胚群到第二可数群的所有同态也都是连续的（定理 5.39）

- Rubin 定理（定理 5.49）。

文献中常用“自动连续性”一词来描述类似定理 5.39 中的性质。不过，为避免混淆，我们在本文所有正式陈述中都避免使用这一术语。

在第3部分中，我们关注如何自然地为给定半群定义拓扑。我们也希望找到与重要半群相容的拓扑，并且这些拓扑在某些“合理”的拓扑限制下是唯一的。

为此，我们将介绍五种为任意半群定义拓扑的方法；从某种意义上说，每种方法都为与该半群相容的“良好”拓扑集合设定了一个界限。这些拓扑分别是最小弗雷歇拓扑 (6.6)、弗雷歇/豪斯多夫-马尔可夫拓扑 (6.7)、扎里斯基拓扑 (6.9) 和第二可数连续性拓扑 (6.11)。值得注意的是，其中一些拓扑总是可以比较的（见命题 6.15）。

我们考察并描述了若干自然出现的半群上的这些拓扑，并由此证明，每种拓扑都与零个、一个或多个波兰拓扑相容（见定理 9.4、9.10、9.18、9.21、9.23、9.29、9.35 和 9.42）。

克隆（8.1）是幺半群的一种自然推广，而我们讨论的许多幺半群都有自然的克隆类比。我们还将第3部分中的一些结果推广到这些类比对象（见推论 9.11、9.30、9.36 和 9.43）。

在第 4 部分中，我们使用 Rubin 定理（见推论 5.50）研究布林–汤普森群 dV_n 的自同构（见定义 10.2 和 [7]）。在 [3] 中，已有研究表明，借助 Rubin 定理，可以分类康托集上的哪些同胚对应于希格曼–汤普森群 $G_{n,\,r}$ 的自同构。这一描述基于表示这些同胚的最小转导器的组合性质，详见 [16]。

我们扩展了 [16] 中给出的换能器概念，使换能器能够描述“高维”康托空间上的连续映射（见定理 11.16）。随后，我们扩展 [3] 中的方法，对群 Aut(dV_n) 给出类似的描述（见定理 12.18）。接着，我们利用这一描述，揭示不同 d 取值下群 dV_n 的外自同构群之间的代数联系（见定理 14.19 和 14.18）。

第2. 部分 预备知识与定义

本部分旨在确立文献中已有的、我们在后续部分需要的结果，同时介绍一些相关的记号和术语。此外，我们假定读者熟悉以下概念：

- 佐恩引理。
- 基数以及任意集合的基数（集合的基数 X 记作 $|X|$）。

- 注 3.18 中关于紧致空间和豪斯多夫空间的断言。
- 布劳威尔定理（定理 3.20）。
- 贝尔范畴定理（定理 3.28）。

在第3部分的希尔伯特立方体小节（9.5）中，我们也会用到定理 9.27（[35]的定理 5.2.4）；在布尔代数小节（9.7）中，我们会用到斯通对偶定理（9.41）。但本文档的其他小节都不依赖这些结果。

1. Sets

本节中的大多数概念都广为人知。不过，读者熟悉这些对象在本文中的表述方式会很重要（尤其是在第3部分中）。有时，我们会用“:=”代替“=”，以表示左侧对象由给定的等式定义。

定义 1.1(数)。
我们用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集（包括 0）。我们还用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbb{Q}$ 表示有理数集，用 $\mathbb{R}$ 表示实数集。

若 $a, b \in \mathbb{R}$，则我们用 $[a, b]$、$(a, b]$、$[a, b)$ 或 (a, b) 表示 $\mathbb{R}$ 中通常的闭区间、半开区间和开区间。若 $a, b \in \mathbb{Z}$，则 $\{a, a+1, \ldots, b\} := \left\{ i \in \mathbb{Z} \;\middle|\; a \le i \le b \right\}$。

定义 1.2（幂集）。
如果 X 是一个集合，那么我们将 X 的幂集（X的子集组成的集合）记作 $\mathcal{P}(X)$。

定义 1.3（函数，预备知识：1.2）。
如果 X，Y是集合，那么称 f是一个从 X到 Y的函数（记作 $f\colon X \to Y$），当且仅当 f是集合 $X \times Y$的一个子集，并满足以下条件：

(1) For all $x \in X$, there is a unique $y \in Y$ with $(x, y) \in f$.

我们将从左到右复合函数。请注意，我们稍后（定义 1.5）会使用函数来定义集合$X \times Y$，因此这在技术上是一个循环定义。形式上，可以先不使用函数来定义 $X \times Y$，然后再重新定义该记号，从而避免这种情况；不过为简洁起见，我们不这样做。

定义 1.4（函数集，预备知识：1.3）。
如果 X 与 Y 是集合，那么我们将 X^Y 定义为从 Y到 X的所有函数组成的集合。如果 Y 是自然数 n，那么在此处我们将 n视为集合 $\{0, 1, \ldots n-1\}$。

定义 1.5（积集与投影映射，预备知识：1.4）。如果 $(X_i)_{i \in I}$ 是集合，那么我们定义

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ t \in \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right)^I \;\middle|\; \text{for all } i \in I \text{ we have } (i)t \in X_i \right\}.$$

注意，如果 X，Y 是集合，并且对所有 $y \in Y$，我们定义 $X_y := X$，那么 $X^Y = \prod_{y\in Y} X_y$。
如果X_0，X_1，$\ldots$，X_{n-1} 是集合，那么我们也将使用以下记法：

$$X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{n-1} := \prod_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}} X_i.$$

我们通常使用记号 $((0)t, (1)t, \ldots, (n-1)t)$ 来定义 t 的一个元素。此外，我们通常将投影映射 $\pi_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$（由 $(t)\pi_i = (i)t$定义）记作π_i。映射 π_i的定义域依上下文而定。特别地，如果 X, Y 是集合，且 $(x, y) \in X \times Y$，那么 $(x, y)\pi_0 = x$ 且 $(x, y)\pi_1 = y$。

定义 1.6（二元关系，预备知识：1.2、1.5）。
如果 X 与 Y是集合，且 $b \subseteq X \times Y$，那么我们称 b 是一个从 X 到 Y的二元关系（或者，当 $X = Y$时，是 X 上的二元关系）。设 b 是从集合 X 到集合 Y的一个二元关系。如果 $S \subseteq X$，那么我们将 S 在 b之下的像定义为

$$(S)b := \left\{ y \in Y \;\middle|\; \text{there is } x \in S \text{ with } (x, y) \in b \right\}.$$

若 $S \subseteq \mathcal{P}(X)$，则我们类似地将 S 的像定义为 $(S)b := \left\{ (A)b \;\middle|\; A \in S \right\}$；我们还将此推广至 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$ 等。我们将 b 的逆关系 定义为

$$b^{-1} := \left\{ (y, x) \in Y \times X \;\middle|\; (x, y) \in b \right\}.$$

若 b' 是一个 从 Y 到另一个集合 Z的二元关系，则我们将 b 与 b' 的复合 定义为

$$bb' := \left\{ (x, z) \in X \times Z \;\middle|\; \text{there is } y \in Y \text{ with } (x, y) \in b \text{ and } (y, z) \in b' \right\}.$$

我们将 b 的定义域、像 与核 分别定义为 $\mathrm{dom}(b) := (Y)b^{-1}$，$\mathrm{img}(b) := (X)b$ 与 $\ker(b) := \left\{ (x, y) \in \mathrm{dom}(b)^2 \;\middle|\; (\{x\})b = (\{y\})b \right\}$。注意，函数是二元关系的例子，而函数复合是二元关系复合的特殊情况，因此这些定义也适用于函数。

如果 b 是一个 从 X 到 Y 的二元关系，且 S 是一个集合，那么我们将 b 在 S 上的限制定义为

$$b \restriction_S := b \cap (S \times Y).$$

我们用 id_X 表示关系 $\left\{ (x,\ x) \;\middle|\; x \in X \right\}$（这种关系通常称为 X 上的恒等函数、对角关系或相等关系）。如果一个从 X 到 Y 的二元关系 b 满足 $\mathrm{img}(b) = Y$，则称其为满射；如果 $\ker(b) = \mathrm{id}_X$，则称其为单射。如果 f 是一个函数，那么当且仅当它既是单射又是满射时，我们称 f 为双射。

定义 1.7（可数，预备知识：1.1、1.6）。
如果存在一个从 X 到 $\mathbb{N}$ 的单射，则称集合 X 为可数集合。特别地，有限集是可数的。

定义 1.8（并集与交集约定）。
如果 X 是一个集合，那么我们定义

$$\bigcup X := \bigcup_{S\in X} S, \quad \text{and} \quad \bigcap X := \bigcap_{S\in X} S.$$

其中 $\bigcup_{S\in\varnothing} S = \varnothing$ 和 $\bigcap_{S\in\varnothing} S$ 将是我们所讨论的“全集”或“空间”（如果这里存在歧义，则不使用该记号）。

定义 1.9（补集）。
如果 X 是一个集合且 $S \subseteq X$，那么我们将 X 中 S 的补集 记为 S^c。也就是说

$$S^c := X \backslash S = \left\{ x \in X \;\middle|\; x \notin S \right\}.$$

在少数情况下，当集合 X 存在歧义时，我们会避免使用记号 S^c 。
定义 1.10 （二元关系的类型，预备知识：1.6）。
假设 X 是一个集合， b 是 X 上的二元关系。我们将使用以下术语来描述 b 可能具有的这些性质：

（1）自反：若 $x \in X$ ，则有 $(x, x) \in b$。（2）传递：若 $(x, y) \in b$ 且 $(y, z) \in b$，则还有 $(x, z) \in b$。（3）反对称：若 $(x, y) \in b$ 且 $(y, x) \in b$，则 $x = y$。（4）对称：若 $(x, y) \in b$，则 $(y, x) \in b$。（5）全：若 $x, y \in X$，则要么 $(x, y) \in b$，要么 $(y, x) \in b$。

如果 b 是自反且传递的，我们就称其为预序。如果预序 b 是反对称的，我们就称其为偏序。如果预序 b 是对称的，我们就称其为等价关系。如果偏序 b 是全的，我们就称其为全序。如果 $\leq$ 是上述类型之一的二元关系，我们通常记 $x \leq y$ 表示（x， y） $\in \leq$，记 $x < y$ 表示 x， y彼此不同且满足 $x \leq y$。

如果 X 是一个集合，且 $\leq$ 是 X上的偏序，那么我们称 $x \in X$ 为

(1) 若对所有 $y \in X$都有 $x \leq y$ ，则称其为最小元。(2) 若对所有 $y \in X$ 都有 $y \leq x \Rightarrow y = x$，则称其为极小元。
(3) 若对所有 $y \in X$都有 $y \leq x$ ，则称其为最大元。(4) 若对所有 $y \in X$ 都有 $x \leq y \Rightarrow y = x$，则称其为极大元。

如果 $\sim$ 是集合 X 上的等价关系，且 $x \in X$，那么我们将 x 的等价类 定义为$[x]_\sim$: $= \left\{ y \in X \;\middle|\; x \sim y \right\}$。此外，我们定义 $X/\sim := \left\{ [x]_\sim \;\middle|\; x \in X \right\}$，并将 $\sim$ 的指标 定义为 $|X/\sim|$。

定义 1.11 （滤子，预备知识：1.10）。
Su设 $(X, \leq)$ 是一个偏序集。若集合 F 是 X 的滤子 ，则称其为:

（1）对于所有 $x, y \in F$，存在 $z \in F$，使得 $z \leq x$ 且 $z \leq y$。
（2）如果 $z \in X$ 且存在 $x \in F$ 使得 $x \leq z$，那么 $z \in F$。

我们称滤子 F on X 是真滤子 ，如果 $F \neq X$；如果 F 相对于包含关系在 X 上的所有真滤子中是极大元，则称其为超滤子 。

滤子通常定义在某个集合的幂集上，并按包含关系排序；在这种情况下，由佐恩引理可知，每个真滤子都包含于某个超滤子中。

2. 范畴

本文将使用许多范畴。特别是，我们将引入一个转导器范畴，它在第 4 部分中会被广泛使用；在第3部分讨论克隆时，我们也会采用范畴论的视角。本文中的大多数范畴都有积（定义 2.3）。我们在全文中广泛运用这一事实，尤其是下面的记号

$$\langle (f_i)_{i \in I} \rangle_P$$

（其中 I 是一个指标集，$(f_i)_{i\in I}$ 是具有共同源对象的态射，而 P 是一个积对象）将会被广泛使用。

以下这个冗长的“定义”是为那些（像作者一样）一看到频繁使用真类就感到害怕的人准备的。如果读者对真类感到习惯，则可以跳过这一部分。

定义 2.1（真类，预备知识：1.3、1.5）。
如果 P 是一个对每个集合赋予真或假值的性质（例如，可数），那么同时讨论所有满足 P 的集合往往会很有用。我们将非正式地使用“类”一词，统称具有某种性质的所有集合。回想一下，集合的每个元素本身也是一个集合，我们不区分一个集合 S 与和“是 S 的元素”这一性质相关联的类。许多类并非集合；一个著名的例子是所有不包含自身的集合所构成的类。我们将不是集合的类称为**真类**。如果 $\mathcal{C}$ 是由性质 P 定义的类，那么我们通常写作 $c \in \mathcal{C}$ 或 $P(c)$，表示 c 满足 P。

由于真类并非 ZFC 中的形式对象，因此在处理它们时必须格外谨慎。不过，正如我们稍后将看到的，许多自然且有用的范畴实例都会用到真类。因此，能够构造子类、类的元组、类的积，以及类之间的函数，将会很有用。

注意，我们无法定义一个像由类组成的函数。特别是，这里给类添加下标时，我们并不是在定义函数，而只是表示在不同情况下讨论的类的数量可能不同，并允许使用这种记法。

(1) 若 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 是分别由性质 P_A，P_B 定义的类，那么如果 P_A 蕴含 P_B，我们就称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的子类。(2) 若 $\mathcal{C}_0$，$\mathcal{C}_1$，…，$\mathcal{C}_{n-1}$ 是由性质 P_0，P_1，…，P_{n-1} 分别定义的类（其中至少有一个真类），那么我们记作

$$(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{n-1})$$

表示由有序对 $(c_i,\ i)$ 组成的类，其中 c_i 满足性质 P_i。这与集合的元组定义（定义 1.5）截然不同；实际上，它更像是通常对不交并的定义。不过，在本文档中，重要的是原来的类可以从这个类中“恢复”出来。注意，$\mathcal{C}_i$ 是由满足 $(c,\ i) \in (\mathcal{C}_0,\ \mathcal{C}_1,\ \ldots,\ \mathcal{C}_{n-1})$ 的 c 所组成的类。

(3) 如果 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{n-1}$ 是分别由性质 $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ 定义的类，那么我们记作

$$\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_{n-1}$$

表示由满足以下条件的 n 元组 $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ 组成的类：每个 c_i 都是满足性质 P_i 的集合。请注意，当我们的类是集合时，此定义与定义 1.5 一致。

(4) 如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是分别由性质 P_A, P_B 定义的类，那么我们称 $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是类函数，意指 f 是 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 的子类，并且对所有 $a \in \mathcal{A}$，都存在唯一的 $b \in \mathcal{B}$，使得 $(a, b) \in f$。如果 $a \in \mathcal{A}$，那么我们记作 $(a)f$，表示使 $(a, b) \in f$ 成立的唯一 $b \in \mathcal{B}$。请注意，这与定义 1.3 一致。

定义 2.2（范畴与函子，预备知识：2.1）。
我们称 $\mathcal{C}$ 是一个**范畴**，意指 $\mathcal{C}$ 是一个有序组 $(\mathcal{O}_\mathcal{C}, \mathcal{M}_\mathcal{C}, s_\mathcal{C}, t_\mathcal{C}, \circ_\mathcal{C})$，其中

(1) $\mathcal{O}_\mathcal{C}$ 是一个类（称为该范畴的对象）。(2) $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ 是一个类（称为该范畴的态射）。(3) $s_\mathcal{C}$：$\mathcal{M}_\mathcal{C} \to \mathcal{O}_\mathcal{C}$ 和 $t_\mathcal{C} : \mathcal{M}_\mathcal{C} \to \mathcal{O}_\mathcal{C}$ 是类函数（分别将态射映射到源和目标）。(4) $\mathsf{Comp}_\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{M}_\mathcal{C} \times \mathcal{M}_\mathcal{C}$ 的子类，由满足 $(m_0)t_\mathcal{C} = (m_1)s_\mathcal{C}$ 的那些 (m_0, m_1) 组成（称为可复合 有序对）。(5) $\circ_\mathcal{C}$：$\mathsf{Comp}_\mathcal{C} \to \mathcal{M}_\mathcal{C}$ 是一个类函数（称为复合），使得若 $(a, b), (b, c) \in \mathsf{Comp}_\mathcal{C}$，则

$$((a,b)\circ_\mathcal{C})s_\mathcal{C} = (a)s_\mathcal{C}, \quad ((a,b)\circ_\mathcal{C})t_\mathcal{C} = (b)t_\mathcal{C}, \quad ((a,b)\circ_\mathcal{C}, c)\circ_\mathcal{C} = (a,(b,c)\circ_\mathcal{C})\circ_\mathcal{C}.$$

(6) 对所有 $O \in \mathcal{O}_\mathcal{C}$，存在唯一的 $1_O \in \mathcal{M}_\mathcal{C}$ 使得 $(1_O)s_\mathcal{C} = (1_O)t_\mathcal{C} = O$，并且若 $(1_O, m_0)$，$(m_1, 1_O) \in \mathsf{Comp}_\mathcal{C}$，则

$$(1_O, m_0)\circ_\mathcal{C} = m_0 \quad \text{and} \quad (m_1, 1_O)\circ_\mathcal{C} = m_1.$$

若 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，且 A，B 是 $\mathcal{C}$ 的对象，则称 A，B 在 $\mathcal{C}$ 中同构，如果存在 $\mathcal{C}$ 中的态射 f_A，f_B，使得

$$(f_A, f_B)\circ_\mathcal{C} = 1_A \quad \text{and} \quad (f_B, f_A)\circ_\mathcal{C} = 1_B.$$

若 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 是范畴，则记作 $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个函子，意指 f 是一个元组 $(f_\mathcal{O}, f_\mathcal{M})$，其中

(1) $f_\mathcal{O} : \mathcal{O}_\mathcal{A} \to \mathcal{O}_\mathcal{B}$ 是一个类函数。(2) $f_\mathcal{M}$：$\mathcal{M}_\mathcal{A} \to \mathcal{M}_\mathcal{B}$ 是一个类函数。(3) 对所有 a，$b \in \mathsf{Comp}_\mathcal{C}$ 以及 $O \in \mathcal{O}_C$，都有

$$(1_O)f_\mathcal{M} = 1_{(O)f_\mathcal{O}}, \quad ((a)t_\mathcal{A})f_\mathcal{O} = ((a)f_\mathcal{M})t_\mathcal{B}, \quad ((b)s_\mathcal{A})f_\mathcal{O} = ((b)f_\mathcal{M})s_\mathcal{B}$$

$$((a,b)\circ_\mathcal{A})f_\mathcal{M} = ((a)f_\mathcal{M}, (b)f_\mathcal{M})\circ_\mathcal{B}.$$

若一个范畴是由集合构成的元组，则称它为小范畴；若不是，则称它为大范畴。

以下定义中使用记号 π_i，是因为在集合与函数范畴（见例 2.4）中，自然投影映射恰好就是定义 1.5 中的这些映射。虽然这些并非唯一的积或投影映射，但本文讨论的所有具体例子（本质上）都属于这一类型。例如，在定义 11.14 中，投影甚至不是函数，而是由通常的投影映射组成的三元组。

定义 2.3（范畴积，预备知识：1.1、2.2）。
如果 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，I 是一个集合，且 $(O_i)_{i\in I}$ 是 $\mathcal{C}$的对象，那么 $(O_i)_{i\in I}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的一个积 是一个有序对 $(P, (\pi_i)_{i\in I})$，满足

(1) P 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象（称为积对象）。(2) 对每个 $i \in I$，π_i 是 $\mathcal{C}$ 的一个态射，其源为 P，目标为 O_i（称为投影态射）。(3) 如果 B 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象，且 $(f_i)_{i\in I}$ 是 C 的态射，并且 $f_i : B \to O_i$，那么存在唯一的态射 $\langle (f_i)_{i\in I}\rangle_P\colon B \to P$，属于 $\mathcal{C}$，使得

$$(\langle (f_i)_{i\in I}\rangle_P, \pi_i)\circ_\mathcal{C} = f_i$$

对于所有 $i \in I$。

上述第三个条件中描述的态射不仅取决于积对象 P，还取决于投影态射的选择。不过，在本文档中，我们不会将同一个对象以多种方式视为积，因此这种记法始终是明确的。

我们通常关注 I 是某个 $n \in \mathbb{N}$ 的情形。在这种情况下，我们通常写作 $\langle f_0,\ f_1,\ \ldots\ldots,\ f_{n-1}\rangle_P$，而不是 $\langle (f_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\rangle_P$.

例 2.4（重要范畴，预备知识：1.5、2.2、2.3）。

范畴最显著的例子是集合与函数范畴。所有集合都是该范畴的对象，而态射是形如 $(A,\ f,\ B)$ 的元组，其中 $f\colon A \to B$ 是一个函数。$(A,\ f,\ B)$ 的源和目标分别是 A，B，而 $(A,\ f,\ B)$，$(B,\ g,\ C)$ 的复合是 $(A,\ fg,\ C)$。我们不能直接将函数用作该范畴的态射，因为无法从函数本身推断其目标；不过，为了避免繁琐的记号，我们有时会不严格地使用术语，将函数视为态射。不出所料，该范畴对任意集合族都有积，而且这些积恰如定义 1.5 所述。

“范畴与函子的范畴”也是一个自然的候选，但这并不能构成一个范畴，因为大范畴不能作为类的元素。不过，小范畴与函子确实可以按自然的方式构成一个范畴。

3. Topology

本节主要介绍本文中将会用到的拓扑术语与事实。波兰空间（3.25）尤其值得关注，而贝尔范畴（3.28）在研究这些空间时扮演着重要角色。

在我们对拓扑的讨论中，有时会把空间的拓扑本身视为一个对象来研究。例如，在 Rubin 构造（5.47）中，给定拓扑上的偏序至关重要；而在第3部分中，我们经常比较同一集合上的多个拓扑。

定义 3.1（拓扑空间，预备知识：1.2、1.8、1.9）。

一个拓扑空间 是一个有序对 $(X, \mathcal{T})$，其中 X 是一个集合，且 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 满足：

(1) 如果 $F \subseteq \mathcal{T}$ 是有限的，那么 $\bigcap F \in \mathcal{T}$。(2) 如果 $S \subseteq \mathcal{T}$，那么 $\bigcup S \in \mathcal{T}$。(3) $\varnothing$ 和 X 都是 $\mathcal{T}$ 的元素。

在这种情况下，我们称 $\mathcal{T}$ 为 X 上的拓扑。回想一下，我们允许空并／空交（定义 1.8），因此上面的第三个条件严格来说是多余的。方便时，我们通常会将有序对 $(X,\ \mathcal{T})$ 与集合 X 等同起来，尤其是在使用符号 $\in,\ \subseteq$ 等时。我们将 $\mathcal{T}$ 的元素称为开集，并将补集属于 $\mathcal{T}$ 的集合称为闭集。如果一个集合既开又闭，那么我们称它为既开又闭。

定义 3.2（子空间，预备知识：3.1）。

如果 $(X,\ \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间，且 $A \subseteq X$，那么我们将把 A 视为一个拓扑空间，其拓扑为

$$\mathcal{T}\restriction_A := \left\{ U \cap A \;\middle|\; U \in \mathcal{T} \right\}.$$

这称为 A 上的子空间拓扑。

定义 3.3（连续映射与同胚，预备知识：1.6、2.2、2.4、3.1）。若 X 和 Y 是拓扑空间，则称函数 $f\colon X \to Y$ 为连续映射，如果每当

$U \subseteq Y$是开集时，$(U)f^{-1}$也是开集。若 f是双射且 f^{-1}也连续，则称 f为同胚（此时称 X 和 Y 同胚）。

验证拓扑空间与连续映射构成一个范畴 (2.2)，而同胚就是这个范畴中的同构，是例行的。

定义 3.4（闭包与内部，预备知识：3.1）。
若 X 是一个拓扑空间且 $S \subseteq X$，则定义

$$S^- := \bigcap \left\{ F \subseteq X \;\middle|\; F \text{ is closed and } F \supseteq S \right\}, \quad S^\circ := \bigcup \left\{ U \subseteq X \;\middle|\; U \text{ is open and } U \subseteq S \right\}.$$

它们分别称为 S 的闭包与内部。注意，集合的闭包总是闭集，而集合的内部总是开集。我们常将这些记号与补集的记号 (1.9) 横向并列地写在同一个上标中，表示依次进行这些操作。例如，$S^{-c}(= S^{c\circ})$ 表示集合 S 的闭包的补集。

定义 3.5（邻域，预备知识：3.4）。
若 X 是一个拓扑空间，$S \subseteq X$ 且 $x \in X$，则称 S 是 x的一个邻域（常写作邻域），如果 $x \in S^\circ$。我们用 $\mathrm{Nbhds}_X(x)$ 表示 x的所有邻域构成的集合。注意，集合 S是开集，当且仅当 S 是其每个元素的邻域。

拓扑空间中一点的邻域集合 (3.5) 构成一个滤子 (1.11)。我们稍后会看到，正是这些滤子使 Rubin 构造 (5.47) 能够构造出 Rubin 空间的元素。

定义 3.6（离散拓扑与平凡拓扑，预备知识：3.1）。
若 X 是一个集合，则 X 上的离散拓扑是 $\mathcal{P}(X)$，而 X 上的平凡拓扑是 $\{\varnothing, X\}$。赋予离散拓扑的拓扑空间称为离散空间。

定义 3.7（子基，预备知识：3.1、3.6）。
设 X 是一个集合，B 是 X 的子集族，且 $\mathcal{T}$ 是 X 上包含 B 的最小拓扑（该拓扑总是存在，因为 B 包含于 X 上的离散拓扑中）。此时，我们称 B 是 $\mathcal{T}$ 的子基，或者称 $\mathcal{T}$ 是由 生成的拓扑。

定义 3.8（基，预备知识：3.7）。
设 X 是一个集合，B 是 X 的子集族，且 $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup S \;\middle|\; S \subseteq B \right\}$ 是一个拓扑。在这种情况下，我们称 B 是 $\mathcal{T}$ 的一个基。特别地，拓扑的任何基都是该拓扑的子基。此外，如果 S 是 X 上拓扑 $\mathcal{T}$ 的一个子基，那么 $\left\{ \bigcap F \;\middle|\; F \subseteq S \text{ 的有限} \right\}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个基。**定义 3.9**（第二可数，预备知识：1.7、3.8）。

如果一个拓扑/拓扑空间具有可数基，我们就称该拓扑/拓扑空间是第二可数的。**定义 3.10**（孤立点，预备知识：3.1）。
如果 X 是一个拓扑空间，且 $x \in X$，那么我们称 x 是 X 的一个孤立点，如果 $\{x\}$ 是开集。

定义 3.11（积拓扑，预备知识：1.5、2.3、3.3、3.7）。
如果 $(X_i)_{i \in I}$ 是拓扑空间，那么我们将 $\prod_{i \in I} X_i$ 视为一个拓扑空间，其拓扑由形如 $(U)\pi_i^{-1}$ 的集合生成，其中 U 在 X_i中是开集。我们称这个拓扑为逐点拓扑 或积拓扑。

注意（相对于积拓扑而言），所有投影映射都是连续的，并且将开集映射为开集。容易验证，这种构造给出了拓扑空间与连续函数范畴中的一个范畴积（见定义 2.3）。

正如我们稍后将看到的，上述积对于构造连续映射非常有用。它们对于证明看起来很好的映射确实连续也非常有用，因为我们通常可以通过将这些映射构造为形如 $\langle f, g\rangle_P$ （见定义 2.3）的映射的复合来证明它们连续，其中 f, g 和 P 取适当的值。

定义 3.12（并拓扑，预备知识：3.2）。
若 $(X_i)_{i\in I}$ 是互不相交的拓扑空间，则我们将 $\bigcup_{i\in I} X_i$ 视为一个拓扑空间，其拓扑为

$$\left\{ U \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i \;\middle|\; U \cap X_i \text{ is open in } X_i \text{ for all } i \in I \right\}.$$

我们称此拓扑为不交并拓扑。

不难验证，这是一个拓扑；并且对所有 $i \in I$， X_i 上的原拓扑与 $X_i \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$上的子空间拓扑一致。

定义 3.13（零维，预备知识：3.7）。
如果一个拓扑空间 X 有一个由既开又闭集构成的子基，我们就称它是零维 的。

定义 3.14（豪斯多夫，预备知识：1.6、3.5、3.11、3.18）。
如果拓扑空间 X 满足以下等价条件之一（见注 3.18），则称其为豪斯多夫空间：

（1）若 x， $y \in X$ 与 $x \neq y$，则存在互不相交的邻域 U_x， U_y，分别属于 x 和 y。（2） X 的对角线 id_X （回顾定义 1.6）是 $X \times X$的闭子集。

定义 3.15（弗雷歇，预备知识：3.1）。
我们称 若对所有 $x \in X$，集合 $\{x\}$ 都是 X的闭子集，则称拓扑空间 X 为弗 ´雷歇空间。

弗雷歇空间的概念是豪斯多夫空间概念的一种弱化形式，尤其有用，因为它为我们提供了关于哪些集合相对于我们的拓扑必定是开集或闭集的具体例子。特别是在第3部分中，我们将经常利用这样一个观察：弗雷歇空间的每个有限子空间都是离散的。

定义 3.16（紧致，预备知识：1.2、1.11、3.1、3.5、3.18）。
如果以下任一等价条件（见注 3.18）成立，我们就称拓扑空间 X 是紧致的：

（1）如果 S 是 X 的开子集的一个集族，且满足 $\bigcup S = X$，那么存在一个有限的 $F \subseteq S$，使得$\bigcup F = X$。（2）如果 S 是 X 的闭子集的一个集族，并且对所有有限的 $F \subseteq S$都有 $\bigcap F \neq \varnothing$，那么 $\bigcap S \neq \varnothing$。（3）如果 F是 $(\mathcal{P}(X)\ \subseteq)$上的一个真滤子，那么存在 $(\mathcal{P}(X)\ \subseteq)$上的一个真滤子 F'，且存在 $x \in X$，使得 $\mathrm{Nbhds}_X(x) \cup F \subseteq F'$。

定义 3.17（局部紧，预备知识：3.2、3.16）。
我们称拓扑空间 X 是局部紧的，如果 X 的每个元素都有一个紧邻域。

注 3.18（关于紧致性与豪斯多夫性的事实，预备知识：1.11、3.3、3.11、3.14、3.16）。

关于紧致性与豪斯多夫性的以下事实广为人知，我们在全文中会频繁用到它们。

(1) 定义 3.16 中给出的三种紧致性定义是等价的。

(2) 定义 3.14 中给出的两种豪斯多夫性定义是等价的。(3) 如果 $\phi : X \to Y$ 是紧豪斯多夫空间之间的连续双射，那么 ϕ^{-1} 也是连续的。(4) 闭子空间是紧空间即为紧空间。(5) 紧空间的连续像是紧的。(6) 豪斯多夫空间的紧子空间是闭集。(7) 豪斯多夫空间的任意乘积都是豪斯多夫空间。(8) 紧空间的任意乘积都是紧的（蒂赫诺夫定理）。(9) 如果 X 是紧豪斯多夫空间且 $x \in X$，那么 x 的每个邻域都包含一个 x的紧邻域。(10) 如果 X 是紧拓扑空间且 $\mathcal{F}$ 是 X上的超滤子（定义 1.11），那么存在 $x \in X$ 使得 $_X(x)$ 的邻域 $\subseteq \mathcal{F}$。

证明。(1)：关于 (1) $\iff$ (2)，参见 [26] 中的定理 26.9。(2) 与 (3) 等价，是因为注意到滤子 $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是真滤子，当且仅当 $\varnothing \notin F$；因此，邻域$_X(x)$ 包含于某个真滤子中，当且仅当 $x \in \bigcap_{S \in F} S^-$。

(2)：注意，x，$y \in X$ 与 $x \neq y$，那么 U_x，U_y 分别是 x，y 的邻域，当且仅当 $U_x \times U_y$ 是 (x, y) 的邻域。此外，U_x，U_y 不相交，当且仅当 $U_x \times U_y$ 与 id_X 不相交。

(3)：参见 [26] 中的定理 26.6。

(4)：参见 [26] 中的定理 26.2。

(5)：参见 [26] 的定理 26.5。

(6)：参见 [26] 的定理 26.3。

(7)：设 $(X_i)_{i \in I}$ 为豪斯多夫拓扑空间。若 x，$y \in \prod_{i \in I} X_i$，且 $i \in I$ 满足 $(x)\pi_i \neq (y)\pi_i$，则存在互不相交的邻域 U_x、U_y，分别是 $(x)\pi_i$，$(y)\pi_i$ 的邻域（在 X_i 中）。于是，集合 $(U_x)\pi_i^{-1}$ 和 $(U_y)\pi_i^{-1}$ 就是 x 和 y 所需的邻域。

(8)：参见 [26] 的定理 37.3。(9)：参见 [26] 的定理 26.4。(10)：这直接由定义 3.16 中紧致性的第三种定义得出。

□

定义 3.19（康托空间，预备知识：3.11、3.6）。
我们将具有积拓扑（其中 $\{0, 1\}$ 取离散拓扑）的集合 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 定义为康托空间 $2^{\mathbb{N}}$。

定理 3.20（布劳威尔定理，预备知识：3.3、3.9、3.10、3.13、3.14、3.16、3.19）。任何没有孤立点的第二可数、零维、豪斯多夫紧拓扑空间，都同胚于 $\varnothing$ 或 $2^{\mathbb{N}}$。

布劳威尔定理有许多已知的证明，例如参见 [21] 的定理 7.4。

定义 3.21（度量空间，预备知识：1.1、1.5）。
若 (X, d) 是一个有序对，其中 d：$X \times X \to [0, \infty)$ 是满足以下条件的函数，对所有 x，y，$z \in X$：

(1) $(x, y)d = 0 \iff x = y$。
(2) $(x, y)d = (y, x)d$。(3) $(x, z)d \leq (x, y)d + (y, z)d$。

那么我们称 (X,d) 为度量空间，并称 d 为定义在 X 上的度量。

定义 3.22（度量空间的拓扑，预备知识：3.7、3.21）。

若 (X,d) 是度量空间，则定义由 d 诱导的拓扑为由以下形式的集合生成的拓扑 $\mathcal{T}$

$$B_d(x,r) := \left\{ y \in Y \;\middle|\; (x,y)d < r \right\}$$

对所有 $(x,r) \in X \times \mathbb{R}$。此时我们称 $\mathcal{T}$与 d相容。除非另有说明，我们总是假设度量空间配备了这一拓扑。若一个拓扑空间与某个度量相容，则称其为可度量化的。

定义 3.23（序列收敛，预备知识：3.5、3.22）。

若 X 是拓扑空间，且 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X中的点序列，则称 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 收敛到极限 $x \in X$ （记作 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \to x$），如果：

(1) For all $N \in \mathrm{Nbhds}_X(x)$, the set $\left\{ i \in \mathbb{N} \;\middle|\; x_i \notin N \right\}$ is finite.

这一概念在可度量化空间中特别有用，因为在这些空间中，函数连续当且仅当它保持序列的极限。

定义 3.24（完备度量，预备知识：3.23，3.22）。

设 (X,d) 是一个度量空间。若序列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 属于 X 并满足以下条件，则称其为柯西序列：

(1) 对所有 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n,m \geq N$，都有 $(x_n,x_m)d \leq \varepsilon$。

若 (X,d) 中的所有柯西序列都收敛，则称 d 是完备的。

定义 3.25（波兰空间，预备知识：3.9，3.24）。

若一个拓扑空间 X 是波兰的，则它是第二可数的，并且存在一个定义其拓扑的完备度量。

请注意，一般而言，若 X 是波兰空间，并不意味着所有与 X相容的度量都是完备的。例如，开单位区间上的标准度量并不完备，但它与 $\mathbb{R}$同胚，而 $\mathbb{R}$相对于标准度量是完备的。

定义 3.26（稠密性，预备知识：3.4）。

设 X 是一个拓扑空间，且 A，$B \subseteq X$。若 $B \subseteq A^{-}$，我们称 A 在 B 中稠密。

若 A 在 X 的某个非空开子集中稠密（等价地，若 $A^{-\circ} \neq \varnothing$），我们称 A （在 X中）处处稠密。若 $A^{-c} = A^{c\circ}$ 在 X中稠密，我们称 A （在 X中）无处稠密（等价地， A 在 X中非处处稠密）。

定义 3.27（瘦性，预备知识：1.7、3.26）。

若 X 是一个拓扑空间，且 $A \subseteq X$，那么如果 A 是无处稠密集合的可数并（或者等价地，如果 A 与稠密开集的可数交不相交），我们称 A 在 X 中是 瘦 的。

如果 A^c 在 X 中是瘦的（或者等价地，如果 A 包含稠密开集的可数交），我们称 A 是 余瘦 的。

定理 3.28（贝尔范畴定理，预备知识：3.22、3.24、3.27）。

若 X 是一个与某个完备度量相容的拓扑空间，那么 X 的所有余瘦子集在 X 中都是稠密的。

贝尔范畴定理有许多已知的证明，例如参见 [21] 中的定理 8.4。

定义 3.29 (几乎包含，预备知识：1.10、3.27)。
如果 X 是一个拓扑空间，那么我们在 X 的子集上定义预序 $\lesssim_X$，如下：

$$A \lesssim_X B \iff \text{存在一个在 } X \text{ 中余瘦的 } C, \text{ 使得 } A \cap C \subseteq B \cap C.$$

如果 $A \lesssim_X B \lesssim_X A$，我们也称 $A \approx_X B$。由于以下观察，这个记号尤其有用：

$$\begin{aligned} A \approx_X B &\iff \text{there is } C \text{ comeagre in } X \text{ with } C \cap A = C \cap B, \\ A \approx_X \varnothing &\iff A \text{ is meagre in } X, \\ A \approx_X X &\iff A \text{ is comeagre in } X. \end{aligned}$$

注 3.30 （子空间中的瘦性，预备知识：3.2、3.29）。
如果 X 是一个拓扑空间，且 $A \subseteq B$ 是 X 的子空间，那么 $A \approx_B \varnothing$ 蕴含 $A \approx_X \varnothing$ （反过来并非总是成立）。

我们以证明库拉托夫斯基–乌拉姆定理结束本节；在证明所有从具有丰富泛型的群到第二可数群的同态都是连续的（定理 5.38）时，我们将用到这个定理。

库拉托夫斯基–乌拉姆定理的逆命题对于几乎开（定义 4.21）的集合也成立。不过，我们只给出所需的结果版本。更多信息请参见例如 [21]的定理 8.41。

定理 3.31 （库拉托夫斯基–乌拉姆，预备知识：3.9、3.11、3.29）。
设 X, Y 是第二可数拓扑空间，且 $C \approx_{X\times Y} X \times Y$。那么

$$X \approx_X \left\{ x \in X \;\middle|\; (\{x\} \times Y) \approx_{(\{x\}\times Y)} (\{x\} \times Y) \cap C \right\}.$$

证明。设 $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 Y 的一个可数基。设 $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $X \times Y$ 的稠密开子集序列，使得

$$C \supseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i.$$

对所有 $i, j \in \mathbb{N}$，令 $D_{i,j} := (U_i \cap (X \times B_j))\pi_0$。由于 π_0 将开集映射为开集，因此集合 $D_{i,j}$ 都是开集。此外，由于 π_0 是连续满射，且每个集合 $U_i \cap (X \times B_j)$ 在 $X \times B_j$ 中稠密，因此集合 $D_{i,j}$ 在 X 中稠密。所以对于所有 $i, j \in \mathbb{N}$，都有 $D_{i,j} \approx_X X$，从而

$$\bigcap_{i,j\in\mathbb{N}} D_{i,j} \approx_X X.$$

每当 $x \in D_{i,\,j}$ 便有 $U_i \cap (X \times B_j) \cap (\{x\} \times Y) \neq \varnothing$。因此，若 $x \in \bigcap_{i,\,j\in\mathbb{N}} D_{i,\,j}$ 那么 $U_i \cap (\{x\} \times Y)$ 在 $\{x\} \times Y$ 中对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都是开且稠密的。结论得证。□

4. Structures

本节将介绍我们所研究的结构的模型论观点。这使我们能够讨论拓扑结构，并在更一般的背景下定义记号。这会很有用，因为尽管我们主要关注群与半群，但偶尔也需要使用其他类型的结构。

定义 4.1 （签名，预备知识：1.1，1.5）。
一个签名 是一个三元组 $\sigma = (F_\sigma,\ R_\sigma,\ \mathrm{ar}_\sigma)$，其中

(1) F_σ 是一个集合（其元素称为函数符号或运算符号）.

(2) R_σ 是一个集合（其元素称为关系符号），且与 F_σ 不相交。(3) ar_σ：$F_\sigma \cup R_\sigma \to \mathbb{N}$ 是一个函数（为每个符号指定一个元数）。

定义 4.2（结构，预备知识：4.1）。

如果 σ 是一个签名，那么我们称 $\mathbb{M} = (M, \sigma, I)$ 为一个 σ-结构，如果

(1) M 是一个集合（称为 $\mathbb{M}$的全集）。(2) I：$F_\sigma \cup R_\sigma \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(M^{M^n} \cup \mathcal{P}(M^n)\right)$ 满足

$$(F)I \in M^{M^n} \iff (F \in F_\sigma \text{ and } (F)\,\mathrm{ar}_\sigma = n) \text{ and}$$
$$(R)I \in \mathcal{P}(M^n) \iff (R \in R_\sigma \text{ and } (R)\,\mathrm{ar}_\sigma = n).$$

其含义是，I 将 F_σ 的每个元素解释为一个运算，并将 R_σ 的每个元素解释为一个关系。如果 $S \in F_\sigma \cup R_\sigma$，那么我们将使用记号 $S^{\mathbb{M}}$ 表示 $(S)I$。为简化记号，我们通常将结构 $\mathbb{M}$ 视为等同于其全集 M。如果一个 σ-结构满足$R_\sigma = \varnothing$，则称其为代数的。

定义 4.3（同态，预备知识：1.6、2.2、2.3、4.2）。

如果 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 是 σ-结构，且 $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是一个函数，那么如果对于所有 $F \in F_\sigma$ 和 $R \in R_\sigma$ 都有下式成立，我们称 f 为一个同态：

$$F^{\mathbb{X}} \circ f = \boldsymbol{f}_{(F)\,\mathrm{ar}_\sigma} \circ F^{\mathbb{Y}} \quad \text{and} \quad (R^{\mathbb{X}})\boldsymbol{f}_{(R)\,\mathrm{ar}_\sigma} \subseteq R^{\mathbb{Y}}$$

其中 $\boldsymbol{f}_n := \langle (\pi_i f)_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}} \rangle_{X^n}$（回顾定义 2.3）。如果一个同态是单射，并且上述包含关系可以加强为（$R^{\mathbb{X}}$）$\boldsymbol{f}_{(R)\text{ 当且仅当 }\sigma} = R^{\mathbb{Y}} \cap (\mathrm{img}(f)^n)$，则称其为嵌入。

如果一个同态是满射嵌入，则称其为同构。如果结构 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$之间存在同构，则称它们同构（记作 $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$）。

容易验证，对于签名 σ，σ-结构与同态构成一个范畴（2.2），并且定义 2.2 和 4.3 中的同构概念一致。

定义 4.4（半群签名，预备知识：4.1）。

我们将 σ_S 定义为签名（$\{*\}$，$\varnothing$，$\{(*, 2)\}$），其中 $*$ 是某个固定符号。$*$ 的选择并不十分重要，不过，例如可以将 $*$ 定义为 $=$（19，20，01，18）。

定义 4.5（半群与幺半群，预备知识：4.4）。

若对所有 $a, b, c \in S$，都有 $((a, b)*^S, c)*^S = (a, (b, c)*^S)*^S$，则称 σ_S-结构 S 是一个半群。若 S 是半群，且 $a, b \in S$，那么我们通常将 ab 作为（a，b）$*^S$ 的缩写。

若 S 是一个半群且 $s \in S$，则我们定义映射 $\rho_s : S \to S$ 与 $\lambda_s : S \to S$，使得 $(t)\rho_s = ts$，且 $(t)\lambda_s = st$ 对所有 $t \in S$成立。这些映射取决于半群 S；不过，使用时应根据上下文推断所指的半群。

若 S 是一个半群，且存在元素 $e \in S$，使得对所有 $a \in S$都有 $ea = ae = a$，则称 S 为一个幺半群，并称 e 是 S的单位元。容易验证，若 M 是幺半群，则它有唯一的单位元，我们用 1_M表示该元素。

定义 4.6（逆半群签名，预备知识：4.4）。

我们将 σ_I 定义为签名 $(\{*, \iota\}, \varnothing, \{(*, 2), (\iota, 1)\})$（扩展签名 σ_S），其中 ι 是一个固定符号。符号 ι 的实际取值并不十分重要，不过例如可以定义 $\iota :=$ (09，14，22，05，18，19，05)。

定义 4.7（逆半群，预备知识：4.6）。
我们称 σ_I-结构 $\mathbb{S}=(S,\ \sigma_I,\ I)$ 为逆半群，如果 $(S,\ \sigma_S,\ I\restriction_{\{*\}})$ 是半群，且对所有 $a,\ b\in\mathbb{S}$，都有

$$((a)\iota^{\mathbb{S}})\iota^{\mathbb{S}}=a,\quad a\ (a)\iota^{\mathbb{S}}\ a=a,\quad a\ (a)\iota^{\mathbb{S}}\ b\ (b)\iota^{\mathbb{S}}=b\ (b)\iota^{\mathbb{S}}\ a\ (a)\iota^{\mathbb{S}}.$$

若 $\mathbb{S}$ 是 若 $a\in\mathbb{S}$是逆半群且 $a\in\mathbb{S}$，那么为简洁起见，我们通常将 $(a)\iota^{\mathbb{S}}$ 记为 a^{-1}。
定义 4.8（单位元，预备知识：4.2、4.5、4.9）。
若 S 是半群且 $g\in S$，那么如果存在元素 $g^{-1}\in S$（称为 g 的逆关系），使得对所有 $s\in S$ 都有 $g^{-1}gs=s=sgg^{-1}$，我们就称 g 为单位元。容易验证，任意单位元的逆元都是唯一的。

定义 4.9（群，预备知识：4.7、4.8）。
容易验证，若 S 是半群，则 S 的单位元集合 $\mathcal{U}(S)$ 是 S 的子结构。我们将 $\mathcal{U}(S)$ 视为逆半群，其附加的一元运算是将元素映射到其逆元的映射。

我们将 S 的逆半群 $\mathcal{U}(S)$ 称为其单位群，并称一个逆半群为群，如果它是某个半群的单位群。注意，如果 G 是群且 $g\in G$，那么 gg^{-1} 是 G 的单位元。

需要注意的是（按照本节中的定义），我们并不认为群或逆半群与去掉其逆运算后得到的半群是同一个对象。在开始讨论拓扑群和拓扑逆半群时，牢记这一区别将十分重要。

4.1. **拓扑结构**。
D定义 4.10（拓扑结构，预备知识：2.2、3.11、4.2、4.3、4. $9)$.
拓扑 σ-结构 $\mathbb{S}$ 是一个有序对 $(S,\mathcal{T}_{\mathbb{S}})$，其中

(1) S 是一个 σ-结构。(2) $\mathcal{T}_{\mathbb{S}}$ 是 S上的一个拓扑。(3) 对所有 $F\in F_\sigma$，函数 $F^{\mathbb{S}}$ 关于 $\mathcal{T}_{\mathbb{S}}$ 及相应的积拓扑是连续的。(4) 对所有 $R\in R_\sigma$，集合 $R^{\mathbb{S}}$ 关于 $\mathcal{T}_{\mathbb{S}}$ 及相应的积拓扑是闭的。

在这种情况下，我们称 $\mathcal{T}_{\mathbb{S}}$ 与 S 相容。对于拓扑结构，我们将根据需要忽略对象的拓扑或结构部分，并采用既定的结构术语和拓扑术语。例如，拓扑群是其底层结构为群的拓扑结构；如果一个拓扑结构所关联的拓扑是离散的，我们就称它是离散的。

有时我们会把拓扑空间视为无符号签名下的拓扑结构，并把没有拓扑的结构视为离散结构。

如果 $f:\mathbb{S}\to\mathbb{T}$ 是拓扑结构之间的函数，同时既是空间的同胚又是结构的同构，那么我们称 f 为一个拓扑同构。

拓扑结构与连续同态构成一个范畴（2.2），这本质上是通常的结构范畴与拓扑空间范畴的交集。

定义 4.11（子结构，预备知识：4.10）。
如果 $\mathbb{S}$ 是一个拓扑 σ-结构，且 $\mathbb{M} \subseteq S$ 在运算 $\{F^{\mathbb{S}} : F \in F_\sigma\}$ 下封闭，那么我们称 $\mathbb{M}$ 为 $\mathbb{S}$ 的一个拓扑 子结构，并通过以自然的方式限制运算、关系和拓扑，将 $\mathbb{M}$ 视为签名 σ 下的一个拓扑结构。

应当验证，这样的对象总是满足拓扑结构所要求的条件。其依据是以下观察：如果 X 是一个拓扑空间，$A \subseteq X$ 与 V 是集合，那么无论我们将 A^V 视为 X 的幂的子空间，还是视为 X 的子空间的幂，其上的拓扑都相同。

下面这个拓扑结构的例子尤其重要，因为第3部分中讨论的许多拓扑半群都是它的拓扑子结构。

例 4.12（二元关系幺半群是拓扑的，预备知识：1.6、3.5、3.7、4.5、4.10）。

如果 X 是一个集合，那么我们定义 $\mathcal{B}_X$ 为从 X 到 X 的二元关系幺半群，并以复合作为二元运算（回忆定义 1.6）。我们定义 $\mathcal{TB}_X$ 为由以下形式的集合生成的拓扑 X：

$$U_{x,y} := \left\{ b \in \mathcal{B}_X \;\middle|\; (x,y) \in b \right\}$$

对所有 $x, y \in X$。根据这些定义，$(\mathcal{B}_X, \mathcal{TB}_X)$ 是一个拓扑半群，而且映射$b \mapsto b^{-1}$ 是连续的。

证明。 任取 $x, y \in X$。我们首先需要证明集合

$$V := \left\{ (a,b) \in \mathcal{B}_X \;\middle|\; ab \in U_{x,y} \right\}$$

是开集。任取 $(a,b) \in V$，要得出 V 是开的，只需证明 V 是 (a,b) 的一个邻域。

由于 $ab \in U_{x,y}$，我们有 $(x,y) \in ab$。因此，根据 ab 的定义，存在某个 $z \in X$，使得 $(x,z) \in a$ 且 $(z,y) \in b$。因此 $(a,b) \in U_{x,z} \times U_{z,y}$。根据二元关系的复合的定义，我们有 $U_{x,z}U_{y,z} \subseteq U_{x,y}$，于是 $U_{x,z} \times U_{y,z} \subseteq V^\circ$。特别地，$V$ 是 (a,b) 的一个邻域。
还需证明映射 $b \mapsto b^{-1}$ 是连续的。对于所有 x，$y \in X$，我们有

$$U_{x,y}^{-1} = \left\{ b^{-1} \in \mathcal{B}_X \;\middle|\; (x,y) \in b \right\} = \left\{ b \in \mathcal{B}_X \;\middle|\; (y,x) \in b \right\} = U_{y,x}.$$

因此 映射 $b \to b^{-1}$ 保持 $\mathcal{TB}_X$ 的子基（作为集合），因此如所需，它是连续的 ed. □

例 4.13（全变换幺半群，预备知识：3.11，4.12 ）.
若 X 是一个集合，则我们将 X 的全变换幺半群定义为集合 X^X，其运算为函数复合。我们还将 X^X 上的逐点拓扑 $\mathcal{PT}_X$ 定义为积拓扑：将每个 X视为带有离散拓扑的空间。特别地，有序对 $(X^X, \mathcal{PT}_X)$ 是 $(\mathcal{B}_X, \mathcal{TB}_X)$ 的一个拓扑子半群（回忆例 4.12），

定义4.14（积结构，预备知识：2.3，3.11，4.10）。
如果 $(\mathbb{S}_i)_{i\in I}$ 是拓扑 σ结构，那么我们将 $\mathbb{P} := \prod_{i\in I}(\mathbb{S}_i)_{i\in I}$ 视为拓扑 σ结构，定义如下：

如果 $f \in F_\sigma$有（f）个 $\mathrm{ar}_\sigma = n$与 $(s_{i,\,0})_{\,i\in I}$，$(s_{i,\,1})_{\,i\in I}$，..... $(s_{i,\,n-1})_{\,i\in I} \in \mathbb{P}$那么

$$((s_{i,0})_{i\in I}, (s_{i,1})_{i\in I}, \ldots, (s_{i,n-1})_{i\in I}) f^{\mathbb{P}} = ((s_{i,0}, s_{i,1}, \ldots, s_{i,n-1}) f^{\mathbb{S}_i})_{i\in I}.$$

如果 $R \in R_\sigma$有（R）个 $\mathrm{ar}_\sigma = n$与 $(s_{i,\ 0})_{\ i\in I}$，　$(s_{i,\ 1})_{\ i\in I}$，..... $(s_{i,\ n-1})_{\ i\in I} \in \mathbb{P}$那么

$$((s_{i,0})_{i\in I}, (s_{i,1})_{i\in I}, \ldots, (s_{i,n-1})_{i\in I}) \in R^{\mathbb{P}} \iff \left((s_{i,0}, s_{i,1}, \ldots, s_{i,n-1}) \in R^{\mathbb{S}_i} \text{ for all } i \in I\right).$$

容易验证，上述构造是拓扑 σ结构与连续同态范畴中的积（回顾定义2.3）。

例4.15（偏序集的积，预备知识：1.10、4.14）。
若 $(X, \leq)$ 是一个偏序集（我们将其视为具有一个二元关系符号的签名中的结构），且 $n \in \mathbb{N}$，则定义4.14中给出的 X^n 上的关系也是一个偏序，其定义如下：

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \iff (x_i \leq y_i \text{ for all } i < n)$$

其中 $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in X$ 均为任意元素。
定义4.16（同余关系与商结构，预备知识：1.6、1.10、4.11、4.14）。若 $\mathbb{S}$ 是一个结构，且 $\sim$ 是 $\mathbb{S}$ 上的等价关系，则称 $\sim$ 是 $\mathbb{S}$ 上的同余关系，如果 $\sim$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的子结构。在这种情况下，我们将集合 $Q := \mathbb{S}/\sim$ 视为一个 σ-结构（称为 $\mathbb{S}$ 关于 $\sim$ 的商），如下所示：

若 $f \in F_\sigma$、$R \in R_\sigma$ 与 $s_0,\ s_1,\ \ldots\ldots,\ s_{n-1} \in \mathbb{S}$，则

$$([s_0]_\sim, [s_1]_\sim, \ldots, [s_{n-1}]_\sim) f^Q = [(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) f^{\mathbb{S}}]_\sim,$$

$$([s_0]_\sim, [s_1]_\sim, \ldots, [s_{n-1}]_\sim) \in R^Q \iff (([s_0]_\sim \times [s_1]_\sim \times \ldots \times [s_{n-1}]_\sim) \cap R^{\mathbb{S}}) \neq \emptyset.$$

这之所以定义良好，恰恰是因为 $\sim$ 是一个同余关系。

举一个重要的例子：注意，若 $\mathbb{S}$，$\mathbb{T}$ 是 σ-结构，且 $f : \mathbb{S} \to \mathbb{T}$ 是一个同态，那么 $\ker(f)$（回顾定义 1.6）是 $\mathbb{S}$ 上的一个同余关系。此外，诱导映射 $f^* : \mathbb{S}/\ker(f) \to \mathbb{T}$ 是一个单射同态。当这个诱导映射 f^* 是一个同构时，我们称 f 为一个商映射。

4.2. **波兰半拓扑群很不错**。本小节展示文献中一项重要结果的证明：与群相容的可比较波兰拓扑必定相等（定理 4.27）。这正是我们关注波兰空间而非其他任何类空间的主要原因。尽管拓扑假设相当强，但在考察群可能具有的拓扑时，这一结果非常有用。正如我们将在第3部分看到的那样，这一结果并不适用于一般的半群，甚至也不适用于逆半群；不过，在这些更一般的代数背景下，它仍然很有用。

定义4.17（半拓扑半群，预备知识：4.5、4.7、4.10、4.12）。我们将一个半拓扑半群 定义为一个有序对 $(S,\ \mathcal{T})$，满足

(1) S 是一个半群。(2) $\mathcal{T}$ 是 S上的一个拓扑。(3) 对所有 $s \in S$，映射 λ_s 与 ρ_s 都是连续的（回顾定义 4.5）。

类似地，我们将半拓扑逆半群定义为有序对 $(I, \mathcal{T})$，使得 $(S, \mathcal{T})$ 是一个半拓扑半群（其中 S 是从 I 中去掉一元运算后得到的半群）。在这些情况下，我们称 $\mathcal{T}$ 与 S 或 I 半相容。

对于每个 $s \in S$，令 $c_{S,s}\colon S \to S$ 为取值为 s 的常值映射。由于

$$\lambda_s = \langle c_{S,s}, \mathrm{id}_S \rangle_{S^2} \circ *^S \quad \text{and} \quad \rho_s = \langle \mathrm{id}_S, c_{S,s} \rangle_{S^2} \circ *^S \quad \text{(recall Definition 2.3)}$$

由此可知，所有与 S 相容的拓扑也都与 S半相容。

引理 4.18、引理 4.19 和推论 4.20 的内容都是众所周知的。不过，这些事实的表述和编排方式往往因作者的需要而异。例如，在 [21], 中，可以将它们作为命题 3.3、定理 3.11、引理 13.2 和引理 13.3 的（部分）内容找到。

引理 4.18（良好的波兰子空间，预备知识：3.2、3.25）。
若 $(X, \mathcal{T})$ 是一个波兰拓扑空间，且 $U \subseteq X$ 是开集或闭集，则拓扑空间 $(U, \mathcal{T}\restriction_U)$是波兰空间。

证明。 首先注意到，第二可数空间的子空间总是第二可数的，因此我们只需证明这些子空间与完备度量相容。设 d 是与 $(X, \mathcal{T})$ 相容的完备度量。先假设 U是闭集。在这种情况下，$(U, d\restriction_{U\times U})$ 中的任意柯西序列都在 X中有极限；由于 U 是闭集，该极限必定是 U 的一个元素。接下来假设 U 是开集。我们定义一个映射 $d'\colon U \to \mathbb{R}$ 如下：

$$(x)d' = \inf\left(\left\{(x,v)d \;\middle|\; v \in X\backslash U\right\}\right).$$

注意到 如果 $\varepsilon > 0$、x，$y \in U$与（x，y）$d \le \varepsilon$，那么 |（x）d' −（y）d'| ≤ ε，因此映射 d'是连续的 us.

由于 $X\backslash U$是闭集，因此 img(d') ⊆ (0，∞)。我们定义一个新的映射 $\delta\colon U \times U \to \mathbb{R}$，如下：

$$(x,y)\delta = (x,y)d + \left|\frac{1}{(x)d'} - \frac{1}{(y)d'}\right|.$$

验证 δ 满足在 U上成为度量的前两个条件是例行的。对于第三个条件，注意如果 x，y，$z \in U$，那么

$$\begin{aligned}(x,z)\delta &= (x,z)d + \left|\frac{1}{(x)d'} - \frac{1}{(z)d'}\right| \\ &\le (x,y)d + (y,z)d + \left|\frac{1}{(x)d'} - \frac{1}{(y)d'}\right| + \left|\frac{1}{(y)d'} - \frac{1}{(z)d'}\right| = (x,y)\delta + (y,z)\delta.\end{aligned}$$

如果（x_i）$_{i\in\mathbb{N}}$ 是 U中的一个序列，那么若（x_i）$_{i\in\mathbb{N}}$ 关于 δ是柯西序列，则（x_i）$_{i\in\mathbb{N}}$ 关于 d 是柯西序列，因此关于 $\mathcal{T}\restriction_U$收敛。类似地，如果（$x_i$）$_{i\in\mathbb{N}}$ 关于 $\mathcal{T}\restriction_U$收敛到 $x \in U$，那么

$$\lim_{i\in\mathbb{N}}(x,x_i)\delta = \lim_{i\in\mathbb{N}}\left((x,x_i)d + \left|\frac{1}{(x)d'} - \frac{1}{(x_i)d'}\right|\right) = 0.$$

因此，度量 δ 是完备的，并且与 $\mathcal{T}\restriction_U$ 相容，正如所要求的。 □

引理 4.19（更多良好的波兰空间，预备知识：2.3、3.11、4.18）。假设（（X_i、$\mathcal{T}_i$））$_{i\in\mathbb{N}}$是波兰拓扑空间，并考虑空间（I、$\mathcal{T}_I$），其中 I是集合 X_i 的交集，而 $\mathcal{T}_I$ 是由所有子空间拓扑 $\mathcal{T}_i\restriction_I$ 在 I 上生成的拓扑。

空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ 也是波兰空间（带有通常的积拓扑）。此外，如果存在豪斯多夫空间 $(X, \mathcal{T})$，使得对于所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $X_i \subseteq X$ 与 $\mathcal{T}\restriction_{X_i} \subseteq \mathcal{T}_i$，那么 $\mathcal{T}_I$ 是波兰空间。

证明。对于每个 $i\in\mathbb{N}$，令 d_i 为与 X_i 相容的度量。于是对于每个 $i\in\mathbb{N}$，令 $d_i'\colon X_i\times X_i\to\mathbb{R}$ 由 $(x,y)d_i'=\min(\{(x,y)d_i,\frac{1}{2^i}\})$ 定义。现在我们在 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 上定义度量 d，如下：

$$(x,y)d=\max_{i\in\mathbb{N}}((x)\pi_i,(y)\pi_i)d_i'.$$

容易验证，这是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 上与积拓扑相容的良定义完备度量。因此，$\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 是波兰空间。考虑子空间

$$D:=\left\{x\in\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i\;\middle|\;\begin{array}{l}(x)\pi_i=(x)\pi_j\\ \text{for all } i,j\in\mathbb{N}\end{array}\right\}=\left\{x\in\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i\;\middle|\;\begin{array}{l}(x)\langle\pi_i,\pi_j\rangle_{X^2}\in\mathrm{id}_X\\ \text{for all } i,j\in\mathbb{N}\end{array}\right\}=\bigcap_{i,j\in\mathbb{N}}(\mathrm{id}_X)\langle\pi_i,\pi_j\rangle_{X^2}^{-1}$$

$\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$。由于 $(X,\mathcal{T})$ 是豪斯多夫空间，空间 D 是波兰空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 的闭子空间。由引理 4.18 可知，D 是波兰空间。根据 D 的定义，$\langle(\mathrm{id}_I)_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i}\colon I\to D$ 是连续双射。由于对于任意选择的 $i\in\mathbb{N}$，π_i 都是此映射的逆关系，因此这是从 I 到一个波兰空间的同胚。结论得证。□

推论 4.20（（更多优良的波兰空间，预备知识：2.3、3.11、4.18）
.
假设$(X,\mathcal{T})$ 是一个 *Polish* 拓扑空间，且$(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的闭子集。在这种情况下，$(X,\mathcal{T})$ 的子空间 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}X\backslash V_i$ 是 *Polish* 的，而由 $\mathcal{T}$ 和所有集合$(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 生成的拓扑也是 *Polish* 的。

证明。由引理 4.18 可知，空间 $X\backslash V_i$ 都是 Polish 的，因此由引理 4.19 可知，它们的交集也是 Polish 的。

任取 $i\in\mathbb{N}$。由引理 4.18 可知，V_i 和 $X\backslash V_i$ 都是 X 的 Polish 子空间。由于由 $\mathcal{T}$ 和 V_i 生成的拓扑 $\mathcal{T}_i$ 等于 V_i 和 $X\backslash V_i$ 的不交并拓扑，因此它是 Polish 的。于是，由引理 4.19 可知，由所有拓扑 $\mathcal{T}_i$ 生成的拓扑也是 Polish 的，证毕。□

定义 4.21（几乎开集，预备知识：3.1、3.29）。
如果 X 是一个拓扑空间且 $S\subseteq X$，那么若存在一个开集 U 使得 $U\approx_X S$（回顾定义 3.29），我们就称 S 是几乎开的。

请注意，先前定义的代数 σ 结构与以下定义中的 σ-代数之间没有关系。

定义 4.22（σ-代数，预备知识：1.2、1.7）。
设 X 是一个集合，且 $\Sigma\subseteq\mathcal{P}(X)$ 满足

(1) 如果 $A\in\Sigma$，那么 $A^c=X\backslash A\in\Sigma$。
(2) 如果 $A\subseteq\Sigma$ 是可数的，那么
$\bigcup A\in\Sigma$。**(3)** 空集是 Σ 的一个元素。

在这种情况下，我们称 Σ 是 X 上的一个 σ-代数。回想一下，我们允许空并（定义 1.8），因此第三个条件严格来说是冗余的。

引理 4.23（参见 [21], 几乎开 σ代数中的命题 8.22，预备知识：4.21、4.22）。若 X 是一个拓扑空间，那么 X 的几乎开子集构成一个 σ-代数。

证明。设 $A\subseteq X$ 几乎开。设 U 是 X 的一个开子集，且 $U\approx_X A$。注意到

$$U^c=U^{c\circ}\cup(U^c\backslash U^{c\circ})=U^{c\circ}\cup(U^c\cap U^{c\circ c})=U^{c\circ}\cup(U^c\cap U^{cc-})=U^{c\circ}\cup(U^c\cap U^-).$$

由于 $U^c \cap U^-$ 是闭的，且 $(U^c \cap U^-)^\circ = U^{c\circ} \cap U^{-\circ} = U^{-c} \cap U^{-\circ} = \varnothing$，因此 $U^c \cap U^- \approx_X \varnothing$。于是 $A^c \approx_X U^c = U^{c\circ} \cup (U^c \cap U^-) \approx_X U^{c\circ}$，所以 A^c 几乎开。

设 A 是一个几乎开集的可数集族。若 A 为空，则 $\bigcup A = \varnothing$ 几乎开；否则，令 $A = \left\{ A_i \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，取开集 U_i，并取余瘦集 C_i，使得 $U_i \cap C_i = A_i \cap C_i$。由此可得

$$\bigcup A \approx_X \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i \right) \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \right) = \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i \right) \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \right) \approx_X \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i.$$

由于 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ 是开集，结论成立。 □

定义 4.24（解析空间，预备知识：3.3、3.25）。
如果拓扑空间 X 是某个波兰空间在连续映射下的像，我们就称它为<style id="2">解析空间 。

引理 4.25（参见 [21]中的定理 7.9， $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 是一个良好的空间，预备知识：1.2、3.3、3.25、4.13、4.19）。
例 *4.13* 中的拓扑空间 $(\mathbb{N}^\mathbb{N}, \mathcal{PT}_\mathbb{N})$ 是 *Polish* 拓扑空间。此外，若 X 是非空的 *Polish* 拓扑空间，则 X 是从 $(\mathbb{N}^\mathbb{N}, \mathcal{PT}_\mathbb{N})$到 X 的连续映射的像。

证明。该 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 是 Polish 的事实，源于 $\mathbb{N}$是 Polish 的事实以及引理 4.19。
令 d 为与 X 相容的完备度量，并令 $B := \left\{ U_i \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$ 为 X 的一个由非空集合构成的可数基。对每个 $i \in \mathbb{N}$，我们选取一个固定的 $d_i \in U_i$。由于 B 是 X的一个基，因此 $D := \left\{ d_i \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$ 在 X 中稠密，所以对所有 $x \in X$，都有点的序列取自 D并收敛到 x。

如果对所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $(x_i, x_{i+1})d \leq \frac{1}{2^i}$，我们就称序列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$属于 X 且为强柯西序列。容易验证，强柯西序列都是柯西序列。

现在我们定义

$$C := \left\{ f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \;\middle|\; (d_{(i)f})_{i\in\mathbb{N}} \text{ is a strongly Cauchy sequence} \right\}.$$

根据强柯西序列的定义可知， C 是 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 的闭子空间。由于强柯西序列是柯西序列，且 d 完备，因此由下式给出的映射 $\phi\colon C \to X$

$$(f)\phi = \lim_{i\to\infty} d_{(i)f}$$

是良定义的。容易验证，映射 ϕ 也是连续的。此外，由于 D 在 X中稠密，映射 ϕ 也是满射。

设 $c:\ \mathcal{P}(\mathbb{N}^\mathbb{N})\backslash\{\varnothing\} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 满足：对所有 $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^\mathbb{N})\backslash\{\varnothing\}$，都有 $(S)c \in S$。对每个 $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\backslash C$，我们定义 $m_f := \max\left(\left\{ m \in \mathbb{N} \;\middle|\; \text{使得存在 } h \in C \text{ 满足 } h\restriction_m = f\restriction_m \right\} \right)$（注意，只有因为 C 是闭的，这才是良定义的）。接着，我们定义映射 $\psi : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to C$ 如下

$$(f)\psi = \left\{ \begin{array}{ll} f & \text{if } f \in C \\ \left(\left\{ g \in C \;\middle|\; g\restriction_{m_f} = f\restriction_{m_f} \right\} \right) c & \text{if } f \notin C \end{array} \right\}.$$

根据定义，映射 $\psi : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to C$ 是满射，也很容易验证 ψ 是连续的。因此， $\psi\phi$ 是从 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 到 X 的连续满射，符合要求。□

引理 4.26（参见 [21], 卢津分离定理的定理 14.7；预备知识：3.2、3.14、4.22、4.24、4.25）。

假设$(X,\mathcal{T})$是一个豪斯多夫拓扑空间，且 Σ是 X上的一个 σ-代数，并且满足 $\mathcal{T}\subseteq\Sigma$。如果 $\{U,V\}$是将 X划分为$(X,\mathcal{T})$的解析子空间的划分，则 $\{U,V\}\subseteq\Sigma$。

证明。 如果 $U=\varnothing$或 $V=\varnothing$，则结论显然。否则， U 与 V 都是非空波兰空间在连续映射下的像。因此，根据引理 4.25，存在连续映射ϕ_U： $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to X$， ϕ_V： $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to X$，使得 img($\phi_U$) 为 $=U$且 img(ϕ_V) 为 $=V$。

我们称 A， $B\subseteq X$被 Σ分离，如果存在 A'， $B'\in\Sigma$，使得 $A\subseteq A'$， $B\subseteq B'$且$A'\cap B'=\varnothing$。只需证明 U与 V被 Σ分离即可。

断言：假设 $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$,$(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$是 X 的子集序列，满足 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i$与 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}V_i$未被 Σ分离。在这种情况下，存在 $i,j\in\mathbb{N}$，使得 U_i与 V_j未被 Σ分离。断言的证明：反设对于所有 $i,j\in\mathbb{N}$， U_i 与 V_j 都被 Σ 分离。对于每个 $i,j\in\mathbb{N}$，令$U'_{i,j},V'_{i,j}\in\Sigma$两两不相交，且满足$U_i\subseteq U'_{i,j}$和$V_j\subseteq V'_{i,j}$。我们定义

$$U':=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcap_{j\in\mathbb{N}}U'_{i,j}\quad\text{and}\quad V':=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\bigcap_{i\in\mathbb{N}}V'_{i,j}.$$

我们有 $U',V'\in\Sigma$两两不相交， $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i\subseteq U'$且 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}V_i\subseteq V'$。由于 $U'\cap V'=\varnothing$，可得$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i$与 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}V_i$被 Σ分离。这就产生了矛盾。 $\diamondsuit$

反设 U 与 V 未被 Σ分离。对每个 $n\in\mathbb{N}$，我们定义 $f_n:\{0,1,\dots,n-1\}\to\mathbb{N}$，以及 g_n：$\{0,1,\dots,n-1\}\to\mathbb{N}$如下：

(1) $f_0=g_0=\varnothing$。(2) 若 f_i 已定义，

且这些集合

$$\left(\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\;\middle|\;f_i\subseteq f\right\}\right)\phi_U\quad\text{and}\quad\left(\left\{g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\;\middle|\;g_i\subseteq g\right\}\right)\phi_V$$

未被 Σ分离，则根据断言，选取 f_{i+1}， g_{i+1}，使得 $f_i\subseteq f_{i+1}$、 $g_i\subseteq g_{i+1}$与 $\left(\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\;\middle|\;f_{i+1}\subseteq f\right\}\right)\phi_U$以及 $\left(\left\{g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\;\middle|\;g_{i+1}\subseteq g\right\}\right)\phi_V$均未被 Σ分离。

于是我们可以定义 $f:=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}f_i$与 $g:=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}g_i$。由于 X是豪斯多夫的，且（f）$\phi_U\neq$（g）ϕ_V（ϕ_U与 ϕ_V的像不交），我们可以选取开邻域 $U_f\in$Nbhds$_X$((f)ϕ_U) 和 $V_g\in$Nbhds$_X$((g)ϕ_V)，使得 $U_f\cap V_g=\varnothing$。由于 ϕ_U,ϕ_V都是连续的，因此存在某个 $N\in\mathbb{N}$，使得

$$(U_f)\phi_U^{-1}\supseteq\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\;\middle|\;f_N\subseteq f\right\}\quad\text{and}\quad(V_g)\phi_V^{-1}\supseteq\left\{g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\;\middle|\;g_N\subseteq g\right\}.$$

由于 $U_f,V_g\in\Sigma$，可知 $\left(\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\;\middle|\;f_N\subseteq f\right\}\right)\phi_U$和 $\left(\left\{g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\;\middle|\;g_N\subseteq g\right\}\right)\phi_V$被 Σ分离，这是一个矛盾。□

定理 4.27（可比较的波兰群拓扑，预备知识：3.25、4.10、4.17）。设 G、 H 为群， $\mathcal{T}_G$、 $\mathcal{T}_H$ 分别为与 G、 H 半相容的波兰拓扑。若 ϕ： $G\to H$ 是同构，且 ϕ 关于 $\mathcal{T}_G$ 与 $\mathcal{T}_H$ 连续，则 ϕ^{-1} 也连续。

证明。 我们只需证明：若 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 H 中关于 $\mathcal{T}_H$ 收敛到某个 $x\in H$ 的元素序列，且 $S:=\{x\}\cup\left\{x_i\;\middle|\;i\in\mathbb{N}\right\}$，则 $\phi^{-1}\restriction_S$ 连续。

设 $B=\left\{U_i\;\middle|\;i\in\mathbb{N}\right\}$ 是拓扑 $\mathcal{T}_G$的可数基。由引理 4.18，对于每个 $i\in\mathbb{N}$，集合 U_i 和 $X\backslash U_i$ 相对于 $\mathcal{T}_G$ 都是解析的。因此，由于 ϕ 连续，可得

$(U_i)\phi$ 和 $(X\backslash U_i)\phi$ 相对于 $\mathcal{T}_H$ 都是解析的。由引理 4.23 和 4.26 可得， U_i 和 $X\backslash U_i$ 相对于 $\mathcal{T}_H$ 几乎开。因此，存在 H 的一个余瘦子集 C，使得对所有 $i\in\mathbb{N}$，集合 $U_i\cap C$ 在 $\mathcal{T}_H\restriction_C$ 中是开集。特别地， $\phi^{-1}\restriction_C$ 连续。

由于 C在半拓扑群 $(H,\mathcal{T}_H)$ 中是余瘦的，因此 $C\cap Cx^{-1}\cap\big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}Cx_i^{-1}\big)$ 在 $(H,\mathcal{T}_H)$ 中也余瘦。由定理 3.28 可知，存在某个 $h\in C\cap Cx^{-1}\cap\big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}Cx_i^{-1}\big)$。于是 $(S)\lambda_h\subseteq C$。由此可知 $\phi^{-1}\restriction_S=\lambda_h\restriction_S\circ\phi^{-1}\restriction_C\circ\lambda_{(h^{-1})\phi^{-1}}$，因此它如所需那样是连续的。□

4.3. 字与项。 在本小节中，我们将介绍字与项。字在第 4 部分中始终被使用，而项则使我们能够在给定拓扑结构的情况下，使用大量连续映射（它们也用于在第3部分中定义扎里斯基拓扑）。

定义 4.28（字，预备知识：1.4、1.6、1.10、4.5）。
若 X 是一个集合，则我们用 X^*表示 X 上的自由幺半群。该幺半群的全集是集合

$$X^*:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X^n.$$

若 $w\in X^*\cup X^{\mathbb{N}}$，则称 w 为字或字符串，属于字母表 X。在此语境下，我们将 X 的元素称为字母。我们用 $|w|$ 表示字 w的长度，即满足 $w\in X^n$ 的值 $n\in\mathbb{N}\cup\{\aleph_0\}$（方便的是，这与 w 的基数相同，因此该记号没有歧义）。如果 $n\in\mathbb{N}$，则我们写作 $w\restriction_n$，表示函数 w对集合 $\{0,1,\dots,n-1\}$的限制；我们将这样的限制称为 w的前缀。集合 $X^*\cup X^{\mathbb{N}}$ 按如下关系偏序：若 v 是 w 的前缀，则 $v\leq w$（这与 $\subseteq$ 关系相同）。

如果 $v=(v_0,\ v_1,\ \dots,\ v_{|v|-1})\in X^*$ 与 $w=(w_0,\ w_1,\ \dots)\in X^*\cup X^{\mathbb{N}}$，那么 v与w 的连接定义为

$$vw=(v_0,v_1,\dots,v_{|v|-1},w_0,w_1,\dots).$$

将连接限制在 X^* 上，就得到 X^* 作为幺半群的二元运算。X^* 的单位元是长度为 0 的元素，我们称之为空字，记作 ε。虽然严格来说$X\neq X^1$（定义 1.4），但为方便起见，我们常将字母与长度为 1 的字视为相同的对象。

容易验证，连接总是可消去的，也就是说，若 $v,\ u,\ w$是有限字，则

$$vu=vw\Rightarrow u=w,\quad\text{and}\quad uv=wv\Rightarrow u=w.$$

由此可知，对于所有 $w\in X^*$，映射 ρ_w 与 λ_w（使用幺半群 X^*）都是单射。当使用无限字时，我们扩展 λ_w 的定义域，使其包含无限字（注意 λ_w 仍然是单射）。

定义 4.29（签名的项，预备知识：4.1、4.28）。
对于这个定义，我们需要用集合来表示逗号、左括号和右括号这些符号。为避免与这些符号所发挥的英文功能相混淆，我们用 、 表示代表逗号的集合，用「表示代表左括号的集合，用 」表示代表右括号的集合。只要这些集合彼此不同，且不会与其他可能被误认为它们的对象混淆，具体选择哪些集合并不重要。例如，可以

定义

$$\begin{aligned} 、 &:= (03, 15, 13, 13, 01) \\ 「 &:= (15, 16, 05, 14, 00, 02, 18, 01, 03, 11, 05, 20) \\ 」 &:= (03, 12, 15, 19, 05, 04, 00, 02, 18, 01, 03, 11, 05, 20). \end{aligned}$$

如果 V 是一个集合， σ 是一个签名，那么我们归纳地将 σ 在变量集 V 上的一个项定义为字母表 $\{、, 「, 」\} \cup F_\sigma \cup V$ 中属于以下情形之一的字符串：

(1) 对某个 $x \in V$ 而言的字符串 x。 (2) 字符串 $「t_0、t_1、\ldots、t_n」F$，其中 $F \in F_\sigma$ 的元数为 n，且 $t_0, t_1, \ldots, t_n$ 是项。

定义 4.30（项运算，预备知识：2.3、3.11、4.10、4.29）。
如果 $\mathbb{X}$ 是一个 σ-结构，且 V 是一个集合（称为变量集），那么对于 V 上的 σ 的每个项 t，我们将定义一个相应的项运算 $t_V^{\mathbb{X}}\colon \mathbb{X}^V \to \mathbb{X}$。我们按照 t 的长度归纳地进行定义如下：

(1) 如果 $t \in V$，那么我们将 $t_V^{\mathbb{X}}$ 定义为投影映射 π_t。 (2) 如果 $t = 「t_0、 t_1、 \ldots、 t_n」F$，其中 $F \in F_\sigma$ 的元数为 n，且 $t_0, t_1, \ldots, t_n$ 是项，那么我们定义 $t_V^{\mathbb{X}}\colon \mathbb{X}^V \to \mathbb{X}$ 为

$$t_V^{\mathbb{X}} = \langle t_0{}_V^{\mathbb{X}}, t_1{}_V^{\mathbb{X}}, \ldots, t_{n-1}{}_V^{\mathbb{X}} \rangle_{\mathbb{X}^n} \circ F^{\mathbb{X}} \quad \text{(recall Definition 2.3)}.$$

不难验证， σ 在 V 上的任意项，恰好在上述某一种情形中被考虑一次。注意，根据构造，若 $\mathbb{X}$ 是拓扑结构，那么 $\mathbb{X}$在任意变量集上的所有项运算都是连续的（使用相应的积拓扑）。

例 4.31（半群与逆半群中的项运算，预备知识：4.30）。不难验证，若 S 是拓扑半群，且 V 是变量集，那么项运算 $t\colon S^V \to S$ 恰好是如下形式的映射

$$((s_v)_{v \in V})t = s_{v_0} s_{v_1} s_{v_2} \ldots s_{v_{n-1}}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$与 $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$。特别地，这些映射是连续的。类似地，若 S是拓扑逆半群，且 V 是变量集，那么项运算 $t\colon S^V \to S$ 恰好是如下形式的映射

$$((s_v)_{v \in V})t = s_{v_0}^{i_0} s_{v_1}^{i_1} \ldots s_{v_{n-1}}^{i_{n-1}}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$， $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{1, -1\}$与 $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$。

5. Nice actions

本节将介绍半群在范畴对象上的作用，并证明前文提及的文献中的其余关键结果。首先，我们证明从 Aut($2^{\mathbb{N}}$) 或 Sym($\mathbb{N}$) 到第二可数群的所有同态都是连续的；最后，我们证明 Rubin 定理，该定理表明，给定一个良好群，可以构造出该群在良好拓扑空间上的典范作用。

定义 5.1（自同态与自同构，预备知识：1.6、2.2、4.5、4.9、4.10）。若 $\mathcal{C}$ 是一个范畴， O 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象，且 $\mathcal{C}$ 中以 O 同时作为源和

目标的态射类构成一个集合，则将此集合记作 End(O)（所用的范畴由上下文给出）。

我们通过将 $f, g \in$ End(O) 的积定义为 $(f, g)\circ_{\mathcal{C}}$，赋予 End($O$) 幺半群结构。随后，我们将 Aut($O$) 定义为 End($O$) 的单位群（回顾定义 4.9 ）。

定义 5.2（作用，预备知识：4.14、5.1）。

若 S 是拓扑半群，$\mathbb{X}$ 是拓扑结构，且 $a\colon \mathbb{X} \times S \to \mathbb{X}$ 是函数，则称 a 是一个**作用**（S 在 $\mathbb{X}$ 上的作用），如果映射 $\phi_a\colon S \to$End($\mathbb{X}$) 定义为

$$(x)((f)\phi_a) = (x, f)a$$

是定义良好的半群同态。对于群，我们用 Aut($\mathbb{X}$) 代替 End($\mathbb{X}$)，以类似方式定义作用。回顾定义 4.10，我们将没有拓扑的结构和没有结构的拓扑空间都视为拓扑结构。如果根据上下文可以清楚地判断所用的作用，有时我们会写作 xf，而不是 $(x, f)a$。我们称作用 a 为：

(1) **连续** 如果映射 $a\colon \mathbb{X} \times S \to \mathbb{X}$ 是连续的。(2) **传递** 如果对于所有 $x, y \in \mathbb{X}$，存在 $f \in S$ 使得 $(x, f)a = y$。(3) **忠实** 如果映射 ϕ_a 是单射。

定义 5.3（作用的幂，预备知识：5.2）。

如果 a 是群 G 在集合 X上的作用，那么我们将 a^n 定义为 G 在 X^n 上的作用，如下所示：

$$((x_0, x_1 \dots x_{n-1}), g)a^n = ((x_0, g)a, (x_1, g)a, \dots, (x_{n-1}, g)a).$$

此记法始终优先于定义 1.4 中的记法。

定义 5.4（作用轨道，预备知识：5.2）。

如果 a 是群 G 在拓扑结构 $\mathbb{X}$上的作用，且 $x \in \mathbb{X}^n$，那么我们称集合 $(\{x\} \times G)a$为 x在 a作用下的**轨道**。

以下类型的作用（丰富泛型）在文献中经常出现在群通过共轭作用于自身的情形。事实上，我们只会在这种情形下使用它。存在许多具有丰富泛型的优良作用实例（见定理 5.18 和定理 5.33），但证明这一点往往相当复杂。

定义 5.5（丰富泛型，预备知识：3.27、5.3、5.4）。

若 a 是拓扑群 G 在拓扑结构 $\mathbb{X}$ 上的作用，则称 a 具有**丰富泛型**，如果对所有 $n \in \mathbb{N}$，作用 a^n 在 $\mathbb{X}^n$ 中都有一个余瘦轨道。

定义 5.6（中心化子与正规化子，预备知识：4.9、4.11）。

回顾一下，若两个半群元素 f，g**可交换**，则 $fg = gf$。若 G 是一个群且 $S \subseteq G$，则我们定义 G 中 S 的**中心化子** 和**正规化子** 如下：

$$C_G(S) := \left\{ f \in G \;\middle|\; f \text{ commutes with all elements of } S \right\},$$

$$N_G(S) := \left\{ f \in G \;\middle|\; fS = Sf \right\}$$

分别地。容易验证，$C_G(S)$ 与 $N_G(S)$ 始终是 G 的子群。当 S 是单元素集 $\{f\}$ 时，为简洁起见，我们通常用 $C_G(f)$ 代替 $C_G(\{f\})$。

如果 G 是一个群，S 是 G 的子群，且 $N_G(S) = G$，那么我们称 S 是 G 的 正规子群（记作 $S \trianglelefteq G$）。在这种情况下，我们将 G 关于 S 的 商 定义为：

$$G/S := \left\{ gS \;\middle|\; g \in G \right\}.$$

集合 G/S 被视为一个群，而 G 的元素集合按通常方式相乘 .

定义 5.7（共轭作用，预备知识：5.2、5.6）。
如果 G 是一个群，那么我们定义 $\mathrm{conj}_G : G^2 \to G$ 为如下作用

$$(g,h)\,\mathrm{conj}_G = h^{-1}gh.$$

我们称群（G）ϕ_{conj_G} （回顾定义 5.2）为 G的<念 id='3'>内自同构 群（记作 Inn(G)）。如果 $\psi \in$ Aut(G)，且 $h \in G$，那么 $\psi^{-1} \circ ((h)\phi_{\mathrm{conj}_G}) \circ \psi = ((h)\psi)\phi_{\mathrm{conj}_G}$。特别地，Inn($G$) $\trianglelefteq$ Aut(G)。我们称群 Aut(G)/Inn(G) 为 G 的<款 id='23'>外自同构群 ，并将此群记为 Out(G)。

在继续讨论 Sym($\mathbb{N}$) 和 Aut($2^{\mathbb{N}}$) 之前，我们给出一个具有丰富泛型的群的一个简单而漂亮的推论（定理 5.9）。这一事实似乎众所周知，但我们不知道其具体出处。

定义 5.8（交换子，预备知识：4.10）。
若 G 是一个拓扑群，则定义交换子映射 $[\cdot,\cdot]$：$G^2 \to G$，其定义为 $[f,g] = f^{-1}g^{-1}fg$。**定理 5.9**（交换子宽度为 1，预备知识：3.28、5.5、5.8）。
若 G 是一个完全可度量化的拓扑群，且共轭作用G 有一个余瘦轨道（特别是，如果它具有丰富泛型），则交换子映射 $[\cdot,\cdot]$： $G^2 \to G$ 是满射。

证明。设 C 是 conj_G 的一个余瘦轨道，并任取 $f \in G$。于是可知 Cf 也是余瘦的，因此由贝尔范畴定理（定理 3.28），集合 $C \cap Cf$ 在 G 中稠密。由此可知存在 g， $h \in C$，使得 $g = hf$。因此 $h^{-1}g = f$。由于 h， $g \in C$，存在 $k \in G$，使得 $h = k^{-1}gk$。因此

$$f = h^{-1}g = (k^{-1}gk)^{-1}g = k^{-1}g^{-1}kg = [k,g]$$

如所要求的。 □

定义 5.10（对称群，预备知识：3.2、4.10、4.13）。
若 X 是一个集合，则我们将 Sym(X) 定义为从 X 到其自身的所有双射所组成的群（若 $X \in \mathbb{N}$，我们将 X 视为 $\{0,1,\ldots,X-1\}$）。我们将 Sym(X) 上的逐点拓扑 定义为拓扑 $\mathcal{TB}_X \restriction_{\mathrm{Sym}(X)} = \mathcal{PT}_X \restriction_{\mathrm{Sym}(X)}$（回顾例 4.12 和 4.13）。形如以下形式的集合族

$$U_{x,y} := \left\{ f \in \mathrm{Sym}(X) \;\middle|\; (x)f = y \right\}$$

对于 x， $y \in X$，构成该拓扑的子基；而形如以下形式的集合族

$$U_h := \left\{ f \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \;\middle|\; h \subseteq f \right\}$$

对于有限的 $h \subseteq X^2$，构成一个基。由例 4.12 可知，该拓扑使 Sym(X) 成为一个拓扑群。

定义 5.11（连续函数空间，预备知识：3.3、3.16、3.7）。若 X， Y是拓扑空间，则我们将 C(X, Y) 定义为从 X到 Y的连续映射集合。

若 $X = Y$，则为简便起见，我们将 $C(X)$ 记作。 $C(X,\ Y)$ 上的紧开拓扑 是由形如下式的集合生成的拓扑

$$\left\{ f \in C(X,Y) \;\middle|\; (F)f \subseteq U \right\}$$

其中 $F \subseteq X$ 是紧致的， $U \subseteq Y$ 是开的。

定理 5.12（参见 [35], 《波兰紧开拓扑》中的命题 1.3.3，预备知识：3.4、3.25、5.11）。

如果 X 和 Y 是紧致可度量化空间，那么带有紧开拓扑的 C（X，Y）是一个波兰空间。此外，如果 B_X 和 B_Y 分别是 X 和 Y 的可数基，那么形如以下的集合族

$$B(U_X, U_Y) := \left\{ f \in C(X,Y) \;\middle|\; (U_X^-)f \subseteq U_Y \right\}$$

对 $U_X \in B_X$ 和 $U_Y \in B_Y$ 而言生成 C（X，Y）上的拓扑。此外，如果 d 是一个与 Y 相容的任意度量，那么由下式定义的 C（X，Y）上的度量 d_∞

$$(f,g)d_\infty = \sup_{x \in X}((x)f, (x)g)d$$

是完备的，并且与紧开拓扑相容。

众所周知（例如参见 [21]中的命题 4.5），如果 f：$(X,\ d_x) \to (Y,\ d_y)$ 是紧致度量空间之间的连续映射，并且 $\varepsilon > 0$，那么存在 $\delta > 0$ 使得

$$(a,b)d_x < \delta \Rightarrow ((a)f, (b)f)d_y < \varepsilon.$$

由此得到定理 5.12 的以下推论。

推论 5.13（连续映射的复合是连续的，预备知识：3.11、5.11、5.12）。

设(X, d_x)、(Y, d_y)、(Z, d_z) 是紧致度量空间。映射 $C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$ 的复合映射是连续的（使用紧开拓扑（定义 *5.11*）和积拓扑（定义 *3.11*））。

证明。 任取 $(f,g) \in C(X,Y) \times C(Y,Z)$ 和 $\varepsilon > 0$。设 $\delta > 0$ 满足

$$(a,b)d_y < \delta \Rightarrow ((a)g, (b)g)d_x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此可知，如果

$$\sup_{x \in X}((x)f, (x)f')d_y < \delta \quad \text{and} \quad \sup_{y \in Y}((x)g, (x)g')d_z < \frac{\varepsilon}{2},$$

then

$$\sup_{x \in X}((x)f'g', (x)fg)d_z \le \sup_{x \in X}(((x)f'g, (x)fg)d_z + ((x)f'g, (x)f'g')d_z) < \varepsilon.$$

结论由定理 5.12 得证。 □

命题 5.14（波兰同胚群，预备知识：3.18、4.20、5.13）。如果 X 是一个紧致可度量拓扑空间，那么其同胚群$\mathrm{Aut}(X)$在紧开拓扑下是一个波兰空间。

证明。设 B 是 X 的一个可数基，且 $\varnothing \notin B$。由定理 5.12，集合 $B(U,\ V)\colon=\left\{f\in C(X)\ \middle|\ (U^{-})f\subseteq V\right\}$（其中 $U,\ V\in B$）构成紧开拓扑的一个基。

对于所有满足 $x\neq y$ 的 $x,y\in X$，令

$$P_{x,y}:=\left\{(U,V)\in B^2\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{there exist } U',V'\in B \text{ such that } x\in U\subseteq U^{-}\subseteq U',\\ y\in V\subseteq V^{-}\subseteq V',\text{ and } U'\cap V'=\varnothing\end{array}\right\}$$

注意到（根据注 3.18 第 9 部分），集合 $P_{x,y}$ 永不为空，并且集合 $P:=\bigcup_{x,y\in X}P_{x,y}\subseteq B^2$ 是可数的。由注 3.18 可知，$\mathrm{Aut}(X)$ 由 $C(X)$ 中的双射元素组成。因此

$$\mathrm{Aut}(X)=\left(\bigcap_{(U,V)\in P}\bigcup_{\substack{U',V'\text{open}\\ \text{and disjoint}}}B(U,U'')\cap B(V,V'')\right)\cap\left(\bigcap_{V\in B}\bigcup_{U\in B}B(U,V)\right).$$

这是关于紧开拓扑开集的可数交。由推论 4.20 可知，$C(X)$ 的这个子空间也是波兰空间。□

5.1. **对称群**。在 [22], 中指出，“容易证明 S_∞ 具有丰富泛型”。我们不知道这一事实的出处，因此给出自己的证明（定理 5.18）。如下文所示，证明 $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ 具有丰富泛型的关键，在于将 $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ 的元素视为代数对象。

定义 5.15（一元代数，预备知识：4.1）。
如果 $n\in\mathbb{N}$，那么我们定义签名 $\sigma_{u,\ n}:=(\{0,1,\dots,n-1\},\ \varnothing,\ \{(0,\ 1),\ (1,\ 1)\dots,\ (n-1,\ 1)\})$。也就是说，$\sigma_{u,\ n}$ 具有 n 个一元函数符号 $\{0,1,\dots,n-1\}$，且没有其他符号。我们称一个 $\sigma_{u,\ n}$-结构为一个 n一元代数。此外，如果对于所有 $i\in\{0,1,\dots,n-1\}$，映射 $i^{\mathbb{U}}$ 都是 $\mathbb{U}$的一个置换，我们就称一个 n-一元代数 $\mathbb{U}$ 是双射的 。

例如，当 $n=2$ 时，一个双射的 n-一元代数由集合 X 和 X的两个置换组成。

定义 5.16（连通分支，预备知识：1.10、4.11、5.15）。
一个 n 元一元代数 $\mathbb{U}$ 的 连通分支是 $\mathbb{U}$ 上包含该集合的最小等价关系的等价类

$$\bigcup_{i<n}i^{\mathbb{U}}.$$

如果一个 n 元一元代数上的此关系是整个 $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$，我们就称它为连通的。特别地，一元代数的连通分支将其划分为连通子结构。

命题 5.17（波兰对称群，预备知识：4.20、4.26、5.10）。
群$\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ 在逐点拓扑下是一个波兰空间。

证明。由引理 4.25，空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是波兰空间。由于

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{N})=\left(\bigcap_{a\in\mathbb{N}}\bigcup_{b\in\mathbb{N}}\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \middle|\ (b,a)\in f\right\}\right)\cap\left(\bigcap_{a\neq b}\bigcup_{c\neq d}\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \middle|\ (a,c)\in f\text{ and }(b,d)\in f\right\}\right),$$

结论由推论 4.20 得出。□

定理 5.18 ($\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ 具有丰富泛型，预备知识：1.4, 3.29, 5.5, 5.7, 5.16, 5.10)。作用 $\mathrm{conj}^{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}$ 具有丰富泛型（使用逐点拓扑）。

证明。设 $n \in \mathbb{N}$ 固定，并令

$$C := \left\{ y \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{the connected components of the unary algebra } (\mathbb{N}, \sigma_{u,n}, y) \\ \text{consist of countably infinitely many copies of every finite} \\ \text{bijective connected } n\text{-unary algebra.} \end{array} \right\}$$

我们首先证明 C 是 $\mathsf{conj}^n_{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}$ 的一个轨道。

注意，x，$y \in \mathsf{Sym}(\mathbb{N})^n$ 恰好在对应的一元代数 $(\mathbb{N},\ \sigma_{u,\ n},\ x)$ 和 $(\mathbb{N},\ \sigma_{u,\ n},\ y)$ 同构时，才处于同一个轨道（$\mathsf{Sym}(\mathbb{N})$ 中的共轭元素与一个同构态射相同）。由于定义 C 的性质在同构下保持不变，因此 C 在 $\mathsf{Sym}(\mathbb{N})$ 的作用下是闭的。

现在我们证明 C 的所有元素都处于同一个轨道。设 $x, y \in C$。令 $\{C_{i,j} \colon i, j \in \mathbb{N}\}$ 为 $(\mathbb{N}, \sigma_{u,n}, y)$ 的连通分支，并按如下方式编号：当且仅当 $i_0 = i_1$ 时，$C_{i_0,j_0} \cong C_{i_1,j_1}$。类似地，令 $\{D_{i,j} \colon i, j \in \mathbb{N}\}$ 为 $(\mathbb{N}, \sigma_{u,n}, x)$ 的连通分支集合，并按如下方式编号：当且仅当 $i_0 = i_1$ 时，$D_{i_0,j_0} \cong D_{i_1,j_1}$；当且仅当 $i_1 = i_2$ 时，$C_{i_0,j} \cong D_{i_1,j}$。

对于所有的 $i, j \in \mathbb{N}$，令 $\phi_{i,j} : C_{i,j} \to D_{i,j}$ 为一元代数的同构。现在我们定义 $\phi := \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} \phi_{i,j}$。由此可得，$\phi \colon (\mathbb{N}, \sigma_{u,n}, y) \to (\mathbb{N}, \sigma_{u,n}, x)$ 是一元代数的同构，因此 $(y, \phi)\, \mathsf{conj}^n_{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})} = x$。

既然我们已经确定了自己的轨道，现在证明它是余瘦的。令 R 为一个可数集，其元素是双射连通的 n-一元代数，并且每个有限双射 n-一元代数的同构类在 R 中恰有一个代表元。我们对 C 的描述表明，若我们定义这些集合

$$B_m := \left\{ y \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})^n \;\middle|\; \text{the connected component of } m \text{ in } (\mathbb{N}, \sigma_{u,n}, y) \text{ is finite} \right\}$$

$$B_{\mathbb{A},m} := \left\{ y \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})^n \;\middle|\; \begin{array}{l} (\mathbb{N}, \sigma_{u,n}, y) \text{ has at least } m \text{ connected components} \\ \text{isomorphic to } \mathbb{A} \end{array} \right\}$$

对于 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\mathbb{A} \in R$，则

$$C = \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{\mathbb{A} \in R \\ m \in \mathbb{N}}} B_{\mathbb{A},m} \right).$$

因此，只需证明所有这些集合都是开且稠密的。它们是开集，因为定义它们的性质仅由有限多个点决定。

我们必须证明它们是稠密的。令 $m \in \mathbb{N}$ 与 $\mathbb{A} \in R$ 为任意对象。令 $U := \prod_{i<n} U_i$ 为 $\mathsf{Sym}(\mathbb{N})^n$ 中的非空基本开集，并且对于所有 $k < n$，令 f_k 为 $\mathbb{N}$ 的子集之间的有限双射，使得 $U_k = \left\{ g \in \mathsf{Sym}(\mathbb{N}) \;\middle|\; f_k \subseteq g \right\}$。令

$$P := \bigcup_{k \in \{0,1,\ldots,n-1\}} \mathrm{dom}(f_k) \cup \mathrm{img}(f_k).$$

我们首先证明 $B_m \cap U \neq \emptyset$。对于所有 $k < n$，令 f'_k 为包含 f_k 的 $P \cup \{m\}$ 的一个置换，并令 $g_k \in \mathsf{Sym}(\mathbb{N})$ 包含 f'_k。于是 $(g_0,\ g_1,\ \ldots\ldots,\ g_{n-1}) \in B_m \cap U$。

还需证明 $B_{\mathbb{A},\ m} \cap U \neq \emptyset$。设 $\phi_0,\ \phi_1,\ \ldots\ldots,\ \phi_{m-1} \colon \mathbb{A} \to \mathbb{N} \backslash P$ 是像互不相交的单射。对每个 $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$，令 $g_k \in \mathsf{Sym}(\mathbb{N})$ 包含该部分双射

$$f_k \cup \bigcup_{j \in m} \phi_j^{-1}(k^{\mathbb{A}}) \phi_j.$$

那么 $(g_0,\ g_1,\ \ldots\ldots,\ g_{n-1}) \in B_{\mathbb{A},\ m} \cap U$，如所要求。 □

推论 5.19 (置换是换位子，预备知识：5.9，5.18)。群 Sym(ℕ)中的每个元素都是一个换位子。

5.2. **康托空间的同胚**。 本小节的主要目的是说明作用 $\mathrm{conj}_{\mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})}$ 具有丰富泛型（其中 Aut($2^{\mathbb{N}}$) 是赋予紧开拓扑的康托集的同胚群）。

我们介绍的论证来自 Aleksandra Kwiatkowska [23], ，它表明，可以将 $2^{\mathbb{N}}$ 的一个泛型同胚构造为某个良好有限拓扑结构类的某种极限。这里的极限是指“投射 Fra¨ıss´e 理论”意义下的极限，该理论由 Irwin 和 Solecki 在 [20]中引入。

定义投射 Fra¨ıss´e 类的条件与通常定义 Fra¨ıss´e 类的条件类似，只是用商映射代替嵌入（不过，投射 Fra¨ıss´e 类不一定对商结构封闭）。

定义 5.20 （射影 Fra¨ıss´e 类，预备知识：4.3、4.16）。
我们称一个离散 σ-结构的类 $\mathcal{C}$ 为射影 *Fra¨ıss´*<style id='9'>e 类，如果它满足以下性质：

(1) $\mathcal{C}$ 在拓扑同构下闭。 (2) $\mathcal{C}$ 除同构外包含可数无限多个结构。 (3) $\mathcal{C}$ 由有限结构组成。 (4) 若 $\mathbb{D}$、$\mathbb{E} \in \mathcal{C}$，则存在 $\mathbb{F} \in \mathcal{C}$ 以及商映射 ϕ_D、ϕ_E，分别从 $\mathbb{F}$ 映到 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$。 (5) 若 $\mathbb{C}$、$\mathbb{D}$、$\mathbb{E} \in \mathcal{C}$ 且 $\phi_{D,\ C}\colon\ \mathbb{D} \to \mathbb{C}$、$\phi_{E,\ C}\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ 为商映射，则存在 $\mathbb{F} \in \mathcal{C}$ 以及商映射 $\phi_{F,\ D}$、$\phi_{F,\ E}$，分别从 $\mathbb{F}$ 映到 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$，使得 $\phi_{F,\ D}\phi_{D,\ C} = \phi_{F,\ E}\phi_{E,\ C}$.

例 5.21 （非空有限半群，预备知识：4.3、4.16）。非空有限离散半群构成一个投射 Fra¨ıss´e 类。

证明。 定义 5.20 的前三个条件显然成立。我们先验证条件 4。若 D和 E是有限离散半群，则 $F := D \times E$也是有限离散半群。此外，若 D，E非空，则投影映射 $\pi_0\colon\ F \to D$ 和 $\pi_1\colon F \to E$ 是满射。由于半群是代数结构，因此这些映射是商映射，条件 4 随即成立。

接下来验证条件 5。设 C，D 和 E 是有限离散半群，并且$\phi_{D,\ C}\colon\ D \to C$，$\phi_{E,\ C}\colon\ E \to C$ 是商映射。令

$$F := \left\{(d,e) \in D \times E \;\middle|\; (d)\phi_{D,C} = (e)\phi_{E,C}\right\}.$$

容易验证 F是 $D \times E$的子半群。若将投影映射 π_0 和 π_1 分别限制在集合 F上，并定义 $\phi_{F,\ D}\colon\ F \to D$和 $\phi_{F,\ E}\colon\ F \to E$，则有$\phi_{F,\ D}\phi_{D,\ C} = \phi_{F,\ E}\phi_{E,\ C}$。

因此，只需证明 $\phi_{F,\ D}$ 与$\phi_{F,\ E}$ 是商映射（对于代数结构而言，这等价于它们是满同态）。如果 $d \in D$ 是任意的，那么我们有

$$\{d\} \times (\{(d)\phi_{D,C}\})\phi_{E,C}^{-1} \subseteq F$$

（根据 F 的定义）。由于 $\phi_{E,\ C}$ 是一个商映射，因此可得 $(\{(d)\phi_{D,\ C}\})\phi_{E}^{-1}{}_{,\ C} \neq \varnothing$，故 $\phi_{F,\ D}$是满射。用同样的论证可知，$\phi_{F,\ E}$ 也是满射，符合要求。□

定理 5.22（射影 Fr¨ıss´e 极限，预备知识：3.20、3.22、5.20）。
若 $\mathcal{C}$ 是一个投射 ***Fra¨ıss´e*** 类，则存在唯一的（在拓扑同构意义下）第二可数、紧致、可度量化的零维拓扑结构 $\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$，满足

(1) 对所有 $\mathbb{D} \in \mathcal{C}$，存在连续商映射 $\phi_D : \mathit{Flim}\leftarrow(\mathcal{C}) \to \mathbb{D}$。*(2)* 若 X 是一个离散有限集合，且 $f : \mathit{Flim}\leftarrow(\mathcal{C}) \to X$ 是连续满射，则存在$\mathbb{S}_f \in \mathcal{C}$，一个连续商映射 $\phi_f : \mathit{Flim}\leftarrow(\mathcal{C}) \to \mathbb{S}_f$ 以及一个满射 $s_f : \mathbb{S}_f \to X$，使得 $f = \phi_f s_f$。*(3)* 若 $\mathbb{A}$、$\mathbb{B} \in \mathcal{C}$以及 $\psi_1 : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$、 $\psi_2 : \mathit{Flim}\leftarrow(\mathcal{C}) \to \mathbb{B}$ 是连续商映射，则存在一个连续商映射 $\psi_3 : \mathit{Flim}\leftarrow(\mathcal{C}) \to \mathbb{A}$ ，使得 $\psi_3\psi_1 = \psi_2$。

我们将这样的对象称为 $\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$ $\mathcal{C}$ 的 射影 ***Fr¨aiss´e*** 极限。
证明。 我们首先证明存在性。设 $S = \left\{ \mathbb{S}_i \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个可数结构集合，使得 $\mathcal{C}$ 的每个元素都与 S 中唯一的元素同构。

通过以下算法构造 $\mathcal{C}$ 中的一个结构序列 $(\mathbb{P}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ， 以及一个商映射序列 $(\phi_{i+1} : \mathbb{P}_{i+1} \to \mathbb{P}_i)_{i\in\mathbb{N}}$:

(1) 选择包含 0 的 $N \subseteq \mathbb{N}$，使得 $|N| = |N^c|$，定义 $i := 0$，选择 $t\colon N \to S$ 为一个双射，并定义 $\mathbb{P}_0 := \mathbb{S}_0$。(2) 选择 $M \subseteq \mathbb{N}\backslash(N \cup \{0, 1, \dots i-1\})$，使得 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\backslash(M \cup N \cup \{0, 1, \dots i-1\})|$，并选择一个从 M 到该集合的双射 q

$$\bigcup_{\substack{j<i \\ \mathbb{A},\mathbb{B}\in S}} \left\{ (\psi_0, \psi_1) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{P}_j, \mathbb{B}) \;\middle|\; \psi_0, \psi_1 \text{ is are quotient maps} \right\}.$$

(3) 重新定义 $t := t \cup q$, $N := N \cup M$ 与 $i := i + 1$。
(4) 如果 $(i)t$ 未定义，则定义 $\mathbb{P}_i := \mathbb{P}_{i-1}$ ，并将 ϕ_i 定义为恒等映射。如果 $(i)t$ 是一个结构，那么根据定义 5.20 条件 4，令 $\mathbb{P}_i \in \mathcal{C}$ 为一个结构，使得 $(i)t$ 与 $\mathbb{P}_{i-1}$都是它的商结构，并选择 $\phi_i : \mathbb{P}_i \to \mathbb{P}_{i-1}$ 作为商映射。如果 $(i)t = (\psi_0, \psi_1)$ 是一对商映射 $\psi_0 : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 与 $\psi_1 : \mathbb{P}_j \to \mathbb{B}$，那么根据定义 5.20 条件 5，选择 $\mathbb{P}_i$ 作为一个结构，并令 $\phi_i : \mathbb{P}_i \to \mathbb{P}_{i-1}$ 为商映射，使得存在一个商映射 $\psi : \mathbb{P}_i \to \mathbb{A}$ 满足

$$\psi \circ \psi_0 = \phi_i \circ (\phi_{i-1} \circ \ldots \circ \phi_{j+1} \circ \psi_1).$$

(5) 转到步骤 2。

特别地，这个序列具有这样的性质： $\mathcal{C}$ 中的每个结构都是该序列中某个结构的商；并且如果 $\mathbb{A}$，$\mathbb{B} \in \mathcal{C}$ 和 $\psi_1 : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$， $\psi_2 : \mathbb{P}_j \to \mathbb{B}$ 是商映射，那么存在 $i \in \mathbb{N}$ 以及一个从 $\psi_3 : \mathbb{P}_i \to \mathbb{A}$ 出发的商映射，使得 $\psi_3\psi_1 = \phi_i\phi_{i-1} \dots \phi_{j+1}\psi_2$。

我们现在定义 $\mathbb{L}$ 为该拓扑结构

$$\left\{ (p_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_i \;\middle|\; \text{for all } i \in \mathbb{N} \text{ we have } (p_{i+1})\phi_{i+1} = p_i \right\}.$$

接下来，我们需要验证 $\mathbb{L}$ 具有所需的性质。首先注意， $\mathbb{L}$是$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_i$ 的闭子空间；根据定理 3.20，$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_i$ 是康托空间，因此 $\mathbb{L}$ 满足给定的拓扑条件。

还要注意，所有投影映射 $\pi_i : \mathbb{L} \to \mathbb{P}_i$ 都是商映射。因此， $\mathbb{L}$ 具有所需的第一个性质，因为 $\mathcal{C}$ 中的每个元素都是某个 $\mathbb{P}_i$的商。

为检验第二个条件，假设 X 是一个有限离散空间，并且 $f\colon \mathbb{L} \to X$ 是连续满射。X 中每个点的原像都是既开又闭的，因此是形如 $(\{a\})\pi_i^{-1}$ 的集合的有限并，其中 $a \in \mathbb{P}_i$。由此，对所有此类 i 取最大值 M，可知 f 可以分解为所需的映射 $\pi_M s_f$。

现在我们验证第三个条件。设 $\psi_1\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 和 $\psi_2\colon \mathbb{L} \to \mathbb{B}$ 是连续商映射。与上文一样，我们可以找到 $j \in \mathbb{N}$ 和 $\psi_2'\colon \mathbb{P}_j \to \mathbb{B}$，使得 $\psi_2 = \pi_j\psi_2'$。因此，根据 $(\mathbb{P}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的构造，存在 $i \in \mathbb{N}$ 和 $\psi_3'\colon \mathbb{P}_i \to \mathbb{A}$，满足 $\psi_3'\psi_1 = \phi_i\phi_{i-1}\dots\phi_{j+1}\psi_2'$。于是，取 $\phi_3 := \pi_i\phi_3'$ 即可得到所需的映射。

剩下要证明唯一性。设 $\mathbb{L}_0$ 和 $\mathbb{L}_1$ 是具有所列性质的结构。由于 $\mathbb{L}_0$ 是零维且第二可数的，我们可以找到一个等价关系序列 $(\sim_{0,i})_{i\in\mathbb{N}}$，使得这些关系的等价类都是既开又闭的，并且它们共同构成 $\mathbb{L}_0$ 上拓扑的一个基。通过重新定义 $\sim_{0,i} := \sim_{0,i-1} \cap \sim_{0,i}$，不失一般性地假设该序列中的每个关系都包含于前一个关系（因此相应的划分序列越来越细）。此外，根据定理的第二个条件（必要时进一步细化），我们可以假设对所有 $i \in \mathbb{N}$，结构 $\mathbb{L}_0/\sim_{0,i}$ 都与 $\mathcal{C}$ 中的某个结构同构。我们还在 $\mathbb{L}_1$ 上定义一个类似的等价关系序列 $(\sim_{1,i})_{i\in\mathbb{N}}$。

As

(1) $(\sim_{0,\ i})_{i\in\mathbb{N}}$ 的类构成 $\mathbb{L}_0$ 的一个基；(2) $\mathbb{L}_1/\sim_{1,\ 0}$ 同构于 $\mathcal{C}$ 中的一个元素；(3) $\mathbb{L}_0$ 满足该定理的第一个条件,

我们可以找到 $i_0 \in \mathbb{N}$ 以及一个商映射 $\phi_{0,\ 0}\colon \mathbb{L}_0/\sim_{0,\ i_0} \to \mathbb{L}_1/\sim_{1,\ 0}$。同样，利用 $\mathbb{L}_1$ 满足该定理第三个条件这一事实，我们可以找到 $j_0 \in \mathbb{N}$ 和 $\phi_{1,\ 0}\colon \mathbb{L}_1/\sim_{1,\ j_0} \to \mathbb{L}_0/\sim_{0,\ i_0}$，使得对于所有 $x \in \mathbb{L}_1$，$([x]_{\sim_{1,\ j_0}})\phi_{1,\ 0}\phi_{0,\ 0} = [x]_{\sim_{1,\ 0}}$。

以此类推，我们构造严格递增的序列 $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$，$(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$，以及序列 $(\phi_{0,\ k})_{k\in\mathbb{N}}$，$(\phi_{1,\ k})_{k\in\mathbb{N}}$，使得对于所有 $x_0 \in \mathbb{L}_0$，$x_1 \in \mathbb{L}_1$ 和 $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，都有：

$$([x_0]_{\sim_{0,i_{k+1}}})\phi_{0,k+1}\phi_{1,k} = [x_0]_{\sim_{1,i_k}}, \quad \text{and} \quad ([x_1]_{\sim_{1,j_k}})\phi_{1,k}\phi_{0,k} = [x_1]_{\sim_{1,j_{k-1}}}.$$

我们通过定义 $(x_0)\phi_0$ 为集合 $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}([x_0]_{\sim_{0,\ i_{k+1}}})\phi_{0,\ k+1}$ 中的唯一元素，来定义一个同态 $\phi_0\colon \mathbb{L}_0 \to \mathbb{L}_1$（该元素存在，因为 $\mathbb{L}_1$ 是紧致的；且它是唯一的，因为 $\mathbb{L}_1$ 是豪斯多夫的）。我们类似地定义 $\phi_2\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_0$。根据构造，$\phi_0$，$\phi_1$ 是连续同态，且互为逆关系，因此结论成立。□

我们还给出上述定理的另一种表述，有时会更有用。

定理 5.23（射影 Fra¨ıss´e 极限 2,　　预备知识：5.22）。
如果 $\mathcal{C}$ 是一个射影 *Fra¨ıss´e* 类，那么$\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$是满足以下条件的紧致、第二可数、豪斯多夫、零维拓扑结构，且在拓扑同构意义下唯一：

(1) 对于所有 $\mathbb{D} \in \mathcal{C}$，都存在一个将 $\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$ 划分为既开又闭集的划分，使得相应的商结构与 $\mathbb{D}$ 同构。(2) 如果 P 是将 $\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$划分为既开又闭集的有限划分，那么存在一个划分 R，将 $\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$划分为既开又闭集，并且细化 P，使得与 R 对应的商结构是 $\mathcal{C}$ 的一个元素。

(3) 如果 P_0、P_1 是将 $\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$ 划分为既开又闭集的有限划分，且 $\phi\colon P_0\to P_1$ 是相应商结构的一个同构，那么存在一个拓扑同构 $h:\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})\to\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$，使得对所有 $S\in P_0$，$(S)h=(S)\phi$。

证明。前两个条件是利用以下事实对定理 5.22 中相应条件的改述：对于任意商映射 ϕ，我们有

$$\mathrm{dom}(\phi)/\ker(\phi)\cong\mathrm{img}(\phi).$$

我们证明定理 5.22 的第三个条件等价于定理 5.23 的第三个条件。

（定理 5.22 $\Rightarrow$ 的（3）$\Rightarrow$定理 5.23 的（3））：设 P_0，P_1 是将 $\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$ 划分为既开又闭集的有限划分。根据第二个条件，不失一般性，我们可以假设相应的商结构属于 $\mathcal{C}$。通过使用 $\mathbb{L}_0=\mathbb{L}_1=\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$，并选择 $\phi_{0,\,0}$ 为映射 $x\to([x]_{P_0})\phi$（其中 $[x]_{P_0}$ 是包含 x 的 P_0 中的元素），重新考察定理 5.22 中的唯一性证明，即可得到结论。所需的映射 h 就是我们在该证明中构造的映射 ϕ_0。

定理 5.23 $\Rightarrow$ (定理 5.22 的第 3 条)：设 $\mathbb{A},\mathbb{B}\in\mathcal{C}$ 且 $\phi_1\colon\mathbb{A}\to\mathbb{B},\phi_2:\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})\to\mathbb{B}$ 均为商映射。根据条件（1）对 $\mathbb{A}$中的元素重新命名后，不失一般性，可假设 $\mathbb{A}$ 是 $\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$ 的一个商。对 $\mathbb{B}$中的元素重新命名后，不失一般性，可假设 ϕ_2 是映射 $x\mapsto[x]_{\ker(\phi_2)}$。令 $\psi:\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})\to\mathbb{A}$ 为将每个点映射到包含该点的集合的商映射。我们有一个自然同构 $\phi:\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})/\ker(\phi_2)\to\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})/\ker(\psi\phi_1)$，其定义如下：

$$([x]_{\ker(\phi_2)})\phi=(\{x\phi_2\})(\psi\phi_1)^{-1}.$$

因此，存在一个与该同构相对应的拓扑同构 $h:\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})\to\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$。然后，定义 $\phi_3=h\psi$，我们得到

$$([x]_{\ker(\phi_2)})\phi_3\phi_1=(\{x\phi_2\})(\psi\phi_1)^{-1}\psi\phi_1=\{x\phi_2\}$$

对于所有 $x\in\mathrm{Flim}\leftarrow(\mathcal{C})$，因此 $\phi_3\phi_1=\phi_2$ 如所需。 □

现在我们来确立一类结构，其极限将给出我们的泛同胚。

定义 5.24（康托签名，　　预备知识：4.1）。

若 $n\in\mathbb{N}$，则我们定义签名 $\sigma_{b,\,n}:=(\varnothing,\ \{0,1,\ldots,n-1\},\ \{(0,\ 2),\ (1,\ 2)\ldots,\ (n-1,\ 2)\})$。也就是说，$\sigma_{b,\,n}$ 具有 n 个二元关系符号 $\{0,1,\ldots,n-1\}$，且没有其他符号。

定义 5.25（融合结构：1.6、4.2、5.24）。

对于 $n\geq1$，我们将一个 *n-Cantor amalgamation* 结构（*n-CA* 结构）定义为非空有限$\sigma_{b,\,n}$-结构 $\mathbb{A}$，满足以下性质：

(1) 对于每个 $i<n$，二元关系 $i^{\mathbb{A}}$ 与 $(i^{\mathbb{A}})^{-1}$ 都是满射。(2) 二元关系

$$\Gamma_{\mathbb{A}}:=\left\{(a,(i,j))\in A\times(\{0,1,\ldots,n-1\}\times\{-1,1\})\ \middle|\ |(\{a\})(i^{\mathbb{A}})^j|\geq2\right\}$$

是一个定义域为 A 的函数。

(3) 如果 $(a,\ b)\in i^{\mathbb{A}}$，那么要么 $(a)\Gamma_{\mathbb{A}}=(i,\ 1)$，要么 $(b)\Gamma_{\mathbb{A}}=(i,\ -1)$。

构造 n-CA 结构的自然例子有些困难，但下面的定理将使我们能够构造出大量例子。

定理 5.26（参见 [23], 《共尾 amalgam》，预备知识：1.5、4.16、5.25）。假设 $\mathbb{S}$ 是一个有限非空的 $\sigma_{b,\ n}$-结构，并且对于所有 $i < n$， $i^{\mathbb{S}}$ 和 $(i^{\mathbb{S}})^{-1}$ 都是满射二元关系。那么存在一个 n-*CA* 结构 $Q_{\mathbb{S}}$，使得 $\mathbb{S}$ 是它的商。

证明。我们定义 $\{0,1,\ldots,n-1\}\times\{-1,1\}\times\{0,1\}\times\mathbb{S}$ 为 $Q_{\mathbb{S}}$的全集。对于所有 $s\in\mathbb{S}$ 和 $i<n$，我们选取某些 $s_{i,l}, s_{i,r}\in\mathbb{S}$，使得 $(s_{i,l}.s), (s, s_{i,r}) \in i^{\mathbb{S}}$。接着我们定义

$$\begin{aligned} i^{Q_{\mathbb{S}}} := &\left\{((i,1,0,s_{i,l}),(j,p,k,s)) \;\middle|\; (j,p,k,s)\in Q_{\mathbb{S}}\right\}\\ &\cup\left\{((j,p,k,s),(i,-1,0,s_{i,r})) \;\middle|\; (j,p,k,s)\in Q_{\mathbb{S}}\right\}\\ &\cup\left\{((i,1,j,a),(i,-1,k,b)) \;\middle|\; (a,b)\in i^{\mathbb{S}}, j,k\in\{0,1\}\right\}. \end{aligned}$$

首先注意到，由于上述并集中第三个集合，映射 $(a,b,c,d)\to d$ 来自 $Q_{\mathbb{S}}\to\mathbb{S}$ 是一个商映射。现在我们需要检验 $Q_{\mathbb{S}}$ 是否是一个 n-CA 结构。首先，由于并集中的前两个集合， $i^{Q_{\mathbb{S}}}$ 和 $(i^{Q_{\mathbb{S}}})^{-1}$都为满射。

我们需要证明 $\Gamma_{Q_{\mathbb{S}}}$是一个函数。任取 $(a,b,c,d)\in Q_{\mathbb{S}}$。我们必须证明，存在且仅存在一个有序对 $(i,j)\in\{0,1,\ldots,n-1\}\times\{-1,1\}$，使得 $|(a,b,c,d)(i^{Q_{\mathbb{S}}})^{j}|\geq 2$。根据 $i^{Q_{\mathbb{S}}}$的定义，任何这样的有序对 (i,j)都必须等于有序对 (a,b)。此外，在定义 $(a^{Q_{\mathbb{S}}})^{b}$的并集中，最后一个集合必须将 (a,b,c,d)与至少两个元素配对。因此， $\Gamma_{Q_{\mathbb{S}}}$恰好是函数 $(a,b,c,d)\to(a,b)$。由此可清楚看出，作为一个 n-CA 结构的第三个条件成立。□

我们对引理 5.27 的证明与 [23], 中给出的类似命题证明大不相同，但更贴合本文的主题。

引理 5.27（参见 [23], 《amalgam 的 amalgamation》中的定理 4.1，预备知识：1.5、2.3、4.28、5.2、5.26）。
假设 $\mathbb{A}$、$\mathbb{B}$ 与 $\mathbb{C}$ 是 n-*CA* 结构，且 $\phi_{\mathbb{B}}$、$\mathbb{B}\to\mathbb{A}$、$\phi_{\mathbb{C}}$： $\mathbb{C}\to\mathbb{A}$ 是商映射。那么我们可以找到一个 n-*CA* 结构 $\mathbb{D}$，以及一对商映射 $\phi_{\mathbb{D},\ \mathbb{B}}$： $\mathbb{D}\to\mathbb{B}$ 和 $\phi_{\mathbb{D},\ \mathbb{C}}$： $\mathbb{D}\to\mathbb{C}$，使得

$$\phi_{\mathbb{D},\mathbb{C}}\phi_{\mathbb{C}} = \phi_{\mathbb{D},\mathbb{B}}\phi_{\mathbb{B}}.$$

证明。首先考虑 $\mathbb{B}\times\mathbb{C}$ 的以下子结构：

$$\mathbb{P} := \left\{(b,c)\in\mathbb{B}\times\mathbb{C} \;\middle|\; (b)\phi_{\mathbb{B}} = (c)\phi_{\mathbb{C}}\right\}.$$

同态 $\pi_0\phi_{\mathbb{B}}$ 和 $\pi_1\phi_{\mathbb{C}}$ 从 $\mathbb{B}\times\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{A}$ 的限制在 $\mathbb{P}$ 上相同，但 $\mathbb{P}$ 可能不是 n-CA 结构，因此我们还需要做一些工作。

我们按如下方式定义秩为 n 的自由群： F_n 是字母表 $\{0,1,\ldots,n-1\}\times\{-1,1\}$ 上所有有限词构成的集合（其中，对每个 $i<n$，我们将 $(i,1)$ 和 $(i,-1)$ 视为互为逆元），且满足任意字母后面都不能紧跟其逆元。群运算定义为先连接，再删除所有字母后面紧跟其逆元的部分。

我们将 F_n 视为一个 $\sigma_{b,n}$-结构（即其凯莱图），定义如下：

$$i^{F_n} = \left\{(x,y)\in F_n \;\middle|\; xi = y\right\}.$$

注意到，这个结构是对称的，因为其自同构群是传递的（群 F_n通过左乘在其上作传递作用）。还要注意，如果我们有一个 $\sigma_{b,n}$-结构 $\mathbb{S}$，那么证明

所有关系 $i^{\mathbb{S}}$ 与 $(i^{\mathbb{S}})^{-1}$ 都是满射，等价于证明每个 $s \in \mathbb{S}$ 都是从 F_n 到 $\mathbb{S}$的某个同态下空字 ε的像。

考虑 $\mathbb{P}$ 的以下子结构

$$\mathbb{P}^{\mathrm{core}} := \left\{ p \in \mathbb{P} \;\middle|\; \text{there is a homomorphism } q : F_n \to \mathbb{P} \text{ with } (\varepsilon)q = p \right\}.$$

根据上面的注释，对于所有 $i < n$，二元关系 $i^{\mathbb{P}^{\mathrm{core}}}$ 和 $(i^{\mathbb{P}^{\mathrm{core}}})^{-1}$ 都是满射。

断言：映射 $\pi_0 \restriction_{\mathbb{P}^{\mathrm{core}}}$ 和 $\pi_1 \restriction_{\mathbb{P}^{\mathrm{core}}}$ 都是商映射。

断言的证明：我们证明 $\pi_0 \restriction_{\mathbb{P}^{\mathrm{core}}}$ 是商映射；另一种情况是对称的。任取 $i < n$，以及任意的 $(a, b) \in i^{\mathbb{B}}$。只需证明存在 $(p, q) \in i^{\mathbb{P}^{\mathrm{core}}}$，使得 $((p)\pi_0, (q)\pi_0) = (a, b)$。由于 $\mathbb{A}$ 是一个 n-CA 结构，我们要么有 $((a)\phi_{\mathbb{B}})\Gamma_{\mathbb{A}} = (i, 1)$，要么有 $((b)\phi_{\mathbb{B}})\Gamma_{\mathbb{A}} = (i, -1)$。不失一般性，我们假设 $((b)\phi_{\mathbb{B}})\Gamma_{\mathbb{A}} = (i, -1)$。需要考虑两种情况：

（1）存在有限序列 $b = b_0$、$a = b_{-1}$、b_{-2}、……、b_{-l} 属于 $\mathbb{B}$，以及 i_0、i_{-1}、……、i_{-l} 属于 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$，使得对于每个 $-l < k \leq 0$，$(b_{k-1}, b_k) \in i_k^{\mathbb{B}}$，并且 $((b_k)\phi_{\mathbb{B}})\Gamma_{\mathbb{A}} = (i_k, -1)$；同时 $((b_{-l})\phi_{\mathbb{B}})\Gamma_{\mathbb{A}} = (i_{-l}, 1)$。（2）存在无限序列 $b = b_0$、$a = b_{-1}$、b_{-2}、…… 属于 $\mathbb{B}$，以及 i_0、i_{-1}、i_{-2}、…… 属于 n，使得对于每个 $k \in -\mathbb{N}$，$(b_{k-1}, b_k) \in i_k^{\mathbb{B}}$，并且 $((b_k)\phi_{\mathbb{B}})\Gamma_{\mathbb{A}} = (i_k, -1)$。

目前我们考虑第一种情况。设 $(c_0, c_1) \in i_{-l+1}^{\mathbb{C}}$ 满足

$$((c_0)\phi_{\mathbb{C}}, (c_1)\phi_{\mathbb{C}}) = ((b_{-l})\phi_{\mathbb{B}}, (b_{-l+1})\phi_{\mathbb{B}}),$$

（由于 $\phi_{\mathbb{C}}$ 是一个商映射，这些对象必定存在）。任取一个将 (ε, i_{-l+1}) 映射到 (c_0, c_1) 的同态 $q_{\mathbb{C}}$：$F_n \to \mathbb{C}$。类似地，任取一个将 (ε, i_{-l+1}) 映射到 (b_{-l}, b_{1-l})、将 $(i_{-l+1}, i_{-l+1}i_{-l+2})$ 映射到 (b_{-l+1}, b_{-l+2})，依此类推的同态 $q_{\mathbb{B}}$：$F_n \to \mathbb{B}$。

注意，$((b_{-l})\phi_{\mathbb{B}})\Gamma_{\mathbb{A}} = (i_{-l}, 1)$，且 $((b_{-l+1})\phi_{\mathbb{B}})\Gamma_{\mathbb{A}} = (i_{-l+1}, -1)$。利用这一事实以及 $\mathbb{A}$ 是一个 n-CA 结构这一事实，通过常规的归纳论证可知，存在唯一的同态q：$F_n \to \mathbb{A}$，使得 $(\varepsilon)q = (b_{-l})\phi_{\mathbb{B}}$ 且 $(i_{-l+1})q = (b_{-l+1})\phi_{\mathbb{B}}$。特别地，由于这两个映射都具有这一性质，因此可得 $q_{\mathbb{C}}\phi_{\mathbb{C}} = q_{\mathbb{B}}\phi_{\mathbb{B}}$。

映射 $\langle q_{\mathbb{B}}, q_{\mathbb{C}} \rangle_{\mathbb{B} \times \mathbb{C}}$：$F_n \to \mathbb{B} \times \mathbb{C}$ 是一个同态（回顾定义 2.3）。由于 $q_{\mathbb{C}}\phi_{\mathbb{C}} = q_{\mathbb{B}}\phi_{\mathbb{B}}$，可知该同态的像包含于 $\mathbb{P}$，因此 $\mathbb{P}^{\mathrm{core}}$，最终，有序对 $(i_{-l+1}i_{-l+2}\ldots i_{-1},\ i_{-l+1}i_{-l+2}\ldots i_0)$ 在 $\langle q_{\mathbb{B}}, q_{\mathbb{C}} \rangle_{\mathbb{B} \times \mathbb{C}}$ 下的像由 π_0 映射为 (a, b)，如所需。

现在考虑这样的情形：存在无限序列 $b = b_0, a = b_{-1}, b_{-2}, \ldots$ 属于 $\mathbb{B}$，以及无限序列 $i_0, i_{-1}, i_{-2}, \ldots$ 属于 n，使得对每个 $k \in -\mathbb{N}$，$(b_{k-1}, b_k) \in i_k^{\mathbb{B}}$，且 $((b_k)\phi_{\mathbb{B}})\Gamma_{\mathbb{A}} = (i_k, -1)$。由于 $\mathbb{B}$ 是有限的，我们可以选取 $s, t \in \mathbb{N}$，使得 $-s < -t$ 且 $b_{-s} = b_{-t}$。令 $(c_0, c_1) \in i_{-s+1}^{\mathbb{C}}$ 满足 $((c_0)\phi_{\mathbb{C}}, (c_1)\phi_{\mathbb{C}}) = ((b_{-s})\phi_{\mathbb{B}}, (b_{-s+1})\phi_{\mathbb{B}})$。接着我们归纳地定义序列 $c_0, c_1, c_2, \ldots$ 如下：

(1) 令 c_0, c_1 如前所述。(2) 如果 c_k 已定义，且 $(c_k)\phi_{\mathbb{C}} = (b_{-j})\phi_{\mathbb{B}}$，其中 $-s \leq -j < -t$，那么我们选择c_{k+1} 使得 $(c_k, c_{k+1}) \in i_{-j+1}^{\mathbb{C}}$。

由于序列 $c_0, c_1, c_2, \ldots$ </style>是无限的，它必定会重复，因此不失一般性，我们可以假设所选序列最终是周期的。于是，通过改变 , c_1的选择，我们可以不失一般性地假设存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $l \in \mathbb{N}$，都有 $c_l = c_{l \bmod k}$。

现在我们可以定义从 F_n 到 $\mathbb{B}$ 与 $\mathbb{C}$的映射了。我们已经得到了若干值得注意的“循环”，即 c_0，c_1，……，$c_k = c_0$ 以及 b_{-s}，b_{1-s}，……，$b_{-t} = b_{-s}$。此外，这些循环分别被映射

到 $\phi_{\mathbb{C}}$ 与 $\phi_{\mathbb{B}}$，并映射到 $\mathbb{A}$ 中的某个公共循环 a_0，a_1，……，$a_p = a_0$（因此 k 与 $s-t$ 都是 p 的倍数，但不一定相等）。我们通过定义 $(\varepsilon)q_{\mathbb{C}} = c_0$ 来定义映射 $q_{\mathbb{C}}$：$F_n \to \mathbb{C}$，并按如下方式将这个同态归纳地扩展到整个 F_n：

(1) 如果 $(w_0w_1w_2\dots w_{l-1})q_{\mathbb{C}}$ 属于循环 c_0，c_1、……、$c_k = c_0$，且将 $w_0w_1w_2\dots w_l$ 映射到循环中的下一个/上一个元素会保持 q 是同态这一性质，那么就将 $w_0w_1w_2\dots w_l$ 映射到循环中的下一个/上一个元素。(2) 否则，将 $w_0w_1w_2\dots w_l$ 映射到 $\mathbb{C}$ 中任意一个能保持 $q_{\mathbb{C}}$ 是同态这一性质的元素。

我们类似地使用循环 b_{-s}，b_{1-s}、……、$b_{-t} = b_{-s}$ 定义映射 $q_{\mathbb{B}}$，并使用循环 a_0，a_1、……、$a_p = a_0$ 定义映射 $q_{\mathbb{A}}$。请注意，在构造 $q_{\mathbb{A}}$ 时，我们从不做任何任意选择，因为如果有可选项，就意味着 $\Gamma_{\mathbb{A}}$ 不是函数。由此可得

$$q_{\mathbb{B}}\phi_{\mathbb{B}} = q_{\mathbb{A}} = q_{\mathbb{C}}\phi_{\mathbb{C}}.$$

因此，$\langle q_{\mathbb{B}},\ q_{\mathbb{C}}\rangle_{\mathbb{B}\times\mathbb{C}}$ 是到 $\mathbb{P}^{\text{core}}$中的同态。容易验证，边（a，b）由 $q_{\mathbb{B}}$映射到满，因此我们再次得到所需结果。 ♢

根据定理 5.26，设 $\mathbb{D}$ 是一个 n-CA 结构，且存在商映射 $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^{\text{core}}$。通过定义 $\phi_{\mathbb{D},\ \mathbb{C}} := \psi\pi_1$ 和 $\phi_{\mathbb{D},\ \mathbb{B}} := \psi\pi_0$即可得出结论。□

定理 5.28（我们有一个投射弗雷歇类，预备知识：5.20、4.14、5.26、5.27）。对于每个 $n \geq 1$, n-*CA* 结构构成一个投射弗雷歇¨类´。

证明。 我们验证定义 5.20 的条件 (1)-(5)。

(1) 该类的定义性质是一个同构不变量，因此该类在同构下封闭。(2) 该类由有限签名中的有限结构组成，因此具有可数多个同构类型。根据定理 5.26，该类包含有限基数任意大的结构，因此也具有无限多个同构类型。(3) 根据定义，该类由有限结构组成。(4) 假设 $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{C}$ 是 n-CA 结构。注意，结构 $\mathbb{B}\times\mathbb{C}$ 是一个非空的 $\sigma_{b,\ n}$-结构，其中每个关系及其逆关系都是满射，而且投影映射 π_0 和 π_1 是商映射。根据定理 5.26，我们可以找到一个 n-CA 结构 $\mathbb{D}$，使得存在商映射 ψ: $\mathbb{D} \to \mathbb{B}\times\mathbb{C}$。映射 $\psi\pi_0$ 和 $\psi\pi_1$ 就是所需的商映射。(5) 这可由引理 5.27 直接得出。

□

定义 5.29（CA 极限，预备知识：5.22，5.28）。
对于每个 $n \geq 1$，定义 $n\mathbb{L}$ 为 n-CA 结构类的投射 Fr¨aiss´e 极限（见定理 5.22）。

既然对于所有 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，我们都有了所需的对象 $n\mathbb{L}$，接下来需要证明 $n\mathbb{L}$ 可以被视为 Aut$(2^{\mathbb{N}})^n$ 的泛型元素。

引理 5.30（ n-CA 结构中的分裂点，预备知识：5.26）。
假设 $\mathbb{S}$ 是一个 n-*CA* 结构，$i < n$、$p \in \mathbb{S}$、$k \geq 2$ 与 $(p)i^{\mathbb{S}} = \{q_0, q_1, \dots, q_{k-1}\}$。那么

存在一个 n-CA 结构 $\mathbb{S}_2$ 与商映射 $\phi:\ \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}$，满足 $(p)\phi^{-1} \geq k$，并且对于每个 $p' \in (p)\phi^{-1}$，集合 $((\{p'\})i^{\mathbb{S}_2})\phi$ 是一个单元素集。

证明。令 $\mathbb{T}$ 表示具有全集 $(\mathbb{S}\backslash\{p\}) \cup (\{p\} \times \{0,1,\ldots,k-1\})$ 的结构，关系将在后文定义（不妨设 $\{p\} \times \{0,1,\ldots,k-1\}$ 与 $\mathbb{S}$ 不相交）。定义 $\phi_{\mathbb{T}}:\ \mathbb{T} \to \mathbb{S}$ 为

$$(x)\phi_{\mathbb{T}} = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{if } x \in \mathbb{S}\backslash\{p\} \\ p & \text{if } x \in \{p\} \times \{0,1,\ldots,k-1\} \end{array} \right\}.$$

对于 $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}\backslash\{i\}$，我们定义

$$j^{\mathbb{T}} := \left\{ (a,b) \;\middle|\; ((a)\phi_{\mathbb{T}},(b)\phi_{\mathbb{T}}) \in j^{\mathbb{S}} \right\}$$

and

$$i^{\mathbb{T}} := \left\{ (a,b) \;\middle|\; ((a)\phi_{\mathbb{T}},(b)\phi_{\mathbb{T}}) \in i^{\mathbb{S}} \text{ and if } a=(p,l) \text{ then } b=q_l \right\}.$$

注意，$\phi_{\mathbb{T}}$ 是从 $\mathbb{T}$ 到 $\mathbb{S}$ 的商映射，并且每个 $j^{\mathbb{T}}$ 都是满射且具有满射逆像。因此，根据定理 5.26，存在一个 n-CA 结构 $\mathbb{S}_2$，其商结构为 $\mathbb{T}$。这两个商映射的复合给出了所需的商映射 ϕ。□

引理5.31（康托极限是康托空间，预备知识：3.20、5.23、5.30）。对于每个 $n \geq 1$，拓扑结构 $n\mathbb{L}$ 与康托集 $2^{\mathbb{N}}$ 同胚。

证明。由定理 3.20，只需证明 $n\mathbb{L}$非空、第二可数、零维、豪斯多夫、紧致且没有孤立点。根据定理 5.22，除没有孤立点这一点外，其余性质都显而易见。因此，我们证明 $n\mathbb{L}$ 没有孤立点。

反设 p 是 $n\mathbb{L}$的一个孤立点。因此，$\{\{p\}, n\mathbb{L}\backslash\{p\}\}$ 是 $n\mathbb{L}$的一个由既开又闭集组成的划分。根据定理 5.23 的第 (2) 部分，存在 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $n\mathbb{L}$ 的一个由既开又闭集组成的划分 $\mathbb{S}:$ $= \{C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}, \{p\}\}$，使得相应的商结构是一个 n-CA 结构。根据引理 5.30，存在一个 n-CA 结构 $\mathbb{S}_2$ 以及一个商映射 ϕ: $\mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}$，满足$(\{\{p\}\})\phi^{-1} \geq 2$（我们可以使用 $\Gamma_{\mathbb{S}}$ 来选取一个关系，从而保证这一点）。

由定理 5.23 的第 (1) 部分，不失一般性地假设 $\mathbb{S}_2$ 是 $n\mathbb{L}$ 的商结构（其元素是 $n\mathbb{L}$的开闭子集）。因此，将 $s \in \mathbb{S}$ 映射到 $\bigcup(\{s\})\phi^{-1}$ 的映射，是从 $\mathbb{S}$ 到 $n\mathbb{L}$的某个商结构的同构。由定理 5.23 的第 (3) 部分，我们可以找到一个拓扑同构 $h:\ n\mathbb{L} \to n\mathbb{L}$，使得对所有 $s \in \mathbb{S}$，都有 $(s)h = \bigcup(\{s\})\phi^{-1}$。令 $A,\ B \in (\{\{p\}\})\phi^{-1}$ 互不相同。由此可知，$(A)h^{-1}$ 和 $(B)h^{-1}$ 是 $\{p\}$的互不相交的非空子集，这就产生了矛盾。□

引理 5.32（康托尔极限关系是同胚，预备知识：1.5、3.18、5.31）。若 $n \geq 1$ 且 $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$，则 $i^{n\mathbb{L}}$ 是 $n\mathbb{L}$的同胚。

证明。我们首先证明 $i^{n\mathbb{L}}$ 是一个函数。任取 $x \in n\mathbb{L}$，并假设 $(x,y),(x,z) \in i^{n\mathbb{L}}$。只需证明 $y = z$。反设 $y \neq z$，并令 $\{U_y, U_z\}$ 为将 $n\mathbb{L}$ 划分成 $n\mathbb{L}$ 的互不相交的既开又闭子集的划分，其中 $y \in U_y$, $z \in U_z$。根据定理 5.23 的第（2）部分，存在该划分的一个有限细化 $\mathbb{S}$，其划分为既开又闭集，使得若将 $\mathbb{S}$ 视为 $n\mathbb{L}$的商结构，则 $\mathbb{S}$是一个 n-CA 结构。

利用包含 x 的 $\mathbb{S}$ 中的元素作为 p，令 ϕ 和 $\mathbb{S}_2$ 如引理 5.30 所述。由定理 5.22 的第 (3) 部分，存在连续商映射 $\psi:\ n\mathbb{L} \to \mathbb{S}_2$，使得 $\psi\phi$ 是一个映射，它将 $n\mathbb{L}$ 中的元素映射到包含该元素的 $\mathbb{S}$ 中的元素。

因此，根据 $\mathbb{S}_2$ 的选取，$(\{[x]_{\ker(\psi)}\})i^{n\mathbb{L}/\ker(\psi)}$ 中的每个元素都包含于 $\mathbb{S}$ 的某个公共元素中（因而只包含于 $\{U_x, U_y\}$ 的一个元素中）。这就产生了矛盾，因为 x 通过 $i^{n\mathbb{L}}$ 同时与 y 和 z 相关。

我们已经证明了 $i^{n\mathbb{L}}$ 是一个函数。由对称性，$(i^{n\mathbb{L}})^{-1}$ 也是一个函数，因此 $i^{n\mathbb{L}}$ 是一个双射。接下来只需证明 $i^{n\mathbb{L}}$ 是连续的。由于 $n\mathbb{L}$ 是一个拓扑结构，我们有$i^{n\mathbb{L}}$ 是闭集，因而是 $n\mathbb{L}^2$ 的紧致子空间（注 3.18）。由于 $i^{n\mathbb{L}}$ 是一个双射，映射π_0 和 π_1 从 $i^{n\mathbb{L}}$ 到 $n\mathbb{L}$ 都是双射。此外，作为投影，映射 $\pi_0 \restriction_{i^{n\mathbb{L}}}$、 $\pi_1 \restriction_{i^{n\mathbb{L}}}$ 都是连续的，因此它们是同胚，因为它们在紧豪斯多夫空间之间映射。由于函数 $i^{n\mathbb{L}}$ 等于 π_0 的逆关系与 π_1的复合（以 $i^{n\mathbb{L}}$ 为 π_0的定义域），结论得证。□

定理 5.33（参见 [23], $\mathbf{Aut}(2^{\mathbb{N}})$ 具有丰富泛型，预备知识：4.10、5.23、5.1、5.5、5.26、5.32、5.13）。
该作用共轭$_{\mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})}$ 具有丰富泛型（在$\mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})$上赋予紧开拓扑）。

证明。对所有 $f = (f_0,\ f_1,\ \ldots\ldots,\ f_{n-1}) \in \mathbf{Aut}(2^{\mathbb{N}})^n$，令 $\mathbb{S}_f$表示全集为 $2^{\mathbb{N}}$ 且对所有 $i < n$ 都满足 $i^{\mathbb{S}_f} = f_i$ 的 $\sigma_{b,\ n}$结构。我们证明集合

$$C := \left\{ f \in \mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})^n \;\middle|\; \mathbb{S}_f \cong n\mathbb{L} \right\}$$

是余瘦的。

设 $R = \left\{ \mathbb{R}_i \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$ 是一族 n-CA 结构，使得每个 n-CA 结构都与 R 中恰好一个元素同构。令 $\mathbf{Clo}(2^{\mathbb{N}})$ 表示 $2^{\mathbb{N}}$ 的既开又闭子集所成的集合，令 $\mathbf{CloP}(2^{\mathbb{N}})$ 表示 $2^{\mathbb{N}}$ 的有限划分为既开又闭集的集合。令 $\mathbf{PS}(2^{\mathbb{N}})$ 表示从 $\mathbf{CloP}(2^{\mathbb{N}})$ 中的元素到 R 中元素的满射所成的集合。令 QR 表示 R 中元素之间的商映射所成的集合。注意，集合 R，$\mathbf{Clo}(2^{\mathbb{N}})$，$\mathbf{CloP}(2^{\mathbb{N}})$，QR 和 $\mathbf{PS}(2^{\mathbb{N}})$ 都是可数的。

由定理 5.12 可知，形如

$$\left\{ f \in \mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}}) \;\middle|\; (U)f = V \right\} = B(U, V) \cap B(U^c, V^c)$$

其中 U，$V \in \mathbf{Clo}(2^{\mathbb{N}})$，构成 $\mathbf{Aut}(2^{\mathbb{N}})$ 上拓扑的一个子基。

断言：形如

$$U_\phi := \left\{ f \in \mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})^n \;\middle|\; \phi \text{ is a quotient map from } \mathbb{S}_f \text{ to } \mathrm{img}(\phi) \right\}$$

其中 ϕ 可以是从 $\mathbf{CloP}(2^{\mathbb{N}})$ 中的某个元素到一个 $\sigma_{b,\ n}$-结构的任意满射，它们构成 $\mathbf{Aut}(2^{\mathbb{N}})^n$ 上拓扑的一个既开又闭集基。

断言的证明：

令 ϕ 为从 $2^{\mathbb{N}}$ 的既开又闭集划分到一个 $\sigma_{b,\ n}$-结构的任意满射。要证明 U_ϕ 在紧开拓扑中是既开又闭的，注意到它是以下两个集合的交集

$$\bigcap_{\substack{i<n \\ (a,b)\in i^{\mathrm{img}(\phi)}}} \bigcup_{\substack{U,V\in \mathrm{Clo}(2^{\mathbb{N}}) \\ U\subseteq \bigcup((a)\phi^{-1}) \\ V\subseteq \bigcup((b)\phi^{-1})}} \left\{ (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}) \in \mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})^n \;\middle|\; (U)f_i = V \right\},$$

$$\bigcap_{\substack{i<n \\ (a,b)\notin i^{\mathrm{img}(\phi)}}} \bigcup_{\substack{V\in \mathrm{Clo}(2^{\mathbb{N}}) \\ V\cap\left(\bigcup((b)\phi^{-1})\right)=\varnothing}} \left\{ (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}) \in \mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})^n \;\middle|\; \left(\bigcup((a)\phi^{-1})\right)f_i = V \right\}.$$

现在我们需要证明每个如下形式的集合

$$\bigcap_{j<k}\left\{(f_0,f_1,\dots,f_{n-1})\in \mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})^n \;\middle|\; (U_j)f_i = V_j\right\}$$

对于 $i<n$、$k\in\mathbb{N}$、U_0、U_1、……、$U_{k-1}$$V_0$、$V_1$、……、$V_{k-1}\in$，Clo($2^{\mathbb{N}}$) 是形如 U_ϕ 的集合的并集。任取上述集合中的 $f=$(f_0、f_1、……、f_{n-1})。令 P 为 $2^{\mathbb{N}}$ 的一个划分，使其划分为既开又闭集，并且集合 U_j 和 V_j 中的每一个都可以表示为 P 中元素的并集；令 ϕ 为从 P 到 P 的恒等映射（其中我们将第二个 P 视为 $\mathbb{S}_f$ 的商结构）。注意到 $f\in U_\phi$，并任取 $g=$(g_0、g_1、……、g_{n-1}) $\in U_\phi$。则对于所有满足 $F\subseteq U_j$ 的 $j<k$ 和 $F\in P$，有 (F)$g_i\subseteq V_j$。类似地，对于所有满足 $F\cap U_j=\varnothing$ 的 $j<k$ 和 $F\in P$，有 (F)$g_i\cap V_j=\varnothing$。由于 g 是任意的，因此可得

$$U_\phi\subseteq\bigcap_{j<k}\left\{(f_0,f_1,\dots,f_{n-1})\in \mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})^n \;\middle|\; (U_j)f_i = V_j\right\}$$

如所要求。♢

接着定义：

$$U_1 := \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{\substack{\phi\in \mathrm{PS}(2^{\mathbb{N}})\\ \mathrm{img}(\phi)=\mathbb{R}_i}} U_\phi,$$

$$U_2 := \bigcap_{P\in \mathrm{CloP}(2^{\mathbb{N}})}\bigcup_{\substack{\phi\in \mathrm{PS}(2^{\mathbb{N}})\\ \ker(\phi)\text{ refines }P}} U_\phi,$$

$$U_3 := \bigcap_{\substack{\phi\in \mathrm{PS}(2^{\mathbb{N}})\\ g\in \mathrm{QR}\\ \mathrm{img}(g)=\mathrm{img}(\phi)}}\left((\mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})^n\backslash U_\phi)\cup\left(\bigcup_{\substack{\psi\in \mathrm{PS}(2^{\mathbb{N}})\\ \mathrm{dom}(g)=\mathrm{img}(\psi)\\ \psi g=\phi}} U_\psi\right)\right).$$

由定理 5.22 可得 $C=U_1\cap U_2\cap U_3$。

我们现在已经证明，C 是开集的可数交。现在只需证明 C是稠密的。设 $\phi\in$PS($2^{\mathbb{N}}$)是从 $2^{\mathbb{N}}$ 的一个既开又闭划分到一个$\sigma_{b,\ n}$-结构的任意满射。若 $U_\phi\neq\varnothing$，则 img(ϕ)具有这样的性质：它的所有关系都是满射且其逆像也是满射。因此，根据定理 5.26，不失一般性，我们可以假设 img(ϕ)是一个 n-CA 结构。

只需证明 $U_\phi\cap C$ 非空。根据引理 5.31 和 5.32，固定 $f\in C$。由于$f\in U_1$，存在 $\phi'\in$ PS($2^{\mathbb{N}}$)，使得 img(ϕ') = img(ϕ) 且 $f\in U_{\phi'}$。定义 q：$2^{\mathbb{N}}\to$img(ϕ)如下：(x)q = (U)ϕ'，其中 U 是包含 x的 dom(ϕ')中的元素。我们有 q：$\mathbb{S}_f\to$ img(ϕ)是一个连续商映射。任取 h，它是 $2^{\mathbb{N}}$ 的一个同胚，并且对所有 $p\in$img(ϕ)，都有 (($\{p\}$)q^{-1})$h=\bigcup$(($\{p\}$)ϕ^{-1})（定理 5.23 (3)）。因此 (f, h) conj^n 自同构群($2^{\mathbb{N}}$) 是 $C\cap U_\phi$ 中的一个元素，如所要求。□

5.3. **群的自动连续性**。在本小节中，我们利用前两个小节中关于丰富泛型的结果，证明从 Sym($\mathbb{N}$) 或 Aut($2^{\mathbb{N}}$) 到第二可数群的所有同态都是连续的。

这是通过 Kechris 与 Rosendal 的论文 [22] 中的一个结果（定理 5.38）实现的，该结果指出，任何共轭作用具有丰富泛型的波兰群都将满足这一条件。本小节中的结果

在文献中都分别以某种形式出现过，但我们将它们纳入其中，以便给出定理 5.39 的自洽证明。

引理 5.34（可数覆盖，预备知识：3.5、3.9、3.26、4.10）。
设 G 是一个单位元为 1_G 的第二可数拓扑群。若 N 是 1_G 的一个邻域，则存在一个由 G 中元素组成的序列 $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $G=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Ng_i$。

证明。由于 G 是一个拓扑群，且 $1_G=1_G^{-1}$，可知 $A:=N\cap N^{-1}$ 是 1_G 的一个邻域。设 B 是 G 的一个可数基，且 $\varnothing\notin B$。根据选择公理，取一个由 G 中元素组成的序列 $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得 B 的每个元素都包含某个 g_i，其中 $i\in\mathbb{N}$。因此，$\left\{g_i \,\middle|\, i\in\mathbb{N}\right\}$ 是 G 的一个稠密子集。只需证明 $G=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Ng_i$。任取 $g\in G$。集合 Ag 是 g 的一个邻域，因此存在 $i\in\mathbb{N}$ 使得 $g_i\in Ag$。由此可得 $g\in A^{-1}g_i=Ag_i\subseteq Ng_i$，证毕。□

以下定理通常被称为埃夫罗斯定理的（部分）内容。更多信息请参见[36]，例如。

定理 5.35（埃夫罗斯定理，预备知识：3.4、3.22、3.25、3.27、4.10、5.2、5.34）。设 G 是一个波兰群，并设 $a\colon\ X\times G\to X$ 是 G 在一个自身非瘦的可度量化空间 X 上的连续传递作用。若 N 是 G中 1_G 的一个邻域，且$x\in X$，则（x，N）a 是 X中 x 的一个邻域。

证明。令令 d_G 为一个与 G相容的完备度量，并令 d_X 为一个与 X相容的度量 .

断言：若 A 是 G 中 1_G 的一个邻域，且 $z\in X$，则 $z\in((z,\ A)a)^{-\circ}$。
断言的证明：令 A_2 为 G 中 1_G 的一个邻域，使得 $A_2^{-1}=A_2$ 与 $A_2^2\subseteq A$。根据引理 5.34，令 $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为 G 中元素构成的一个序列，使得$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_2t_i=G$。由此可得$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(z,A_2t_i)a=X$。由于 X 在自身中非瘦，故集合 $(z,A_2t_i)a$ 中至少有一个处处稠密，因此 $(z,A_2)a$ 处处稠密。若 $b\in A_2$ 满足 $(z,b)a\in((z,A_2)a)^{-\circ}$，则 $z\in(((z,A_2)a)^{-\circ},b^{-1})a=((z,A_2b^{-1})a)^{-\circ}\subseteq((z,A)a)^{-\circ}$，如所需。♢

设 V 是 1_G 的一个开邻域，使得 $V^{-1}=V$ 且 $(V^-)^2\subseteq N$。由断言可得$x\in((x,\ V)a)^{-\circ}$。因此，只需证明 $((x,\ V)a)^{-\circ}\subseteq(x,\ N)a$。

任取 $y\in((x,\ V)a)^{-\circ}$。由于 V 是逆封闭的，同理可得 $x\in((y,\ V)a)^{-\circ}$。我们在 G 中归纳地定义序列 $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$，如下所示：

(1) 选取 $g_0\in V$ 使得

$$(x,g_0)a\in B_{d_X}\left(y,\frac{1}{2^0}\right)\cap\left(\left(y,B_{d_G}\left(1_G,\frac{1}{2^0}\right)\cap V\right)a\right)^{-\circ}$$

（我们可以这样做，因为 $(x,\ V)a$ 在 y 的一个邻域中稠密。）

（2）选取 $h_0\in B_{d_G}\left(1_G,\ \frac{1}{2^0}\right)\cap V$ 使得

$$(y,h_0)a\in B_{d_X}\left((x,g_0)a,\frac{1}{2^1}\right)\cap\left(\left(x,B_{d_G}\left(g_0,\frac{1}{2^1}\right)\cap V\right)a\right)^{-\circ}$$

（我们可以这样做，因为 $\left(y,B_{d_G}\left(1_G,\frac{1}{2^0}\right)\cap V\right)a$ 在（x,g_0）的某个邻域内稠密a）。

(3) 假设 g_{i-1} 与 h_{i-1} 已定义。选择 $g_i\in B_{d_G}\left(g_{i-1},\ \frac{1}{2^i}\right)\cap V$使得

$$(x,g_i)a\in B_{d_X}\left((y,h_{i-1})a,\frac{1}{2^i}\right)\cap\left(\left(y,B_{d_G}\left(h_{i-1},\frac{1}{2^i}\right)\cap V\right)a\right)^{-\circ}$$

（我们可以这样做，因为 $\left(x,\ B_{d_G}\left(g_{i-1},\ \frac{1}{2^i}\right)\cap V\right)a$ 在 $(y,\ h_{i-1})a$的某个邻域内稠密。）

(4) 假设 g_i 和 h_{i-1} 已定义。选取 $h_i\in B_{d_G}\left(h_{i-1},\ \frac{1}{2^i}\right)\cap V$使得

$$(x,h_i)a\in B_{d_X}\left((x,g_i)a,\frac{1}{2^{i+1}}\right)\cap\left(\left(x,B_{d_G}\left(g_i,\frac{1}{2^{i+1}}\right)\cap V\right)a\right)^{-\circ}$$

（因为 $\left(y,\ B_{d_G}\left(h_{i-1},\ \frac{1}{2^i}\right)\cap V\right)a$ 在 $(x,\ g_i)a$的某个邻域中稠密，我们可以这样做。）

根据构造，序列 $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 与 $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 都是柯西序列，因此分别收敛到某个 $g,\ h\in V^-$。由于我们的作用是连续的，因此 $((x,\ g_i)a)_{i\in\mathbb{N}}$ 与 $((y,\ h_i)a)_{i\in\mathbb{N}}$ 分别收敛到 $(x,\ g)a$ 和 $(y,\ h)a$。

对于所有 $i\in\mathbb{N}$，我们都有 $((x,g_i)a,(y,h_i)a)d_X\le\frac{1}{2^i}$，因此必有 $(x,g)a=(y,h)a$。于是$y=(x,gh^{-1})a$，因此 $y\in(x,V^-(V^{-1})^-)a=(x,(V^-)^2)a\subseteq(x,N)a$，如所需。□

引理 5.36（参见《[22], 扩展泛型元组》中的引理 6.6，预备知识：3.5、3.25、3.30、3.31、3.28、5.5、5.35）。

假设 G 是一个波兰群，作用 conj_G 具有丰富泛型，$A\subseteq G$ 在 G中非瘦，$(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})\in G^n$ 在 conj_G^n下有一个余瘦轨道，$B\subseteq G$满足：对于 G 的所有余瘦子集C，集合 $B\cap C$ 在 G中稠密，并且 N是 G的单位元 1_G 的一个邻域。

在这种情况下，存在 $(a,g,b)\in A\times N\times B$，使得

$$((x_0,x_1,\dots,x_{n-1},a),g)\,\mathrm{conj}_G^n=(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},b)$$

在 conj_G^{n+1} 下有余瘦轨道。

证明。在此证明中，我们称 G^n 的一个元素为泛型，如果它在 conj_G^n下的轨道是余瘦的。根据定理 3.28 和 3.31，存在一个泛型 $(z_0,z_1,\dots,z_{n-1})\in G^n$，使得

$$G\approx_G\left\{y\in G\;\middle|\;(z_0,z_1,\dots,z_{n-1},y)\text{ is generic}\right\}.$$

设 $h\in G$使得 $(z_0,\ z_1,\ \dots,\ z_{n-1})=((x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{n-1})\ h)\mathrm{conj}_G^n$，我们现在有：

$$\begin{aligned}
G&=hGh^{-1}\\
&\approx_G h\left\{y\in G\;\middle|\;(z_0,z_1,\dots,z_{n-1},y)\text{ is generic}\right\}h^{-1}\\
&=\left\{hyh^{-1}\;\middle|\;(z_0,z_1,\dots,z_{n-1},y)\text{ is generic}\right\}\\
&=\left\{y\in G\;\middle|\;(z_0,z_1,\dots,z_{n-1},h^{-1}yh)\text{ is generic}\right\}\\
&=\left\{y\in G\;\middle|\;((x_0,x_1,\dots,x_{n-1},y),h)\,\mathrm{conj}_G^n\text{ is generic}\right\}\\
&=\left\{y\in G\;\middle|\;(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},y)\text{ is generic}\right\}.
\end{aligned}$$

设 $a\in A$使得 $(x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{n-1},\ a)$ 是泛型。设 $G_{x_0,\ x_1,\dots,x_{n-1}}$ 是 G 中与 $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{n-1}$ 中每个元素都可交换的元素所构成的子群。注意

$$\left\{y\in G\;\middle|\;(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},y)\text{ is generic}\right\}=(a,G_{x_0,x_1,\dots,x_{n-1}})\,\mathrm{conj}_G.$$

此外，根据定理 3.28，这个集合是余瘦的，因此在 G 中非瘦。特别地，根据注 3.30，空间 $(a,\ G_{x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{n-1}})$ conj_G 在自身中非瘦。由于 $G_{x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{n-1}}\le G$ 是闭集，它是波兰空间，因此根据定理 5.35，我们有 $(a,\ G_{x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{n-1}}\cap N)$ conj_G 是 a 在

空间 $(a,\ G_{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}})$ conj$_G$中的一个邻域。根据假设，$B \cap (a,\ G_{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}})$ conj$_G$ 在 G 中稠密，因此特别地，可得存在某个 $b \in B \cap (a,\ G_{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}} \cap N)$ conj$_G$，满足要求。□

引理 5.37（参见 [22],《泛型康托映射》，预备知识：3.19、4.28、5.36）。假设 G 是一个波兰群，作用 共轭$_G$ 具有丰富泛型，$A \subseteq G$ 在 G中不是瘦集，并且 $B \subseteq G$ 满足：对于 G 的所有余瘦子集 C，集合 $B \cap C$ 在 G中稠密。

在这种情况下，存在一个从 $2^{\mathbb{N}} \to G$ 到 $a \mapsto h_a$ 的连续映射，使得如果 $p \in \{0,1\}^*$、a、$b \in 2^{\mathbb{N}}$、$p0 < a$ 和 $p1 < b$，那么 $h_a^{-1} A h_a \cap h_b^{-1} B h_b \neq \varnothing$（回忆定义 *4.28*）。

证明。设 d 是 G上的一个完备度量。我们归纳地定义从 $\{0,1\}^* \to G$到 $w \to h_w$和 $w \to x_w$ 的映射，使其满足以下性质：

(1) 如果 $w \in \{0,1\}^n$，则元组 $(x_{w\restriction_0},\ x_{w\restriction_1},\ x_{w\restriction_2}, \ldots,\ x_w)$ 在 conj$_G^{n+1}$ 下具有泛型轨道。(2) $h_\varepsilon = 1_G$。(3) 如果 $w \in \{0,1\}^n$ 与 $(n-1)w = 0$，则 $x_w \in A$。(4) 如果 $w \in \{0,1\}^n$ 与 $(n-1)w = 1$，则 $x_w \in B$。(5) 如果 $w \in \{0,1\}^n$ 与 $(n-1)w = 1$，则 $h_w = h_{w\restriction_{n-1}}$。(6) 如果 w_0、$w_1 \in \{0,1\}^n$、$(n-1)w_0 = 0$、$(n-1)w_1 = 1$ 且 $w_0 \restriction_{n-1} = w_1 \restriction_{n-1}$，则 $(h_{w_0}, h_{w_1})d \leq \frac{1}{2^n}$；此外，还存在某个 $g \in G$，它与 $x_{w_0\restriction_0}$、$x_{w_0\restriction_1}$、$\ldots$、$x_{w_0\restriction_{n-1}}$ 中的每一个都可交换，并且 (x_{w_0}, g) conj$_G = x_{w_1}$ 且 $h_{w_0} = g h_{w_1}$。 —

我们通过定义 $h_\varepsilon = 1_G$ 和 x_ε 在 conj$_G$ 下具有余瘦轨道来实现这一点，然后对 n 使用归纳法定义其余部分（归纳步骤由引理 5.36 得出）。

对于 $w \in 2^{\mathbb{N}}$，我们将 h_w 定义为序列 $(h_{w\restriction_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限（根据构造，该序列是柯西序列，因而收敛）。根据构造，如果 $a \neq b \in 2^{\mathbb{N}}$，$n = \min\left\{ i \in \mathbb{N} \;\middle|\; (i)a \neq (i)b \right\}$ 与 $(n)a = 0$，那么 $x_{a\restriction_{n+1}} \in A$，$x_{b\restriction_{n+1}} \in B$。还要注意，（根据条件 (5) 和 (6)），序列 $((x_{a\restriction_{n+1}},\ h_{a\restriction_k})$ conj$_G)_{k\geq n+1}$ 和 $((x_{b\restriction_{n+1}},\ h_{b\restriction_k})$ conj$_G)_{k\geq n+1}$ 是常序列。因此：

$$\begin{aligned}
(x_{a\restriction_{n+1}}, h_a)\,\mathrm{conj}_G &= (x_{a\restriction_{n+1}}, h_{a\restriction_{n+1}})\,\mathrm{conj}_G \\
&= (x_{a\restriction_{n+1}}, g h_{b\restriction_{n+1}})\,\mathrm{conj}_G \qquad \text{where } g \text{ is as in Condition (6)} \\
&= (x_{b\restriction_{n+1}}, h_{b\restriction_{n+1}})\,\mathrm{conj}_G \\
&= (x_{b\restriction_{n+1}}, h_b)\,\mathrm{conj}_G\,.
\end{aligned}$$

特别地，这个值是 $h_a^{-1} A h_a \cap h_b^{-1} B h_b$ 的一个元素，正如所要求的。 □

定理 5.38（参见 [22],《充分连续性》，预备知识：4.3、5.37）。如果 G 是一个波兰群，且作用 共轭$_G$ 具有丰富泛型，那么从 G 到第二可数拓扑群的每个同态都是连续的。

证明。设 H 是一个第二可数拓扑群。设 $\phi\colon G \to H$ 是一个同态。我们需要证明 ϕ 在 1_G 处连续（即每个 1_H 的邻域的原像都是 1_G 的邻域）。设 N 是 1_H 的一个邻域，设 V 是 1_H 的一个逆封闭邻域，且满足 $V^{20} \subseteq N$。定义 $A := (V)\phi^{-1}$，我们有

$$G = \bigcup_{h \in (G)\phi} (Vh)\phi^{-1}.$$

由引理 5.34（因为 $(G)\phi$ 是第二可数的），存在一个序列 $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$，满足

$$G=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(V(g_i)\phi)\phi^{-1}=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}Ag_i.$$

因此，A 在 G中不是瘦集。

断言：存在一个非空开 $U\subseteq G$，使得 $U\cap A^5$ 在 U中是余瘦的。

断言的证明：假设 A^5 在任何非空开集 U中都不是余瘦的。由此可得$B:=(A^5)^c$ 在任何非空开集中都不是瘦集。若 C 在 G中是余瘦的，则 C 在 G 的所有非空开子集中都是余瘦的，因此 $B\cap C$ 在 G 中稠密。根据引理 5.37，取一个从 $2^{\mathbb{N}}$ 到 $w\to h_w$ 的连续映射，使得若 $p\in\{0,1\}^*$, $a,\ b\in 2^{\mathbb{N}}$, $p0\leq a$ 且 $p1\leq b$，则 $(h_a^{-1}Ah_a)\cap(h_b^{-1}Bh_b)\neq\varnothing$。

若 $h\in G$，则

$$(h^{-1}Ah)\cap(h^{-1}Bh)=(h^{-1}Ah)\cap(h^{-1}((A^5)^c)h)\subseteq(h^{-1}Ah)\cap(h^{-1}(A^c)h)=\varnothing.$$

由此可得，映射 $w\to h_w$ 是单射。由于 $2^{\mathbb{N}}$ 不可数，必定存在 $i\in\mathbb{N}$ 和 $a\neq b\in 2^{\mathbb{N}}$，使得 $h_a,\ h_b\in Ag_i$。不妨假设存在 $p\in\{0,1\}^*$，使得 $p0\leq a$且 $p1\leq b$。

注意到

$$\begin{aligned}(A,h_ah_b^{-1})\operatorname{conj}_G&=(A,h_ag_i^{-1}g_ih_b^{-1})\operatorname{conj}_G\\&=(h_bg_i^{-1})(h_ag_i^{-1})^{-1}A(h_ag_i^{-1})(h_bg_i^{-1})^{-1}\\&\subseteq A^5.\end{aligned}$$

但根据假设，$B,\ h_b$ 共轭 $_G\cap(A,\ h_a)$共轭$_G\neq\varnothing$，因此 $B\cap(A,\ h_ah_b^{-1})$共轭$_G\neq\varnothing$，这就产生了矛盾。 ♢

因此，存在一个非空开集，是 G 的子集，其中 A^5 是余瘦的。由于 A （从而 A^5）是逆封闭的，故 A^{10} 在 1_G 的某个开邻域 U 中是余瘦的。令 $h\in U$ 为任意元素。我们有 $U\cap Uh$ 是 h 的一个开邻域。因此，$A^{10}\cap A^{10}h$ 在 $U\cap Uh$ 中是余瘦的。所以存在 $h_0,\ h_1\in A^{10}$，使得 $h_0=h_1h$。由此可得 $h\in A^{20}$。

由于 h 是任意的，我们得到 $U\subseteq A^{20}\subseteq(N)\phi^{-1}$，并且 ϕ 如要求是连续的。 □

定理 5.39 （丰富的自动连续性例子，预备知识：4.3、5.37）。
如果 G 是以下拓扑群之一，那么从 G到第二可数拓扑群的所有同态都是连续的。

(1) 对称群$(\mathbb{N})$ 取逐点拓扑（回顾命题 *5.17*）。(2) 自同构群$(2^{\mathbb{N}})$ 取紧开拓扑（回顾命题 *5.14*）。

证明。 根据命题 5.17 和 5.14，群 Sym(ℕ) 和 Aut($2^{\mathbb{N}}$) 分别是波兰群。此外，根据定理 5.18 和 5.33，我们分别知道 conj$^{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}$ 与 conj$_{\mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})}$ 具有丰富泛型。由此，结论可由定理 5.38 得出。□

5.4. **Rubin 定理**。Rubin 定理最初由 Matatyahu Rubin 在 [32] 推论 3.5 中证明。该定理表明，对于给定的群，它至多只有一种方式能在某个“良好”的拓扑空间上“良好地”作用（见定理 5.49）。特别是，该拓扑空间完全可以由群构造出来。本小节将给出 Rubin 定理的证明，并以该定理的推论

（推论 5.50）作结；我们将在第 4 部分用到这一推论。本文作者通过 Francesco Matucci 和 James Belk 根据 Rubin 原始证明整理的一组笔记，了解到 Rubin 的证明。这里给出的是该证明的一个简化版本，省去了对布尔代数的所有引用，并明确描述了给定群的 Rubin 作用（见定义 5.47）。

定义 5.40（支集与固定点，预备知识：3.14、4.11、5.2）。
设 G 是一个群，$a\colon X\times G\to X$ 是 G 在拓扑空间 X 上的连续作用，且 $g\in G$。我们定义

$$\mathrm{supt}_a(g):=\{x\in X:(x,g)a\neq x\},\quad \mathrm{fix}_a(g):=\{x\in X:(x,g)a=x\}.$$

此外，若 $U\subseteq X$，则我们定义

$$G_{U,a}:=\{g\in G:\mathrm{supt}_a(g)\subseteq U\}.$$

不难验证，$G_{U,a}$ 总是 G 的一个子群；若 X 是豪斯多夫的，则集合 $\mathrm{supt}_a(g)$ 总是开集，而集合 $\mathrm{fix}_a(g)$ 总是闭集。
定义 5.41（局部移动，预备知识：3.5、3.26、5.40）。
若 $a\colon X\times G\to X$ 是群 G 在拓扑结构 X 上的一个作用，则称 a 为局部移动的，如果对所有 $x\in X$ 以及 x 的邻域 U，都有 $x\in((x,G_{U,a})a)^{-\circ}$。

支撑集（定义 5.40）正是构造拓扑空间的关键。由于我们对作用施加的限制，这类集合之间的相互关系将完全决定我们所需的拓扑空间。

下面的引理（引理 5.42）是我们仅凭群来理解群在这些集合上的作用的方法。

引理 5.42（支集技巧，预备知识：3.5、5.7、5.8、5.40）。
若 $a\colon X\times G\to X$ 是群 G 在拓扑空间 X 上的连续作用，且 f、$g\in G$，则

$$\mathrm{supt}_a((f,g)\,\mathrm{conj}_G)=(\mathrm{supt}_a(f),g)a,$$

$$\mathrm{supt}_a([f,g])\subseteq\mathrm{supt}_a(f)\cup(\mathrm{supt}_a(f),g)a,\quad \textit{and}\quad \mathrm{supt}_a([f,g])\subseteq\mathrm{supt}_a(g)\cup(\mathrm{supt}_a(g),f)a.$$

此外，若 X 是豪斯多夫的，且 $x\in$ 支撑$_a(f)$，则存在 x 的一个开邻域 U，使得$U\subseteq$支撑$_a(f)$且 $(U,\ f)a\cap U=\varnothing$。

证明。第一个等式可按如下方式理解：

$$\begin{aligned}
x\in\mathrm{supt}_a((f,g)\,\mathrm{conj}_G)&\iff(x,(f,g)\,\mathrm{conj}_G)a\neq x\\
&\iff(x,g^{-1}fg)a\neq x\\
&\iff(x,g^{-1}f)a\neq(x,g^{-1})a\\
&\iff((x,g^{-1})a,f)a\neq(x,g^{-1})a\\
&\iff(x,g^{-1})a\in\mathrm{supt}_a(f)\\
&\iff x\in(\mathrm{supt}_a(f),g)a.
\end{aligned}$$

现在证明第一个包含关系，第二个包含关系的证明类似。由第一个等式可知，如果 $x\notin\mathrm{supt}_a(f)\cup(\mathrm{supt}_a(f)\ g)a$，那么 $x\in\mathrm{fix}_a(f)\cap\mathrm{fix}_a((f,g)\,\mathrm{conj}_G)=\mathrm{fix}_a(f^{-1})\cap$

$\mathrm{fix}_a((f,g)\,\mathrm{conj}_G)$。因此特别地，如果 $x \notin \mathrm{supt}_a(f) \cup (\mathrm{supt}_a(f)\ g)a$，那么

$$(x,[f,g])a = (x, f^{-1}(f,g)\,\mathrm{conj}_G)a = (x,(f,g)\,\mathrm{conj}_G)a = x,$$

包含关系成立。

最后，设 X 为豪斯多夫空间，且 $x \in \mathrm{supt}_a(f)$。设 U_0, U_1 为分别包含 $x, (x,f)a$ 的互不相交开集。由于 X 为豪斯多夫空间，$\mathrm{supt}_a(f)$ 是 x 和 $(x,f)a$ 二者的开邻域。因此，将 U_0, U_1 分别替换为它们与 $\mathrm{supt}_a(f)$ 的交集后，不妨设 U_0, U_1 都包含于 $\mathrm{supt}_a(f)$ 中。令 $U := U_0 \cap (U_1, f^{-1})a$。集合 U 就是 x 所需的邻域。□

在继续进行主要证明之前，我们仍需建立的主要工具，是一种纯代数的方法，用于描述支撑集（定义 5.40）之间的比较方式。这一作用由“代数不相交”这一概念承担（正如我们将在定理 5.44 中看到的）。

定义 5.43 (代数不相交，预备知识：5.8、5.6)。
若 G 是一个群且 $f, g \in G$，则称 f 与 g 代数不相交，如果对于所有 $h \in G \backslash C_G(f)$，都存在 $h_{0,g}, h_{1,g} \in C_G(g)$，使得 $[[h, h_{0,g}], h_{1,g}]$ 是 $C_G(g)$ 的非单位元。

定理 5.44 (不相交与代数不相交，预备知识：3.10、3.14、5.41、5.42、5.43)。设 X 是一个没有孤立点的豪斯多夫拓扑空间，G 是 X 上的同胚群，且自然作用 $a : X \times G \to X$ 由 $(x,g)a = (x)g$ 定义，并且是局部移动的。若 $f, g \in G$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{supt}_a(f) \cap \mathrm{supt}_a(g) = \varnothing \Rightarrow\ & f \textit{ is algebraically disjoint from } g \\ & \Rightarrow \mathrm{supt}_a(f) \cap \mathrm{supt}_a(g^{12}) = \varnothing.\end{aligned}$$

证明。首先，假设 $\mathrm{supt}_a(f) \cap \mathrm{supt}_a(g) = \varnothing$。令 $h \in G \backslash C_G(f)$，并令 $p \in \mathrm{supt}_a(f) \cap \mathrm{supt}_a(h)$。由引理 5.42，取 U_0 为 p 的一个邻域，且包含于 $\mathrm{supt}_a(f) \cap \mathrm{supt}_a(h)$，使得 $(U_0, h)a \cap U_0 = \varnothing$。由于 a 是局部移动的，且 X 是豪斯多夫的并且没有孤立点，我们可以选取 $h_{0,g} \in G_{U_0,a}$，使得 $(p)h_{0,g} \neq p$。类似地，取 $U_1 \subseteq U_0$ 为 p 的一个邻域，使得 $(U_1, h_{0,g})a \cap U_1 = \varnothing$，并取 $h_{1,g} \in G_{U_1,a}$，使得 $(p)h_{1,g} \neq p$。

由引理 5.42，$\mathrm{supt}_a(h^{-1}h_0^{-1}{}_{,g}h) \cap U_1 = \varnothing$，因此 $[h, h_{0,g}]$ 与 $h_{0,\,g}$ 的作用在 U_1 上一致。类似地，$[h_{0,g}, h_{1,g}]$ 与 $h_{1,\,g}$ 的作用在 U_1 上一致，由此可得

$$(p)[[h, h_{0,g}], h_{1,g}] = (p)[h_{0,g}, h_{1,g}] = (p)h_{1,g} \neq p.$$

所以 $[[h, h_{0,g}], h_{1,g}] \neq \mathrm{id}_X$。此外，根据引理 5.42，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{supt}_a([[h, h_{0,g}], h_{1,g}]) &\subseteq \mathrm{supt}_a(h_{1,g}) \cup (\mathrm{supt}_a(h_{1,g}), [h, h_{0,g}])a \\ &= \mathrm{supt}_a(h_{1,g}) \cup (\mathrm{supt}_a(h_{1,g}), h_{0,g})a \subseteq U_0 \cup U_1 \subseteq \mathrm{supt}_a(f).\end{aligned}$$

由于 $h_{0,\,g}$，$h_{1,\,g}$ 和 $[[h, h_{0,g}], h_{1,g}]$ 的支集均与 g 不相交，它们都与 g 可交换，因此第一个蕴含关系成立。

现在假设 f 与 g 代数不相交。反设 $x \in \mathrm{supt}_a(f) \cap \mathrm{supt}_a(g^{12})$。注意到

$$\mathrm{supt}_a(g^{12}) \subseteq \bigcap_{1 \leq i \leq 4} \mathrm{supt}_a(g^i).$$

由引理 5.42可知，我们可以找到 x 的一个邻域 U，使得

$$(U)f \cap U = (U)g \cap U = (U)g^2 \cap U = (U)g^3 \cap U = (U)g^4 \cap U = \varnothing.$$

注意，集合 $\{(U)g^i : 0 \le i \le 4\}$ 两两不相交。由于 G 是局部移动的，且 X 是没有孤立点的豪斯多夫空间，我们可以选取 G_U中的一个元素 h，使得 $_a\backslash\{\mathrm{id}_X\}$。由引理 5.42，$\mathrm{supt}_a(h) \cap \mathrm{supt}_a(f^{-1}hf) = \varnothing$，特别是 $h \in G\backslash C_G(f)$。因此，根据假设，我们可以找到 $h_{0,g}, h_{1,g} \in C_G(g)$，使得 $h_2 := [[h, h_{0,g}], h_{1,g}] \in C_G(g)\backslash\{\mathrm{id}_X\}$。令 $P := \{\mathrm{id}_X, h_{0,g}, h_{1,g}, h_{0,g}h_{1,g}\} \subseteq C_G(g)$。由引理 5.42（应用两次），我们有

$$\mathrm{supt}(h_2) \subseteq \bigcup_{p \in P} (U)p.$$

由于 $h_2 \neq \mathrm{id}_X$，因此存在某个 $y \in U$ 和 $k \in P$，使得 $((y)k)h_2 \neq (y)k$。由于 $g^{-1}h_2g = h_2$，对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，我们都有 $\mathrm{supt}_a(h_2)g^i = \mathrm{supt}_a(h_2)$。此外，由于集合 $\{(U)g^i : 0 \le i \le 4\}$ 两两不相交，当 $|i-j| \in \{1,2,3,4\}$ 时，我们有 $(y)kg^i = (y)g^ik \neq (y)g^jk = (y)kg^j$。因此

$$|\{(y)kg^{-i} : 0 \le i \le 4\}| = 5.$$

由于 $|P| = 4$和 $\{ykg^{-i} : 0 \le i \le 4\} \subseteq \mathrm{supt}_a(h_2) \subseteq \bigcup_{p \in P}(U)p$，因此存在某个 $p \in P$和 $0 \le i < j \le 4$，使得 $\{(y)kg^{-i}, (y)kg^{-j}\} \subseteq (U)p$。于是 $(y)k \in (U)pg^i \cap (U)pg^j = (U)g^ip \cap (U)g^jp = ((U)g^i \cap (U)g^j)p = \varnothing$。这就产生了矛盾。□

引理 5.45（非平凡幂，预备知识：5.41、5.42）。
设 X 是一个没有孤立点的豪斯多夫拓扑空间，G是 X的同胚群，且由 $(x,g)a = (x)g$ 定义的自然作用 a：$X \times G \to X$ 是局部移动的。若$U \subseteq X$ 是开且非空的，则对所有 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，存在 $g \in G_{U,\ a}$ 使得 $g^n \neq$ 恒等$_X$。

证明。我们对 n 作归纳法，证明对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个非空开集 U_n 和 $g_n \in G_{U,\ a}$，使得 $U_n \subseteq U$ 与 $\{(U_n)g_n^i : 0 \le i < n\}$ 两两不相交（注意，这蕴含该引理）。

由于 a 是局部移动的，且 X 是豪斯多夫的并且没有孤立点，因此存在 $g_1 \in G_{U,\ a}\backslash\{1_G\}$。$n = 1$ 的情形现在可由引理 5.42 直接得出。

假设归纳地已证明该断言对所有 $n < k$ 都成立。如果 $U_{k-1} \not\subseteq$ 固定 $_a(g_{k-1}^k)$，那么令 $x \in \mathrm{supt}_a(g_{k-1}^k) \cap U_{k-1}$。对每个 $i \in \{0,1,2,\dots,k\}$，选取 $(x)g_{k-1}^i$ 的一个邻域 V_i，使集合 V_i 两两不相交（注意，根据假设，点 $(x)g_{k-1}^i$ 互不相同）。于是我们可以定义 $U_k := \bigcap_{i \in \{0,1,2,\dots,k\}} V_ig_{k-1}^{-i}$（值得注意的是，它是 x 的一个邻域），以及 $g_k := g_{k-1}$。

若 $U_{k-1} \subseteq \mathrm{fix}_a(g_{k-1}^k)$，取某个 $h \in G_{U_{k-1},\ a}\backslash\{1_G\}$。若 $x \in \mathrm{supt}_a(h)$，则有 $(x)(hg_{k-1})^k = (x)hg_{k-1}^k = (x)h$（第一个等式由以下事实得出：$(\mathrm{supt}_a(h))g_{k-1}^i \cap \mathrm{supt}_a(h) = \varnothing$ for$0 < i < k$）。此外，对于 $0 \le i < k$，有 $(U_{k-1})(hg)^i = (U_{k-1})g^i$。因此，$hg_{k-1}$ 是 g_{k-1} 的合适候选项，我们可以回到 $U_{k-1} \not\subseteq \mathrm{fix}_a(g_{k-1}^k)$ 的情形。□

定义 5.46（代数基，预备知识：3.8、5.1、5.6、5.43）。若 G 是一个群且 $f \in G$，则定义

$$G_f := C_G(\{g^{12} : f \text{ is algebraically disjoint from } g\}).$$

注意，若 $\phi \in$ 自同构群(G)，则 $(G_f)\phi = G_{(f)\phi}$。此外，若 $F \subseteq G$ 是有限的，则我们定义 $G_F := \cap_{f \in F}G_f$。

定义 5.47 (典范 Rubin 作用，预备知识：1.11、5.7、5.46)。
如果 G 是一个群，则我们定义如下的典范 ***Rubin*** 空间（X_G，$\mathcal{T}_G$）和典范 ***Rubin*** 作用 $r_G\colon X_G\times G\to X_G$ 作用于 G：

(1) 令 $B_G:=\left\{G_F \;\middle|\; F\text{是 } G\right\}$的有限子集。集合 B_G 按包含关系偏序，且 G 通过共轭作用于 B_G。(2) 令 $\mathcal{U}_G:=\{\mathcal{F}\subseteq B_G:\ \mathcal{F}\text{是 } B_G\text{ 作为偏序集的超滤子}\}$（回顾定义 1.11）。(3) 如果 $\mathcal{F}\in\mathcal{U}_G$ 且 F是 G的有限子集，则当存在某个非单位元 $g\in G$ 满足 $G_g\leq G_F$ 且满足以下条件时，我们称 $\mathcal{F}\in_G G_F$：

$$(\mathcal{F},G_F)\,\mathrm{conj}_G=\left\{(b,h)\,\mathrm{conj}_G \;\middle|\; b\in\mathcal{F},h\in G_F\right\}\supseteq\{b\in B_G:b\leq G_g\}.$$

注意，如果 $g\in G$且 $\mathcal{F}\in_G G_F$，则（$\mathcal{F}$，g）共轭$_G\in_G G_{(F,g)\,\mathrm{conj}_G}$。
(4) 我们在 $\mathcal{U}_G$ 上定义等价关系 $\sim_G$，如下：

$$\mathcal{F}_1\sim_G\mathcal{F}_2\iff\{G_F\in B_G:\mathcal{F}_1\in_G G_F\}=\{G_F\in B_G:\mathcal{F}_2\in_G G_F\}.$$

我们也通过 $[\mathcal{F}]_{\sim_G}\in_G G_F\iff\mathcal{F}\in_G G_F$将关系 $\in_G$ 扩展到 $\mathcal{U}_G/\sim_G$。
(5) 我们定义 $X_G:=\{[\mathcal{F}]_{\sim_G}:\ \mathcal{F}\in\mathcal{U}_G$，使得存在 $f\in G$ 满足 $\mathcal{F}\in_G G_{\{f\}}=G_f\}$。(6) 对每个有限的 $F\subseteq G$，我们定义 $G'_F:=\left\{x\in X_G \;\middle|\; x\in_G G_F\right\}$。(7) 我们将 $\mathcal{T}_G$定义为 X_G 上的拓扑，它由有限 $F\subseteq G$对应的集合 G'_F 生成。(8) 我们通过（$[\mathcal{F}]_{\sim_G}$，g）$r_G=[$（$\mathcal{F}$，g）$\mathrm{conj}_G]_{\sim_G}$来定义 r_G：$X_G\times G\to X_G$。容易验证这确实是一个定义良好的作用。

定义 5.48（共轭作用，预备知识：2.3、5.2）。
设 G 是一个群，X_0、X_1 是拓扑结构，且 a_0：$X_0\times G\to X_0$、a_1：$X_1\times G\to X_1$是 G 在这些结构上的作用。如果存在一个拓扑同构 ψ：$X_0\to X_1$，使得 $a_0\circ\psi=\langle\pi_0\psi$、$\pi_1\rangle_{X_1\times G}\circ a_1$（回顾定义 2.3），则称 a_0、a_1 拓扑共轭。
Th定理 5.49（Rubin 定理，预备知识：3.18、3.17、4.3、5.44、5.47、5.48 ）.
如果 a： $X\times G\to X$ 是群 G 在没有孤立点的局部紧豪斯多夫拓扑空间 X 上的连续、忠实、局部移动作用，那么 a 与典范 ***Rubin*** 作用 r_G 拓扑共轭。

证明。令 $\mathcal{T}$表示 X 上的拓扑，并按 $\subseteq$偏序。
断言 0：若 $U,V\subseteq X$是满足$G_{U^{-\circ},a}\subseteq G_{V^{-\circ}.a}$的任意开集，则 $U^{-\circ}\subseteq V^{-\circ}$。
断言的证明：令 U'为 U的任意非空开子集。由于 X是豪斯多夫空间且没有孤立点，并且 a 是局部移动的，因此可找到某个非恒等元$h\in G_{U',a}$。由于

$$h\in G_{U',a}\subseteq G_{U,a}\subseteq G_{U^{-\circ},a}\subseteq G_{V^{-\circ},a}$$

可知 $\mathrm{supt}_a(h)\subseteq V^{-\circ}$，因此 $U'\cap V^{-\circ}\neq\varnothing$，从而 $U'\cap V\neq\varnothing$。由于 U'是任意的，因此 V在 U中稠密，所以 $U^-\subseteq V^-$，并且 $U^{-\circ}\subseteq V^{-\circ}$。$\diamondsuit$
断言 1：对于所有有限的 $F\subseteq G$，我们有$G_F=G_{\bigcap_{f\in F}\mathrm{supt}_a(f)^{-\circ},a}$。若随后通过 $(G_F)\gamma=\bigcap_{f\in F}\mathrm{supt}_a(f)^{-\circ}$ 定义 γ：$B_G\to\mathcal{T}$，则 γ 是偏序集的定义良好的嵌入。此外，对于所有 $f,g\in G$，我们有 $((G_f,g)\ \mathrm{conj}_G)\gamma=((G_f)\gamma,g)a$.
断言的证明：
由于$G_{\bigcap_{f\in F}\mathrm{supt}_a(f)^{-\circ},\ a}=\bigcap_{f\in F}G_{\mathrm{supt}_a(f)^{-\circ},\ a}$，我们只需在 F 是单元素集 $\{f\}$的情况下证明断言的第一部分。

我们首先证明 $G_f \subseteq G_{\mathrm{supt}_a(f)^{-\circ},\ a}$。设 $h \notin G_{\mathrm{supt}(f)^{-\circ},\ a}$ 任意，我们将证明 $h \notin G_f$。由于 $\mathrm{supt}_a(h) \not\subseteq \mathrm{supt}_a(f)^{-\circ}$，存在一个非空开集 $U_0 \subseteq \mathrm{supt}_a(h) \setminus \mathrm{supt}_a(f)$。根据引理 5.42，令 U_1 为 U_0 的一个非空开子集，使得 $(U_1, h)a \cap U_1 = \varnothing$。根据引理 5.45，令 $g \in G_{U_1,\ a}$ 使得 $g^{12} \neq 1_G$。于是 $\mathrm{supt}_a(g) \subseteq U_1 \subseteq \mathrm{supt}_a(h) \setminus \mathrm{supt}_a(f)$。因此根据定理 5.44，$f$ 与 g 代数不相交。但 g^{12} 和 $h^{-1}g^{12}h$ 的支撑不相交，所以 g^{12} 不与 h 可交换。因此 $h \notin G_f$。

接下来我们证明 $G_{\mathrm{supt}_a(f)^{-\circ},\ a} \subseteq G_f$。任取 $h \in G_{\mathrm{supt}_a(f)^{-\circ}}$，并任取满足 f 与 g代数不相交的 $g \in G$。我们证明 h 与 g^{12}可交换。由定理 5.44 可知，$\mathrm{supt}_a(f) \cap \mathrm{supt}_a(g^{12}) = \varnothing$。由于 $\mathrm{supt}_a(f)$ 在 $\mathrm{supt}_a(h)$ 中稠密，且 $\mathrm{supt}_a(g^{12})$ 是开集，因此 $\mathrm{supt}_a(h) \cap \mathrm{supt}_a(g^{12}) = \varnothing$。因此，$h$ 与 g^{12} 可交换，证毕。

现在我们证明 γ 定义良好。若 $F \subseteq G$ 是有限的，则

$$(G_F)\gamma \subseteq (G_F)\gamma^{-\circ} = \left(\bigcap_{f\in F} \mathrm{supt}_a(f)^{-\circ}\right)^{-\circ} \subseteq \left(\bigcap_{f\in F} \mathrm{supt}_a(f)^{-\circ-}\right)^{\circ} = \left(\bigcap_{f\in F} \mathrm{supt}_a(f)^{-}\right)^{\circ} \subseteq (G_F)\gamma.$$

因此 $(G_F)\gamma$具有断言 0 中的形式。若 $G_{U^{-\circ},\ a} = (G_F)\gamma = G_{V^{-\circ},\ a}$，则我们有 $U^{-\circ} \subseteq V^{-\circ}$和 $V^{-\circ} \subseteq U^{-\circ}$，故 $V^{-\circ} = U^{-\circ}$。因此，γ是一个良定义函数（且保序）。

接下来证明 γ 是一个嵌入。根据断言的第一部分，映射 $\gamma' : \mathcal{T} \to \mathcal{P}(G)$由 $(U)\gamma' = G_{U,\ a}$ 定义，满足 $\gamma\gamma' = \mathrm{id}_{B_G}$（其中 id_{B_G} 是 B_G上的恒等函数）。因此，γ 是单射。此外，映射 γ' 保持包含关系，因此 $\gamma^{-1} \subseteq \gamma'$也保持包含关系。

最后，根据引理 5.42，对于所有 $f,\ g \in G$，我们有

$$\begin{aligned}((G_f, g)\,\mathrm{conj}_G)\gamma = (G_{g^{-1}fg})\gamma &= (\mathrm{supt}_a(g^{-1}fg))^{-\circ} \\ &= ((\mathrm{supt}_a(f), g)a)^{-\circ} = (\mathrm{supt}(f)^{-\circ}, g)a = ((G_f)\gamma, g)a.\diamondsuit\end{aligned}$$

断言 2：集合 $\left(\left\{G_f \;\middle|\; f \in G\right\}\right)\gamma \subseteq \mathrm{img}(\gamma)$ 是拓扑 $\mathcal{T}$ 的一个基。

断言的证明：

设 $x \in X$，并设 U 是 x 的任意开邻域。设 V 是 x 的一个紧邻域。因此，$U \cap V$ 是紧空间 V 中 x 的一个开邻域。根据注 3.18，存在一个包含于 $U \cap V$ 中的紧邻域 W，其邻域点为 x。特别地，W 在 X 中是闭集。

令 $f \in G_{W^{\circ},\ a}$ 满足 $(x)f \neq x$。我们有

$$x \in \mathrm{supt}_a(f) \subseteq \mathrm{supt}_a(f)^{-\circ} \subseteq W^{\circ-\circ} \subseteq W \subseteq U.$$

由于 $\mathrm{supt}_a(f)^{-\circ} = (G_f)\gamma$，结论得证。$\diamondsuit$

断言 3：如果 $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_G$ 与 U 是一个开集，满足 $G_{U,\ a} \in B_G$，那么

$$\text{其中 } ((\mathcal{F})\gamma)^* := \left\{S \in \mathcal{P}(X) \;\middle|\; \begin{matrix}\text{there is } x \in U \text{ such that } \mathrm{Nbhds}_X(x) \subseteq ((\mathcal{F})\gamma)^* \\ S \text{ 包含 } (\mathcal{F})\gamma\end{matrix}\right\} \iff \mathcal{F} \in_G G_{U,a}.$$

的一个元素。断言的证明：

($\Rightarrow$)：设 $x \in U$ 与邻域$_X(x) \subseteq ((\mathcal{F})\gamma)^*$。由于 a 是局部移动的，根据断言 2 可知，存在一个非单位元 $g \in G$，使得 $(x,\ G_{U,\ a})a$ 在 $(G_g)\gamma$中稠密。任取满足 $b \leq G_g$的 $b \in B_G$。只需证明 $b \in (\mathcal{F},\ G_{U,\ a})\,\mathrm{conj}_G$。

由于 $(x,\ G_{U,\ a})a$ 在 $(G_g)\gamma$ 中稠密，因此存在某个 $f_b \in G_{U,\ a}$，使得 $(x,\ f_b)a \in (b)\gamma$。由此可得 $((b)\gamma,\ f_b^{-1})a \in$ 是 (x) 的邻域 $_X$，$((\mathcal{F})\gamma)^*$。由于 $\mathcal{F}$ 是一个滤子，因此我们有 $(\mathcal{F})\gamma = ((\mathcal{F})\gamma)^* \cap (B_G)\gamma$。此外，

根据断言 1，我们有 $((b,\ f_b^{-1})\ \mathrm{conj}_G)\gamma = ((b)\gamma,\ f_b^{-1})a$，因此 $((b)\gamma,\ f_b^{-1})a \in ((\mathcal{F})\gamma)^* \cap (B_G)\gamma = (\mathcal{F})\gamma$。因此我们有

$$(b)\gamma \in ((\mathcal{F})\gamma, f_b)a \Rightarrow (b)\gamma \in ((\mathcal{F}, f_b)\,\mathrm{conj}_G)\gamma \Rightarrow b \in (\mathcal{F}, f_b)\,\mathrm{conj}_G \Rightarrow b \in (\mathcal{F}, G_{U,a})\,\mathrm{conj}_G$$

如所要求的。

($\Leftarrow$)：假设 $\mathcal{F} \in_G G_{U,\ a}$。令 $g \in G$ 满足 $G_g \leq G_{U,\ a}$，并且对所有满足 $G_h \leq G_g$ 的 $h \in G$，都有 $G_h \in (\mathcal{F},\ G_{U,\ a})\ \mathrm{conj}_G$。如断言 2 的证明所示，$(G_g)\gamma$ 包含一个具有非空内部的紧致集合；根据断言 2，我们总能将此集合选为 $(B_G)\gamma$ 中某个元素的闭包。因此，用 B_G 中一个更小的元素替换 G_g 后，不失一般性地可设 $((G_g)\gamma)^-$ 是 U 的紧致子集。

任取满足 $G_h \leq G_g$ 的 $h \in G$，并注意到 $((G_h)\gamma)^-$ 是紧致的。存在某个 $f_h \in G_{U,\ a}$，使得 $G_{f_h^{-1}hf_h} = (G_h,\ f_h)\ \mathrm{conj}_G \in \mathcal{F}$。令 $k := f_h^{-1}hf_h$，并注意到 $G_k \in \mathcal{F}$ 与

$$((G_k)\gamma)^- = (((G_h)\gamma)^-, f_h)a \subseteq ((((G_g)\gamma)^-, f_h)a \subseteq (U, f_h)a = U.$$

根据注 3.18，存在某个 $x \in (G_k)\gamma^- \cap \bigcap_{b\in\mathcal{F}} (b)\gamma^-$。任取 $N \in$ 邻域$_X(x)$。我们只需证明 $N \in ((\mathcal{F})\gamma)^*$。令 $N' := (G_k)\gamma \cap N$。由于 B_G 与 $\mathcal{F}$ 对有限交集封闭，集合 $\left\{A \in B_G \;\middle|\; A \supseteq b \cap (N')\gamma^{-1} \text{ 对某个 } b \in \mathcal{F}\right\}$ 而言是 B_G 上的一个包含 $\mathcal{F}$ 的真滤子。由于 $\mathcal{F}$ 是一个超滤子，故有 $(N')\gamma^{-1} \in \mathcal{F}$。因此，$N \in ((\mathcal{F})\gamma)^*$，如所要求。 ♢

根据断言 3，对于所有 $x \in X_G$，存在 $(x)\psi \in X$，使得对于所有 $\mathcal{F} \in x$，邻域$_X((x)\psi) \subseteq ((\mathcal{F})\gamma)^*$。由于 X 是豪斯多夫的，根据断言 2 可知该点是唯一的（因此我们可以用这种方式定义一个映射 $\psi : X_G \to X$）。由断言 3 和 $\sim_G$ 的定义也可立即得出，函数 ψ 是单射。此外，根据断言 2 和 $\mathcal{T}_G$ 的定义，子集 $U \subseteq X_G$ 是开集，当且仅当它是 ψ 下某个开集的原像。

如果 $x \in X$ 是任意的，那么 $\mathcal{P}(X)$ 上的 $\mathrm{Nbhds}_X(x)$ 是一个真滤子，因此它可以扩展为 $\mathcal{P}(X)$ 上的某个超滤子 $\mathcal{F}$，从而 $([(\mathcal{F} \cap (B_G)\gamma)\gamma^{-1}]_{\sim_G})\psi = x$。由于 x 是任意的，可知 ψ 是满射。现在我们有 $\psi :\ X_G \to X$ 是一个同胚。

现在只需证明，对于所有 $g \in G$ 和 $x \in X_G$，都有 $(x,\ g)r_G\psi = ((x)\psi,\ g)a$。令 $g \in G$ 和 $x \in X_G$ 为任意元素。根据断言 2 以及 X 是豪斯多夫的假设，只需证明

$$\{f \in G : (x,g)r_G\psi \in (G_f)\gamma\} = \{f \in G : ((x)\psi, g)a \in (G_f)\gamma\}.$$

证明如下：

$$\begin{aligned}
\{f \in G : (x,g)r_G\psi \in (G_f)\gamma\} &= \{f \in G : (x,g)r_G \in_G G_f\} \\
&= \{f \in G : x \in_G (G_f, g^{-1})\,\mathrm{conj}_G\} \\
&= \{f \in G : x \in_G G_{gfg^{-1}}\} \\
&= \{f \in G : (x)\psi \in (G_{gfg^{-1}})\gamma\} \\
&= \{f \in G : (x)\psi \in ((G_f, g^{-1})\,\mathrm{conj}_G)\gamma\} \\
&= \{f \in G : (x)\psi \in ((G_f)\gamma, g^{-1})a)\} \\
&= \{f \in G : ((x)\psi, g)a \in (G_f)\gamma\}.
\end{aligned}$$

□

既然我们已经证明了 Rubin 定理（定理 5.49），就知道群在良好拓扑空间上的任何足够良好的作用，实际上都是该群的代数不变量。这

在讨论群之间的同构时，这一点尤其有用。在下面的推论中，我们将展示 Rubin 定理如何帮助理解群的自同构（这一推论对第 4 部分至关重要）。

推论 5.50（Rubin 自同构，预备知识：5.6、5.49）。
若 G 是一个群，且 a： $X \times G \to X$ 是 G 在无孤立点的局部紧豪斯多夫拓扑空间 X 上的连续、忠实、局部移动作用，则

$$\mathrm{Aut}(G) \cong N_{\mathrm{Aut}(X)}((G)\phi_a)$$

（其中 ϕ_a 如定义 *5.2* 所述）通过一个同构，该同构将 $\mathrm{Inn}(G)$限制为到 $(G)\phi_a$的同构。

证明。 我们定义一个映射 n： $G \times N_{\mathrm{Aut}(X)}((G)\phi_a) \to G$，它将 $N_{\mathrm{Aut}(X)}((G)\phi_a)$ 映到 G 上，定义如下：

$$(g, f)n = (f^{-1}(g)\phi_a f)\phi_a^{-1}.$$

注意，这只有在选择群 $N_{\mathrm{Aut}(X)}((G)\phi_a)$ 的情况下才定义良好。

只需证明 n 是 $N_{\mathrm{Aut}(X)}((G)\phi_a)$ 在 G 上的忠实作用，并且相应的嵌入 $\phi_n : N_{\mathrm{Aut}(X)}((G)\phi_a) \to \mathrm{Aut}(G)$ 是满射。

我们首先证明 n 是一个作用。任取 $g \in G$ 与 f， $h \in N_{\mathrm{Aut}(X)}((G)\phi_a)$，则

$$\begin{aligned}(((g, f)n, h)n &= (h^{-1}((f^{-1}(g)\phi_a f)\phi_a^{-1})\phi_a h)\phi_a^{-1} \\ &= (h^{-1}f^{-1}(g)\phi_a fh)\phi_a^{-1} \\ &= ((fh)^{-1}(g)\phi_a fh)\phi_a^{-1} \\ &= (g, fh)n.\end{aligned}$$

接下来证明 ϕ_n 是单射。设 $f, h \in N_{\mathrm{Aut}(X)}((G)\phi_a)$ 满足 $(f)\phi_n = (h)\phi_n$，我们证明 $f = h$。只需证明 fh^{-1} 是 X上的恒等函数。由于 ϕ_n 是一个同态，我们知道 $(fh^{-1})\phi_n$ 是 G上的恒等函数。因此，根据 n的定义可知， fh^{-1}与 $(G)\phi_a$的所有元素都可交换。反设 fh^{-1}是非平凡的。由引理 5.42 可知，存在 X 的一个非空开子集 U，使得 $(U)fh^{-1} \cap U = \varnothing$。由于 X是豪斯多夫的且没有孤立点，并且 a是局部移动的，因此存在某个非单位元 $g \in G_{U,a}$。由引理 5.42可知， $\mathrm{supt}_a(g)$ 中没有任何元素被 $((g)\phi_a, fh^{-1})\,\mathrm{conj}^{\mathrm{Aut}(X)}$ 固定。特别地， fh^{-1}不与 $(g)\phi_a$交换，这就产生了矛盾。

剩下要证明 ϕ_n 是满射。根据 Rubin 定理（5.49），令 ψ： $X_G \to X$ 为一个同胚，使得对于所有 $x \in X_G$和 $g \in G$，都有（（x）ψ， g）a =（x， g）$r_G\psi$。回顾一下，$X_G \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(G)))$，并且根据定义 1.6， G 的任意自同构 φ 都可以作用于 X_G。因此，对于每个 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，我们定义映射 φ'： $X_G \to X_G$，使得（x）φ' =（x）φ。

对于所有 $f \in G$，我们有 $(G'_f)\varphi' = G'_{(f)\varphi}$，因此特别地， φ' 是 X_G 的同胚。现在任取 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，只需证明 $\varphi \in \mathrm{img}(\phi_n)$。对于所有 $g \in G$，我们定义 c_g 为 G 的一个自同构，使得 $(f)c_g = (f,\ g)\,\mathrm{conj}_G$。注意，对于所有 $g \in G$，我们都有 $\varphi^{-1}c_g\varphi = c_{(g)\varphi}$；而对 ψ 的条件结合 r_G 的定义可得，对于所有 $g \in G$， $\psi((g)\phi_a)\psi^{-1} = c'_g$。

任取 $g \in G$，只需证明 $(g)\varphi = (g)((\psi^{-1}\varphi'\psi)\phi_n)$。证明如下：

$$\begin{aligned}(g)((\psi^{-1}\varphi'\psi)\phi_n) &= (g, \psi^{-1}\varphi'\psi)n \\ &= ((\psi^{-1}\varphi'\psi)^{-1}((g)\phi_a)(\psi^{-1}\varphi'\psi))\phi_a^{-1} \\ &= (\psi^{-1}(\varphi')^{-1}(\psi((g)\phi_a)\psi^{-1})\varphi'\psi)\phi_a^{-1} \\ &= (\psi^{-1}(\varphi')^{-1}(c'_g)\varphi'\psi)\phi_a^{-1} \\ &= (\psi^{-1}(\varphi^{-1}c_g\varphi)'\psi)\phi_a^{-1} \\ &= (\psi^{-1}c'_{(g)\varphi}\psi)\phi_a^{-1} \\ &= (g)\varphi.\end{aligned}$$

□

第3. 部分：半群与克隆

本部分的结果（大部分）摘自 J. Jonuˇsas、Z. Mesyan、J. D. Mitchell、M. Morayne、Y. P´eresse 以及本文作者撰写的 [11]。其他作者欣然同意将这些结果收录于此。

本部分将讨论为任意半群定义拓扑的各种自然方式，并探究这些拓扑如何相互作用（见命题 6.15）。许多定义都是在某种拓扑条件下的极小／极大定义，因此，理解这些定义有助于我们更好地了解所有与满足所需拓扑条件的半群相容的拓扑。

我们尤其关注的拓扑条件是豪斯多夫性、第二可数性或波兰性。豪斯多夫性（定义 3.14）是一种实用且常见的分离条件，它使相关拓扑“足够大”（尤其使我们能够排除不可分拓扑／平凡拓扑）。鉴于我们主要关注连续统基数的拓扑空间，第二可数性（定义 3.9）同样使相关拓扑“足够小”（尤其使我们能够排除离散拓扑）。波兰性（定义 3.25）是一种强得多的限制，但事实证明，良好的半群具有波兰拓扑的情况并不少见。波兰性也非常有用，因为它蕴含前两种条件，并使我们能够应用定理 4.27。

在本部分中，我们还将考虑（拓扑）克隆这一概念（有关拓扑克隆的研究实例，参见文献 [1, 5, 30]）。正如群是置换群的推广、半群是变换半群的推广一样，克隆也是运算克隆的推广（此处的“运算”是定义 4.2 意义下集合上的有限元运算）。

例如，有限多个变量的实多项式集合构成一个克隆；更一般地，任意代数结构的有限元数项运算集合也构成一个克隆（定义 4.30）。此外，若 X 是具有有限乘积的范畴中的任意对象（例如图、半群或拓扑空间），那么 X 的多态运算集合（即 X 的有限幂之间的态射）构成一个克隆。

克隆中的元素以与项运算相同的方式“组合”（参见定义 4.30）。克隆为我们比较代数结构提供了另一种合理的方式：如果两个代数结构中，一个结构的每个运算都是另一个结构的项运算，那么即使这并不意味着它们同构，我们仍可以合理地将它们视为等价的

。尽管项运算的定义方式使得一个运算只能输出单个元素，但有时将集合 X 上的 n 元 m 元运算组 $(t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n-1})$ 视为单个对象 $\langle t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n-1}\rangle_{X^n}$ 是有用的（回顾定义 2.3 ）。特别是，这样一来，运算的组合就化简为通常的映射复合。

我们将介绍拓扑构造应用于半群的具体例子时所得到的结果，并以此展示关于这些半群和克隆可能具有的拓扑的各种唯一性与非唯一性结果。具体而言，我们考虑以下半群和克隆:

(1) 二元关系幺半群 $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ （见例 4.12 和定理 9.4）。(2) 全变换幺半群 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ （见例 4.13 和定理 9.10）。(3) 偏函数幺半群 $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ （见例 9.5 和定理 9.10）。(4) 对称逆幺半群 $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ （见例 9.12 和定理 9.18）。(5) 单射函数幺半群 $\mathrm{Inj}(\mathbb{N})$（见例 9.20、定理 9.21 和定理 9.23）。(6) 希尔伯特立方体的连续函数幺半群 $C([0,1]^{\mathbb{N}})$（见命题 5.12 和定理 9.29）。(7) 康托空间的连续函数幺半群 $C(2^{\mathbb{N}})$（见命题 5.12 和定理 9.35）。(8) 可数无限无原子布尔代数的自同态幺半群 B_∞ （见定理 9.42）。(9) 集合 $\mathbb{N}$ 有限幂之间所有映射构成的克隆（见推论 9.11）。(10) 希尔伯特立方体的多态克隆 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ （见推论 9.30）。(11) 康托集的多态克隆 $2^{\mathbb{N}}$ （见推论 9.36）。(12) 可数无限无原子布尔代数的多态克隆 B_∞ （见推论 9.43）。

另一个相关且备受文献关注的主题（尤其是在群的研究中）是“自动连续性”（例如，参见 [25, 29, 34, 37] ）。

如前文定理 5.39 所示，有时只需掌握关于相关空间的少量信息，就能得出半群之间的同态是连续的。尤其是当我们知道从某个拓扑空间出发的一大类映射都是连续的，这就使我们能够将这些空间上的拓扑用作某种“上界”。对于波兰群，这样的上界往往能让我们利用定理 4.27 立即确定一个与该群相容的唯一波兰拓扑。

正如本部分始终所见，尽管同样的方法（例如参见定理 9.18）不适用于任意半群，这类连续性结果仍能为我们提供大量关于与半群相容的潜在拓扑的信息。

6. Natural topologies for arbitrary semigroups

In thi半群 i的自 introd然拓扑i任意 l 的拓扑f defini构造拓扑l在任意半 bi群上 i

群。每个半群都有一个相应的“对偶半群”（定义 6.2）。这个半群可能不同构于原半群（值得注意的是，逆半群正是这种情况），尽管就我们的目的而言，这些对象本质上是相同的。

定义 6.1（反同态，预备知识：2.3、4.5）。
设 S、T 是半群，且 $\phi: S \to T$ 是一个函数，那么如果 ϕ 满足 $*^S \circ \phi = \langle \pi_1\phi, \pi_0\phi\rangle_{S^2} \circ *^T$（回顾定义 4.5），我们称 ϕ 为反同态。也就是说，对于所有 a、$b \in S$，都有 $(ab)\phi = (b)\phi(a)\phi$。如果 ϕ 还是一个双射，那么我们称 ϕ 为反同构，并称 S 与 T是反同构的。

定义 6.2（对偶半群，预备知识：4.5、6.1）。
如果 S 是一个半群，那么我们将 S 的对偶半群 $S^\dagger$ 定义为这样一个半群：它具有相同的全集，并且对于所有 s、$t \in S$，都有 $(s)*^{S^\dagger} = (t, s)*^S$。根据定义，$S^\dagger$ 通过恒等映射与 S 反同构。

今后，能够从其他半群拓扑构造出半群拓扑，而无需重新证明连续性，将会很有用。下面介绍几种这样的构造方法。

命题 6.3 (拉回拓扑，预备知识：1.6、2.3、4.10、4.17、6.1、6.2)。设 S、T 是代数结构，$\phi: S \to T$ 是一个同态或反同态，且 $\mathcal{T}$ 是集合 T 上的一个拓扑。

(1) 如果 $(T, \mathcal{T})$ 是一个半拓扑半群，那么 $(S, (\mathcal{T})\phi^{-1})$ 是一个半拓扑半群。(2) 如果 $(T, \mathcal{T})$ 是一个拓扑代数结构，那么 $(S, (\mathcal{T})\phi^{-1})$ 是一个拓扑结构。

证明。 我们首先考虑 ϕ 是半群反同态的情形。注意，按照定义，映射 $\phi: (S, (\mathcal{T})\phi^{-1}) \to (T, \mathcal{T})$ 是连续的。若 $s \in S$ 是任意的，则有

$$\phi^{-1}\lambda_s^{-1} = (\lambda_s\phi)^{-1} = (\phi\rho_{(s)\phi})^{-1} \quad \text{and} \quad \phi^{-1}\lambda_s^{-1} = (\rho_s\phi)^{-1} = (\phi\lambda_{(s)\phi})^{-1}$$

（此处我们使用二元关系的复合）。特别地，如果 T 是一个半拓扑半群，且 U 是 T的一个开子集，那么

$$((U)\phi^{-1})\lambda_s^{-1} = (U)(\phi\rho_{(s)\phi})^{-1} \quad \text{and} \quad ((U)\phi^{-1})\rho_s^{-1} = (U)(\phi\lambda_{(s)\phi})^{-1}$$

都是开集，因此 S 也同样是一个半拓扑半群。类似地，如果 T 是一个拓扑半群，那么

$$((U)\phi^{-1})(*^S)^{-1} = (U)(\langle \pi_1\phi, \pi_0\phi\rangle_{S^2} \circ *^T)^{-1}$$

是开集，因此 S 也是一个拓扑半群。

现在考虑 ϕ 是半群同态的情形。由于恒等函数是从 T到 $T^\dagger$的反同构，因此$(T^\dagger, \mathcal{T})$是一个（半）拓扑半群，当且仅当$(T, \mathcal{T})$也是如此。如果 $\phi: S \to T$是一个同态，那么 ϕ是从 S到$(T^\dagger, \mathcal{T})$的反同态，因此结论由第一种情形得出。

如果 ϕ 是任意代数结构之间的同态，那么对于 T 的任意开子集 U，以及 S 的签名中的任意n元函数符号 F，我们有

$$((U)\phi^{-1})(F^S)^{-1} = (U)(\langle \pi_0\phi, \pi_1\phi, \ldots, \pi_{n-1}\phi\rangle_{S^m} \circ F^T)^{-1}.$$

与之前一样，可知 $F^S: S^m \to S$ 是连续的，符合要求。 □

引理 6.4（拓扑的合并，预备知识：4.10）
如果 $\mathbb{S}$ 是代数结构，I 是集合，且 $\left\{\mathcal{T}_i \,\middle|\, i \in I\right\}$ 是与 $\mathbb{S}$ 相容的拓扑，那么由 $\bigcup_{i\in I}\mathcal{T}_i$ 生成的拓扑与 $\mathbb{S}$ 相容。

证明。设 $\mathcal{T}$ 是由 $\bigcup_{i\in I}\mathcal{T}_i$ 生成的拓扑。任取 $U\in\bigcup_{i\in I}\mathcal{T}_i$，并令 $f\colon \mathbb{S}^n\to\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{S}$ 的任意运算。只需证明 $(U)f^{-1}$ 关于 $\mathcal{T}$ 是开集。

令 $i\in I$ 满足 $U\in\mathcal{T}_i$。由于 $\mathcal{T}_i$ 与 $\mathbb{S}$ 相容，因此使用由 $\mathcal{T}_i$ 在 $\mathbb{S}$ 上诱导的积拓扑可知，$(U)f^{-1}$ 是 $\mathbb{S}^n$ 的开子集。由于 $\mathbb{S}^n$ 上的这一拓扑包含于我们所使用的拓扑中，结论得证。□

引理 6.5 (交叉一些较好的拓扑，预备知识：3.15、4.17)。设 S 是一个半群，I 是一个集合，$\left\{\mathcal{T}_i \,\middle|\, i\in I\right\}$ 是一族与 S 半相容的 *Fr´échet* 拓扑。在此情形下，$\mathcal{T}:=\bigcap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ 也是 *Fr´échet* 拓扑，且与 S 半相容。

证明。任取 $s\in S$ 和 $U\in\mathcal{T}$。要证明 $(S,\mathcal{T})$ 是一个半拓扑半群，只需证明 $(U)\lambda_s^{-1}$ 和 $(U)\rho_s^{-1}$ 关于 $\mathcal{T}$ 是开的。由于 U 在所有拓扑 $\mathcal{T}_i$ 中都是开集，且这些拓扑都与 S 半相容，因此这两个集合在所有拓扑 $\mathcal{T}_i$ 中也都是开集。根据定义，它们在 $\mathcal{T}$ 中是开的。

若 $s\in S$ 是任意的，则 $S\backslash\{s\}$ 是 S 上所有 Fr´echet 拓扑的元素。由于 $\mathcal{T}$ 是 Fr´echet 拓扑的交集，因此 $S\backslash\{s\}\in\mathcal{T}$ 也成立，从而 $\mathcal{T}$ 是 Fr´echet。□

我们引入的第一个拓扑（最小 Fr´echet 拓扑）由于定义简单而非常有用；然而，将其用于群时，它就没那么有趣了，因为它总是产生余有限拓扑。

定义 6.6（最小拓扑，预备知识：1.10、3.15、4.17）。若 S 是一个（逆）半群，则我们将 S 上的最小 *Fr´echet* 拓扑 定义为

$$\mathcal{MF}(S):=\bigcap\left\{\mathcal{T}\,\middle|\,(S,\mathcal{T})\text{ is a Fréchet semitopological (inverse) semigroup}\right\}$$

（由引理 6.5 可知，这是关于拓扑包含关系的最小 Fr´echet 拓扑，且与 S 半相容。）

定义 6.7（马尔可夫拓扑，预备知识：3.15、4.10）。
若 $\mathbb{S}$ 是一个代数结构，则我们在 $\mathbb{S}$ 上定义*Fr´*谢歇–马尔可夫拓扑为

$$\mathcal{FM}(\mathbb{S}):=\bigcap\left\{\mathcal{T}\,\middle|\,(\mathbb{S},\mathcal{T})\text{ is a Fréchet topological structure}\right\},$$

而豪斯多夫–马尔可夫拓扑在 $\mathbb{S}$ 上定义为

$$\mathcal{HM}(\mathbb{S}):=\bigcap\left\{\mathcal{T}\,\middle|\,(\mathbb{S},\mathcal{T})\text{ is a Hausdorff topological structure}\right\}.$$

与最小的 Fr´谢歇拓扑是半相容的情况相反，结构上的马尔可夫拓扑不一定与该结构相容。

命题 6.8（小拓扑性质良好，预备知识：6.3、6.5、6.6、6.7）。
若 S 是一个半群，则 $\mathcal{MF}$（S）、$\mathcal{FM}$（S）与 $\mathcal{HM}$（S）都是 *Fr´*谢歇拓扑，并且与 S半相容。此外，若 ϕ 是 S 作为离散半群时的自同构或反自同构，则 ϕ关于 $\mathcal{MF}$（S）、$\mathcal{FM}$（S）与 $\mathcal{HM}$（S）中的每一个都是连续的。

证明。第一个结论由引理 6.5 得出。设 ϕ 是 S 的任意自同构或反自同构。分别令 $\mathcal{T}_0$，$\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 为 $\mathcal{MF}(S)$、$\mathcal{FM}(S)$ 和 $\mathcal{HM}(S)$。类似地，令 P_0，P_1 和 P_2 分别表示具有 Fr´echet 半拓扑半群、Fr´echet 拓扑半群和豪斯多夫拓扑半群性质。

由于 ϕ 是双射，因此若 $\mathcal{T}$ 是集合 S 上的 Fr´echet/豪斯多夫拓扑，则 $(\mathcal{T})\phi^{-1}$ 也是如此。因此，对每个 $i \in \{0,1,2\}$，由命题 6.3 可得

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_i)\phi &= \left(\bigcap\left\{\mathcal{T} \;\middle|\; (S,\mathcal{T}) \text{ satisfies } P_i\right\}\right)\phi = \bigcap\left\{(\mathcal{T})\phi \;\middle|\; (S,\mathcal{T}) \text{ satisfies } P_i\right\} \\ &= \bigcap\left\{\mathcal{T} \;\middle|\; (S,(\mathcal{T})\phi^{-1}) \text{ satisfies } P_i\right\} = \bigcap\left\{\mathcal{T} \;\middle|\; (S,\mathcal{T}) \text{ satisfies } P_i\right\} = \mathcal{T}_i.\end{aligned}$$

因此，ϕ 是连续的，正如所要求的那样。 □

定义 6.9 (扎里斯基拓扑，预备知识：3.7、4.10、4.30)。
设 $\mathbb{S}$ 是一个代数的 σ-结构。若存在 n，$m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，$s_1$，$s_2$，…，$s_{n-1}$，$t_1$，$t_2$，…，$t_{m-1} \in \mathbb{S}$，分别是 σ 上关于 $\{0,1,\ldots,n-1\}$ 与$\{0,1,\ldots,m-1\}$ 的项 a，b，使得

$$E = \left\{s \in \mathbb{S} \;\middle|\; (s,s_1,\ldots,s_{n-1})a^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,n-1\}} = (s,t_1,\ldots,t_{m-1})b^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,m-1\}}\right\}$$

（回顾定义 4.30）。接着，我们将 $\mathbb{S}$上的扎里斯基拓扑 $\mathcal{Z}(\mathbb{S})$定义为由形如 $\mathbb{S}\backslash E$ 的集合生成的拓扑，其中 E 是初等代数的。

特别是对于半群，项运算的范围相当有限；事实上，每个项运算都具有如下形式

$$(s_0,s_1,s_2,\ldots,s_{n-1}) \to s_{i_0}s_{i_1}\ldots s_{i_{k-1}}$$

对于某个 n，$k \in \mathbb{N}$ 以及 i_0，i_1，$\ldots i_{k-1} < n$。因此，扎里斯基拓扑的初等代数集可以看作是成对“多项式”的“解集”。

Pr命题 6.10 （扎里斯基拓扑的性质良好，预备知识：4.4、6.1、6.2、6.9）。
若 S 是半群，则 $\mathcal{Z}$（S） 是与 S 半相容的弗雷歇拓扑。此外，若 ϕ：$S \to T$ 是离散半群 S 与 T 之间的同构或反同构，则 ϕ 关于 $\mathcal{Z}$（S） 和 $\mathcal{Z}$（T） 连续。

证明。令 a、b 为变量集 $\{0,1,\ldots,n-1\}$ 和 $\{0,1,\ldots,m-1\}$ 上的 σ_S 的任意项（回忆定义 4.4）。此外，令 u，s_1，s_2，…，s_{n-1}、t_1，t_2，…，$t_{m-1} \in S$ 为任意元素。要证明 $\mathcal{Z}(S)$ 与 S 半相容，只需证明这些集合

$$\left(\left\{s \in S \;\middle|\; (s,s_1,\ldots,s_{n-1})a^S_{\{0,1,\ldots,n-1\}} = (s,t_1,\ldots,t_{m-1})b^S_{\{0,1,\ldots,m-1\}}\right\}\right)\lambda_u^{-1},$$

$$\left(\left\{s \in S \;\middle|\; (s,s_1,\ldots,s_{n-1})a^S_{\{0,1,\ldots,n-1\}} = (s,t_1,\ldots,t_{m-1})b^S_{\{0,1,\ldots,m-1\}}\right\}\right)\rho_u^{-1}$$

在 $\mathcal{Z}(S)$ 中是闭集。我们证明第一个集合是闭的，第二个结论可由对称论证得出。我们定义项运算 a'：$S^{n+1} \to S$ 与 b'：$S^{m+1} \to S$ 为

$$\begin{aligned}(x_0,x_1,\ldots,x_n)a' &= ((x_0,x_n)*^S,x_1,\ldots,x_{n-1})a^S_{\{0,1,\ldots,n-1\}}, \\ (x_0,x_1,\ldots,x_m)b' &= ((x_0,x_m)*^S,x_1,\ldots,x_{m-1})b^S_{\{0,1,\ldots,m-1\}}.\end{aligned}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\left\{s\in S\;\middle|\;(s,s_1,\ldots,s_{n-1})a^S_{\{0,1,\ldots,n-1\}}=(s,t_1,\ldots,t_{m-1})b^S_{\{0,1,\ldots,m-1\}}\right\}\right)\lambda_u^{-1}\\
=&\left\{s\in S\;\middle|\;((s)\lambda_u,s_1,\ldots,s_{n-1})a^S_{\{0,1,\ldots,n-1\}}=((s)\lambda_u,t_1,\ldots,t_{m-1})b^S_{\{0,1,\ldots,m-1\}}\right\}\\
=&\left\{s\in S\;\middle|\;((u,s)*^S,s_1,\ldots,s_{n-1})a^S_{\{0,1,\ldots,n-1\}}=((u,s)*^S,t_1,\ldots,t_{m-1})b^S_{\{0,1,\ldots,m-1\}}\right\}\\
=&\left\{s\in S\;\middle|\;(s,s_1,\ldots,s_{n-1},u)a'=(s,t_1,\ldots,t_{m-1},u)b'\right\}.
\end{aligned}$$

因此，所需的集合是初等代数集，因而是闭集。要证明 $\mathcal{Z}$ 是 Fr´echet，请注意，投影映射 $\pi_0,\pi_1:S^2\to S$ 是项运算，因此对于所有 $x\in S$，集合 $\{x\}=\left\{s\in S\;\middle|\;(s,x)\pi_0=(s,x)\pi_1\right\}$ 都是初等代数集，因而在 $\mathcal{Z}(S)$ 中是闭集。

若 $\phi\colon S\to T$ 是同构，则

$$\begin{aligned}
&\left(\left\{s\in S\;\middle|\;(s,s_1,\ldots,s_{n-1})a^S_{\{0,1,\ldots,n-1\}}=(s,t_1,\ldots,t_{m-1})b^S_{\{0,1,\ldots,m-1\}}\right\}\right)\phi\\
=&\left\{t\in T\;\middle|\;(t,(s_1)\phi,\ldots,(s_{n-1})\phi)a^T_{\{0,1,\ldots,n-1\}}=(t,(t_1)\phi,\ldots,(t_{m-1})\phi)b^T_{\{0,1,\ldots,m-1\}}\right\}.
\end{aligned}$$

特别地，ϕ与 ϕ^{-1} 将初等代数集映为初等代数集，因此 ϕ是 Zariski 拓扑之间的同胚。

若 $\phi\colon S\to T$是反同构，则 ϕ是从 $S^\dagger$到 T的同构。因此，$\phi\colon(S,\mathcal{Z}(S^\dagger))\to(T,\mathcal{Z}(T))$ 是一个同胚。由于 S与 $S^\dagger$的运算互为项运算，可知它们具有相同的项运算，因此 $\mathcal{Z}(S)=\mathcal{Z}(S^\dagger)$。因此，$\phi$ 相对于 $\mathcal{Z}(S)$ 和 $\mathcal{Z}(T)$ 连续，正如所需。□

以下定义中所定义的“第二可数连续性拓扑”主要因命题 6.12 而受到关注。在这一部分中，我们将看到许多半群的例子，对于这些半群，该拓扑是第二可数的，因此在与该半群相容的第二可数拓扑中是最大元。

定义 6.11（第二可数连续性拓扑，预备知识：3.9、4.10、6.4）。如果 $\mathbb{S}$ 是一个代数结构，那么我们将 $\mathbb{S}$ 的第二可数连续性拓扑 $\mathcal{SCC}(\mathbb{S})$定义为由下列集合生成的拓扑

$$\bigcup\left\{\mathcal{T}\;\middle|\;(\mathbb{S},\mathcal{T})\text{ is a second countable topological structure}\right\}$$

（根据引理 6.4，该拓扑与 $\mathbb{S}$ 相容。）

命题 6.12（第二可数连续性拓扑是良好的，预备知识：4.9、6.2、6.11）。

设 $(S,\ \mathcal{T})$ 是一个拓扑半群。以下各项等价：

(1) $\mathcal{SCC}(S)\subseteq\mathcal{T}$。(2) 如果 $\phi:(S,\mathcal{T})\to T$ 是同态，其中 T 是第二可数拓扑半群，那么 ϕ 是连续的。(3) $\mathcal{SCC}(S^\dagger)\subseteq\mathcal{T}$。(4) 如果 $\phi:(S,\mathcal{T})\to T$ 是反同态，其中 T 是第二可数拓扑半群，那么 ϕ 是连续的。

进一步假设存在一个逆半群 I，使得 S 是从 I中去掉一元运算后得到的半群，并且 $(I,\mathcal{T})$ 是拓扑逆半群。在这种情况下，$\mathcal{SCC}(S)=\mathcal{SCC}(I)$，且以下条件与上述条件等价：

(5) 如果 $\phi:(I,\mathcal{T})\to T$ 是一个同态，其中 T 是第二可数拓扑逆半群，那么 ϕ 是连续的。

证明。(1 ⇒ 2)：令 $\phi:(S,\mathcal{T})\to T$ 是一个同态，其中 T 是第二可数拓扑半群。令 $\mathcal{U}$ 为 T上的拓扑。根据命题 6.3，拓扑 $(\mathcal{U})\phi^{-1}$ 与S相容。若 B 是 $\mathcal{U}$的可数基，则 $(B)\phi^{-1}$ 是 $(\mathcal{U})\phi^{-1}$的可数基，因此 $(\mathcal{U})\phi^{-1}$ 是第二可数的。根据 $\mathcal{SCC}(S)$的定义，可得 $(\mathcal{U})\phi^{-1}\subseteq\mathcal{SCC}(S)$，从而 ϕ 是连续的。

(2 ⇒ 1)：令 $\mathcal{U}$ 为与 S相容的任意第二可数拓扑。恒等映射 $\mathrm{id}_S:(S,\mathcal{T})\to(S,\mathcal{U})$ 是一个同态，因此根据假设它是连续的。于是 $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{T}$。由于 $\mathcal{U}$是任意的，且这类拓扑生成 $\mathcal{SCC}(S)$，因此可得 $\mathcal{SCC}(S)\subseteq\mathcal{T}$。

(1 ⟺ 3)：拓扑 $\mathcal{SCC}(S)$ 由集合生成

$$\bigcup\left\{\mathcal{U}\;\middle|\;(S,\mathcal{U})\text{ is a second countable topological semigroup}\right\}$$

而拓扑 $\mathcal{SCC}(S^\dagger)$ 由集合生成

$$\bigcup\left\{\mathcal{U}\;\middle|\;(S^\dagger,\mathcal{U})\text{ is a second countable topological semigroup}\right\}.$$

由命题 6.3（利用反同构 id_S）可知，这些集合相同，因此$\mathcal{SCC}(S^\dagger)=\mathcal{SCC}(S)$。

(3 ⟺ 4)：注意，$\phi:S\to T$ 是反同态，当且仅当 $\phi:S^\dagger\to T$ 是同态。因此，将 S 替换为 $S^\dagger$，可得 (1 ⟺ 2) ⟺ (3 ⟺ 4)。由于我们已经证明了 (1 ⟺ 2)，结论得证。

($\mathcal{SCC}(S)=\mathcal{SCC}(I)$)：注意，映射 $x\to x^{-1}$ 是从 I 到其自身的反同构。特别地，若 $\mathcal{T}$是与 S 相容的拓扑，则 $\mathcal{T}^{-1}$ 也是与 S 相容的拓扑（由命题 6.3）。因此，由引理 6.4，$\mathcal{T}\cup\mathcal{T}^{-1}$ 生成的拓扑也与 S相容。由于集合 $\mathcal{T}\cup\mathcal{T}^{-1}$ 是逆封闭的，由此可知，该集合生成的拓扑也与 I 相容。

我们已经证明，若 $\mathcal{T}$是与 S相容的拓扑，则 $\mathcal{T}\cup\mathcal{T}^{-1}$生成的拓扑与 I相容。若 B 是 $\mathcal{B}$的可数基，则 $\left\{\cap F\;\middle|\;\text{有限 }F\subseteq B\cup B^{-1}\right\}$ 是 $\mathcal{T}\cup\mathcal{T}^{-1}$生成的拓扑的可数基。因此，每个与$S$ 相容的第二可数拓扑，都包含于一个与 I相容的第二可数拓扑中。由 $\mathcal{SCC}(I)$和 $\mathcal{SCC}(S)$的定义即可得出结论。

(1 ⟺ 5)：此证明与(1 ⇒ 2)的证明以及(2 ⇒ 1)的证明完全相同，只需将 S 替换为 I。□

推论 6.13 (Sym(ℕ) 连续性，预备知识：5.39，6.12)。拓扑 $\mathcal{SCC}($Sym(ℕ)) 是 *Sym()* 上的逐点拓扑。

证明。由命题 6.12 和定理 5.39 可知，$\mathcal{SCC}$(Sym(ℕ)) 包含于逐点拓扑中。由于每个与 Sym(ℕ) 相容的第二可数拓扑都包含于$\mathcal{SCC}$(Sym(ℕ))，反向包含也成立。□

引理 6.14 (豪斯多夫 Zariski 比较，预备知识：2.3、3.14、6.9)。若 $\mathbb{S}$ 是一个代数的 σ-结构，且 $\mathcal{T}$ 是与 $\mathbb{S}$ 相容的豪斯多夫拓扑，则 $\mathcal{Z}(\mathbb{S}) \subseteq \mathcal{T}$。

证明。设 a、b分别是 $\{0,1,\ldots,n-1\}$ 上和 $\{0,1,\ldots,m-1\}$ 上的任意项。假设 s_1、s_2、.. .、s_{n-1}、t_1、$t_2 \ldots$、$t_{m-1} \in \mathbb{S}$ 均为任意元素，且 c_s、1、c_s、2、.. .、c_s、$_{n-1}$、c_t、1、c_t、2、.. .、c_t、$_{m-1}$:$\mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 是取这些值的常值映射。我们如下定义连续映射 $a'\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 和 $b'\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}$（回顾定义 2.3）

$$a' := \langle \mathrm{id}_{\mathbb{S}}, c_{s,1}, \ldots, c_{s,n-1} \rangle_{\mathbb{S}^n} \circ a^S_{\{0,1,\ldots n-1\}},$$

$$b' := \langle \mathrm{id}_{\mathbb{S}}, c_{t,1}, \ldots, c_{t,m-1} \rangle_{\mathbb{S}^m} \circ b^S_{\{0,1,\ldots m-1\}}.$$

注意，根据构造，映射 a'，b' 关于 $\mathcal{T}$ 是连续的，并且

$$\begin{aligned} E &:= \left\{ s \in \mathbb{S} \;\middle|\; (s, s_1, \ldots, s_{n-1}) a^S_{\{0,1,\ldots n-1\}} = (s, t_1, \ldots, t_{m-1}) b^S_{\{0,1,\ldots n-1\}} \right\} \\ &= \left\{ s \in \mathbb{S} \;\middle|\; (s)a' = (s)b' \right\} = \left\{ s \in \mathbb{S} \;\middle|\; (s)\langle a', b' \rangle_{\mathbb{S}^2} \in \mathrm{id}_{\mathbb{S}} \right\} = (\mathrm{id}_{\mathbb{S}}) \langle a', b' \rangle^{-1}_{\mathbb{S}^2} \end{aligned}$$

是 $\mathbb{S}$ 的任意初等代数子集。由于 $\mathcal{T}$ 是豪斯多夫的，因此 $\mathrm{id}_{\mathbb{S}}$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的闭子集，所以 E 是闭的，这正是所需。□

命题 6.15（比较拓扑，预备知识：6.6、6.7、6.8、6.10、6.11、6.14）。若 S 是一个半群，则有以下包含关系：

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Z}(S) & \\ \mathcal{MF}(S) & & \mathcal{HM}(S). \\ & \mathcal{FM}(S) & \end{array}$$

此外，若 S 与某个第二可数豪斯多夫拓扑 $\mathcal{T}$相容，则 $\mathcal{HM}$（S） $\subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{SCC}$（$S$）。

证明。（$\mathcal{MF}$（S） $\subseteq \mathcal{Z}$（S）与 $\mathcal{MF}$（S） $\subseteq \mathcal{FM}$（S））：由命题 6.8 和 6.10 可知，这两个拓扑$\mathcal{Z}$（S）和 $\mathcal{FM}$（S）都是弗雷歇的，并且与 S半相容。根据 $\mathcal{MF}$（S）的定义，便得到这些包含关系。

（$\mathcal{Z}$（S） $\subseteq \mathcal{HM}$（S））：根据 $\mathcal{HM}$（S）的定义，只需证明 $\mathcal{Z}$（S）包含于每个与 S相容的豪斯多夫拓扑中。这由引理 6.14 立即可得。

($\mathcal{FM}(S) \subseteq \mathcal{HM}(S)$)：由于所有豪斯多夫空间都是 Fr´echet 空间，因此定义 $\mathcal{HM}(S)$ 的交集中的拓扑都包含于定义拓扑 $\mathcal{FM}(S)$ 的交集中。

($\mathcal{HM}(S) \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{SCC}(S)$)：这直接由 $\mathcal{HM}(S)$ 和 $\mathcal{SCC}(S)$ 的定义得到。 □

7. 小指标性质与性质**W**

接下来，我们将为拓扑半群引入“右/左小指标性质”，并说明它们与前面提到的第二可数连续性拓扑如何相互作用（见推论 7.4）。这些概念推广了拓扑群的“小指标性质”这一术语；该性质指出，群的所有可数指标子群都是开子群。这一性质已在文献中得到广泛研究（例如见 [10, 14, 18, 19, 33]）。不难验证，将右小指标性质和左小指标性质分别应用于群时，它们都与通常的小指标性质一致。

定义 7.1（单侧同余，预备知识：1.10、4.5）。
设 S 是一个半群。若 $\sim$ 是 S 上的一个右同余，则对所有 $(s,\ t) \in \sim$ 和 $u \in S$，都有 $(su,\ tu) \in \sim$。类似地，若 $\sim$ 是一个左同余，则对所有 $(s,\ t) \in \sim$ 和 $u \in S$，都有 $(us,\ ut) \in \sim$。

定义 7.2（小指标性质，预备知识：4.10、7.1）。
若 S 是一个半拓扑半群，则称 S 具有右小指标性质，如果 S 上的所有可数指标右同余都是 S^2 的开子集（回顾定义 1.10）。左小指标性质 的定义类似。

命题 7.3（小指标条件等价性，预备知识：5.2、6.2、6.3、4.13、7.2）。若 $(S,\ \mathcal{T})$ 是一个半拓扑半群，则下列条件等价：

(1) 所有同态 $\psi : (S, \mathcal{T}) \to (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathcal{PT}_{\mathbb{N}})$ 都是连续的，(2) $(S, \mathcal{T})$ 具有右小指标性质。

类似地，以下命题彼此等价（但不等价于前两条）：

(3) 所有反同态 $\psi : (S, \mathcal{T}) \to (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathcal{PT}_{\mathbb{N}})$ 都是连续的，(4) $(S, \mathcal{T})$ 具有左小指标性质。

证明。$(1 \Rightarrow 2)$：设 $\sim$ 是 S 上任意一个可数指标右同余。不失一般性，我们假设 $(S/\sim) \cap \mathbb{N} = \varnothing$。令 $\Phi : (S/\sim) \cup \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为一个双射。我们定义 a 在集合 $\mathbb{N}$ 上的 S 作用如下：

$$(p, s)a = \left\{ \begin{array}{ll} ([ts]_\sim)\Phi & \text{if } p = ([t]_\sim)\Phi \\ ([s]_\sim)\Phi & \text{if } p \in (\mathbb{N})\Phi \end{array} \right\}.$$

注意，映射 $\phi_a : (S, \mathcal{T}) \to (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathcal{PT}_{\mathbb{N}})$，定义为 $(i)((s)\phi_a) = (i, s)a$，是一个半群同态。根据假设可知，ϕ_a 是连续的。任取 $s \in S$，并考虑开子集

$$U_{(1)\Phi, ([s]_\sim)\Phi} := \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; ((1)\Phi)f = ([s]_\sim)\Phi \right\}$$

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$的。由于 ϕ_a 连续，因此

$$\begin{aligned} (U_{(1)\Phi, ([s]_\sim)\Phi})\phi_a^{-1} &= \left\{ t \in S \;\middle|\; ((1)\Phi)((f)\phi_a) = ([s]_\sim)\Phi \right\} \\ &= \left\{ t \in S \;\middle|\; ((1)\Phi, s)a = ([s]_\sim)\Phi \right\} = [s]_\sim \end{aligned}$$

是 S的一个开子集。由于$\sim = \bigcup_{s \in S} ([s]_\sim \times [s]_\sim)$，因此 $\sim$ 是开集，符合要求。

$(2 \Rightarrow 1)$：令 $\psi : (S, \mathcal{T}) \to (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathcal{PT}_{\mathbb{N}})$为一个同态，令 $a, b \in \mathbb{N}$ 任意，并令

$$U_{a,b} := \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (a, b) \in f \right\}.$$

只需证明$(U_{a,b})\psi^{-1}$ 是 S的一个开子集。我们在 S上定义等价关系 $\sim_a$ 如下：

$$\sim_a := \left\{ (s, t) \in S \;\middle|\; (a)((s)\psi) = (a)((s)\psi) \right\}.$$

由于 ϕ 是一个同态，因此 $\sim_a$ 是一个右同余。另请注意，

$$S/\sim_a = \left\{ \left\{ s \in S \;\middle|\; (a)((s)\phi) = b \right\} \;\middle|\; b \in \mathbb{N} \right\}$$

因此 $\sim_a$ 具有可数指标。因此 $\sim_a$ 是开集，且 $(U_{a,\ b})\phi^{-1}$ 是 $\sim_a$的一个等价类。如果 $s \in S$，那么 $[s]_{\sim_a} = ((S \times \{s\}) \cap \sim_a)\pi_0$。由于 $(S \times \{s\}) \cap \sim_a$ 是 $S \times \{s\}$ 的一个开子集，并且投影

映射 $\pi_0\colon S\times\{s\}\to S$ 是一个同胚，因此 $\sim_a$ 的所有等价类都是开集。结论得证。

(3 $\iff$ 4)：恒等映射 $\mathrm{id}_S\colon (S,\ \mathcal{T})\to(S^\dagger,\ \mathcal{T})$ 是空间之间的同胚，也是半群之间的反同构。此外，根据命题 6.3，有序对 $(S^\dagger,\ \mathcal{T})$ 是一个拓扑半群。根据 $S^\dagger$的定义可知，$\sim$ 是 S 上的左同余，当且仅当 $\sim$ 是 $S^\dagger$上的右同余。此外，$\psi\colon S\to\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 是反同态，当且仅当 $\phi\colon S^\dagger\to\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 是同态。

因此，我们只需证明 $(S^\dagger,\ \mathcal{T})$ 具有右小指标性质，当且仅当所有同态 $\psi\colon(S^\dagger,\ \mathcal{T})\to(\mathbb{N}^\mathbb{N},\ \mathcal{PT}_\mathbb{N})$ 都是连续的。这由等价关系 (1 $\iff$2) 可得。□

推论 7.4（自动连续性与小指标性质，预备知识：6.12、7.3）。若 S 是一个半群，则 $(S,\ \mathcal{SCC}(S))$ 同时具有右小指标性质和左小指标性质。

证明。由于拓扑半群 $(\mathbb{N}^\mathbb{N},\mathcal{PT}_\mathbb{N})$ 是第二可数的，这可由命题 6.12 和 7.3 得出。□

现在我们引入“性质 **W**”（这是我们对合著论文 [11] 中所谓“性质 **X**”的版本），它是一个关键工具，可用于将自动连续性类型的结果从群推广到其中“显著”包含这些群的半群（参见引理 7.6）。

定义 7.5（性质 **W**，预备知识：3.5、4.10、4.30）。
设 $\mathbb{S}$ 是一个拓扑代数的 σ-结构，且 $A\subseteq\mathbb{S}$。我们称 $\mathbb{S}$ 相对于 A 具有性质 ***W***：

(1) 对所有 $s\in\mathbb{S}$，存在 $t_s\in A$, $t_{1,\ s}$，$t_{2,\ s}$，$\ldots$，$t_{m-1,\ s}\in\mathbb{S}$ 以及一个 σ 在 $\{0,1,\ldots,m-1\}$ 上的项 a（对某个 $m\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$），使得对所有 $N\in$ 的邻域$_A(t_s)$，都有

$$(t_s,t_{1,s},t_{2,s},\ldots,t_{m-1,s})a^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,m-1\}}=s\quad\text{and}$$

$$(N,t_{1,s},t_{2,s},\ldots,t_{m-1,s})a^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,m-1\}}\in\mathrm{Nbhds}_S(s).$$

每个拓扑结构相对于自身都具有性质 **W**，但更有趣的例子往往需要通过相当繁琐的验证。稍后我们将证明，许多半群相对于其单位群都具有性质**W**（见定理 9.1、9.8、9.9、9.17、9.22、9.28 和 9.32）。

引理 7.6（性质 **W** 的良好性质，预备知识：3.2、4.3、7.5）。
设 $\mathbb{S}$、$\mathbb{T}$ 是拓扑 σ-结构，且 $\mathbb{S}$ 相对于 $A\subseteq\mathbb{S}$ 具有性质 ***W***。若 $\phi\colon\mathbb{S}\to\mathbb{T}$ 是同态，且 $\phi\restriction_A\colon A\to\mathbb{T}$ 连续，则 ϕ 连续。

证明。设 $A,\mathbb{S},\mathbb{T},\phi\colon\mathbb{S}\to\mathbb{T}$ 如假设所述。设 $U\subseteq\mathbb{T}$ 是开集。我们需要证明 $(U)\phi^{-1}$ 是开集。任取 $s\in(U)\phi^{-1}$，只需证明 $(U)\phi^{-1}\in$ 是 (s) 的邻域。

设 $m\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $t_s\in A$, $t_{1,\ s}$，$t_{2,\ s}$，$\ldots\ldots$，$t_{m-1}\in\mathbb{S}$，以及项 $a\in$({、，「，」}$\cup F_\sigma\cup\{0,1,\ldots,m-1\}$)*如性质 **W** 的定义所述。由于 U 是开集，因此

$$V:=\left\{t\in\mathbb{T}\;\middle|\;(t,(t_{1,s})\phi,\ldots,(t_{m-1,s})\phi)a^{\mathbb{T}}_{\{0,1,\ldots,m-1\}}\in U\right\}$$

是 $\mathbb{T}$ 的开子集。此外，由于 $(t_s,\ t_{1,\ s},\ t_{2,\ s},\ \ldots,\ t_{m-1,\ s})a^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,m-1\}}=s$ 与 ϕ 是同态，可得 $(t_s)\phi\in V$。

由于 $V \in$ 邻域$_{\mathbb{T}}((t_s)\phi)$ 且 $\phi \restriction_A$ 连续，可得 $(V)\phi^{-1} \cap A \in$ 邻域$_A(t_s)$。因此，根据性质 **W**，可得

$$((V)\phi^{-1} \cap A, t_{1,s}, t_{2,s}, \ldots, t_{m-1,s})a^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,m-1\}} \in \mathrm{Nbhds}_{\mathbb{S}}(s).$$

根据 V 的定义，我们有

$$((V)\phi^{-1} \cap A, t_{1,s}, t_{2,s}, \ldots, t_{m-1,s})a^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,m-1\}} \subseteq (U)\phi^{-1}$$

因此，$(U)\phi^{-1} \in$ 关于$_{\mathbb{S}}$的邻域s，如所需。 □

引理 7.7（性质 **W** 是传递的引理，预备知识：7.5）。
假设 $\mathbb{S}$ 是一个拓扑代数的 σ-结构， $\mathbb{T}$ 是 $\mathbb{S}$ 的子结构，且 $A \subseteq \mathbb{T}$。若 $\mathbb{S}$ 相对于 $\mathbb{T}$具有性质 $\boldsymbol{W}$，且 $\mathbb{T}$相对于 A具有性质 $\boldsymbol{W}$，则 $\mathbb{S}$ 相对于 A具有性质 $\boldsymbol{W}$。

证明。 任取 $s \in \mathbb{S}$。设 $t_s \in \mathbb{T}$、 $t_{1,\ s}$，…，$t_{m-1,\ s} \in \mathbb{S}$、 $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 以及一个属于 $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ 上 σ 的项 a 如相对于 $\mathbb{T}$具有性质**W** 的定义中所述。利用 $\mathbb{T}$ 相对于 A具有性质**W** 这一事实，取 $t_{t_s} \in A$、 $t_{1,\ t_s}$，…，$t_{m-1,\ t_s} \in \mathbb{S}$、 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 以及一个属于$\{0, 1, \ldots, n-1\}$ 上 σ 的项 b，使得对所有t_{t_s}的邻域 $N \in$，都有

$$(t_{t_s}, t_{1,t_s}, t_{2,t_s}, \ldots, t_{m-1,t_s})b^{\mathbb{T}}_{\{0,1,\ldots,n-1\}} = s \quad \text{and}$$

$$(N, t_{1,s}, t_{2,s}, \ldots, t_{m-1,s})b^{\mathbb{T}}_{\{0,1,\ldots,n-1\}} \in \mathrm{Nbhds}_{\mathbb{T}}(s).$$

Let c： $\mathbb{S}^{n+m-1} \to \mathbb{S}$是该项运算，使得（$x_0$，$x_1$，……，$x_{n+m-2}$）$c$被定义为 b e

$$((x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})b^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,n-1\}}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-2})a^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,n-1\}}.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}
&(t_{t_s}, t_{1,t_s}, t_{2,t_s}, \ldots, t_{n-1,t_s}, t_{1,s}, t_{2,s}, \ldots, t_{m-1,s})c \\
=&((t_{t_s}, t_{1,t_s}, t_{2,t_s}, \ldots, t_{n-1,t_s})b^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,n-1\}}, t_{1,s}, t_{2,s}, \ldots, t_{m-1,s})a^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,n-1\}} \\
=&(t_s, t_{1,s}, t_{2,s}, \ldots, t_{m-1,s})a^{\mathbb{S}}_{\{0,1,\ldots,n-1\}} = s.
\end{aligned}$$

同样，如果 $N \in$邻域$_A(t_{t_s})$，那么

$$(N, t_{1,t_s}, t_{2,t_s}, \ldots, t_{n-1,t_s}, t_{1,s}, t_{2,s}, \ldots, t_{m-1,s})c \in \mathrm{Nbhds}_{\mathbb{S}}(s)$$

因此， $\mathbb{S}$ 相对于 A 具有性质 **W**，如所要求的那样。 □

8. Topological clones

本节介绍观察拓扑克隆的两种方式，并解释为什么它们实际上是等价的。我们还将证明一个命题（命题 8.6），稍后将利用该命题把拓扑半群结果转移到相应的克隆上。

定义 8.1（抽象克隆，预备知识：2.2、2.3）。
一个抽象克隆 是一个有序对 $(\mathcal{C}$,幂$_{\mathcal{C}})$，其中

(1) $\mathcal{C}$ 是一个小范畴（回顾定义 2.2）。(2) Pow$_{\mathcal{C}}$ 是从 $\mathcal{C}$ 的对象集到 $\mathbb{N}$ 的双射（幂映射）。

(3) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $\mathcal{C}$ 的态射 π_0，π_1，……，π_{n-1}，使得

$$((n)\,\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}}^{-1}, (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}))$$

是由 n 个副本的 (1) 幂 $_{\mathcal{C}}^{-1}$ 构成的积（回忆定义 2.3）。

为方便起见，在符号表示上，我们常把克隆视为与其底层小范畴相等。

请注意，在前面的定义中，态射 π_0，π_1，……，π_{n-1} 的选取通常并不唯一。不过，只要存在这种选取，我们总是采用“显然”的选取。

定义 8.2（拓扑抽象克隆，预备知识：3.3、4.10、8.1）。
拓扑抽象克隆 是一个三元组 $(\mathcal{C}, \mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{O}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M}})$，其中

(1) $\mathcal{C}$ 是一个抽象克隆。(2) $\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{O}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的对象集 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ 上的拓扑。(3) $\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的态射集 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ 上的拓扑。(4) 幂映射 $\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}} : (\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{O}}) \to \mathbb{N}$ 是连续的（或等价地，$\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{O}}$ 是离散的）。(5) 源映射和目标映射 $s_{\mathcal{C}}, t_{\mathcal{C}} : (\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M}}) \to (\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{O}})$ 是连续的。(6) 复合映射 $\circ_{\mathcal{C}} : \mathrm{Comp}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 是连续的（其中 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 带有拓扑 $\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M}}$，且 $\mathrm{Comp}_{\mathcal{C}}$ 被视为乘积空间 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \times \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 的子空间）。(7) 对于每个 i, $j \in \mathbb{N}$，双射

$$\phi_{i,j} : \left(\left\{ f \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \;\middle|\; (f)s_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}} = i, (f)t_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}} = 1 \right\}\right)^j \to \left\{ f \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \;\middle|\; (f)s_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}} = i, (f)t_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}} = j \right\}$$

$$\text{defined by } (f_0, f_1, \ldots, f_{j-1})\phi_{i,j} = \langle f_0, f_1, \ldots, f_{j-1} \rangle_{X^j} \text{ is continuous.}$$

在这种情况下，我们称 $\mathcal{C}$、$\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{O}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M}}$ 是相容的。如果 P 是一个拓扑性质，那么当 $\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{O}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M}}$ 都具有此性质时，我们就称 $(\mathcal{C}, \mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{O}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M}})$ 具有此性质。

定义 8.3（运算克隆，预备知识：1.4、2.3）。
一个运算克隆（在集合 X 上）是由从 X 的有限幂到 X 的函数组成的集合，满足

（1）对于所有 $n \in \mathbb{N}$，投影映射 π_0，π_1，…，$\pi_{n-1} : X^n \to X$ 都是 $\mathcal{C}$ 的元素。

（2）如果 f_0，f_1，…，$f_{n-1} \in \mathcal{C}$ 的定义域相同，且 $g \in \mathcal{C}$ 的定义域为 X^n，那么

$$\langle f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \rangle_{X^n} \circ g \in \mathcal{C}.$$

如果 $f \in \mathcal{C}$，那么我们将 f 的元数（f）ar 定义为唯一满足 $\mathrm{dom}(f) = X^n$ 的 $n \in \mathbb{N}$。我们还将元数为 n 的集合 $\left\{ f \in \mathcal{C} \;\middle|\; f \right.$ 记作 $\mathcal{C}^{(n)}$。

定义 8.4（拓扑运算克隆，预备知识：3.3、4.10、8.1）。拓扑运算克隆是一个有序对 $(\mathcal{C}, \mathcal{T}_{\mathcal{C}})$，其中：

(1) $\mathcal{C}$ 是一个运算克隆。(2) $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ 是集合 $\mathcal{C}$ 上的一个拓扑。(3) 对所有 $m, n \in \mathbb{N}$，由下式定义的映射 $\circ_{m,n} : (\mathcal{C}^{(m)})^n \times \mathcal{C}^{(n)} \to \mathcal{C}^{(m)}$

$$((f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}), g)\circ_{m,n} = \langle f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \rangle_{X^n} \circ g \in \mathcal{C}$$

是连续的。

命题 8.5 (拓扑克隆是拓扑克隆，预备知识：2.4、8.2、8.4)。若 $(\mathcal{C}, \mathcal{T}_{\mathcal{C}})$ 是定义在非空集合 X 上的拓扑运算克隆，则如下定义的对象 $(\mathcal{C}^*, \mathcal{T}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{O}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{M}})$ 是一个拓扑抽象克隆。

(1) 令 $\mathcal{C}^*$ 为集合与函数范畴的一个子范畴，其对象集为 $\left\{X^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$，态射集由以下映射组成

$$\langle f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\rangle_{X^n}$$

其中 n、$m \in \mathbb{N}$ 与 f_0、f_1、…、$f_{n-1} \in \mathcal{C}^{(m)}$ 均为任意的。

(2) 令 $\mathcal{T}_{\mathcal{C}^*,\ \mathcal{O}}$ 为 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}^*}$ 上的离散拓扑。

(3) 令 $\mathcal{T}_{\mathcal{C}^*,\ \mathcal{M}}$ 为 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}^*}$ 上由以下形式的集合生成的拓扑：

$$A_{n,m} := \left\{f \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}^*} \;\middle|\; (f)s_{\mathcal{C}^*}\operatorname{Pow}_{\mathcal{C}^*} = n, (f)t_{\mathcal{C}^*}\operatorname{Pow}_{\mathcal{C}^*} = m\right\},$$

$$V_{n,U} := \left\{f \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}^*} \;\middle|\; f \circ \pi_n \in U\right\}$$

其中 n、$m \in \mathbb{N}$ 与 $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ 均为任意的。

此外，原拓扑运算克隆恰好是 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}^*}$ 中以目标为 X 的态射所构成的子空间，并且（在拓扑同构意义下）$(\mathcal{C}^*、\mathcal{T}_{\mathcal{C}^*,\ \mathcal{O}}、\mathcal{T}_{\mathcal{C}^*,\ \mathcal{M}})$ 是唯一具有此性质的拓扑抽象克隆。

证明。我们需要验证定义 8.2 的条件。前五个条件由定义可立即得出。接下来证明条件 7。对于每个 $i,\ j \in \mathbb{N}$，令 $\phi_{i,\ j} : (A_{i,\ 1})^j \to A_{i,\ j}$ 为由 $(f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_{j-1})\phi_{i,\ j} = \langle f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_{j-1}\rangle_{X^j}$ 定义的双射。我们需要证明 $\phi_{i,\ j}$ 关于 $\mathcal{T}_{C^*,\ \mathcal{M}}$ 连续。令 $n \in \mathbb{N}$ 和 $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ 为任意的。我们有

$$\begin{aligned}
(V_{n,U})\phi_{i,j}^{-1} &= \left(\left\{f \in A_{i,j} \;\middle|\; f \circ \pi_n \in U\right\}\right)\phi_{i,j}^{-1} \\
&= \left\{f \in (A_{i,1})^j \;\middle|\; ((f)\phi_{i,j}) \circ \pi_n \in U\right\} \\
&= \left\{f \in (A_{i,1})^j \;\middle|\; (f)\pi_n \in U\right\} \\
&= \left\{f \in (A_{i,1})^j \;\middle|\; (f)\pi_n \in V_{0,U} \cap A_{i,1}\right\} \\
&= (V_{0,U} \cap A_{i,1})\pi_n^{-1}.
\end{aligned}$$

因此，$\phi_{i,\ j}$ 是连续的。此外，由于 $\phi_{i,\ j}$ 是一个双射，且 $A_{i\ ,\ j}^{j}$ 上的拓扑由形如 $(V_{0,\ U} \cap A_{i,\ 1})\pi_n^{-1} = (U)\pi_n^{-1}$的集合生成，其中 $n \in \mathbb{N}$ 和 $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$，由上述等式可知，$\phi_{i,\ j}$ 是一个同胚。

还需证明条件 6。由于集合 $(A_{n,\ i} \times A_{i,\ m})_{i,\ n,\ m \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathsf{Comp}_{\mathcal{C}^*}$ 的一个开集划分，因此只需证明对于所有 $n,\ m,\ i \in \mathbb{N}$，映射 $\circ_{\mathcal{C}^*} \restriction_{A_{n,\ i} \times A_{i,\ m}}$ 是连续的。令 $i,\ n,\ m \in \mathbb{N}$为任意元素，并令 $(f,\ g) \in A_{n,\ i} \times A_{i,\ m}$。我们有

$$\begin{aligned}
(f,g)\circ_{\mathcal{C}^*} &= f \circ g \\
&= \langle f \circ \pi_0, f \circ \pi_1, \ldots, f \circ \pi_{n-1}\rangle_{X^n} \circ g \\
&= ((f \circ \pi_0, f \circ \pi_1, \ldots, f \circ \pi_{n-1}), g)\circ_{m,n} \\
&= ((f)\phi_{m,n}^{-1}, g) \circ_{m,n}.
\end{aligned}$$

由于 $\phi_{m\ ,\ n}^{-1}$ 与 $\circ_{m,\ n}$ 是连续的，因此由要求可知，$\circ_{C^*}$ 也是连续的。 □

命题 8.6（对应的克隆与半群拓扑，预备知识：3.12、4.5、4.10、4.18、6.14、8.2）。

设 $\mathcal{C}$ 是一个抽象克隆，且 M 是范畴 $\mathcal{C}$ 中对象 (1) 幂$_{\mathcal{C}}^{-1}$ 的自同态幺半群。进一步设，对象 (1) 幂$_{\mathcal{C}}^{-1}$ 与 (2) 幂$_{\mathcal{C}}^{-1}$ 在范畴$\mathcal{C}$中同构。

如果 $\mathcal{S}$ 是与半群 M 相容的拓扑，那么至多存在一对拓扑 $(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}, \mathcal{S})$ 与 $\mathcal{C}$ 相容，并满足 $\mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}} \restriction_M = \mathcal{S}$ (回顾定义 *3.2*)。此外，对应关系 $\mathcal{S} \leftrightarrow (\mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{O}, \mathcal{S}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}})$ 不仅保持拓扑的包含关系，也保持豪斯多夫、第二可数或波兰等性质。

证明。对于所有可能的 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，选取 $\psi_{1,n}$： (1) $\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}}^{-1} \to$ (n) $\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}}^{-1}$ 为同构（根据假设，映射 $\psi_{1,2}$ 已定义）。对于所有 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，态射

$$\langle \pi_0 \circ_{\mathcal{C}} \psi_{1,2} \circ_{\mathcal{C}} \pi_0,\ \pi_0 \circ_{\mathcal{C}} \psi_{1,2} \circ_{\mathcal{C}} \pi_1,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_{n-1} \rangle_{(n+1)\,\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}}^{-1}}$$

是从 (n) $\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}}^{-1}$ 到 $(n+1)$ $\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}}^{-1}$ 的同构。因此，对于所有 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，态射 $\psi_{1,n}$ 均已定义。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，令 ι_n 为从 (n) $\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}}^{-1}$ 到 (0) $\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}}^{-1}$ 的唯一态射

假设 $(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}, \mathcal{S})$ 和 $(\mathcal{T}'_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}, \mathcal{S})$ 是与 $\mathcal{C}$相容的有序对拓扑，并且$\mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}} \restriction_M = \mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}} \restriction'_M = \mathcal{S}$。我们需要证明 $(\mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{O}, \mathcal{S}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}}) = (\mathcal{T}'_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}, \mathcal{S}, \mathcal{T}'_{\mathcal{C}}, \mathcal{M}, \mathcal{S})$。由于$\mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{O}, \mathcal{S}}$与$\mathcal{T}'_{\mathcal{C}, \mathcal{O}, \mathcal{S}}$都是离散的，因此它们必相等。剩下要证明的是$\mathcal{T}'_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}} = \mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}}$。对于所有 $i, j \in \mathbb{N}$，令

$$A_{i,j} := \left\{ f \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \;\middle|\; (f)s_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}} = i, (f)t_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Pow}_{\mathcal{C}} = j \right\}.$$

由于假设 $s_{\mathcal{C}}$，$t_{\mathcal{C}}$ 与幂$_{\mathcal{C}}$ 都是连续的，集合$A_{i,j}$ 相对于$\mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}}$ 以及$\mathcal{T}'_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}}$这两个拓扑都是开的。注意，集合$A_{i,j}$ 将 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 划分为若干集合，而这些集合相对于拓扑$\mathcal{T}'_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}}$和$\mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}}$都是开的。令 $i, j \in \mathbb{N}$为任意对象。为了得出 $(\mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{O}, \mathcal{S}}, \mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}}) = (\mathcal{T}'_{\mathcal{C}, \mathcal{O}, \mathcal{S}}, \mathcal{T}'_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}})$，只需证明拓扑$\mathcal{T}'_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}} \restriction_{A_{i,j}}$与$\mathcal{T}_{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{S}} \restriction_{A_{i,j}}$相等。

在 $i = j = 1$的情况下，这两个拓扑都是 $\mathcal{S}$ 与特别地，它们相等。如果 i, j都不为 0，那么由于复合相对于两者都是连续的，$\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}}, \mathcal{T}'_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}}$与 $\psi_{1\,i}^{-1},, \psi_{1,j}$都可逆，因此可得

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}} \restriction_{A_{i,j}} = \psi_{1,i}^{-1} \circ_{\mathcal{C}} \mathcal{S} \circ_{\mathcal{C}} \psi_{1,j} = \mathcal{T}'_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}} \restriction_{A_{i,j}}.$$

如果 $j = 0$，那么 $A_{i,j}$ 是单元素集 $\{\iota_i\} = \{\langle\rangle_{(0)\,幂_{\mathcal{C}}^{-1}}\}$，因此 $\mathcal{T}'_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}} \restriction_{A_{i,j}} = \mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}} \restriction_{A_{i,j}}$ 也成立。还需考虑 $i = 0$ 与 $j \neq 0$ 的情况。如果 $A_{0,j} = \varnothing$，那么结论显然成立；否则，固定 $z \in A_{0,j}$。

令 $\phi_j : A_{0,j} \to A_{1,j}$ 与 $\phi'_j : \mathrm{img}(\phi_j) \to A_{0,j}$ 定义为

$$(f)\phi_j = \iota_1 \circ_{\mathcal{C}} f \quad \text{and} \quad (f)\phi'_j = z \circ_{\mathcal{C}} \psi_{1,j}^{-1} \circ_{\mathcal{C}} f.$$

根据定义，这两个映射相对于$\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}}$ 与$\mathcal{T}'_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}}$都连续。若$f \in A_{i,j}$任意，则 $(f)\,\phi_j\phi'_j = z \circ_{\mathcal{C}} \psi_1^{-1},, \circ_{\mathcal{C}} \iota_1 \circ_{\mathcal{C}} f$。由于$z \circ_{\mathcal{C}} \psi_1^{-1},, \circ_{\mathcal{C}} \iota_1$的源和目标都是(0)幂$_{\mathcal{C}}^{-1}$，因此可知这是 ι_0 (它也是该对象的单位元)。因此 $(f)\,\phi_j\phi'_j = f$。此外，若 $(f)\,\phi_j \in$img(ϕ_j)任意，则 $(\,(f)\,\phi_j)\,\phi'_j\phi_j = (\,(f)\,\phi_j\phi'_j)\,\phi_j = (f)\,\phi_j$。因此 ϕ_j 是从$A_{0,j}$ 到img(ϕ_j)的同胚。由于img(ϕ_j)包含于$A_{1,j}$，并且我们已经证明$\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}} \restriction_{A_{1,j}} = \mathcal{T}'_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}} \restriction_{A_{1,j}}$，因此

$$\mathcal{T}'_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}} \restriction_{A_{i,j}} = (\mathcal{T}'_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}} \restriction_{\mathrm{img}(\phi_j)})\phi'_j = (\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}} \restriction_{\mathrm{img}(\phi_j)})\phi'_j = \mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}} \restriction_{A_{i,j}}.$$

我们现在已经证明，拓扑$\mathcal{T}_{\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{S}}$是可数多个拓扑空间的不交并，这些空间与（$M$，$\mathcal{S}$）的特定子空间同胚（即$M$或对于某个$j$而言的$\mathrm{img}(\phi_j\psi_1^{-1}{}_{,j})$）。因此，这一对应关系既保留包含关系，也保留第二可数性和豪斯多夫性。要证明波兰性得以保留，只需证明：若$\mathcal{S}$是波兰空间且$j\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$，则$\mathcal{S}^{\restriction_{\mathrm{img}(\phi_j\psi_1^{-1}{}_{,j})}}$也是波兰空间。

我们证明$\mathrm{img}(\phi_j)\circ_{\mathcal{C}}\psi_1^{-1}{}_{,j}$是闭的（因此根据引理 4.18，它是波兰的）。由于$\mathcal{S}$是豪斯多夫的，因此$\mathcal{Z}(M)\subseteq\mathcal{S}$（引理 6.14），集合

$$RO:=\bigcap_{g\in M}\left\{f\in M\;\middle|\;gf=f\right\}$$

是闭的。我们只需证明$\mathrm{img}(\phi_j)\circ_{\mathcal{C}}\psi_1^{-1}{}_{,j}=RO$。若$(f)\phi_j\in\mathrm{img}(\phi_j)$ $g\in M$任意，则

$$g\circ_{\mathcal{C}}(f)\phi_j\circ_{\mathcal{C}}\psi_{1,j}^{-1}=(g\circ_{\mathcal{C}}\iota_1)\circ_{\mathcal{C}}f\circ_{\mathcal{C}}\psi_{1,j}^{-1}=\iota_1\circ_{\mathcal{C}}f\circ_{\mathcal{C}}\psi_{1,j}^{-1}=(f)\phi_j\circ_{\mathcal{C}}\psi_{1,j}^{-1}.$$

因此，确实有$(f)\phi_j\circ_{\mathcal{C}}\psi_1^{-1}{}_{,j}\in RO$。若 $f\in RO$任意，则

$$f=(\iota_1\circ_{\mathcal{C}}z)\circ_{\mathcal{C}}f=(\iota_1\circ_{\mathcal{C}}z)\circ_{\mathcal{C}}f\circ_{\mathcal{C}}(\psi_{1,j}\circ_{\mathcal{C}}\psi_{1,j}^{-1})=(z\circ_{\mathcal{C}}f\circ_{\mathcal{C}}\psi_{1,j})\phi_j\circ_{\mathcal{C}}\psi_{1,j}^{-1}.$$

因此，$f\in\mathrm{img}(\phi_j)\circ_{\mathcal{C}}\psi_1^{-1}{}_{,j}$，如所需。 □

9. Investigating important semigroups and clones

本节将运用前几节介绍的工具，研究与若干重要半群示例相容的拓扑。

9.1. 二元关系。 在本小节中，我们探讨二元关系幺半群（见例 4.12）。这些幺半群包含了我们将在后文研究的许多幺半群。

引理 9.1（关于$\mathcal{B}_X$的性质**W**，预备知识：3.5、4.12、7.5）。
若 X 是无限集合，则拓扑半群$(\mathcal{B}_X,\mathcal{TB}_X)$（回顾例 *4.12*）关于$\mathrm{Sym}(X)$具有性质 ***W***。

证明。 任取 $s\in\mathcal{B}_X$。只需找到 $f_s,g_s\in\mathcal{B}_X$ 和 $h_s\in\mathrm{Sym}(X)$，使得 $f_sh_sg_s=s$，并且对所有 $N\in$ 邻域$_{\mathrm{Sym}(X)}(h_s)$，都有 $f_sNg_s\in$ 邻域$_{\mathcal{B}_X}(s)$。

我们先固定一个双射 $\Phi\colon X\to X\times X\times\{0,1\}$（这必定存在，因为 X 是无限的，而 $\{0,1\}$ 是有限的）。然后，我们定义一个从 X 到 $X\times X\times\{0,1\}$ 的二元关系 f，如下：$f:=\left\{(x,(x,y,0))\;\middle|\;x,y\in X\right\}$。接着定义

$$f_s:=f\Phi^{-1}\quad\text{and}\quad g_s:=\Phi f^{-1}.$$

断言： 假设 $k\in\mathcal{B}_X$与 a是 $X\times X\times\{0,1\}$的有限子集之间的一个双射，满足$faf^{-1}\subseteq k$。在这种情况下，存在某个$t_{k,a}\in\mathrm{Sym}(X\times X\times\{0,1\})$，使得$a\subseteq t_{k,a}$且$k=ft_{k,a}f^{-1}$。断言的证明：令 $B:=(\mathrm{dom}(a))\pi_0\cup(\mathrm{dom}(a))\pi_1\cup(\mathrm{img}(a))\pi_0\cup(\mathrm{img}(a))\pi_1$, $G:=X\backslash B$与 $\phi\colon X\to G$为一个双射。对于每个 $x\in X$，令

$$t_x:\{x\}\times(\{x\})k\phi\times\{0\}\to(\{x\})k\times(\{x\})\phi\times\{0\}$$

由下式定义的双射

$$(x,(y)\phi,0)t_x=(y,(x)\phi,0).$$

注意，对于每个 $x \in X$，我们有 $\mathrm{dom}(t_x) \cap \mathrm{dom}(a) = \varnothing = \mathrm{img}(t_x) \cap \mathrm{img}(a)$，且 $f t_x f^{-1} = k \cap (\{x\} \times X)$。此外，如果 $x \neq y$，那么 $\mathrm{dom}(t_x) \cap \mathrm{dom}(t_y) = \varnothing = \mathrm{img}(t_x) \cap \mathrm{img}(t_y)$。因此，$t := \bigcup_{x \in X} t_x$ 是 $X \times X \times \{0\}$ 的一个子集与 $ftf^{-1} = k$ 之间的双射。

现在我们定义 $R_d := (X \times X \times \{0\}) \backslash (\mathrm{dom}(t) \cup \mathrm{dom}(a))$ 和 $R_i := (X \times X \times \{0\}) \backslash (\mathrm{img}(t) \cup \mathrm{img}(a))$。令 $b \in G$ 固定。由于 $|R_d|, |R_i| \leq |X|$，我们可以定义单射 $u_d : R_d \to G \times \{b\} \times \{1\}$ 和 $u_i : R_i \to G \times \{b\} \times \{1\}$。我们有 $|G \times (G \backslash \{b\}) \times \{1\}| = |X|$，此外 $G \times (G \backslash \{b\}) \times \{1\}$ 与.....不相交

$$\mathrm{dom}(a) \cup \mathrm{img}(a) \cup \mathrm{dom}(t) \cup \mathrm{img}(t) \cup \mathrm{dom}(u_i) \cup \mathrm{img}(u_i) \cup \mathrm{dom}(u_d) \cup \mathrm{img}(u_d).$$

因此存在一个双射 u，从集合

$$(X \times X \times \{0,1\}) \backslash (\mathrm{dom}(a) \cup \mathrm{dom}(u_d) \cup \mathrm{img}(u_i) \cup \mathrm{dom}(t))$$

到集合

$$(X \times X \times \{0,1\}) \backslash (\mathrm{img}(a) \cup \mathrm{img}(u_d) \cup \mathrm{dom}(u_i) \cup \mathrm{img}(t)).$$

特别是，集合

$$\{\text{都}\}\mathrm{n}(u), \mathrm{dom}(u_d), \mathrm{img}(u_i), \mathrm{dom}(t), \mathrm{dom}(a)\} \text{ and } \{\mathrm{img}(u), \mathrm{img}(u_d), \mathrm{dom}(u_i), \mathrm{img}(t), \mathrm{img}(a)$$

都是 $X \times X \times \{0,1\}$ 的划分。因此 $t_{k,\ a} := u \cup u_d \cup u_i^{-1} \cup t \cup a$ 是一个从 $X \times X \times \{0,1\}$ 到其自身的双射。根据定义 $a \subseteq t_{k,\ a}$，所以我们只需证明 $f t_{k,\ a} f^{-1} = k$。证明如下：

$$\begin{aligned} f t_{k,a} f^{-1} &= (fuf^{-1}) \cup (fu_d f^{-1}) \cup (fu_i^{-1} f^{-1}) \cup (ftf^{-1}) \cup (faf^{-1}) \\ &= (\varnothing) \cup (\varnothing) \cup (\varnothing) \cup (k) \cup (faf^{-1}) \\ &= k. \diamondsuit \end{aligned}$$

根据断言（使用 $a = \varnothing$），我们可以选取 $t_s \in \mathrm{Sym}(X \times X \times \{0,1\})$，使得 $f t_s f^{-1} = k$。因此，若定义 $h_s := \Phi t_s \Phi^{-1}$，则有 $f_s h_s g_s = s$。

任取 $N \in \mathrm{Nbhds}^{\mathrm{Sym}(X)}(h_s)$，只需证明 $f_s N g_s \in \mathrm{Nbhds}^{\mathcal{B}_X}(s)$。由于 N 是 h_s 的一个邻域，因此存在某个有限的 $a \subseteq t_s$，使得

$$\Phi \left\{ t \in \mathrm{Sym}(X \times X \times \{0,1\}) \;\middle|\; a \subseteq t \right\} \Phi^{-1} \subseteq N.$$

我们定义 $U := \left\{ k \in \mathcal{B}_X \;\middle|\; faf^{-1} \subseteq k \right\}$。由于 faf^{-1} 是有限的，集合 U 是 $\mathcal{B}_X$ 的一个开子集。此外，$faf^{-1} \subseteq f t_s f^{-1} = s$，因此 $U \in \mathrm{Nbhds}^{\mathcal{B}_X}(s)$。所以只需证明 $U \subseteq f_s N g_s$。任取 $k \in U$。根据断言，令 $t_{k,\ a} \in \mathrm{Sym}(X \times X \times \{0,1\})$，使得 $f t_{k,\ a} f^{-1} = k$ 与 $a \subseteq t_{k,\ a}$。根据 a 的定义，可得 $\Phi t_{k,\ a} \Phi^{-1} \in N$。因此

$$k = f t_{k,a} f^{-1} = f_s \Phi t_{k,a} \Phi^{-1} g_s \in f_s N g_s$$

如所要求的。 □

定义 9.2（豪斯多夫二元关系拓扑，预备知识：3.14、4.12、9.3）。若 X 是一个集合，则我们将集合 $\mathcal{B}_X$ 上由以下形式的集合生成的拓扑定义为 $\mathcal{HTB}_X$

$$U_{Y,Z} := \left\{ f \in \mathcal{B}_X \;\middle|\; (Y \times Z) \cap f \neq \varnothing \right\} \quad \text{and} \quad V_{Y,Z} := \left\{ f \in \mathcal{B}_X \;\middle|\; (Y \times Z) \cap f = \varnothing \right\}$$

对所有 Y， $Z \subseteq X$ （我们将在引理 9.3 中证明，这是一个豪斯多夫半群拓扑）。

引理 9.3 （豪斯多夫二元关系拓扑的性质良好，预备知识：3.2、3.5、6.6、9.2）。若 X 是一个集合，则定义 *9.2* 中的拓扑 $\mathcal{HTB}_X$ 是与 $\mathcal{B}_X$ 相容的豪斯多夫拓扑。此外 $\mathcal{HTB}_X = \mathcal{MF}(\mathcal{B}_X)$。

证明。 我们先证明 $\mathcal{HTB}_X$ 是豪斯多夫的。任取满足 $f \neq g$ 的 f， $g \in \mathcal{B}_X$。不失一般性，设存在某个有序对 $(x, y) \in f \backslash g$。由此可得 $f \in U_{\{x\},\{y\}}$ 与 $g \in \mathcal{B}_X \backslash U_{\{x\},\{y\}} = V_{\{x\},\{y\}}$。由于 f 和 g 是任意的，因此 $\mathcal{HTB}_X$ 是豪斯多夫的。

接下来我们证明 $\mathcal{HTB}_X$ 与 $\mathcal{B}_X$ 相容。任取 Y， $Z \subseteq X$。我们先证明 $(U_{Y,Z})(*^{\mathcal{B}_X})^{-1}$ 是开的。任取 $(f, g) \in (U_{Y,Z})(*^{\mathcal{B}_X})^{-1}$。注意到 $(Y \times Z) \cap fg \neq \varnothing \iff (Y)f \cap (Z)g^{-1} \neq \varnothing$。因此存在某个 $p \in (Y)f \cap (Z)g^{-1}$。特别地，我们有

$$(f, g) \in U_{Y,\{p\}} \times U_{\{p\},Z} \subseteq (U_{Y,Z})(*^{\mathcal{B}_X})^{-1}.$$

因此 $(U_{Y,Z})(*^{\mathcal{B}_X})^{-1} \in$ 邻域$\mathcal{B}_X^2((f, g))$，从而 $(U_{Y,Z})(*^{\mathcal{B}_X})^{-1}$ 是开的。接下来证明集合 $(V_{Y,Z})(*^{\mathcal{B}_X})^{-1}$ 是开的。任取 $(f, g) \in (V_{Y,Z})(*^{\mathcal{B}_X})^{-1}$。与之前一样 $(Y \times Z) \cap fg = \varnothing \iff (Y)f \cap (Z)g^{-1} = \varnothing$。因此我们有

$$(f, g) \in V_{Y,X\backslash(Y)f} \times V_{X\backslash(Z)g^{-1},Z} \subseteq (V_{Y,Z})(*^{\mathcal{B}_X})^{-1}.$$

因此 $(V_{Y,Z})(*^{\mathcal{B}_X})^{-1} \in$ 邻域$\mathcal{B}_X^2((f, g))$，从而 $(V_{Y,Z})(*^{\mathcal{B}_X})^{-1}$ 是开的。

剩下要证明 $\mathcal{HTB}_X = \mathcal{MF}(\mathcal{B}_X)$。由于 $\mathcal{HTB}_X$是弗雷歇且与 $\mathcal{B}_X$相容，根据 $\mathcal{MF}(\mathcal{B}_X)$ 的定义可得 $\mathcal{MF}(\mathcal{B}_X) \subseteq \mathcal{HTB}_X$。为证明反向包含，任取一个与 $\mathcal{B}_X$ 半相容的弗雷歇拓扑 $\mathcal{T}$，并任取 Y，$Z \subseteq X$。

只需证明 $U_{Y,Z}$ 和 $V_{Y,Z}$ 在 $\mathcal{T}$中是开集。由于 $\mathcal{T}$是弗雷歇的，其子空间

$$\operatorname{img}(\lambda_{Y\times Y} \circ \rho_{Z\times Z}) = \{\varnothing, Y \times Z\}$$

$(\mathcal{B}_X, \mathcal{T})$是离散的。此外，由于 $\mathcal{T}$与 $\mathcal{B}_X$半相容，可知 $(\{\{\varnothing\}, \{Y \times Z\}\})(\lambda_{Y\times Y} \circ \rho_{Z\times Z})^{-1}$ 是 $\mathcal{B}_X$ 的一个由开集组成的划分。由于

$$(\{\{\varnothing\}, \{Y \times Z\}\})(\lambda_{Y\times Y} \circ \rho_{Z\times Z})^{-1} = \{V_{Y\times Z}, U_{Y\times Z}\},$$

结论由此得证。 □

定理 9.4 ($\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$的拓扑，预备知识：3.7、6.12、6.13、6.15、7.6、9.1、9.3)。从$(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}, \mathcal{TB}_{\mathbb{N}})$ （回忆例 *4.12*）到第二可数拓扑半群的每个同态都是连续的，并且不存在与 $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$相容的第二可数弗雷歇拓扑。此外，我们有

$$\mathcal{TB}_{\mathbb{N}} = \mathcal{SCC}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}) \subsetneq \mathcal{MF}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{Z}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{FM}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{HM}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{HTB}_{\mathbb{N}}.$$

证明。 由引理 9.3 可知， $\mathcal{HTB}_{\mathbb{N}} = \mathcal{MF}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}})$是豪斯多夫的，并且与 $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$相容。因此，根据 $\mathcal{HM}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}})$ 的定义，有 $\mathcal{HM}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}) \subseteq \mathcal{HTB}_{\mathbb{N}} = \mathcal{MF}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}})$。于是由命题 6.15 可知，我们有

$$\mathcal{MF}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{Z}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{FM}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{HM}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{HTB}_{\mathbb{N}}.$$

若 $x, y \in \mathbb{N}$ 任意，则例 4.12 中的集合$U_{x,y}$ 与定义 9.2 中的集合$U_{\{x\},\{y\}}$ 相同。因此 $\mathcal{TB}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{HTB}_{\mathbb{N}}$。此外， $\varnothing$ 在拓扑 $\mathcal{TB}_{\mathbb{N}}$ 中的唯一邻域是整个空间，因此 $\mathcal{TB}_{\mathbb{N}}$ 不是豪斯多夫的，故 $\mathcal{TB}_{\mathbb{N}} \subsetneq \mathcal{HTB}_{\mathbb{N}}$。

剩下要证明 $\mathcal{TB}_{\mathbb{N}} = \mathcal{SCC}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}})$（回顾命题 6.12）。根据定义，拓扑 $\mathcal{TB}_{\mathbb{N}}$是第二可数的。由于 $\mathcal{TB}_{\mathbb{N}}$ 与 $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$相容，根据 $\mathcal{SCC}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}})$的定义可得$\mathcal{TB}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{SCC}(\mathcal{B}_{\mathbb{N}})$。令 $\mathcal{T}$为与 $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$相容的任意第二可数拓扑。只需证明 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{TB}_{\mathbb{N}}$。

由推论 6.13，我们有 $\mathcal{SCC}(\mathrm{Sym}(\mathbb{N})) = \mathcal{TB}_{\mathbb{N}} \restriction_{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}$。因此 $\mathcal{T} \restriction_{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})} \subseteq \mathcal{TB}_{\mathbb{N}} \restriction_{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}$。将引理 7.6 应用于从 $(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}, \mathcal{TB}_{\mathbb{N}})$ 到 $(\mathcal{B}_{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ 的恒等同态后，只需证明 $\mathcal{B}_X$ 相对于 $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ 具有性质 $\mathbf{W}$。引理 9.1 证明了这一点。□

集合与二元关系以一种自然的方式构成一个范畴。这个范畴甚至有积，尽管该范畴中的积与集合与函数范畴中的通常积大不相同。因此，利用命题 8.6 可以自然地考虑一个二元关系克隆；然而，由定理 9.4 可知，不存在与 $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ 相容的第二可数 Fr´echet 拓扑，因此这样的克隆也同样如此。

9.2. **（部分）变换**。本小节探讨变换幺半群和部分变换幺半群的拓扑（见例 4.13 和例 9.5）。

例 9.5（偏函数幺半群，预备知识：4.12）。
若 X 是一个集合，则我们将 $\mathcal{P}_X$ 定义为 $\mathcal{B}_X$ 的子幺半群（回顾例 4.12），它由那些从 X 的子集到 X的关系组成，这些关系都是函数。

我们将 $\mathcal{P}_X$ 上的部分逐点拓扑 $\mathcal{PPT}_X$ 定义为由以下形式的集合生成的拓扑：

$$U_{x,y} := \left\{ f \in \mathcal{P}_X \;\middle|\; (x,y) \in f \right\} \quad \text{or} \quad V_x := \left\{ f \in \mathcal{P}_X \;\middle|\; x \notin \mathrm{dom}(f) \right\}$$

其中 $x,\ y \in X$。我们在引理 9.6 中证明（$\mathcal{P}_X,\ \mathcal{PPT}_X$）是一个拓扑半群。

引理 9.6（拓扑部分函数，预备知识：3.2、3.25、9.5）。
例 *9.5* 中的有序对 $(\mathcal{P}_X, \mathcal{PPT}_X)$是一个拓扑半群。

证明。 任取 $x, y \in X$。只需证明这些集合

$$(U_{x,y})(*^{\mathcal{P}_X})^{-1} \quad \text{and} \quad (V_x)(*^{\mathcal{P}_X})^{-1}$$

是 $\mathcal{P}_X^2$ 的开子集（使用拓扑 $\mathcal{PPT}_X$）。由于 $(\mathcal{P}_X, \mathcal{TB}_X \restriction_{\mathcal{P}_X})$ 是 $(\mathcal{B}_X, \mathcal{TB}_X)$ 的拓扑子半群，且 $\mathcal{TB}_X \restriction_{\mathcal{P}_X} \subseteq \mathcal{PPT}_X$（回顾例 4.12 和定义 3.2），因此 $(U_{x,y})(*^{\mathcal{P}_X})^{-1}$ 是开集。

还需证明 $(V_x)(*^{\mathcal{P}_X})^{-1}$ 是开集。注意，若任取 $a, b \in \mathcal{P}_X$，则 $x \notin$定义域$(ab) \iff (x \notin$ 定义域(f) 或 $(x)f \notin$ 定义域$(g))$。换言之

$$(V_x)(*^{\mathcal{P}_X})^{-1} = (V_x \times \mathcal{P}_X) \cup \left(\bigcup_{y \in X} (U_{x,y} \times V_y) \right).$$

因此，$(V_x)(*^{\mathcal{P}_X})^{-1}$ 是开集，证毕。 □

本文中我们只会对半群 $\mathcal{P}_X$ 与 X^X 使用以下引理（以确立定理 9.10 中的“下界”），但它也适用于许多其他可能有趣的半群（例如 $\mathrm{End}(\mathbb{Q}, \leq)$）。

引理 9.7（最小部分函数拓扑，预备知识：3.2、6.6、9.5）。
假设 X 是一个集合，且 S 是 $\mathcal{P}_X$ 的子半群，使得

（1）对于所有 $x \in X$，常值映射$c_{X,\,x} :=X\times\{x\}$ 都是 S的元素。（2）对于所有 $x \in X$，存在某个 $f_x \in S$，使得（$\{x\}$）$f_x^{-1} = \{x\}$，且 $|像(f_x)|$ 是有限的。

在这种情况下 $\mathcal{MF}(S) = \mathcal{PPT}_X \restriction_S$。

证明。首先注意到，根据引理 9.6，拓扑 $\mathcal{PPT}_X$ 与 S相容。因此，根据 $\mathcal{MF}(S)$ 的定义，我们有 $\mathcal{MF}(S) \subseteq \mathcal{PPT}_X \restriction_S$。剩下的工作是证明反向包含关系。

设 $\mathcal{T}$是一个任意的、与 S 半相容的 Fr´échet 拓扑，并设 $x, y \in X$ 是任意的。只需证明例 9.5 中的集合$U_{x,y}, V_x$ 在 $\mathcal{T}$中是开的。注意，如果 $g \in S$，那么

$$(x,y)\in g \iff c_{X,x}gf_y = c_{X,y} \iff c_{X,x}gf_y \notin \{\varnothing\}\cup\left\{c_{X,z}\;\middle|\; z\in \operatorname{img}(f_y)\backslash\{y\}\right\},$$
$$x\notin \operatorname{dom}(g) \iff c_{X,x}gc_{X,x} \neq c_{X,x} \iff c_{X,x}gc_{X,x}\in\{\varnothing\}.$$

换句话说

$$U_{x,y} = \mathcal{P}_X\backslash\left(\left(\{\varnothing\}\cup\left\{c_{X,z}\;\middle|\; z\in \operatorname{img}(f_y)\backslash\{y\}\right\}\right)\lambda^{-1}_{c_{X,x}}\rho^{-1}_{f_y}\right),$$
$$V_x = (\{\varnothing\})\lambda^{-1}_{c_{X,x}}\rho^{-1}_{c_{X,x}}$$

由于拓扑 $\mathcal{T}$是 Fr´échet 拓扑，有限集 $\{\varnothing\}$ 与 $\{\varnothing\}\cup\left\{c_{X,z}\;\middle|\; z\in \operatorname{img}(f_y)\backslash\{y\}\right\}$ 相对于 $\mathcal{T}$是闭的。由于 $\mathcal{T}$与 S半相容，由上述等式可知，$U_{x,y}$ 相对于 $\mathcal{T}$是开的。□

接下来，我们证明用于确立定理 9.10 中“上界”的引理。

引理 9.8（X^X 的性质 **W**，预备知识：3.5、4.13、7.5）。

若 X 是一个半群，则拓扑半群 $(X^X,\ \mathcal{PT}_X)$ 关于 对称群(X) 具有性质 $\boldsymbol{W}$.

证明。任取 $s \in X^X$。只需找到 $f_s,\ g_s \in X^X$ 和 $h_s \in$ 对称群(X)，使得 $f_s h_s g_s = s$，并且对所有 $N \in$ 邻域 $_{\mathrm{Sym}(X)}(h_s)$，都有 $f_s N g_s \in$ 邻域 $_{X^X}(s)$。

如果 X 是有限的，那么 X^X 是离散的，因此我们可以取 $f_s = s,\ h_s = 1_{X^X},\ g_s = 1_{X^X}$。如果 X 是无限的，那么我们固定一个双射 $\Phi: X \to X\times X$，并且 $b \in X$。

然后我们将 $f_s, g_s \in X^X$ 定义为

$$(x)f_s = (x,b)\Phi^{-1} \quad \text{and} \quad (x)g_s = (x)\Phi\pi_0.$$

断言：假设 $k \in X^X$ 与 a 是 $X\times X$ 的有限子集之间的一个双射，并且只要 $(x,b) \in \operatorname{dom}(a)$，就有 $(x,b)a\pi_0 = (x)k$。在这种情况下，存在某个 $t_{k,a} \in \operatorname{Sym}(X\times X)$，使得$a \subseteq t_{k,a}$ 且 $f_s\Phi t_{k,\,a}\Phi^{-1}g_s = k$。

断言的证明：令 $M \subseteq X$ 满足 $|M| = |X\backslash M|$，并令 $\phi: X \to M\backslash((\operatorname{img}(a))\pi_0\cup(\operatorname{img}(a))\pi_1)$ 为一个单射。

定义 $t': (X\times\{b\})\backslash\operatorname{dom}(a) \to X\times M$ 为 $(x,b)t' = ((x)k, (x)\phi)$。由于 $t'\pi_1$ 是单射，因此 t' 也是单射。此外

$$|X| = |X\times X| \geq |(X\times X)\backslash \operatorname{dom}(t')| \geq |X\times(X\backslash\{b\})| \geq |X|,$$
$$|X| = |X\times X| \geq |(X\times X)\backslash \operatorname{img}(t')| \geq |X\times(X\backslash M)| \geq |X|.$$

因此 $|(X\times X)\backslash\operatorname{dom}(t')| = |(X\times X)\backslash \operatorname{img}(t')| = |X|$。由于 a是有限的，存在一个双射

$$u : (X\times X)\backslash(\operatorname{dom}(t')\cup\operatorname{dom}(a)) \to (X\times X)\backslash(\operatorname{img}(t')\cup\operatorname{img}(a)).$$

根据构造， t'、 a、 u 是单射，且这些集合

$$\{\mathrm{dom}(t'), \mathrm{dom}(a), \mathrm{dom}(u)\} \quad \text{and} \quad \{\mathrm{img}(t'), \mathrm{img}(a), \mathrm{img}(u)\}$$

是 $X \times X$ 的划分。因此 $t_{k,\ a} := t' \cup a \cup u$ 是 Sym($X \times X$) 的一个元素。此外，根据定义$a \subseteq t_{k,\ a}$，若 $x \in X$，则或者 (x，b) $\in$ 属于 dom(a)，并且

$$(x) f_s \Phi t_{k,a} \Phi^{-1} g_s = (x,b) t_{k,a} \pi_0 = (x,b) a \pi_0 = (x) k,$$

或者 (x，b) $\notin$ 属于 dom(a)，并且

$$(x) f_s \Phi t_{k,a} \Phi^{-1} g_s = (x,b) t_{k,a} \pi_0 = ((x)k, (x)\phi) \pi_0 = (x)k. \diamondsuit$$

根据断言（使用 $a = \varnothing$），我们可以选取 $t_s \in \in$Sym($X \times X$)，使得 $f_s \Phi t_s \Phi^{-1} g_s = k$。然后定义 $h_s := \Phi t_s \Phi^{-1}$。

任取 $N \in \in$Nbhds$^{\mathrm{Sym}(X)}$(h_s)，只需证明 $f_s N g_s \in \in$Nbhds$_{X^X}$(s)。由于 N 是 h_s 的一个邻域，存在某个有限的 $a \subseteq t_s$，使得

$$\Phi \left\{ t \in \mathrm{Sym}(X \times X) \;\middle|\; a \subseteq t \right\} \Phi^{-1} \subseteq N.$$

我们定义

$$U := \left\{ k \in X^X \;\middle|\; \text{whenever } (x,b) \in \mathrm{dom}(a) \text{ we have } (x)k = (x,b)a\pi_0 \right\}.$$

由于 a 是有限的，集合 U 是 X^X 的一个开子集。此外，若 (x，b) $\in$ 属于 dom(a)，则 (x)s =(x) $f_s h_s g_s$ =(x，b)$a\pi_0$，因此 $U \in \in$Nbhds$_{X^X}$(s)。所以只需证明 $U \subseteq f_s N g_s$。

令 $k \in U$ 任意。根据断言，存在$t_{k,a} \in$ Sym($X \times X$)，使得$f_s \Phi t_{k,a} \Phi^{-1} g_s = k$ 且$a \subseteq t_{k,a}$。根据 a 的定义，可得$\Phi t_{k,a} \Phi^{-1} \in N$。因此

$$k = f_s \Phi t_{k,a} \Phi^{-1} g_s \in f_s N g_s$$

如所需。 □

引理 9.9 （ $\mathcal{P}_X$的性质**W**，预备知识：3.5、7.5、9.5）。
若 X 是一个 集合，则拓扑半群($\mathcal{P}_X, \mathcal{PPT}_X$) 关于 X^X 具有性质 ***W***。

证明。任取 $s \in X^X$。只需找到 $g_s \in \mathcal{P}_X$ 和 $h_s \in X^X$，使得 $h_s g_s = s$，并且对于所有 $N \in$Nbhds$_{X^X}$(h_s)，都有 $N g_s \in$Nbhds$^{\mathcal{P}_X}$(s)。

如果 X 是有限的，那么 $\mathcal{P}_X$ 是离散的，因此我们可以选择 $h_s = 1_{\mathcal{P}_X}$， $g_s = s$。如果 X 是无限的，那么固定某个 $p \in X$，并令 $g_s : X \backslash \{p\} \to X$ 为一个双射。

断言：设 $k \in \mathcal{P}_X$ 与 a 是 X 的有限子集之间的函数，使得 $a g_s \subseteq k$ 且（{p}）a^{-1} ∩定义域(k) $= \varnothing$。在这种情况下，存在某个 $h_{k,\ a} \in X^X$，使得 $a \subseteq h_{k,\ a}$ 且 $h_{k,\ a} g_s = k$。断言的证明：令 b：定义域(k)\定义域(a) $\to X$，并令 c： X\(定义域(k) ∪ 定义域(a)) $\to X$，定义为

$$(x)b = (x) k g_s^{-1} \quad \text{and} \quad (x)c = p.$$

由于 {定义域(a)、定义域(b)、定义域(c)} 是 X的一个划分，因此可得 $h_{k,\ a} := a \cup b \cup c \in X^X$。

注意，定义域($a g_s$) = 定义域(a)\({p})a^{-1})，因此根据该断言的假设，我们有定义域(b) =定义域(k)\定义域($a g_s$)。还需证明 $h_{k,\ a} g_s = k$。需要考虑 4 种情况：

(1) 如果 $x \in$ dom(k) ∩dom($a g_s$)，那么 (x)$h_{k,\ a} g_s$ = (x)$a g_s$ = (x)k.(2) 如果 $x \in$ dom(k)\ dom($a g_s$)，那么 (x)$h_{k,\ a} g_s$ = (x)$k g_s^{-1} g_s$ = (x)k.(3) 如果 $x \in$ dom($a g_s$)\dom(k)，那么（如 $a g_s \subseteq k$）我们有 $x \in \varnothing$，因此 $x \notin$ dom($h_{k,\ a} g_s$)。

(4) 如果 $x \in X \backslash (\mathrm{dom}(ag_s) \cup \mathrm{dom}(k))$，那么 $x \notin \mathrm{dom}(ag_s) \cup \mathrm{dom}(bg_s) = \mathrm{dom}(ag_s) \cup \mathrm{dom}(bg_s) \cup \mathrm{dom}(cg_s) = \mathrm{dom}(h_{k,\ a}g_s)$。

因此 $h_{k,\ a}g_s = k$ 如要求所示。♢

根据该断言（使用 $s = k$ 与 $\varnothing = a$），令 $h_s \in X^X$ 使得 $h_s g_s = s$。任取 $N \in$ 邻域$_{X^X}(h_s)$。只需证明 $Ng_s \in$邻域$_{\mathcal{P}_X}(s)$。根据 N的选取，存在有限的 $a \subseteq h_s$使得 $N \supseteq \left\{h \in X^X \;\middle|\; a \subseteq h\right\}$. 我们定义

$$U := \left\{k \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \;\middle|\; ag_s \subseteq k \text{ and } (\{p\})a^{-1} \cap \mathrm{dom}(k) = \varnothing\right\}.$$

注意，集合 U 在 $\mathcal{PPT}_X$中是开集。此外，我们有 $ag_s \subseteq h_s g_s = s$；如果 $x \in (\{p\})a^{-1}$，那么 $(a)h_s = p$，从而 $x \notin$ 定义域$(h_s g_s)$。因此 $U \in$ 邻域$_{\mathcal{P}_X}(s)$。所以只需证明 $U \subseteq \left\{h \in X^X \;\middle|\; a \subseteq h\right\} g_s \subseteq Ng_s$。这由该断言与 a的定义立即得到，故结论成立。□

定理 9.10（$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 与 $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$的拓扑，预备知识：5.39、6.15、7.6、7.7、9.7、9.8、9.9）。

拓扑 $\mathcal{PT}_{\mathbb{N}}$ 是与半群 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$相容的唯一第二可数 *Fr´échet* 拓扑（回顾例 *4.13*）。同样，拓扑 $\mathcal{PPT}_{\mathbb{N}}$ 是与半群 $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ 相容的唯一第二可数 *Fr´échet* 拓扑（回顾例 *9.5*）。此外，从 $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ \mathcal{PT}_{\mathbb{N}})$ 或（$\mathcal{P}_{\mathbb{N}},\ \mathcal{PPT}_{\mathbb{N}}$）到第二可数半群的所有半群同态都是连续的，

$$\mathcal{PT}_{\mathbb{N}} = \mathcal{Z}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \mathcal{MF}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \mathcal{FM}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \mathcal{HM}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \mathcal{SCC}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}),$$

$$\mathcal{PPT}_{\mathbb{N}} = \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{MF}(\mathcal{P}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{FM}(\mathcal{P}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{HM}(\mathcal{P}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{SCC}(\mathcal{P}_{\mathbb{N}}),$$

并且这两个拓扑都是波兰拓扑。

证明。令 $d\colon \mathcal{P}_X^2 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$(f,g)d = \inf\left(\left\{\frac{1}{2^n} \;\middle|\; f\restriction_{\{0,1,\ldots,n-1\}} = g\restriction_{\{0,1,\ldots,n-1\}}, n \in \mathbb{N}\right\}\right).$$

容易验证这是一个与 $\mathcal{PPT}_X$相容的完备度量，并且它限制为一个与 $\mathcal{PT}_X$ 相容的完备度量，因此这些拓扑是波兰拓扑。任取 $S \in \{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\}$。令 $\mathcal{T}$ 为一个与 S相容的任意第二可数 Fr´échet 拓扑。根据引理 9.7，拓扑 $\mathcal{T}$包含 $\mathcal{PPT}_{\mathbb{N}}\restriction_S$，因此 $\mathcal{T}$是豪斯多夫的。于是由命题 6.15，我们有

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Z}(S) & \\ \mathcal{MF}(S) & & \mathcal{HM}(S) \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{SCC}(S). \\ & \mathcal{FM}(S) & \end{array}$$

只需证明所有这些包含关系都是等式。因此，我们只需要证明$\mathcal{SCC}(S) \subseteq \mathcal{MF}(S)$。

由引理 9.7 可知，$\mathcal{MF}(S) = \mathcal{PPT}_{\mathbb{N}}\restriction_S$(因此若 $S = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，则 $\mathcal{MF}(S) = \mathcal{PT}_{\mathbb{N}}$)。所以只需证明 $\mathcal{SCC}(S) \subseteq \mathcal{PPT}_{\mathbb{N}}\restriction_S$。设 ϕ 是从 $(\mathcal{S},\ \mathcal{PPT}_{\mathbb{N}}\restriction_S)$ 到某个第二可数拓扑半群的任意半群同态。由命题 6.12，只需证明 ϕ 是连续的。

由命题 6.12 和定理 5.39 可知，$\phi\restriction_{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}$ 是连续的。由引理 7.6，只需证明 S 相对于 Sym(ℕ) 具有性质 **W** 。若 $S=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，则由引理 9.8 可得；若 $S=\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$，则由引理 9.8、7.7 和 9.9 可得。□

现在我们已经证明了本小节的主要结果，可以利用命题 8.6 将其推广到相应的克隆。集合与函数范畴以及集合与部分函数范畴都足够适用该命题。不过，在集合与部分函数范畴中，积和投影有些特殊（投影映射不再处处有定义，而空集的积也不再包含空元组）。因此，我们只陈述全函数克隆的克隆推论；但对于感兴趣的读者，部分函数克隆的论证也是一样的。

推论 9.11（全函数克隆的拓扑，预备知识：8.2、8.6、9.10）。令 $\mathcal{C}$ 为集合与函数范畴，其对象集为 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}:=\left\{\mathbb{N}^i \;\middle|\; i\in\mathbb{N}\right\}$，态射集 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 由这些对象之间的所有函数组成。令 $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$ 为 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ 上的离散拓扑，并令 $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ 为 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 上由以下形式的集合生成的拓扑

$$A_{i,j}:=(\mathbb{N}^j)^{\mathbb{N}^i}\quad and\quad U_{x,y}:=\left\{f\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \;\middle|\; (x,y)\in f\right\}$$

对所有 i、$j\in\mathbb{N}$、$x\in\mathbb{N}^i$ 与 $y\in\mathbb{N}^j$。

三元组 $(\mathcal{C}$、$\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$、$\mathcal{P}_M)$ 是一个波兰拓扑抽象克隆。此外，如果 $(\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$、$\mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ 与该克隆 $\mathcal{C}$ 相容，则

(1) 如果 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 是豪斯多夫的，则 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}\supseteq\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$。
(2) 如果 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 是第二可数的，则 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}\subseteq\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$。

证明。我们首先证明 $(\mathcal{C}$、$\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$、$\mathcal{P}_M)$ 是一个拓扑抽象克隆。我们需要验证定义 8.2 中的七个条件。前五个条件由定义立即得到。接下来证明 $\circ_{\mathcal{C}}$ 是连续的。由于集合 $(A_n$、$_i\times A_i$、$_m)_i$、$_n$、$_{m\in\mathbb{N}}$ 是 Comp$_{\mathcal{C}}$ 的开集划分，因此只需证明对于所有 n、m、$i\in\mathbb{N}$，映射 $\circ_{\mathcal{C}}\restriction_{A_n}$、$_{i\times A_i}$、$_m$ 是连续的。对于所有 j、$k\in\mathbb{N}$、$x\in\mathbb{N}^i$、$y\in\mathbb{N}^j$，集合 $(A_j$、$_k)^{\circ_{\mathcal{C}}}\restriction^{-1}_{A_n}$、$_{i\times A_i}$、$_m$ 要么为空，要么是 A_n、$_i\times A_i$、$_m$，因而是开集，并且

$$(U_{x,y})^{\circ_{\mathcal{C}}}\restriction^{-1}_{A_{n,i}\times A_{i,m}}=\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\bigcup_{z\in\mathbb{N}^l}U_{x,z}\times U_{z,y}$$

这也是开集。

还需证明，对于所有 $i,j\in\mathbb{N}$，定义 8.2 中的双射 $\phi_{i,j}:A_i^j{}_{,1}\to A_{i,j}$ 是连续的。这可由以下观察得出：若 $x\in\mathbb{N}^i$ 与 $y\in\mathbb{N}^j$，则

$$(U_{x,y})\phi_{i,j}^{-1}=\prod_{k\in\{0,1,\dots,j-1\}}U_{x,(y)\pi_k}.$$

因此，$(\mathcal{C},\mathcal{P}_{\mathcal{O}},\mathcal{P}_M)$ 是一个拓扑抽象克隆。由定理 9.10 可知，$\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\restriction_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ 是波兰空间，并且当所有拓扑都限制在 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$上时，所要求的包含关系成立。因此，结论由命题 8.6 得出。□

9.3. **部分双射**。 在本小节中，我们将探讨对称逆幺半群上的拓扑（见定理 9.18）；这些幺半群是对称群在逆半群中的对应物。

例 9.12（对称逆幺半群，预备知识：4.7、9.5）。
如果 X 是一个集合，那么我们将 X 的对称逆幺半群 $\mathcal{I}_X$ 定义为如下逆半群：其全集由 X的子集之间的双射组成，运算为二元关系的复合与求逆。注意， $\mathcal{I}_X$ 的全集恰好是 $\mathcal{P}_X \cap \mathcal{P}_X^{-1}$ 。

定义 9.13（对称逆幺半群上的拓扑，预备知识：3.2、9.5、9.12）。如果 X 是一个集合，那么我们在集合 $\mathcal{I}_X$上定义以下拓扑

（1）由形如以下集合生成的补逐点拓扑 $\mathcal{CPT}_X$

$$\left\{f \in \mathcal{I}_X \;\middle|\; (x,y) \in f\right\} \text{ and } \left\{f \in \mathcal{I}_X \;\middle|\; (x,y) \in (X \times X) \backslash f\right\}$$

对所有 x， $y \in X$。

（2）左逐点拓扑 $\mathcal{LPT}_X := \mathcal{PPT}_X \restriction_{\mathcal{I}_X}$。（3）右逐点拓扑 $\mathcal{RPT}_X := \mathcal{LPT}_X^{-1}$，（4）由 $\mathcal{LPT}_X \cup \mathcal{RPT}_X$生成的逆逐点拓扑 $\mathcal{IPT}_X$。

引理 9.14（补逐点拓扑是良好的，预备知识：3.14、3.18、6.6、9.13）。

If X 是一个集合，则 $\mathcal{CPT}_X = \mathcal{MF}(\mathcal{I}_X)$。此外，该拓扑是紧致且豪斯多夫的 .

证明。 我们首先证明该空间是紧致且豪斯多夫的。根据注 3.18，若将 $\{0,1\}$ 视为离散空间，则 $\{0,1\}^{X\times X}$是一个紧空间（使用积拓扑）。对于每个 $f \in \mathcal{B}_X$，我们定义 $\chi_f \in \{0,1\}^{X\times X}$ 如下：

$$(a,b)\chi_f := \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{if } (a,b) \in f \\ 0 & \text{if } (a,b) \in (X \times X)\backslash f \end{array} \right\}.$$

令 $\phi\colon\ \mathcal{B}_X \to \{0,1\}^{X\times X}$为双射 $f \to \chi_f$。根据 $\mathcal{CPT}_X$的定义可知， $\phi \restriction_{\mathcal{I}_X}$是从 $(\mathcal{I}_X,\ \mathcal{CPT}_X)$ 到 $(\mathcal{I}_X)\phi$的同胚。

因此根据注 3.18，要得出 $\mathcal{CPT}_X$ 是紧致且豪斯多夫的，只需证明 $(\mathcal{I}_X)\phi$是 $\{0,1\}^{X\times X}$的一个闭子集。注意

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_X)\phi &= \left(\left\{f \in \mathcal{B}_X \;\middle|\; \text{for all } x \in X \text{ we have } |(\{x\})f| \leq 1 \text{ and } |(\{x\})f^{-1}| \leq 1\right\}\right)\phi \\ &= \left\{\alpha \in \{0,1\}^{X\times X} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{for all } x \in X \text{ we have } \left|\left\{y \in X \;\middle|\; (x,y)\alpha = 1\right\}\right| \leq 1 \\ \text{and } \left|\left\{y \in X \;\middle|\; (y,x)\alpha = 1\right\}\right| \leq 1 \end{array}\right\}.\end{aligned}$$

由于上述集合的补集是

$$\left\{\alpha \in \{0,1\}^{X\times X} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{there are } x,y,z \in X \text{ such that } y \neq z \text{ and either} \\ (x,y)\alpha = (x,z)\alpha = 1 \text{ or } (y,x)\alpha = (z,x)\alpha = 1 \end{array}\right\},$$

由此可知，$(\mathcal{I}_X)\phi$ 是闭的。

接下来我们证明 $\mathcal{CPT}_X = \mathcal{MF}(\mathcal{I}_X)$。为证明 $\mathcal{CPT}_X \supseteq \mathcal{MF}(\mathcal{I}_X)$，我们需要证明 $\mathcal{CPT}_X$与 $\mathcal{I}_X$ 半相容（我们已经证明它是 Fr´echet）。任取 $f \in \mathcal{I}_X$ 与 x， $y \in X$。若 $y \notin$ 属于 f的像，则

$$\left(\left\{g \in \mathcal{I}_X \;\middle|\; (x,y) \in g\right\}\right)\rho_f^{-1} = \varnothing \text{ and } \left(\left\{g \in \mathcal{I}_X \;\middle|\; (x,y) \in (X \times X)\backslash g\right\}\right)\rho_f^{-1} = \mathcal{I}_X$$

二者在 $\mathcal{CPT}_X$中都是开集。若 $y\in$属于 f的像，则有

$$\left(\left\{g\in\mathcal{I}_X \;\middle|\; (x,y)\in g\right\}\right)\rho_f^{-1}=\left\{g\in\mathcal{I}_X \;\middle|\; (x,(y)f^{-1})\in g\right\},$$

$$\left(\left\{g\in\mathcal{I}_X \;\middle|\; (x,y)\in (X\times X)\backslash g\right\}\right)\rho_f^{-1}=\left\{g\in\mathcal{I}_X \;\middle|\; (x,(y)f^{-1})\in (X\times X)\backslash g\right\}.$$

再者，这些集合在 $\mathcal{CPT}_X$ 中都是开集，因此 ρ_f 连续。由对称性可知， λ_f 也连续，因此 $\mathcal{CPT}_X$ 与 $\mathcal{I}_X$ 半相容。剩下只需证明 $\mathcal{CPT}_X\subseteq\mathcal{MF}(\mathcal{I}_X)$。

令 $\mathcal{T}$ 为与 $\mathcal{I}_X$ 半相容的任意 Fr´echet 拓扑。只需证明 $\mathcal{CPT}_X\subseteq\mathcal{T}$。任取 $x,y\in X$。由于 $\mathcal{T}$ 是 Fr´echet 拓扑，因此 img$(\lambda_{\{(x,x)\}}\circ\rho_{\{(y,y)\}})=\{\varnothing,\{(x,y)\}\}$ 是 $(\mathcal{I}_X,\mathcal{T})$ 的一个离散子空间。因此

$$(\{\{\varnothing\},\{\{(x,y)\}\}\})(\lambda_{\{(x,x)\}}\circ\rho_{\{(y,y)\}})^{-1}$$

是一个划分，将 $\mathcal{I}_X$ 分为两个关于 $\mathcal{T}$ 开的集合。这个划分是精确的 ly

$$\left\{\left\{f\in\mathcal{I}_X \;\middle|\; (x,y)\in (X\times X)\backslash f\right\},\left\{f\in\mathcal{I}_X \;\middle|\; (x,y)\in f\right\}\right\}$$

因此确实有 $\mathcal{T}\supseteq\mathcal{CPT}_X$，如所需。 □

引理 9.15（左/右逐点拓扑很不错，预备知识：3.14、6.3、6.7、9.6、9.13、9.14）。

如果 X 是一个集合，而 S 是通过移除 $\mathcal{I}_X$的一元运算得到的半群，那么每个与 S 相容的 *Fr´échet* 拓扑都包含 $\mathcal{LPT}_X$ 或 $\mathcal{RPT}_X$。此外，这些拓扑与 S和 $\mathcal{FM}(S)=\mathcal{HM}(S)=\mathcal{LPT}_X\cap\mathcal{RPT}_X$相容。

证明。如果 X 是有限的，那么结论显然成立，因为所有这些拓扑都是离散的；因此不妨设 X 是无限的。由于 $\mathcal{PPT}_X$ 是 $\mathcal{P}_X$ 上的豪斯多夫半群拓扑（引理 9.6），可知 $\mathcal{LPT}_X$ 是豪斯多夫的，并且与 S相容。此外，由于取逆映射是 S的一个反同构，根据命题 6.3，可知 $\mathcal{RPT}_X$ 也是豪斯多夫的，并且与 S相容。因此，根据 $\mathcal{FM}(S)$ 和 $\mathcal{HM}(S)$ 的定义，可得 $\mathcal{FM}(S)\subseteq\mathcal{HM}(S)\subseteq\mathcal{LPT}_X\cap\mathcal{RPT}_X$。

因此，要得出该引理的第二部分，只需证明 $\mathcal{LPT}_X\cap\mathcal{RPT}_X\subseteq\mathcal{FM}(S)$。这由该引理的第一部分可得，下面我们将证明第一部分。

令 $\mathcal{T}$为一个任意的、与 S 相容的 Fr´échet 拓扑，并固定 $x\in X$ 。回顾命题 6.3，拓扑 $\mathcal{T}^{-1}$ 也是一个 Fr´échet 拓扑，并且与 S相容。根据引理 9.14，我们知道 $\mathcal{CPT}_X\subseteq\mathcal{T}$。特别地，集合 $V:=\left\{f\in S \;\middle|\; (x,x)\notin f\right\}$关于 $\mathcal{T}$是开的。由于 $\varnothing\circ\varnothing=\varnothing\in V$且 $\mathcal{T}$与 S相容，因此存在 $\varnothing$的一个开邻域 U（在 $\mathcal{T}$中），使得 $UU\subseteq V$。

对于每个 $W\subseteq S$，我们定义

$$A_W:=X\backslash\bigcup_{a\in W}(\{x\})a,\quad\text{and}\quad B_W:=X\backslash\bigcup_{b\in W}(\{x\})b^{-1}.$$

由于 $UU\subseteq V$，集合 $\bigcup_{a\in U}(\{x\})a$ 与 $\bigcup_{b\in U}(\{x\})b^{-1}$ 不相交，因此 $X=A_U\cup B_U$。由于 $A_U=B_{U^{-1}}$ 与 $B_U=A_{U^{-1}}$，可知要么 $|B_U|=|X|$，要么 $|B_{U^{-1}}|=|X|$。令 $U'\in\{U,U^{-1}\}$ 满足$|B_{U'}|=X$。

令 $B\subseteq B_{U'}$ 满足 $|B|=|X|=|X\backslash B|$，并令 $\phi':B\to(X\backslash B)$ 为一个双射。由此可得 $\phi:=\phi'\cup\phi'^{-1}\in$对称群$(X)\subseteq\mathcal{I}_X$，且 $\phi=\phi^{-1}$。

若 $f \in U'$，则根据 B 的选取，我们有 $(\{x\})f^{-1} \cap B = \varnothing$。因此，若 $f = \phi g \in U' \cap (U')\lambda_\phi$，则 $(\{x\})f^{-1} = (\{x\})g^{-1}\phi = \varnothing$。

由于 $\lambda_\phi = \lambda_\phi^{-1}$，集合 $U'' := U' \cap (U')\lambda_\phi$ 关于 $\mathcal{T}$ 或 $\mathcal{T}^{-1}$ 是开的。如上所示，我们还有 $\varnothing \in U'' \subseteq \left\{ f \in S \;\middle|\; x \notin \mathrm{img}(f) \right\}$。因此，如果 $f \in S$ 是任意的，那么

$$x \notin \mathrm{img}(f) \Rightarrow f \circ \{(x,x)\} = \varnothing \Rightarrow (f)\rho_{\{(x,x)\}} \in U'' \Rightarrow x \notin \mathrm{img}(f).$$

由此可得 $(U'')\rho_{\{x(,\ x)\}}^{-1} = \left\{ f \in S \;\middle|\; x \notin \mathrm{img}(f) \right\}$，因此该集合在 $\mathcal{T}$ 或 $\mathcal{T}^{-1}$ 中是开的。如果 $y \in X$ 是任意的，且 $f \in \mathrm{Sym}(X)$ 满足 $f^{-1} = f$ 和 $(x)f = y$，那么

$$\left(\left\{ f \in S \;\middle|\; x \notin \mathrm{img}(f) \right\} \right) \rho_f^{-1} = \left(\left\{ f \in S \;\middle|\; x \notin \mathrm{img}(f) \right\} \right) \rho_f = \left\{ f \in S \;\middle|\; y \notin \mathrm{img}(f) \right\}.$$

因此我们必有 $\mathcal{RPT}_X \subseteq \mathcal{T}$或 $\mathcal{RPT}_X \subseteq \mathcal{T}^{-1}$。由于 $\mathcal{RPT}_X \subseteq \mathcal{T}^{-1}$ 当且仅当 $\mathcal{LPT}_X \subseteq \mathcal{T}$，结论得证。□

引理 9.16（逆逐点拓扑是良好的，预备知识：6.4、6.7、9.13、9.15）。如果 X 是一个集合，那么 $\mathcal{FM}(\mathcal{I}_X) = \mathcal{HM}(\mathcal{I}_X) = \mathcal{IPT}_X$ 且该拓扑与 $\mathcal{I}_X$ 相容。

证明。设 S 为去掉 $\mathcal{I}_X$的一元运算后得到的半群。根据引理 9.15， $\mathcal{LPT}_X$ 与 $\mathcal{RPT}_X$ 都与 S相容。因此由引理 6.4可知， $\mathcal{IPT}_X$ 与 S相容。根据 $\mathcal{IPT}_X$的定义，取逆映射相对于该拓扑也是连续的，因此 $\mathcal{IPT}_X$ 也与 $\mathcal{I}_X$ 相容。

由引理 9.15可知，每个与 $\mathcal{I}_X$ 相容的 Fr´echet 拓扑都包含 $\mathcal{LPT}_X$或 $\mathcal{RPT}_X$。由于求逆必须是连续的，且这些拓扑通过逆映射彼此映到对方，因此可知每个与 $\mathcal{I}_X$ 相容的 Fr´echet 拓扑都包含 $\mathcal{IPT}_X$。

因此 $\mathcal{IPT}_X \subseteq \mathcal{FM}(\mathcal{I}_X) \subseteq \mathcal{HM}(\mathcal{I}_X) \subseteq \mathcal{IPT}_X$，所以如所需，我们处处都有等式。 □

引理 9.17（ $\mathcal{I}_X$的性质 **W** ，预备知识：7.5、7.6、9.13）。
若 X是一个集合，且 S是从 $\mathcal{I}_X$中去掉一元运算后得到的半群，则 $(S, \mathcal{IPT}_X)$关于 $\mathrm{Sym}(X)$具有性质 ***W*** 。

证明。只需证明，对于所有 $s \in S$，都存在 $f_s, g_s \in S$ 和 $h_s \in \mathrm{Sym}(X)$，使得对所有$N \in$ 邻域 $_{\mathrm{Sym}(X)}(h_s)$，都有 $f_s N g_s \in$ 邻域$_S(s)$。若 X 是有限的，则 S 是离散的，因此我们可以取$f_s = h_s = 1_S$, $g_s = s$。于是可以假设 X 是无限的。

任取 $s \in S$。令 $\{M_0, M_1\}$ 为 X 的一个划分，使得 $|M_0| = |M_1| = X$，并选取f_s： $X \to M_0$ 为一个双射。接着定义 $g_s := f_s^{-1}$。

断言： 假设 $k \in S$ 与 a 是 X 的有限子集之间的一个双射，并满足：

(1) $f_s a g_s \subseteq k$。(2) $\mathrm{dom}(f_s a) \cap \mathrm{dom}(k) \subseteq \mathrm{dom}(f_s a g_s)$。(3) $\mathrm{img}(a g_s) \cap \mathrm{img}(k) \subseteq \mathrm{img}(f_s a g_s)$。

在这种情况下，存在某个 $h_{k,\ a} \in$ 对称群(X)，使得 $a \subseteq h_{k,\ a}$ 与 $f_s h_{k,\ a} g_s = k$。

断言的证明： 如果 $x \in (\mathrm{dom}(k))f_s \cap \mathrm{dom}(a)$，那么 $(x)f_s^{-1} \in \mathrm{dom}(f_s a) \cap \mathrm{dom}(k) \subseteq \mathrm{dom}(f_s a g_s)$。因此 $(x)f_s^{-1} k g_s^{-1} = (x)f_s^{-1} f_s a g_s g_s^{-1} = (x)a$。通过对称论证，如果 $x \in (\mathrm{img}(k))g_s^{-1} \cap \mathrm{img}(a)$，那么 $(x)(f_s^{-1} k g_s^{-1})^{-1} = (x)a^{-1}$。因此，如果我们定义 $b := f_s^{-1} k g_s^{-1} \setminus (\mathrm{dom}(a) \times \mathrm{img}(a))$，那么 $b = f_s^{-1} k g_s^{-1} \setminus a$。特别是

$$\mathrm{dom}(b) = (\mathrm{dom}(k))f_s \setminus \mathrm{dom}(a) \quad \text{and} \quad \mathrm{img}(b) = (\mathrm{img}(k))g_s^{-1} \setminus \mathrm{img}(a).$$

由于 $\mathrm{img}(b) \subseteq M_0$，且 a 是有限的，因此可知 $|M_1 \backslash (\mathrm{img}(a) \cup \mathrm{img}(b))| = |X|$。因此，我们可以选取一个单射 $c\colon M_0 \backslash (\mathrm{dom}(a) \cup \mathrm{dom}(b)) \to (M_1 \backslash (\mathrm{img}(a) \cup \mathrm{img}(b)))$，使得 $|X \backslash (\mathrm{img}(a) \cup \mathrm{img}(b) \cup \mathrm{img}(c))| = |X|$。

同样地，由于 $\mathrm{dom}(a)$ 是有限的，且 $\mathrm{dom}(b) \cup \mathrm{dom}(c) \subseteq M_0$，我们可以选取一个双射 $d\colon X \backslash (\mathrm{dom}(a) \cup \mathrm{dom}(b) \cup \mathrm{dom}(c)) \to X \backslash (\mathrm{img}(a) \cup \mathrm{img}(b) \cup \mathrm{img}(c))$。

由于 a、b、c、d 中的每一个都是 X 的子集之间的双射，并且

$$\{\mathrm{dom}(a), \mathrm{dom}(b), \mathrm{dom}(c), \mathrm{dom}(d)\} \quad \text{and} \quad \{\mathrm{img}(a), \mathrm{img}(b), \mathrm{img}(c), \mathrm{img}(d)\}$$

它们都是 X 的划分，因此可得 $h_{k,a} := a \cup b \cup c \cup d \in \mathrm{Sym}(X)$。

根据定义 $a \subseteq h_{k,a}$，还需证明 $f_s h_{k,a} g_s = k$。设 $x \in X$ 为任意元素，需要考虑 5 种情况：

(1) 如果 $(x)f_s \in \mathrm{dom}(a)$ 且 $(x)f_s a \in \mathrm{dom}(g_s)$，那么 $x \in \mathrm{dom}(f_s a g_s)$，因此

$$(x)f_s h_{k,a} g_s = (x)f_s a g_s = (x)k.$$

(2) 如果 $(x)f_s \in \mathrm{dom}(a)$、$(x)f_s a \notin \mathrm{dom}(g_s)$ 且 $x \in \mathrm{dom}(k)$，那么

$$x \in (\mathrm{dom}(f_s a) \cap \mathrm{dom}(k)) \backslash \mathrm{dom}(f_s a g_s) = \varnothing$$

矛盾。

(3) 若 $(x)f_s \in \mathrm{dom}(a)$、$(x)f_s a \notin \mathrm{dom}(g_s)$ 且 $x \notin \mathrm{dom}(k)$，则

$$(\{x\})k = \varnothing = (\{(x)f_s a\})g_s = (\{x\})f_s h_{k,a} g_s.$$

(4) 若 $(x)f_s \in \mathrm{dom}(b)$，则 $x \in \mathrm{dom}(f_s b g_s)$，因此

$$(x)f_s h_{k,a} g_s = (x)f_s b g_s = (x)f_s f_s^{-1} k g_s^{-1} g_s = (x)k.$$

(5) 若 $(x)f_s \in \mathrm{dom}(c)$，则 $(x)f_s \notin \mathrm{dom}(a) \cup ((\mathrm{dom}(k))f_s \backslash \mathrm{dom}(a))$。因此 $(\{x\})k = \varnothing$。此外，根据 c的选取，我们有

$$(\{x\})f_s h_{k,a} g_s = (\{x\})f_s c g_s = (\{(x)f_s c\})g_s = \varnothing. \diamondsuit$$

根据断言，利用 $a = \varnothing$ 与 $s = k$，取 $h_s \in \mathrm{Sym}(X)$ 使得 $f_s h_s g_s = s$。任取 $N \in \mathrm{Nbhds}^{\mathrm{Sym}(X)}(s)$，我们只需证明 $f_s N g_s \in \mathrm{Nbhds}_S(s)$。

取 a 为 X 的子集之间的有限双射，使得 $a \subseteq h_s$ 且 $\left\{ h \in \mathrm{Sym}(X) \;\middle|\; a \subseteq h \right\} \subseteq N$。现在我们定义

$$U := \left\{ k \in S \;\middle|\; \begin{array}{l} f_s a g_s \subseteq k,\ \mathrm{dom}(f_s a) \cap \mathrm{dom}(k) \subseteq \mathrm{dom}(f_s a g_s), \\ \text{and } \mathrm{img}(a g_s) \cap \mathrm{img}(k) \subseteq \mathrm{img}(f_s a g_s). \end{array} \right\}$$

注意，U关于 $\mathcal{IPT}_X$是开的。我们首先证明 $s \in U$：

(1) 根据 a 和 h_s 的定义，我们有 $f_s a g_s \subseteq f_s h_s g_s = s$。(2) 如果 $x \in \mathrm{dom}(f_s a) \cap \mathrm{dom}(k)$，那么 $(x)k = (x)f_s h_s g_s = (x)f_s a g_s$。因此 $x \in \mathrm{dom}(f_s a g_s)$。(3) 如果 $x \in \mathrm{img}(a g_s) \cap \mathrm{img}(k)$，那么 $(x)k^{-1} = (x)(f_s h_s g_s)^{-1} = (x)(f_s a g_s)^{-1}$。因此 $x \in \mathrm{img}(f_s a g_s)$。

因此 $U \in$ 邻域$_S(s)$。我们只需证明 $U \subseteq f_s N g_s$。令 $k \in U$ 任意。根据断言，存在 $h_{k,\,a} \in$ 对称群(X)，使得 $a \subseteq h_{k,\,a}$ 且 $f_s h_{k,\,a} g_s = k$。根据 a的定义，可得$h_{k,\,a} \in N$。因此 $k = f_s h_{k,\,a} g_s \in f_s N g_s$，如所要求。□

定理 9.18 ($\mathcal{I}_X$的拓扑，预备知识：4.20、5.39、6.15、9.10、9.14、9.16、9.17)。拓扑 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}$ 是波兰拓扑，也是与逆半群 $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$相容的唯一第二可数 *Fr´échet* 拓扑。此外

$$\mathcal{CPT}_{\mathbb{N}} = \mathcal{MF}(\mathcal{I}_{\mathbb{N}}) \subsetneq \mathcal{FM}(\mathcal{I}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{HM}(\mathcal{I}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{SCC}(\mathcal{I}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}.$$

若 S 是通过移除 $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ 的一元运算得到的半群，则

$$\mathcal{CPT}_{\mathbb{N}} = \mathcal{MF}(S) \subsetneq \mathcal{LPT}_{\mathbb{N}} \cap \mathcal{RPT}_{\mathbb{N}} = \mathcal{FM}(S) = \mathcal{HM}(S) \subsetneq \mathcal{SCC}(S) = \mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}$$

并且从 $(S, \mathcal{IPT}_{\mathbb{N}})$ 到第二可数拓扑半群的所有同态都是连续的。

证明。 由定理 9.10，空间 $(\mathcal{P}_{\mathbb{N}}, \mathcal{PPT}_{\mathbb{N}})$ 是波兰空间。由于

$$\mathcal{P}_{\mathbb{N}} \backslash \mathcal{I}_{\mathbb{N}} = \left\{ f \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \;\middle|\; \text{there are } x, y \in \mathbb{N} \text{ with } x \neq y \text{ and } (x)f = (y)f \right\},$$

由此可知， $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ 关于 $\mathcal{PPT}_{\mathbb{N}}$ 是闭的，因此根据引理 4.18， $\mathcal{LPT}_{\mathbb{N}}$ 是波兰空间。由于 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}$ 由 $\mathcal{LPT}_{\mathbb{N}}$ 以及形如

$$\left\{ f \in \mathcal{I}_{\mathbb{N}} \;\middle|\; x \notin \operatorname{img}(f) \right\}$$

的集合（对于 $x \in \mathbb{N}$ 而言，这些集合关于 $\mathcal{LPT}_{\mathbb{N}}$ 是闭的）生成，因此由推论 4.20 可知 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}$ 是波兰空间。

由命题 6.12，我们有 $\mathcal{SCC}(\mathcal{I}_{\mathbb{N}}) = \mathcal{SCC}(S)$。此外，由于 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}$ 是第二可数的，且与 S 相容（引理 9.16），根据 $\mathcal{SCC}(S)$ 的定义可知， $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{SCC}(S)$。

设 ϕ 是从 $(S, \mathcal{IPT}_{\mathbb{N}})$ 到某个第二可数拓扑逆半群的任意同态。要得出 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}} \supseteq \mathcal{SCC}(S)$，只需（根据命题 6.12）证明 ϕ 连续。由定理 5.39 可知， $\phi \restriction_{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}$ 连续。因此，根据引理 7.6，只需证明 S 关于 Sym(ℕ) 具有性质 **W** 。这一点由引理 9.17 证明。

现在我们有 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}} = \mathcal{SCC}(S) = \mathcal{SCC}(\mathcal{I}_{\mathbb{N}})$。由引理 9.16 可知，该拓扑也与 $\mathcal{FM}(\mathcal{I}_{\mathbb{N}})$ 和 $\mathcal{HM}(\mathcal{I}_{\mathbb{N}})$ 均一致。由于每个与 $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ 相容的 Fr´echet 第二可数拓扑都包含 $\mathcal{FM}(\mathcal{I}_{\mathbb{N}})$ 且包含于 $\mathcal{SCC}(\mathcal{I}_{\mathbb{N}})$，它们全都相同。由引理 9.15 可知 $\mathcal{LPT}_{\mathbb{N}} \cap \mathcal{RPT}_{\mathbb{N}} = \mathcal{FM}(S) = \mathcal{HM}(S)$，由引理 9.14 可知 $\mathcal{CPT}_{\mathbb{N}} = \mathcal{MF}(\mathcal{I}_X) = \mathcal{MF}(S)$。

剩下的就是证明这些包含关系。根据命题 6.15，包含关系的非严格版本显然成立。因此，我们只需证明包含关系的严格性。我们先证明 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}} \neq \mathcal{LPT}_{\mathbb{N}} \cap \mathcal{RPT}_{\mathbb{N}}$。集合 $U := \left\{ f \in \mathcal{I}_{\mathbb{N}} \;\middle|\; 0 \notin \operatorname{dom}(f) \right\}$ 关于 $\mathcal{LPT}_{\mathbb{N}}$ 是开集。此外 $\varnothing \in U$。若 $V \in \mathcal{RPT}_{\mathbb{N}}$ 是任意满足 $\varnothing \in V$ 的对象，那么根据 $\mathcal{RPT}_{\mathbb{N}}$ 的定义，存在某个有限的 $F \subseteq \mathbb{N}$，使得 $\left\{ f \in \mathcal{I}_X \;\middle|\; F \cap \operatorname{img}(f) = \varnothing \right\} \subseteq V$。特别地，若 $n \in \mathbb{N} \backslash F$，则$\{(0, n)\} \in V \backslash U$。因此 $V \neq U$ 且 $U \in \mathcal{LPT}_{\mathbb{N}} \backslash \mathcal{RPT}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{IPT}_{\mathbb{N}} \backslash (\mathcal{LPT}_{\mathbb{N}} \cap \mathcal{RPT}_{\mathbb{N}})$。

我们最终展示 $\mathcal{CPT}_{\mathbb{N}} \neq \mathcal{LPT}_{\mathbb{N}} \cap \mathcal{RPT}_{\mathbb{N}}$。令 $V := \left\{ \{(0, n), (n, 0)\} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ 与注意到

$$\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \backslash V = \left\{ f \in \mathcal{I}_X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{either } 0 \notin \operatorname{dom}(f), \text{ there is } (a, b) \in ((\mathbb{N} \backslash \{0\}) \times (\mathbb{N} \backslash \{0\})) \\ \text{with } (a, b) \in f \text{ or there is } n \notin \operatorname{dom}(f) \text{ with } (0, n) \in f \end{array} \right\}.$$

因此 $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \backslash V \in \mathcal{LPT}_{\mathbb{N}}$。于是 $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \backslash V = (\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \backslash V)^{-1} \in (\mathcal{LPT}_{\mathbb{N}})^{-1} = \mathcal{RPT}_{\mathbb{N}}$。所以 $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \backslash V$是相对于 $\mathcal{LPT}_{\mathbb{N}} \cap \mathcal{RPT}_{\mathbb{N}}$而言的$\varnothing$ 的邻域。然而，相对于 $\mathcal{CPT}_{\mathbb{N}}$ 而言， $\varnothing$ 的每个邻域都包含一个形如

$$U_F := \left\{ f \in \mathcal{I}_{\mathbb{N}} \;\middle|\; F \cap f = \varnothing \right\}$$

其中 $F \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是有限的。由于所有集合 U_F 都与 V 相交，因此 $\mathcal{I}_\mathbb{N}\backslash V$ 相对于 $\mathcal{CPT}_\mathbb{N}$ 而言不是 $\varnothing$ 的邻域，所以 $\mathcal{CPT}_\mathbb{N} \neq \mathcal{LPT}_\mathbb{N} \cap \mathcal{RPT}_\mathbb{N}$，正如所需。□

我们现在已经证明了本小节的主要结果（定理 9.18）。部分双射范畴没有积对象，因此本小节中没有克隆。不过，我们可以利用这一结果区分前面讨论过的左/右小指标性质。

例 9.19（小指标性质彼此不同，预备知识：7.4、9.18）。如果 S 是通过从 $\mathcal{I}_\mathbb{N}$ 中移除一元运算得到的半群，那么拓扑半群 $(S,\ \mathcal{LPT}_\mathbb{N})$ 具有右小指标性质，但不具有左小指标性质。

证明。我们首先证明 $(S,\ \mathcal{LPT}_\mathbb{N})$ 具有右小指标性质。根据定理 9.18，我们有 $\mathcal{IPT}_\mathbb{N} = \mathcal{SCC}(S)$。因此，根据推论 7.4，拓扑半群 $(S,\ \mathcal{IPT}_\mathbb{N})$ 具有右小指标性质。设 $\sim$ 是 S 上任意一个右同余，并设 $s \in S$ 任意。要得出 $(S,\ \mathcal{LPT}_\mathbb{N})$ 具有右小指标性质，只需证明 $[s]_\sim$ 是关于拓扑 $\mathcal{LPT}_\mathbb{N}$ 的 s 邻域。

由于 $(S,\ \mathcal{IPT}_\mathbb{N})$ 具有右小指标性质，集合 $[s]_\sim$ 在 $\mathcal{IPT}_\mathbb{N}$ 中是开的。因此，存在有限的 $A,\ B \subseteq X$ 以及一个有限双射 a，它在 $\mathbb{N}$ 的子集之间建立映射，使得如果

$$V := \left\{ f \in S \;\middle|\; A \cap \mathrm{dom}(f) = \varnothing,\, B \cap \mathrm{img}(f) = \varnothing \text{ and } a \subseteq f \right\},$$

那么 $s \in V \subseteq [s]_\sim$。令 $U := \left\{ f \in S \;\middle|\; A \cap \mathrm{dom}(f) = \varnothing \text{ 与 } a \subseteq f \right\}$。根据构造，$U$ 是关于 $\mathcal{LPT}_\mathbb{N}$ 的 s 的一个邻域。任取 $u \in U$。要得出 $(S,\ \mathcal{LPT}_\mathbb{N})$ 具有右小指标性质，只需证明 $u \in [s]_\sim$。令 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash B$ 为一个双射，使得 $g \restriction_{\mathrm{img}(a)}$ 是恒等映射。注意 $ug,\ sg \in V \subseteq [s]_\sim$，因此 $ug \sim sg$。由于 $\sim$ 是右同余，可得 $s = sgg^{-1} \sim ugg^{-1} = u$。因此，$u \sim s$，如所需。

剩下要证明的是，$(S, \mathcal{LPT}_\mathbb{N})$ 不具有左小指标性质。我们在 S 上定义一个左同余 $\sim$，如下所示：

$$\sim := \left\{ (f, g) \in S \times S \;\middle|\; (\{0\})f^{-1} = (\{0\})g^{-1} \right\}.$$

注意，$[\varnothing]_\sim = \left\{ f \in S \;\middle|\; 0 \notin \mathrm{dom}(f) \right\}$。我们在定理 9.18 的证明中表明，这个集合相对于 $\mathcal{LPT}_\mathbb{N}$ 不是开集。因此，$\sim$ 相对于 $\mathcal{LPT}_\mathbb{N}$ 不是开集，且 $(S, \mathcal{LPT}_\mathbb{N})$ 不具有左小指标性质。□

9.4. **单射函数**。本小节讨论单射函数幺半群（值得注意的是，它们包含结构的所有嵌入幺半群）。虽然本文探讨的大多数幺半群都只具有一种相容的波兰拓扑，但对于 $\mathrm{Inj}(\mathbb{N})$，我们证明存在无穷多种（见定理 9.21 和定理 9.23）。此外，与前面的小节不同，我们无法对 $\mathcal{MF}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N}))$ 或 $\mathcal{FM}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N}))$ 给出简洁的描述。

例 9.20（单射函数幺半群上的拓扑，预备知识：3.2、4.13、9.13）。我们将单射函数幺半群$\mathrm{Inj}(\mathbb{N})$定义为从 $\mathbb{N}$ 到其自身的单射函数所构成的幺半群，其运算为二元关系的复合。我们将考察这个半群上的以下拓扑：

(1) 由以下形式的集合生成的拓扑 $\mathcal{PT}_\mathbb{N} \restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$

$$U_{x,y} := \left\{ f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; (x, y) \in f \right\}$$

对所有 $x, y \in X$。

(2) 由 $\mathcal{PT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$ 生成的拓扑 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$，以及形如

$$V_x := \left\{ f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; x \notin \mathrm{img}\,(f) \right\}$$

对所有 x，$y \in X$。

(3) 由 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$ 生成的余像逐点拓扑 $\mathcal{CIPT}_{\mathbb{N}}$，以及形如

$$W_n := \left\{ f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; |\mathbb{N}\setminus \mathrm{img}(f)| = n \right\}$$

对每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$。

定理 9.21（许多波兰，预备知识：4.19、6.3、6.4、9.10、9.18、9.20）。存在一个 $\left\{ \mathcal{T}_i \;\middle|\; i \leq \omega + 1 \right\}$ 由与 *Inj()* 相容的波兰拓扑构成的集合，使得

$$\mathcal{PT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})} \subsetneq \mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})} = \mathcal{T}_0 \subsetneq \mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2 \subsetneq \mathcal{T}_3 \ldots \subsetneq \mathcal{T}_\omega \subsetneq \mathcal{T}_{\omega+1} = \mathcal{CIPT}_{\mathbb{N}}.$$

此外，拓扑 $\mathcal{PT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$ 是波兰的。

证明。由于 $\mathcal{PT}_{\mathbb{N}}$ 与 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 相容，且 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}$ 与 $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$相容，这两个拓扑都与 Inj(ℕ) 相容。根据定理 9.10 和定理 9.18，拓扑 $\mathcal{PT}_{\mathbb{N}}$ 与 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}$ 是波兰空间。由于

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\setminus \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \text{there are } x, y \in \mathbb{N} \text{ with } x \neq y \text{ and } (x)f = (y)f \right\},$$

$$\mathcal{I}_{\mathbb{N}}\setminus \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) = \left\{ f \in \mathcal{I}_{\mathbb{N}} \;\middle|\; \text{there is } x \in \mathbb{N}\setminus \mathrm{dom}(f) \right\},$$

集合 Inj(ℕ) 在这两个波兰空间中都是闭集。因此，根据引理 4.18，拓扑 $\mathcal{PT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$与 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$ 是波兰空间。由于集合 $\left\{ f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; 0 \notin \mathrm{img}(f) \right\}$ 相对于$\mathcal{PT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$不是开集，这些拓扑也彼此不同。

对于每个 $i \leq \omega+1$，令 $\mathcal{T}_i$为由 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$ 以及集合 $\left\{ W_j \;\middle|\; j < i \right\}$生成的拓扑（$W_i$ 与例 9.20 中相同）。

我们需要证明这些拓扑是波兰的、与 Inj(ℕ) 相容且彼此不同。我们首先证明它们是波兰的。反设存在 $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \omega+1\}$，使得 $\mathcal{T}_n$ 非波兰，并令 n 为满足此条件的最小值。需要考虑 3 种情况：

(1) 若 $n = 0$，则 $\mathcal{T}_n$ 定义为 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$，而我们已经证明它是波兰的。(2) 若 $n = \omega$，则 $\mathcal{T}_\omega$ 是由拓扑 $(\mathcal{T}_i)_{i<\omega}$ 生成的拓扑，它们全都是波兰的。由引理 4.19 可知，$\mathcal{T}_\omega$ 也是波兰的。
(3) 若对于某个 $m \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ 有 $n = m+1$，则 $\mathcal{T}_m$ 是波兰的，并且

$$\mathrm{Inj}(\mathbb{N})\setminus W_m = \left(\bigcup_{i<m} W_i \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{A\subseteq\mathbb{N} \\ n<|A|<\infty}} \left(\bigcap_{a\in A} \left\{ f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; a \notin \mathrm{img}(f) \right\} \right) \right).$$

因此，相对于 $\mathcal{T}_m$，W_m 是闭的。由于 $\mathcal{T}_n$ 是由 $\mathcal{T}_m$ 和 W_m 生成的，根据推论 4.20 可知，$\mathcal{T}_m$ 也是波兰的。

接下来我们证明它们彼此不同。只需证明，若 $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$，则相对于 $\mathcal{T}_n$，W_n 不是开集。设 $f \in W_n$，并假设 $U \in \mathcal{T}_n$ 满足 $f \in U$。由于 f 不是一个元素

属于任何具有 $m \neq n$ 的集合 W_m，因此存在有限的 $a \subseteq f$ 以及 $B \subseteq \mathbb{N}\backslash\mathrm{img}(a)$，使得

$$U \supseteq \left\{ g \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; a \subseteq g \text{ and } \mathrm{img}(g) \cap B = \varnothing \right\}$$

如果 $b\colon\ \mathbb{N}\backslash\,\mathrm{dom}(a) \to \mathbb{N}\backslash(\mathrm{img}(a) \cup B)$ 是任意一个双射，那么 $a \cup b \in U\backslash W_m$。特别地，$U \neq W_n$。由于 U是任意的，可得 $W_n \notin \mathcal{T}_n$。

还需证明所有这些拓扑都与 Inj(ℕ) 相容。对于每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$，令 $(\mathbb{N}_n, \mathcal{D}_n)$ 表示全集为 $\left\{ i \in \mathbb{N} \;\middle|\; i < n \right\} \cup \{n\}$ 且二元运算$+_n$由 $i +_n j = \min(n, i + j)$ 定义的离散拓扑半群。定义 $\phi_n\colon$ $\mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_n$，使得 $(f)\phi_n = \min(n, |\mathbb{N}\backslash\,\mathrm{img}(f)|)$。如果 $f, g \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N})$，则 $\mathbb{N}\backslash\,\mathrm{img}(fg) = (\mathbb{N}\backslash\,\mathrm{img}(f))g \cup (\mathbb{N}\backslash\,\mathrm{img}(g))$，因此每个映射 ϕ_n 都是半群同态。由命题 6.3，拓扑 $(\mathcal{D}_n)\phi_n^{-1}$ 都与 Inj(ℕ) 相容。因此，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，由引理 6.4 可知，由 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}} \restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$ 和 $(\mathcal{D}_n)\phi_n^{-1}$ 生成的拓扑与 Inj(ℕ) 相容。

由于由 $\mathcal{IPT}_{\mathbb{N}} \restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$ 与 $(\mathcal{D}_n)\phi_n^{-1}$生成的拓扑是拓扑 $\mathcal{T}_{n+1}$，因此只需证明 $\mathcal{T}_\omega$ 与 Inj(ℕ)相容。由于 $\mathcal{T}_\omega$ 由拓扑 $\mathcal{T}_n$ （$n \in \mathbb{N}$时）生成，这由引理 6.4 得出。□

下面的性质 **W** 证明比我们目前所见的先前证明容易得多，而且不同于先前的证明，我们实际上对不同的元素使用不同的项运算。

引理 9.22 （Inj(ℕ)的性质 **W**，预备知识：7.5、9.21）。
拓扑半群 $(\mathrm{Inj}(\mathbb{N})\ \mathcal{CIPT}_{\mathbb{N}})$ 相对于 对称群 Sym(ℕ)具有性质 ***W***。

证明。只需证明：对于所有 $s \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N})$，存在某个 $f_s \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N})$和 $h_s \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$，使得$f_s h_s = s$，并且对于所有 $N \in$邻域$^{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}(h_s)$，都有 $f_s N \in$ 邻域$^{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}(s)$。

任取 $s \in$Inj(ℕ)。定义 $f_s := s$ 与 $h_s := 1_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}$。任取 $N \in$Nbhds$^{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}(h_s)$。由于 $f_s h_s = s 1_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})} = s$，只需证明 $f_s N \in$Nbhds$^{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})}(s)$。

由于 $N \in$ Nbhds$^{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}(1_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})})$，存在某个有限的 $A \subseteq N$，使得

$$N \subseteq \left\{ h \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N}) \;\middle|\; (a)h = a \text{ for all } a \in A \right\}.$$

令 U 为该邻域

$$\left\{ g \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; (\{a\})g^{-1} = (\{a\})f^{-1} \text{ for all } a \in A \text{ and } |\mathbb{N}\backslash\,\mathrm{img}(g)| = |\mathbb{N}\backslash\,\mathrm{img}(f)| \right\}$$

令 f为 f的邻域，并任取 $g \in U$。只需证明 $g \in f_s N$。定义 $h' := f^{-1}g$。注意，h'是从 img(f) 到 img(g) 的双射，并且 $fh' = g$。

根据 g 的选取，我们有 $\mathrm{img}(g) \cap A = \mathrm{img}(f) \cap A$，并且 $|\mathbb{N}\backslash\,\mathrm{img}(g)| = |\mathbb{N}\backslash\,\mathrm{img}(f)|$。因此，我们可以选取一个双射 $b\colon\ \mathbb{N}\backslash(\mathrm{img}(f) \cup A) \to \mathbb{N}\backslash(\mathrm{img}(g) \cup A)$。令 $h := h' \cup b \cup \left\{ (a,\ a) \;\middle|\; a \in A\backslash\,\mathrm{img}(f) \right\}$。由于 h 是双射的并集，且其定义域和像分别划分了 ℕ，因此可知 $h \in$ Sym(ℕ)。由于 $h' \subseteq h$，我们还得到 $fh = fh' = g$。

因此，只需证明 $h \in N$。根据 A 的定义，我们只需证明 h 固定 A 的所有元素。任取 $a \in A$。如果 $a \notin \mathrm{img}(f)$，那么 $(a,\ a)$ 根据构造成立。如果 $a \in \mathrm{img}(f)$，那么 $(a)h = (a)h' = (a)f^{-1}g$。由于 $(\{a\})g^{-1} = (\{a\})f^{-1} = \{(a)f^{-1}\}$，可得 $(a)h = (a)f^{-1}g = a$，证毕。□

定理 9.23 （Inj(ℕ) 的拓扑，预备知识：6.13、6.15、7.6、9.21、9.22）。
从拓扑半群 （Inj(ℕ) $\mathcal{CIPT}_{\mathbb{N}}$）到第二可数拓扑半群的所有同态都是连续的，并且

$$\mathcal{PT}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})} = \mathcal{Z}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N})) = \mathcal{HM}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N})) \subsetneq \mathcal{SCC}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N})) = \mathcal{CIPT}_{\mathbb{N}}.$$

此外，上述拓扑是波兰的。

证明。 由定理 9.21 可知， $\mathcal{PT}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})} \subsetneq \mathcal{CIPT}_{\mathbb{N}}$ ，并且这两个拓扑都是波兰的。由于这些拓扑是波兰的，因此也可推出（命题 6.15）

$$\mathcal{Z}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N})) = \mathcal{HM}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N})) \subseteq \mathcal{PT}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})} \subsetneq \mathcal{CIPT}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{SCC}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N})).$$

由推论 6.13，我们知道

$$\mathcal{SCC}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N}))\restriction_{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})} \subseteq \mathcal{PT}\restriction_{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})} = \mathcal{CIPT}_{\mathbb{N}}\restriction_{\mathrm{Sym}(\mathbb{N})}.$$

因此，由引理 7.6 和 9.22 可知， $\mathcal{SCC}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N})) \subseteq \mathcal{CIPT}_{\mathbb{N}}$。还需证明$\mathcal{PT}\restriction_{\mathrm{Inj}(\mathbb{N})} \subseteq \mathcal{Z}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N}))$。

任取 x， $y \in \mathbb{N}$ 。我们只需证明 $\left\{h \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; (x)h \neq y\right\}$ 关于 $\mathcal{Z}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N}))$ 是闭的。设 f_0， f_1， g_0， $g_1 \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N})$ 满足

$$\mathrm{img}(f_0) \cap \mathrm{img}(f_1) = \{x\} \quad \text{and} \quad (n)g_0 = (n)g_1 \iff n \neq y.$$

我们随后定义

$$V_0 := \left\{h \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; f_0hg_0 = f_0hg_1\right\}, \quad V_1 := \left\{h \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; f_1hg_0 = f_1hg_1\right\}.$$

注意，这两个集合都是初等代数的，因此关于 $\mathcal{Z}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N}))$ 闭。根据 g_0, g_1 的选择，我们有

$$f_0hg_0 = f_0hg_1 \iff (n)g_0 = (n)g_0 \text{ for all } n \in \mathrm{img}(f_0h) \iff y \notin \mathrm{img}(f_0h),$$

因此 $V_0 = \left\{h \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; y \notin \mathrm{img}(f_0h)\right\}$， 且 $V_1 = \left\{h \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; y \notin \mathrm{img}(f_1h)\right\}$。特别地，集合

$$V_0 \cup V_1 = \left\{h \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}) \;\middle|\; y \notin \mathrm{img}(f_0h) \cap \mathrm{img}(f_1h)\right\}$$

关于 $\mathcal{Z}(\mathrm{Inj}(\mathbb{N}))$ 是闭的。因此，只需证明 $y \notin \mathrm{img}(f_0h) \cap \mathrm{img}(f_1h) \iff (x)h \neq y$。由于 h 是单射，我们有

$$\mathrm{img}(f_0h) \cap \mathrm{img}(f_1h) = \mathrm{img}(f_0)h \cap \mathrm{img}(f_1)h = (\mathrm{img}(f_0) \cap \mathrm{img}(f_1))h.$$

根据 f_0 和 f_1 的选择，可得

$$\begin{aligned} y \notin \mathrm{img}(f_0h) \cap \mathrm{img}(f_1h) &\iff y \notin (\mathrm{img}(f_0) \cap \mathrm{img}(f_1))h \\ &\iff y \notin (\{x\})h \\ &\iff (x)h \neq y \end{aligned}$$

按要求。 □

9.5. **希尔伯特立方体**。 在本小节中，我们探讨希尔伯特立方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 的连续变换（见定理 9.29 和推论 9.30）。与前面的小节不同，本小节的主要定理不包含自动连续性部分。然而，如果能够为群 $\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})$ 建立一个自动连续性结果，我们便可以像前面的小节一样将其推广到 $C([0,1]^{\mathbb{N}})$。

与引理 9.7 的证明类似，我们将把连续函数幺半群中的常值元素集合视为我们所作用空间的一个副本。这为我们提供了一种从代数上重构所需拓扑（紧开拓扑）的方法。有鉴于此，下面这两个引理将会很有用（无论是在本小节还是在康托空间小节中）。

引理 9.24（常值元素，预备知识：1.6、6.9）。
若 S 是一个以复合作为运算的函数半群，那么 S 的常值元素集合 C 关于 $\mathcal{Z}(S)$ 是闭的。

证明。 若 $C=\varnothing$，则结论显然。否则，固定 $c\in C$。根据 $\mathcal{Z}(S)$ 的定义，集合

$$RO := \bigcap_{g\in S}\left\{ f\in S \;\middle|\; gf=f \right\}$$

关于 $\mathcal{Z}(S)$ 是闭的。因此，只需证明 $RO=C$。由于 C 由常值映射构成，可得 $C\subseteq RO$。此外，若 $f\in RO$ 任意，则 $cf=f$。由于 c 是常值映射，可知 cf 也是常值映射。因此，$f=cf\in C$，证毕。□

引理 9.25（包含紧开拓扑，预备知识：3.14、5.13）。
若 X 与 Y 是拓扑空间，$\mathcal{T}$ 是集合 $C(X,Y)$ 上的一个拓扑，且函数 $a\colon X\times(C(X,Y),\mathcal{T})\to Y$ 由 $(x,f)a=(x)f$ 定义并且连续，那么 $\mathcal{T}$ 包含紧开拓扑（回顾定义 *5.11*）。

证明。 任取 $f\in C(X,Y)$、紧致 $C\subseteq X$ 和开 $U\subseteq Y$，使得 $(C)f\subseteq U$。只需证明

$$V := \left\{ g\in C(X,Y) \;\middle|\; (C)g\subseteq U \right\}$$

是 f 关于 $\mathcal{T}$ 的一个邻域。

由于 a 连续，可知集合 $(U)a^{-1}$ 在 $X\times(C(X,Y),\mathcal{T})$ 中是开的。因此，我们可以选取一个指标集 I、X 的开子集族 $(U_i)_{i\in I}$，以及 $(C(X,Y),\mathcal{T})$ 的开子集族 $(W_i)_{i\in I}$，使得

$$(U)a^{-1}=\bigcup_{i\in I}U_i\times W_i.$$

由于 C 是紧致的，且 $C\times\{f\}\subseteq(U)a^{-1}$，因此存在一个有限集合 $F\subseteq I$，使得

$$C\times\{f\}\subseteq\bigcup_{i\in F}U_i\times W_i\subseteq(U)a^{-1}.$$

不失一般性，我们可以假设对所有 $i\in F$，$f\in W_i$。令 $W:=\bigcap_{i\in F}W_i$，并注意到 W 是关于 $\mathcal{T}$ 的 f 的一个邻域。根据 W 的定义，我们有 $C\times W\subseteq(U)a^{-1}$。因此 $f\in W\subseteq V$，且 V 是 f 的一个邻域，正如所需。□

以下引理的证明涉及定理 4.27 的一种颇为不同寻常的应用：通过赋予双空间群结构，证明它们是同胚的。

引理 9.26（关于 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 的连续作用，预备知识：4.18、4.20、4.27、6.15、9.24）。设 $\mathcal{T}$ 是与半群 $C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 相容的波兰拓扑。在这种情况下，由 $(x,\ f)\ a = (x)\ f$ 定义的映射 $a\colon\ [0,1]^{\mathbb{N}} \times (C([0,1]^{\mathbb{N}})\ \mathcal{T}) \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ 是连续的。

证明。令 C 表示从 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 到其自身的常值映射集合。根据引理 9.24，集合 C 关于 $\mathcal{Z}(C([0,1]^{\mathbb{N}}))$ 是闭的。因此，由命题 6.15 可知，C 关于 $\mathcal{T}$ 是闭的。于是，根据引理 4.18，拓扑 $\mathcal{T}\restriction_C$ 是波兰的。

令 $I\colon\ C \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ 为将常值映射映到其像中唯一点的双射。注意 $a = \langle \pi_0 I^{-1},\ \pi_1\rangle_{C\times C([0,1]^{\mathbb{N}})} \circ *^{C([0,1]^{\mathbb{N}})} \circ I$. 因此，要证明 a 连续，只需证明 $I\colon\ C \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ 是一个同胚。

断言：映射 I 连续。

断言的证明 断言：任取 $a,\ b \in \mathbb{R}$，以及满足 $a < b$ 的 $i \in \mathbb{N}$。只需证明集合

$$U := \left\{ f \in C \;\middle|\; ((f)I)\pi_i \in (a,b) \right\}$$

相对于 $\mathcal{T}\restriction_C$ 是开的。对于每个 $j \in \mathbb{N}\backslash\{i\}$，定义 $g_j \in C([0,1]^{\mathbb{N}},[0,1])$ 为取值为 0 的常值映射。随后我们将 $g_i \in C([0,1]^{\mathbb{N}},[0,1])$ 定义为满足以下条件的映射

$$(f)g_i = \left\{ \begin{array}{ll} (f)\pi_i & \text{if } (f)\pi_i \in (a,b) \\ a & \text{if } (f)\pi_i \leq a \\ b & \text{if } (f)\pi_i \geq b. \end{array} \right\}$$

映射 $g := \langle (g_j)_{j\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$ 是连续的，因此是 $C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 的一个元素。注意，

$$U = \left\{ f \in C \;\middle|\; ((f)\rho_g)I\pi_i \notin \{a,b\} \right\} = C\backslash(((\{a,b\})(I\pi_i)^{-1} \cap \operatorname{img}(\rho_g))\rho_g^{-1}.$$

由于映射 ρ_g 是连续的，且集合 $(\{a,b\})(I\pi_i)^{-1} \cap \operatorname{img}(\rho_g)$ 的大小为二（因而是闭的），所以可知 U 相对于 $\mathcal{T}$ 是开的。$\diamondsuit$

还需证明 I^{-1} 是连续的。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们定义 $f_i, g_i\colon\ [0,1] \to [0,1]$ 如下：

$$(x)f_i = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \quad \text{and} \quad (x)g_i = \left\{ \begin{array}{ll} (x)f_i^{-1} & \text{if } x \in [\frac{1}{4},\frac{3}{4}] \\ 1 & \text{if } x \in [\frac{3}{4},1] \\ 0 & \text{if } x \in [0,\frac{1}{4}] \end{array} \right\}.$$

然后我们定义 $f,\ g \in C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 为 $f = \langle (\pi_i f_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$ 与 $g = \langle (\pi_i g_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$。特别地，$fg = \langle (\pi_i f_i g_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} = \langle (\pi_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$是恒等函数，并且 $\operatorname{img}(f) = [\frac{1}{4},\frac{3}{4}]^{\mathbb{N}} \subseteq (0,\ 1)^{\mathbb{N}}$。由于 $I^{-1} = f \circ I^{-1}\restriction_{(0,1)^{\mathbb{N}}} \circ \rho_g$，只需证明 $I\restriction_{(0,1)^{\mathbb{N}}}$ 是连续的。

对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $\phi_i : (0,1) \to \mathbb{R}$ 为一个保序同胚。然后我们将$\phi \in C((0,1)^{\mathbb{N}},\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$定义为 $\langle (\pi_i\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$。这使我们能够通过 $xy = ((x)I\phi + (y)I\phi)(I\phi)^{-1}$ 以及 $x^{-1} = (-(x)I\phi)(I\phi)^{-1}$，为 $((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$定义一个群结构，其中对所有 x、$y \in (0,1)^{\mathbb{N}}$均成立。根据定义（以及该断言），映射 $I\phi$ 是从 $((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$ 到 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$的连续群同构。由于 $I^{-1}\restriction_{(0,1)^{\mathbb{N}}} = \phi(I\phi)^{-1}$ 且 ϕ 是连续的，只需证明 $(I\phi)^{-1}$ 是连续的。因此，根据定理 4.27，我们只需证明$\mathcal{T}\restriction_{((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}}$ 是波兰空间，并且与 $((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$上的群结构半相容。

集合 $(0,\ 1)^{\mathbb{N}}$是 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 的开子集的可数交，因此根据 I 的连续性，集合 $((0,\ 1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$ 是 C 的开子集的可数交。由于 C 是波兰空间，由推论 4.20 可知，$((0,\ 1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$ 是波兰空间。

剩下要证明 $\mathcal{T}\restriction_{((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}}$ 与 $((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$ 上的群结构半相容。设$h\in((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$任意。由于 $((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$ 是交换的，只需证明 ρ_h 关于 $\mathcal{T}\restriction_{((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}}$ 连续（此处 ρ_h 是在群 $((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$ 中右乘 h ）。设$x\in((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$ 任意。我们有

$$(x)\rho_h=((x)I\phi+(h)I\phi)(I\phi)^{-1}=(((x)I\phi)\rho_{(h)I\phi})(I\phi)^{-1}=(x)I\phi\rho_{(h)I\phi}\phi^{-1}I^{-1}.$$

设 $h^*:=\phi\rho_{(h)I\phi}\phi^{-1}$。对于每个 $i\in\mathbb{N}$，定义 $h_i^*:(0,1)\to(0,1)$ 为映射 $\phi_i\rho_{(h)I\pi_i\phi_i}\phi_i^{-1}$ ，并注意到 $h^*=\langle(\pi_ih_i^*)_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$。因此，对于每个 $i\in\mathbb{N}$，映射 $h_i':=h_i^*\cup\{(0,0),(1,1)\}$是 $[0,1]$ 的序同构（因而也是同胚）。因此我们可以通过 $h':=\langle(h_i')_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$ 来定义 $h'\in C([0,1]^{\mathbb{N}})$。由于 $h^*\subseteq h'$，我们有 $(x)\rho_h=(x)Ih'I^{-1}$。由于 $x\in C$ 且 $h'\in C([0,1]^{\mathbb{N}})$，可得

$$(x)\rho_h=I\phi\rho_{(h)I\phi}\phi^{-1}I^{-1}=Ih^*I^{-1}=(x)\rho_{h'}$$

其中， ρ_h 采用$((0,1)^{\mathbb{N}})I^{-1}$ 上的群运算，而$\rho_{h'}$ 采用$C([0,1]^{\mathbb{N}})$上的半群运算。由于根据假设， $\rho_{h'}$ 是连续的，因此 ρ_h 也连续，符合要求。□

与前面的小节一样，我们需要证明 $C([0,1]^{\mathbb{N}})$具有性质$\mathbf{W}$ 。证明以下来自 [35]的定理所需的大部分工作都在于此。证明相当冗长，且仅与本文主题略有关系，因此我们不在此列出。

定理 9.27 （参见 [35],《延拓希尔伯特同胚》的定理 5.2.4）。
令 $d:\ [0,1]^{\mathbb{N}}\times[0,1]^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$(x,y)d=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{|(x)\pi_n-(y)\pi_n|}{2^{n+1}}.$$

若 $\varepsilon>0$、 C_0、 $C_1\subseteq(0,1)^{\mathbb{N}}$ 是紧致的，且 $h':\ C_0\to C_1$ 是一个同胚，并且

$$\sup_{(x,y)\in h'}(x,y)d<\varepsilon,$$

那么存在 $h\in\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})$ 使得 $h'\subseteq h$ 与 $\sup^{(x,y)\in h}(x,y)d<\varepsilon$。
定理 9.28 （ $C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 的性质 $\mathbf{W}$ ，预备知识：1.1、2.3、3.11，5.13、7.5、9.27）。
拓扑半群 $C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 关于 $\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})$具有性质 $\boldsymbol{W}$。

证明。令 d为定理 9.27 中给出的 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 上的度量，并令 d_∞为定理 5.12 中给出的 $C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 上的度量。只需证明，对于所有 $s\in C([0,1]^{\mathbb{N}})$，都存在 $f_s,g_s\in C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 和 $h_s\in\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})$，使得 $f_sh_sg_s=s$，并且对于所有 $N\in\mathrm{Nbhds}_{\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})}(h_s)$，都有 $f_sNg_s\in\mathrm{Nbhds}_{C([0,1]^{\mathbb{N}})}(s)$。

令 $s\in C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 为任意值。令 f'， $g':\ [0,1]\to[0,1]$ 定义为

$$(x)f'=\frac{x}{2}+\frac{1}{4},\quad\text{and}\quad(x)g'=\left\{\begin{array}{cc}(x)f'^{-1}&\text{if }x\in[\frac14,\frac34]\\1&\text{if }x\in[\frac34,1]\\0&\text{if }x\in[0,\frac14]\end{array}\right\}.$$

我们通过 $f_s:=\langle(\pi_{\lfloor i/2\rfloor}f')_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$， $g_s:=\langle(\pi_{2i}g')_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$ 定义 f_s， $g_s\in C([0,1]^{\mathbb{N}})$。注意，$f_sg_s=\langle(\pi_if'g')_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}=\langle(\pi_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$ 是恒等映射。

对于每个 $i\in2\mathbb{N}$，我们定义 $h_i':\ \mathrm{img}(f_s)\to[\frac14,\frac34]$ by $(x)h_i'=(x)g_ss\pi_{i/2}f'$。对于每个 $i\in2\mathbb{N}+1$，我们定义 $h_i':=\pi_i$。接着定义 $h_s':\mathrm{img}(f_s)\to[\frac14,\frac34]^{\mathbb{N}}$ by $h_s':=\langle(h_i')_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$。

注意，对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathrm{img}(f_s)$，我们有 $(x)h'_s\pi_{2i+1} = (x)\pi_{2i+1} = (x)\pi_{2i}$，所以 h_s 是单射。此外，集合 $\mathrm{img}(f_s)$，$\mathrm{img}(h'_s)$都包含在$[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^{\mathbb{N}}$中，并且由于它们都是紧空间的连续像，因此二者都是紧致的。因此，h'_s 是从 $\mathrm{img}(f_s)$ 到 $\mathrm{img}(h_s)$ 的同胚（注 3.18）；根据定理 9.27，我们可以选取 $h_s \in \mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})$，使得 $h'_s \subseteq h_s$。现在我们有

$$\begin{aligned} f_s h_s g_s &= f_s \langle (h'_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} \langle (\pi_{2i} g')_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} = f_s \langle (h'_{2i} g')_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} \\ &= f_s g_s \langle (s\pi_i f' g')_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} = \langle (s\pi_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} = s. \end{aligned}$$

任取 $N \in$ 邻域$_{\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})}(h_s)$。只需证明 $f_s N g_s \in$ 邻域$_{C([0,1]^{\mathbb{N}})}(s)$。令$\varepsilon > 0$ 满足：对于所有满足 $(h_s, h)d_\infty < \varepsilon$的 $h \in$自同构群$([0,1]^{\mathbb{N}})$，均有 $h \in N$；再任取满足 $(k, s)d_\infty < \varepsilon$的 $k \in C([0,1]^{\mathbb{N}})$。只需证明 $k \in f_s N g_s$。

对每个 $i \in 2\mathbb{N}$，定义 $h'_{i,k} \colon \mathrm{img}(f_s) \to [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$，使其满足 $(x)h'_{i,k} = (x)g_s k\pi_{i/2} f'$。对每个 $i \in 2\mathbb{N}+1$，定义 $h'_{i,k} := \pi_i$。接着定义 $h'_k \colon \mathrm{img}(f_s) \to [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^{\mathbb{N}}$，使其满足 $h'_k := \langle (h'_{i,k})_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}}$。与 h'_s 的情形一样，集合 $\mathrm{img}(f), \mathrm{img}(h'_k)$ 都是 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^{\mathbb{N}}$ 的紧子集，而 h'_k 是这两个集合之间的同胚。

注意，$h'^{-1}_s h'_k = \left\{ ((y)h'_s,\ (y)h'_k) \;\middle|\; y \in \mathrm{img}(f) \right\}$。对于所有 $y \in \mathrm{img}(f)$，我们有

$$\begin{aligned} ((y)h'_s, (y)h'_k)d &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|(y)h'_s\pi_n - (y)h'_k\pi_n|}{2^{n+1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|(y)h'_n - (y)h'_{n,k}|}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{|(y)h'_n - (y)h'_{n,k}|}{2^{n+1}} = \sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{|(y)g_s s\pi_{n/2} f' - (y)g_s k\pi_{n/2} f'|}{2^{n+1}} \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|(y)g_s s\pi_n f' - (y)g_s k\pi_n f'|}{2^{n+1}} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|(y)g_s s\pi_n - (y)g_s k\pi_n|}{2^{n+1}} \\ &= ((y)g_s s, (y)g_s k)d \le (s,k)d_\infty \end{aligned}$$

因此，$\sup^{(x,y)\in h'^{-1}_s h'_k}(x,\ y)d < \varepsilon$。由定理 9.27，我们可以选取 $t \in \mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})$，使得 $\sup^{(x,y)\in t}(x, y)d < \varepsilon$ 与 $h'^{-1}_s h'_k \subseteq t$ 成立。令 $h_k := h_s t$。注意，

$$\begin{aligned} f_s h_k g_s &= f_s h'_s t g_s = f_s h'_k g_s = f_s \langle (h'_{i,k})_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} \langle (\pi_{2i} g')_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} \\ &= f_s \langle (h'_{2i,k} g')_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} = f_s g_s \langle (k\pi_i f' g')_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} = \langle (k\pi_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{[0,1]^{\mathbb{N}}} = k. \end{aligned}$$

因此，只需证明 $h_k \in N$。根据 ε 的定义，只需证明 $(h_k,\ h_s)d_\infty < \varepsilon$。由 t 的选取可得

$$(h_k, h_s)d_\infty = (h_s t, h_s)d_\infty = \sup_{x\in[0,1]^{\mathbb{N}}} (((x)h_s)t, (x)h_s)d = \sup_{x\in[0,1]^{\mathbb{N}}} ((x)t, x)d < \varepsilon$$

因此结论成立。 □

定理 9.29 （$C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 的波兰拓扑，预备知识：4.27、6.11、7.6、9.25、9.26、9.28、5.14）。

紧开拓扑是与半群 $C([0,1]^{\mathbb{N}})$相容的唯一波兰拓扑。

证明。设 $\mathcal{T}$是与 $C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 相容的波兰拓扑，并设 $\mathcal{T}_{co}$ 是紧开拓扑。由于 $\mathcal{T}$是波兰的，由引理 9.26 和 9.25 可得 $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_{co}$。

由于 $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_{co}$ 与二者都是波兰的，根据命题 5.14 中给出的论证可知，$\mathcal{T} \restriction_{\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})}$ 和 $\mathcal{T}_{co} \restriction_{\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})}$ 都是波兰的。

由于 $\mathcal{T}\restriction_{\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})} \supseteq \mathcal{T}_{co}\restriction_{\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})}$，根据定理 4.27 可得 $\mathcal{T}\restriction_{\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})} = \mathcal{T}_{co}\restriction_{\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})}$（使用恒等同构）。再次使用恒等同构，根据引理 7.6 可得，若 $C([0,1]^{\mathbb{N}})$ 关于 $\mathrm{Aut}([0,1]^{\mathbb{N}})$ 具有性质 **W**，则 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{co}$。这已在引理 9.28 中证明。□

推论 9.30（希尔伯特克隆的拓扑，预备知识：5.13、8.2、8.6、9.29）。
令 $\mathcal{C}$ 为拓扑空间与连续函数范畴，其对象集为 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}} := \left\{ ([0,1]^{\mathbb{N}})^{i} \,\middle|\, i \in \mathbb{N} \right\}$，态射集 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 由这些对象之间的所有连续映射组成。令 $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$ 为 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ 上的离散拓扑，并令 $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ 为由下列表达式形式的集合生成的拓扑

$$A_{i,j} := C(([0,1]^{\mathbb{N}})^{i}, ([0,1]^{\mathbb{N}})^{j}) \quad and \quad B(V,U) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \,\middle|\, (V)f \subseteq U \right\}$$

对所有 i、$j \in \mathbb{N}$，紧致 $V \subseteq ([0,1]^{\mathbb{N}})^{i}$，以及开 $U \subseteq ([0,1]^{\mathbb{N}})^{j}$。

三元组 $(\mathcal{C}$、$\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$、$\mathcal{P}_{M})$ 是一个波兰抽象克隆，并且这些是与 $\mathcal{C}$相容的唯一波兰拓扑。

证明。 我们首先证明 $(\mathcal{C}, \mathcal{P}_{\mathcal{O}}, \mathcal{P}_{M})$ 是一个拓扑抽象克隆。我们需要验证定义 8.2 中的七个条件。前五个条件根据定义显然成立。接下来我们证明 $\circ_{\mathcal{C}}$ 是连续的。

由于集合 $(A_{n,i} \times A_{i,m})_{i,n,m\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{Comp}_{\mathcal{C}}$ 的一个开集划分，只需证明对所有 $n, m, i \in \mathbb{N}$，映射 $\circ_{\mathcal{C}}\restriction_{A_{n,i}\times A_{i,m}}$ 是连续的。对于所有 $j, k \in \mathbb{N}$，集合 $(A_{j,k})\circ_{\mathcal{C}}\restriction^{-1}_{A_{n,i}\times A_{i,m}}$ 要么为空，要么是 $A_{n,i} \times A_{i,m}$，因此是开集。此外，若 $V \subseteq ([0,1]^{\mathbb{N}})^{j}$ 是紧致的，且 $U \subseteq ([0,1]^{\mathbb{N}})^{k}$ 是开集，则根据推论 5.13，$(B(V, U))\circ_{\mathcal{C}}\restriction^{-1}_{A_{n,i}\times A_{i,m}}$ 是开集。

还需证明，对于所有 i，$j \in \mathbb{N}$，定义 8.2 中的双射 $\phi_{i,j} : A^{j}_{i,1} \to A_{i,j}$ 是连续的。根据 $([0,1]^{\mathbb{N}})^{j}$ 上积拓扑的定义，满足 $U \subseteq ([0,1]^{\mathbb{N}})^{j}$ 且 $U = \prod_{k\in\{0,1,\ldots,j-1\}}(U)\pi_k$ 的开集构成 $([0,1]^{\mathbb{N}})^{j}$ 的一个基。因此根据定理 5.12，当 $V \subseteq ([0,1]^{\mathbb{N}})^{i}$ 为紧致集且 $U \subseteq ([0,1]^{\mathbb{N}})^{j}$ 为开集并满足 $U = \prod_{k\in\{0,1,\ldots,j-1\}}(U)\pi_k$ 时，集合 $B(V, U)$ 生成 $A_{i,j}$ 上的拓扑。

如果 $V \subseteq ([0,1]^{\mathbb{N}})^{i}$ 是紧致的，$U \subseteq ([0,1]^{\mathbb{N}})^{j}$ 是开集且 $U = \prod_{k\in\{0,1,\ldots,j-1\}}(U)\pi_k$，那么

$$(B(V,U))\phi^{-1}_{i,j} = \prod_{k\in\{0,1,\ldots,j-1\}} B(V, (U)\pi_k)$$

因此，$\phi_{i,j}$ 确实如要求的那样连续。

因此，$(\mathcal{C}, \mathcal{P}_{\mathcal{O}}, \mathcal{P}_{M})$ 是一个拓扑抽象克隆。由定理 9.29 和命题 8.6 即可得到该结果。

□

9.6. **康托空间**。本小节讨论康托空间 $2^{\mathbb{N}}$ 上的连续变换（参见定理 9.35 和推论 9.36）。论证思路与希尔伯特立方体小节中的类似，不过现在我们可以利用定理 5.39。

据我们所知，文献中没有与定理 9.27 对应的康托空间版本，因此我们给出自己的版本（见引理 9.31）。引理 9.31 的证明基于 [35] 中定理 5.2.4 的证明，但由于 $2^{\mathbb{N}}$ 可以自然地视为一个拓扑群，因此证明大大简化。

引理 9.31（扩张 $2^{\mathbb{N}}$ 同胚，预备知识：2.3、3.18、4.10、4.14）。设 $d\colon 2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$ 定义如下

$$(x,y)d=\inf\left\{\frac{1}{2^n}\;\middle|\; n\in\mathbb{N},\ x\restriction_n=y\restriction_n\right\}.$$

令 $S:=\left\{x\in 2^{\mathbb{N}}\;\middle|\;(x)\pi_i=0\text{ 对所有 }i\in 2\mathbb{N}+1\right\}$都成立。若 $\varepsilon>0$, $C_0,C_1\subseteq S$ 是紧致的，且 $h'\colon C_0\to C_1$是一个同胚，并且 $\sup_{(x,y)\in h'}(x,y)d<\varepsilon$，那么存在 $h\in\mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})$ 使得 $h'\subseteq h$，且$\sup_{(x,y)\in h}(x,y)d<\varepsilon$。

证明。我们将 $\{0,1\}$ 视为一个以模 2 加法为运算的离散拓扑群，并将$2^{\mathbb{N}}$ 视为该群的幂（我们用 $+$表示该运算）。令 $\varepsilon>0$, $C_0,C_1\subseteq S$ 为闭集，且$h'\colon C_0\to C_1$ 是一个同胚，并且 $\sup_{(x,y)\in h'}(x,y)d<\varepsilon$。取满足 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$的 $n\in 2\mathbb{N}$，并定义 $\psi_0\colon 2^{\mathbb{N}}\to\{0,1\}^{n/2}$, $\psi_1,\psi_2\colon 2^{\mathbb{N}}\to 2^{\mathbb{N}}$为 —

$$(x)\psi_0=\langle\pi_1,\pi_3,\dots,\pi_{n-1}\rangle_{\{0,1\}^{n/2}},\quad (x)\psi_1=\langle(\pi_{2i})_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{2^{\mathbb{N}}},$$

$$(x)\psi_2=\langle(\pi_{n+2i+1})_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{2^{\mathbb{N}}}.$$

于是定义 $\psi:=\langle\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2\rangle_{\{0,1\}^{n/2}\times 2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}}}$, $C_0':=C_0\psi_1$ 与 $C_1':=C_1\psi_1$（注意，ψ 是一个同胚）。由于 C_0，$C_1\subseteq S$，映射 ψ_1 在这些集合上是单射，因此 $h'':=\psi_1^{-1}h'\psi_1$ 是从 C_0' 到 C_1'的同胚。

设 $c\colon\mathcal{P}(2^{\mathbb{N}})\backslash\{\varnothing\}\to 2^{\mathbb{N}}$ 满足 $(A)c\in A$，对所有 $A\in\mathrm{dom}(c)$均成立。对于每个 $i\in\{0,1\}$, 令$t_i\colon 2^{\mathbb{N}}\to C_i'$ 定义为

$$(x)t_i=\left(\left\{y\in C_i'\;\middle|\;(x,y)d\le(x,z)d\text{ for all }z\in C_i'\right\}\right)c$$

（这是良定义的，因为 C_i 是紧致的）。注意，对每个 $i\in\{0,1\}$，$t_i\restriction_{C_i}$ 都是恒等函数，$\mathrm{img}(t_i)=C_i$，并且对所有 x，$y\in 2^{\mathbb{N}}$，都有 $((x)t_i,\ (y)t_i)d\le(x,\ y)d$。令 ϕ_0，ϕ_1，$\phi_2\colon\{0,1\}^{n/2}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1\}^{n/2}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}$定义为

$$(x,y,z)\phi_0=(x,y,y+z),\quad (x,y,z)\phi_1=(x,y-(z)t_0+(z)t_0h'',z),$$

$$(x,y,z)\phi_2=(x,y,z-(y)t_1h''^{-1}).$$

不难验证，这些映射中的每一个都是同胚。

最后，令 $h:=\psi\phi_0\phi_1\phi_2\psi^{-1}\in$ 自同构群$(2^{\mathbb{N}})$。现在我们证明 h具有所需的性质。如果$x\in C_0$, 那么

$$\begin{aligned}(x)h&=((x)\psi_0,(x)\psi_1,000\dots)\phi_0\phi_1\phi_2\psi^{-1}\\&=((x)\psi_0,(x)\psi_1,(x)\psi_1)\phi_1\phi_2\psi^{-1}\\&=((x)\psi_0,(x)\psi_1-(x)\psi_1t_0+(x)\psi_1t_0h'',(x)\psi_1)\phi_2\psi^{-1}\end{aligned}$$

由于 $(x)\psi_1 \in C_0'$，因此

$$\begin{aligned}(x)h &= ((x)\psi_0, (x)\psi_1 - (x)\psi_1 t_0 + (x)\psi_1 t_0 h'', (x)\psi_1)\phi_2\psi^{-1}\\ &= ((x)\psi_0, (x)\psi_1 - (x)\psi_1 + (x)\psi_1 h'', (x)\psi_1)\phi_2\psi^{-1}\\ &= ((x)\psi_0, (x)\psi_1 h'', (x)\psi_1)\phi_2\psi^{-1}\\ &= ((x)\psi_0, (x)\psi_1 h'', (x)\psi_1 - (x)\psi_1)\psi^{-1}\\ &= ((x)\psi_0, (x)\psi_1 h'', 000\ldots)\psi^{-1} = (x)h'.\end{aligned}$$

还需证明，对于任意的 $x \in 2^{\mathbb{N}}$，都有 $(x,(x)h)d < \varepsilon$。设 $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ 满足：对于任意的 $f, g \in C(2^{\mathbb{N}})$，$(f,g)d < \varepsilon$ 当且仅当 f, g 共享一个长度为 n_ε 的前缀。任取 $i < n_\varepsilon$。我们证明 $(x)h\pi_i = (x)\pi_i$。

根据 h 的定义，存在某个 $z' \in C_0'$ 使得

$$((x)h\psi_0, (x)h\psi_1) = ((x)\psi_0, (x)\psi_1 - z' + (z')h'').$$

设 $z \in C_0$ 满足 $z' = (z)\psi_1$。注意到 $n_\varepsilon \leq n$。因此，如果 i 是奇数，那么

$$(x)\pi_i = (x)\psi_0\pi_{(i-1)/2} = (x)h\psi_0\pi_{(i-1)/2} = (x)h\pi_i.$$

根据假设，$(z,(z)h')d < \varepsilon$。因此，如果 $i < n_\varepsilon$ 是偶数，那么

$$(z')\pi_{i/2} = ((z)\psi_1)\pi_{i/2} = (z)\pi_i = (z)h'\pi_i = (z)h'\psi_1\pi_{i/2} = (z)\psi_1 h''\pi_{i/2} = (z')h''\pi_{i/2}.$$

所以 $(z')\pi_{i/2} - (z')h''\pi_{i/2} = 0$，从而

$$(x)\pi_i = (x)\psi_1\pi_{i/2} = (x)\psi_1\pi_{i/2} + (z')\pi_{i/2} - (z')h''\pi_{i/2} = (x)h\psi_1\pi_{i/2} = (x)h\pi_i.$$

□

下面的证明与引理 9.28 的证明非常相似，但做了调整，以便使用引理 9.31，而非定理 9.27。

引理 9.32（性质 **W** 关于 $C(2^{\mathbb{N}})$，预备知识：1.1、2.3、3.11、5.13、7.5、9.31）。带有紧开拓扑的拓扑半群 $C(2^{\mathbb{N}})$ 相对于自同构群$(2^{\mathbb{N}})$具有性质 $\boldsymbol{W}$。

证明。令 d 为定理 9.31 中给出的 $2^{\mathbb{N}}$ 上的度量，并令 d_∞ 为定理 5.12 中给出的 $C(2^{\mathbb{N}})$ 上的度量。只需证明，对于所有 $s \in C(2^{\mathbb{N}})$，存在 f_s，$g_s \in C(2^{\mathbb{N}})$ 和 $h_s \in$ 自同构群$(2^{\mathbb{N}})$，使得 $f_s h_s g_s = s$，并且对于所有 $N \in$ 邻域$_{\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})}(h_s)$，都有 $f_s N g_s \in$ 邻域$_{C(2^{\mathbb{N}})}(s)$。

任取 $s \in C(2^{\mathbb{N}})$。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们定义 $f_i\colon 2^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ 为

$$(x)f_i = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{if } i \in 2\mathbb{N}+1\\ (x)\pi_{i/4} & \text{if } i \in 4\mathbb{N}\\ (x)\pi_{(i-2)/4} & \text{if } i \in 4\mathbb{N}+2\end{array}\right\}.$$

接下来，我们定义 $f_s, g_s \in C(2^{\mathbb{N}})$ 如下：

$$f_s := \langle (f_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{2^{\mathbb{N}}} \quad \text{and} \quad g_s := \langle (\pi_{4i})_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{2^{\mathbb{N}}}.$$

注意，$f_s g_s = \langle (f_{4i})_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{2^{\mathbb{N}}} = \langle (\pi_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{2^{\mathbb{N}}}$ 是恒等映射。此外，$\mathrm{img}(f_s) \subseteq S$（其中 S 与定理 9.31 中的定义相同）。

对于每个 $i \in 4\mathbb{N}$，我们定义 $h'_i : \mathrm{img}(f_s) \to \{0,1\}$，使得 $(x)h'_i = (x)^{g_s s \pi_{i/4}}$。对于每个 $i \in \mathbb{N}\backslash 4\mathbb{N}$，我们定义 $h'_i := \pi_i$。然后我们定义 $h'_s : \mathrm{img}(f_s) \to S$，使得 $h'_s := \langle (h'_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}}$。

注意，对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathrm{img}(f_s)$，我们有 $(x)h'_s\pi_{4i+2} = (x)\pi_{4i+2} = (x)\pi_{4i}$，因此 h_s 是单射。此外，集合 $\mathrm{img}(f_s)$,$\mathrm{img}(h'_s)$ 都包含于 S 中，且二者都是紧致的（见注 3.18）。因此，h'_s 是从 $\mathrm{img}(f_s)$ 到 $\mathrm{img}(h_s)$ 的一个同胚；根据定理 9.31，我们可以选取 $h_s \in \mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})$，使得 $h'_s \subseteq h_s$。现在我们有

$$\begin{aligned} f_s h_s g_s &= f_s \langle (h'_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}} \langle (\pi_{4i})_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}} = f_s \langle (h'_{4i})_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}} \\ &= f_s g_s \langle (s\pi_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}} = \langle (s\pi_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}} = s. \end{aligned}$$

任取 $N \in \mathrm{Nbhds}_{\mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})}(h_s)$。只需证明 $f_s N g_s \in \mathrm{Nbhds}_{C(2^{\mathbb{N}})}(s)$。取满足以下条件的 $\varepsilon > 0$：对于所有满足 $(h_s, h)d_\infty < \varepsilon$ 的 $h \in \mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})$，都有 $h \in N$；再任取满足 $(k,s)d_\infty < \varepsilon$ 的 $k \in C(2^{\mathbb{N}})$。只需证明 $k \in f_s N g_s$。

对于每个 $i \in 4\mathbb{N}$，我们定义 $h'_{i,\,k} : \mathrm{img}(f_s) \to \{0,1\}$ 通过 $(x)^{h'_{i,\,k}} = (x)g_s k \pi_{i/4}$。对于每个 $i \in \mathbb{N}\backslash 4\mathbb{N}$，我们定义 $h'_{i,\,k} := \pi_i$。接着，我们定义 $h'_k : \mathrm{img}(f_s) \to 2^{\mathbb{N}}$ 通过 $h'_k := \langle (h'_{i,\,k})_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}}$。与 h'_s 的情形一样，集合 $\mathrm{img}(f_s)$，$\mathrm{img}(h'_k)$ 都是 S 的紧子集，并且 h'_k 是这两个集合之间的一个同胚。

注意，${h'_s}^{-1}h'_k = \left\{ ((y)h'_s,\ (y)h'_k) \;\middle|\; y \in \mathrm{img}(f) \right\}$。对于所有满足 $(y)h'_s \neq (y)h'_k$ 的 $y \in \mathrm{img}(f)$，我们有

$$\begin{aligned} ((y)h'_s, (y)h'_k)d &= \inf\left(\left\{ \frac{1}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ (y)h'_s \restriction_n = (y)h'_k \restriction_n \right\} \right) \\ &= \max\left(\left\{ \frac{1}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ (y)h'_s\pi_n \neq (y)h'_k\pi_n) \right\} \right) \\ &= \max\left(\left\{ \frac{1}{2^n} \;\middle|\; n \in 4\mathbb{N},\ (y)g_s s\pi_{n/4} \neq (y)g_s k\pi_{n/4} \right\} \right) \\ &= \max\left(\left\{ \frac{1}{2^{4n}} \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, (y)g_s s\pi_n \neq (y)g_s k\pi_n \right\} \right) \\ &< \max\left(\left\{ \frac{1}{2^n} \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, (y)g_s s\pi_n \neq (y)g_s k\pi_n \right\} \right) \\ &= ((y)g_s s, (y)g_s k)d \leq (s,k)d_\infty < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此，$\sup(x,\ y)d < \varepsilon$。由定理 9.31，我们可以选择 $t \in \mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})$，使得我们有 $(x,\ y) \in {h'_s}^{-1}h'_k \mathrm{s}\mathrm{up}_{(x,y)\in t}(x,\ y)d < \varepsilon$ 与 ${h'_s}^{-1}h'_k \subseteq t$。令 $h_k := h_s t$。注意到

$$\begin{aligned} f_s h_k g_s &= f_s h'_s t g_s = f_s h'_k g_s = f_s \langle (h'_{i,k})_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}} \langle (\pi_{4i})_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}} = f_s \langle (h'_{4i,k})_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}} \\ &= f_s g_s \langle (k\pi_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}} = \langle (k\pi_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle_{2^{\mathbb{N}}} = k. \end{aligned}$$

因此，只需证明 $h_k \in N$。根据 ε的定义，只需证明 $(h_k,\ h_s)d_\infty < \varepsilon$。根据 t 的选取，我们有

$$(h_k, h_s)d_\infty = (h_s t, h_s)d_\infty = \sup_{x\in 2^{\mathbb{N}}} (((x)h_s)t, (x)h_s)d = \sup_{x\in 2^{\mathbb{N}}} ((x)t, x)d < \varepsilon$$

因此结论得证。 □

引理 9.33 (康托连续性，预备知识：5.13、5.14、5.39、6.12、7.6、9.32)。拓扑 $\mathcal{SCC}$(自同构群($2^{\mathbb{N}}$)) 和 $\mathcal{SCC}(C(2^{\mathbb{N}}))$ 分别是这些集合上的紧开拓扑。此外，这些拓扑都是波兰拓扑

证明。令 $\mathcal{T}_{co}$ 表示 C($2^{\mathbb{N}}$) 上的紧开拓扑。由定理 5.12，该拓扑是波兰拓扑，且与 C($2^{\mathbb{N}}$) 相容。由于 $\mathcal{T}_{co}$ 是第二可数的，因此可得 $\mathcal{SCC}$(C($2^{\mathbb{N}}$)) $\supseteq \mathcal{T}_{co}$ 与$\mathcal{SCC}$(Aut($2^{\mathbb{N}}$))$\supseteq \mathcal{T}_{co}\restriction_{\mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})}$。

由定理 5.39，从 (Aut($2^{\mathbb{N}}$) $\mathcal{T}_{co}$) 到第二可数群（因此也包括逆半群）的每个同态都是连续的。由命题 6.12 可得，从移除了 Aut($2^{\mathbb{N}}$) 的一元运算后得到的半群到第二可数半群的每个同态都是连续的。

由引理 9.32， C($2^{\mathbb{N}}$) 关于 Aut($2^{\mathbb{N}}$) 具有性质 **W** 。因此，由引理 7.6，从 (C($2^{\mathbb{N}}$) $\mathcal{T}_{co}$) 到第二可数拓扑半群的所有同态都是连续的。因此，由命题 6.12，我们也有

$$\mathcal{SCC}(C(2^{\mathbb{N}})) \subseteq \mathcal{T}_{co} \quad \text{and} \quad \mathcal{SCC}(\mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})) \subseteq \mathcal{T}_{co}\restriction_{\mathrm{Aut}(2^{\mathbb{N}})}.$$

□

以下引理是康托空间版本的引理 9.26。不过，由于引理 9.33 的存在性，本例中我们可以在较弱的假设下采用另一种证明。

引理 9.34 （在 $2^{\mathbb{N}}$ 上的连续作用，预备知识：9.33）。
假设 $\mathcal{T}$ 是与半群 $C(2^{\mathbb{N}})$ 相容的第二可数豪斯多夫拓扑。在这种情况下，由 $(x, f)a = (x)f$ 定义的映射 $a\colon 2^{\mathbb{N}} \times (C(2^{\mathbb{N}})\ \mathcal{T}) \to 2^{\mathbb{N}}$ 是连续的。

证明。令 C 表示从 $2^{\mathbb{N}}$ 到其自身的常值映射集合，并注意到 $\mathcal{T}\restriction_C$ 是第二可数豪斯多夫空间。令 $I\colon C \to 2^{\mathbb{N}}$ 为将一个常值映射映至其像中的唯一点的双射。注意 $a = \langle \pi_0 I^{-1}, \pi_1 \rangle_{C\times C(2^{\mathbb{N}})} \circ {}_*{}_{C(2^{\mathbb{N}})} \circ I$. 因此，要证明 a 连续，只需证明 $I\colon C \to 2^{\mathbb{N}}$ 是一个同胚。令 $\mathcal{C}$ 表示拓扑

$$\left\{U \subseteq C \;\middle|\; (U)I \text{ is open in } 2^{\mathbb{N}}\right\}$$

在 C 上。我们将证明 $\mathcal{T}\restriction_C = \mathcal{C}$。如果 $U \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ 是开的，那么 $(U)I^{-1} = \left\{f \in C \;\middle|\; (2^{\mathbb{N}})f \subseteq U\right\}$。因此$\mathcal{C} = \mathcal{T}_{co}\restriction_C$。由引理 9.33 可知

$$\mathcal{T}\restriction_C \subseteq \mathcal{SCC}(C(2^{\mathbb{N}}))\restriction_C = \mathcal{T}_{co}\restriction_C = \mathcal{C}.$$

注意， $\mathcal{T}\restriction_C \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{T}\restriction_C$ 是豪斯多夫的，且 $\mathcal{C}$ 是紧致的。因此，由注 3.18 可得所需的 $\mathcal{T}\restriction_C = \mathcal{C}$。
□

定理 9.35 （ C($2^{\mathbb{N}}$) 的拓扑，预备知识：9.25、9.33、9.34）。
紧开拓扑是与 $C(2^{\mathbb{N}})$ 相容的唯一第二可数豪斯多夫拓扑。此外， $\mathcal{SCC}(C(2^{\mathbb{N}}))$ 是紧开拓扑，并且从 $C(2^{\mathbb{N}})$ 到第二可数拓扑半群的所有同态都是连续的。

证明。设 $\mathcal{T}$ 是与 C($2^{\mathbb{N}}$) 相容的任意第二可数豪斯多夫拓扑，并设 $\mathcal{T}_{co}$ 为紧开拓扑。等式 $\mathcal{SCC}$(C($2^{\mathbb{N}}$)) $= \mathcal{T}_{co}$ 由引理 9.33 得出。剩下

要证明 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{co}$。根据 $\mathcal{SCC}(C(2^{\mathbb{N}}))$ 的定义，可得 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{SCC}(C(2^{\mathbb{N}})) = \mathcal{T}_{co}$。此外，由引理 9.34 和引理 9.25，还可得 $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_{co}$。结论由此得出。□

推论 9.36 (康托尔克隆的拓扑，预备知识：5.13, 8.2, 8.6, 9.30, 9.35)。令 $\mathcal{C}$ 为拓扑空间与连续函数范畴的子范畴，其对象集为 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}} := \left\{ (2^{\mathbb{N}})^i \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$，态射集 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 由这些对象之间的所有连续映射组成。令 $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$ 为 $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ 上的离散拓扑，令 $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ 为 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 上由以下形式的集合生成的拓扑

$$A_{i,j} := C((2^{\mathbb{N}})^i, (2^{\mathbb{N}})^j) \quad \textit{and} \quad B(V,U) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \;\middle|\; (V)f \subseteq U \right\}$$

对所有 i、$j \in \mathbb{N}$，紧致的 $V \subseteq (2^{\mathbb{N}})^i$，以及开 $U \subseteq (2^{\mathbb{N}})^j$。

三元组 $(\mathcal{C}, \mathcal{P}_{\mathcal{O}}, \mathcal{P}_M)$ 是一个波兰拓扑抽象克隆。此外，若 $(\mathcal{T}_{\mathcal{O}}, \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ 与克隆 $\mathcal{C}$ 相容，则

(1) 若 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 是豪斯多夫且第二可数的，则 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} = \mathcal{P}_{\mathcal{M}}$。(2)
若 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 是第二可数的，则 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{M}}$。

证明。 这个推论的证明与推论 9.30 的证明相同，只需将定理 9.29 换成定理 9.35。□

9.7. **布尔代数**。 本小节讨论布尔代数之间的同态。特别地，我们关注康托空间的开闭子集构成的布尔代数。这个布尔代数值得注意，因为在同构意义下，它是唯一一个没有原子（极小的非零元素）的可数无限布尔代数。它也是有限非平凡布尔代数类的弗雷歇极限。本小节的结果是康托空间小节结果的推论，借助了斯通对偶定理（9.41）和命题 8.6。

定义 9.37 （布尔代数签名，预备知识：4.1）。
我们将 σ_B 定义为签名

$$\sigma_B := (\{\wedge, \vee, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \varnothing, \{(\wedge, 2), (\vee, 2), (\neg, 1), (\mathbf{0}, 0), (\mathbf{1}, 0)\}).$$

符号 $\wedge$、$\vee$、$\neg$、$\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{1}$ 的实际取值并不十分重要，但为完整起见，我们定义

$$\wedge := (01, 14, 04), \quad \vee := (15, 18), \quad \neg := (14, 15, 20),$$

$$\mathbf{0} := (26, 05, 18, 15), \quad \mathbf{1} := (15, 14, 05).$$

定义 9.38 （布尔代数，预备知识：4.2、9.37）。
如果 $\mathbb{B}$ 是 σ_B 结构且 a，$b \in \mathbb{B}$，那么我们通常会分别用 $a \wedge b$，$a \vee b$，$\neg a$，$\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{1}$ 代替 $(a, b)\wedge^{\mathbb{B}}$，$(a, b)\vee^{\mathbb{B}}$，$(a)\neg^{\mathbb{B}}$，$()\mathbf{0}^{\mathbb{B}}$ 和 $()\mathbf{1}^{\mathbb{B}}$。

我们称 σ_B 结构 $\mathbb{B}$ 为布尔代数，如果对于所有 $a,\ b,\ c \in \mathbb{B}$，都有以下结论：

$$\begin{aligned} a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c, & a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c, \\ a \wedge b &= b \wedge a, & a \vee b &= b \vee a, \\ a \wedge \mathbf{1} &= a, & a \vee \mathbf{0} &= a, \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c), & a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \\ a \vee (a \wedge b) &= a, & a \wedge (a \vee b) &= a, \\ a \vee \neg a &= \mathbf{1}, & a \wedge \neg a &= \mathbf{0}, \\ \neg(a \vee b) &= \neg a \wedge \neg b, & \neg(a \wedge b) &= \neg a \vee \neg b. \end{aligned}$$

值得注意的是，上述定义中的许多假设可以相互推导，但不同作者对哪些条件构成定义的选择各不相同。

由定理 9.41 可知，每个布尔代数都同构于一个集合的布尔代数（其运算包括交集、并集、补集、空集和全集），因此这些是值得牢记的关键例子。

例 9.39（二元布尔代数，预备知识：9.38）。
如果将 0 视为“假”，将 1 视为“真”，那么 $\{0,1\}$ 在赋予“与”、“或”、“非”、“假”和“真”这些运算后就是一个布尔代数。更具体地说，如果 $a,\ b \in \{0,1\}$那么

$$a \wedge b := \min(a,b),\ a \vee b := \max(a,b),\ \neg a := 1-a,\ \mathbf{0} := 0,\ \text{ and }\ \mathbf{1} := 1$$

定义 9.40（Stone 空间，预备知识：3.11、4.3、9.39）。
如果一个拓扑空间 X 是零维、豪斯多夫且紧致的，我们就称它为***Stone*** 空间。如果 $\mathbb{B}$ 是一个布尔代数，那么令 SSpace(𝔹) 表示从 $\mathbb{B}$ 到例 9.39 中的二元布尔代数的同态集合。我们将 SSpace(𝔹) 视为一个配备逐点拓扑的拓扑空间（$\{0,1\}$ 具有离散拓扑）。

定理 9.41（参见 [15], 斯通对偶定理的定理 34；预备知识：3.14、3.16、3.12、3.13、6.2、9.40）。

若 X 是 ***Stone*** 空间，则 X 的开闭子集构成的集合 $\mathrm{Clo}(X)$ 是一个布尔代数，其运算如下。若 A、$B \in \mathrm{Clo}(X)$ 任意，则

$$A \vee B = A \cup B, \quad A \wedge B = A \cap B, \quad \neg A = X \backslash A, \quad \mathbf{0} = \varnothing, \quad \mathbf{1} = X.$$

反过来，若 $\mathbb{B}$ 是布尔代数，则 $\mathrm{SSpace}(\mathbb{B})$（回顾定义 ***9.40***）是唯一一个满足 $\mathbb{B} \cong \mathrm{Clo}(X)$ 的 ***Stone*** 空间 X（在同胚意义下）。此外，若 X 是 ***Stone*** 空间且 $\mathbb{B}$ 是布尔代数，则

$$C(X) \cong \mathrm{End}(\mathrm{Clo}(X))^{\dagger} \quad \textit{and} \quad \mathrm{End}(\mathbb{B}) \cong C(\mathrm{SSpace}(\mathbb{B}))^{\dagger} \textit{ (recall Definition 6.2).}$$

此外，若 X、Y 是不相交的 ***Stone*** 空间，则 $X \cup Y$ 是 ***Stone*** 空间，且 $\mathrm{Clo}(X \cup Y) \cong \mathrm{Clo}(X) \times \mathrm{Clo}(Y)$。

定理 9.42（End(B_∞) 的拓扑，预备知识：6.3、9.35、9.41、4.13、5.1）。令 B_∞ 表示布尔代数 $\mathrm{Clo}(2^{\mathbb{N}})$。逐点拓扑 $\mathcal{PT}_{B_\infty} \restriction_{\mathrm{End}(B_\infty)}$（回顾例 ***4.13***）是与 $\mathrm{End}(B_\infty)$ 相容的唯一第二可数豪斯多夫拓扑。此外，这

个拓扑是波兰的，等于 $\mathcal{SCC}$（End(B_∞)），并且从 （End(B_∞)$\mathcal{PT}_{B_\infty}\restriction_{\mathrm{End}(B_\infty)}$)到第二可数半群的所有同态都是连续的。

证明。 由定理 9.41 可知，End(B_∞) $\cong C(2^{\mathbb{N}})^{\dagger}$。因此，由命题 6.3 可知，存在一个在与 End(B_∞) 相容的拓扑和与 $C(2^{\mathbb{N}})$ 相容的拓扑之间的对应关系，该对应关系是双射且保拓扑性质的。因此，由定理 9.35 可知，存在唯一一个与 End(B_∞) 相容的第二可数豪斯多夫拓扑，且该拓扑与 $\mathcal{SCC}$(End(B_∞)) 相同。由引理 9.33 可知，该拓扑也是波兰的。由于 $\mathcal{PT}_{B_\infty}\restriction_{\mathrm{End}(B_\infty)}$ 是第二可数、豪斯多夫的，且与 End(B_∞) 相容，结论得证。□

推论 9.43 （ B_∞ 多态克隆的拓扑，预备知识：8.2、8.6、9.10）。设 B_∞ 是一个布尔代数，其全集为 $\mathbb{N}$，且与$\mathrm{Clo}(2^{\mathbb{N}})$同构。设 $\mathcal{C}$ 是由布尔代数及同态构成的子范畴，其对象集为 $\mathcal{O}_\mathcal{C}$:
$= \left\{ B_\infty^i \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$，其态射集 $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ 由这些对象之间的所有同态组成。我们将 $\mathcal{O}_\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{P}_\mathcal{C}$ 视为定理 *9.11* 中给出的同名拓扑空间的子空间。分别设 $\mathcal{P}_\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ 为定义在这些集合上的拓扑。

三元组 $(\mathcal{C}, \mathcal{P}_\mathcal{O}, \mathcal{P}_M)$ 是一个波兰拓扑抽象克隆。此外，如果 $(\mathcal{T}_\mathcal{O}, \mathcal{T}_\mathcal{M})$ 与克隆 $\mathcal{C}$ 相容，那么

(1) 如果 $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ 是豪斯多夫且第二可数的，那么 $\mathcal{T}_\mathcal{M} = \mathcal{P}_\mathcal{M}$。
(2) 如果 $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ 是第二可数的，那么 $\mathcal{T}_\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}_\mathcal{M}$。

证明。 首先注意，$(\mathcal{C}, \mathcal{P}_\mathcal{O}, \mathcal{P}_M)$ 是一个拓扑抽象克隆，因为它包含于定理 9.11 中的克隆之中。

注意， $2^{\mathbb{N}}$与其自身的不交并 ($2 \times 2^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N}}$) 同构。因此，由定理 9.41 可得 $B_\infty \cong B_\infty^2$。于是，结合命题 8.6 与定理 9.42，即可得到该结果。□

第4. dV_n的自同构

本部分的内容是本文作者所著论文 [13] 的更详细版本。

群 dV_n 包括布林–汤普森群 nV ($= nV_2$) 和希格曼–汤普森群 V_n ($= 1V_n$)。它们也与群类 $G_{n,\,r}$ ($G_{n,\,1} = 1V_n$) 有重叠。群 nV[7, 8, 4, 17, 2, 31, 24], 以及汤普森群的自同构 [6, 9, 3, 27] 都已在文献中得到充分研究。

C. Bleak、P. Cameron、Y. Maissel、A. Navas 和 F. Olukoya 的论文 [3] 使用 Rubin 定理和转导器描述了群 Aut($G_{n,\,r}$) 和 Out($G_{n,\,r}$)。这里我们给出群 Aut(dV_n) 和 Out(dV_n) 的类似描述（见定理 12.18 ），并据此将 Out(dV_n) 嵌入 Out(V_n)≀Sym(d) （见定理 14.18 ）。此外，当 $n = 2$ 时，我们的嵌入实际上是一个同构（见定理 14.19）。这证明了 Nathan Barker 在 2012年提出的一个猜想：群 Out(dV) 和 Out(V) ≀ Sym(d) 同构。

nV 的 $n \geq 2$ 群也曾用转导器描述过，但方式与此处不同（ [2] 中证明了它们嵌入有理群）。我们将在第13节进一步讨论这种替代性的转导器视角。

为了表示 dV_n，我们扩展了 Grigorchuk、Nekrashevich 和 Sushchanskii [16], 提出的转导器概念，然后确定了一类适用于表示 n维康托空间连续变换的转导器（见定理 11.16）。

10. Higher dimensional words

本节定义我们感兴趣的群，并介绍与多维词相关的基本概念（本部分将大量使用这些概念）。

定义 10.1（高维词，预备知识：3.20、4.14、4.28）。
如果 $n \geq 2$，那么我们定义 $X_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 与 $\mathfrak{C}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{N}}$。我们将 $\mathfrak{C}_n$ 的元素视为字母表 X_n 上的无限词（见定义 4.28），并利用 X_n 上的离散拓扑为它们赋予积拓扑。由定理 3.20 可知，所有这些都是康托空间。对于每个 $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ 和 $x \in X_n$，我们定义 $x_{d,i} \in (X_n^*)^d$ 为 $(i)x_{d,i} = x$，并定义 $(j)x_{d,i} = \varepsilon$，对所有 $j \neq i$ 均成立。类似地，我们将 $\varepsilon_d \in (X_n^*)^d$ 定义为值为 ε 的常值元组。

若 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，则我们以自然的方式（如例 4.15 所示），将 $\{0, 1, \ldots, n-1\}^* \cup \mathfrak{C}_n$ 上的前缀关系 $\leq$（见定义 4.28）扩展到集合 $(\{0, 1, \ldots, n-1\}^* \cup \mathfrak{C}_n)^d$。我们还将连接运算逐坐标扩展到定义域 $(X_n^*)^d \times (X_n^* \cup \mathfrak{C}_n)^d$。对于 $w \in (X_n^*)^d$，我们也将 λ_w 扩展到定义域 $(X_n^* \cup \mathfrak{C}_n)^d$，使其成为在左侧与 w 进行连接的运算（注意，此映射是单射）。

注意，若 $w \in (X_n^*)^d$，则

$$w\mathfrak{C}_n^d = (\mathfrak{C}_n^d)\lambda_w = \left\{ x \in \mathfrak{C}_n^d \;\middle|\; w \leq x \right\}.$$

容易验证这些集合既开又闭，且所有这类集合构成 $\mathfrak{C}_n^d$ 的一个基。这些基本开集称为锥。由于这些锥构成 $\mathfrak{C}_n^d$ 的一个开闭集基，且该空间是紧致的，因此 $\mathfrak{C}_n^d$ 的开闭子集恰好是锥的有限并。**定义 10.2**（前缀码与 dV_n，预备知识：5.1、10.1）。

假设 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$。我们称子集 $F \subseteq (X_n^*)^d$ 为<sty le id='6'>完全前缀码，如果 $\left\{ w\mathfrak{C}_n^d \;\middle|\; w \in F \right\}$ 是将 $\mathfrak{C}_n^d$ 划分为既开又闭集的划分。注意，由于 $\mathfrak{C}_n^d$ 是紧致的，所有完全前缀码都是有限的。

若 F_1，F_2 是 $\mathfrak{C}_n^d$的完全前缀码，且 $\phi\colon F_1 \to F_2$ 是一个双射，则定义<sty le id='8'>前缀交换映射 $f_\phi\colon \mathfrak{C}_n^d \to \mathfrak{C}_n^d$ 如下：

$$f_\phi := \bigcup_{w \in F_1} (\lambda_w^{-1} \circ \lambda_{(w)\phi}) \restriction_{w\mathfrak{C}_n^d}.$$

也就是说，若 $w \in F_1$ 与 $x \in \mathfrak{C}_n^d$，则 $(wx)f_\phi = ((w)\phi)(x)$。

容易验证，这类前缀交换映射总是同胚；此外，前缀交换映射的集合在复合与求逆运算下封闭。我们将 dV_n 定义为 Aut($\mathfrak{C}_n^d$)中由所有前缀交换映射组成的子群。若 $n = 2$ 或 $d = 1$，通常会在记号 dV_n中省略它们。

引理 10.3 (完全前缀码的大小，预备知识：10.2)。
假设 m、$d \geq 1$ 与 $n \geq 2$。当且仅当 $m \in (1 + (n-1)\mathbb{N})$ 时，存在一个基数为 m 的 $\mathfrak{C}_n^d$ 的完全前缀码。

证明。($\Leftarrow$)：我们对 k 使用归纳法，证明对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个大小为 $1+$的 $\mathfrak{C}_n^d$ 的完全前缀码 $(n-1)k$。若 $k=0$，则 $1+(n-1)k=1$，且我们可以选取完全前缀码$\{\varepsilon_d\}$。假设 $k>0$，并且该断言对更小的 k 成立。令 F 为一个满足$|F|=1+(n-1)(k-1)$ 的完全前缀码。选取 $w\in F$，并定义 $F':=(F\setminus\{w\})\cup\left\{wx_{d,0}\;\middle|\; x\in X_n\right\}$，则 F' 是一个满足 $|F'|=1+(n-1)k$ 的完全前缀码。

($\Rightarrow$)：设 F是 $\mathfrak{C}_n^d$的一个完全前缀码。设 $k:=\max\left\{|(w)\pi_i|\;\middle|\; w\in F,\ i\in\{0,1,\dots,d-1\}\right\}$。假设存在 $w\in F$与 $i\in\{0,1,\dots,d-1\}$，使得 $|(w)\pi_i|\neq k$。由此可得 $|(w)\pi_i|<k$。若接着定义 $F':=(F\setminus\{w\})\cup\left\{wx_{d,\,i}\;\middle|\; x\in X_n\right\}$，则 $|F'|-|F|=n-1$与

$$\max\left\{|(w)\pi_i|\;\middle|\; w\in F\right\}=\max\left\{|(w)\pi_i|\;\middle|\; w\in F'\right\}.$$

因此，不失一般性，我们可以假设对于所有 $w\in F$和 $i\in\{0,1,\dots,d-1\}$，都有 $|(w)\pi_i|=k$。由于 F是一个完全前缀码，可得 $F=(X_n^k)^d$。特别地，$|F|=n^{kd}\in 1+(n-1)\mathbb{N}$，如所需。□

备注 10.4（（令人头疼的前缀码，预备知识：10.3）。
在引理 10.3 的证明中，我们从平凡前缀码 $\{\varepsilon_d\}$出发，通过依次将一个元素替换为 n 个新元素，构造出具有所需大小的完全前缀码。可以证明，当 $d=1$时，所有完全前缀码都能以这种方式构造出来。不过，一般情况下并非如此。例如，考虑在 $n=2$ 且 $d=3$时的以下完全前缀码：

$$\{(\varepsilon,0,0),(0,1,\varepsilon),(1,\varepsilon,1),(0,0,1),(1,1,0)\}.$$

11. Generalizing the transducers of Grigorchuk、 Nekrashevich、 and Sushchanskii

本节将介绍本部分中我们将始终使用的转导器类型。Grigorchuk、Nekrashevich 和 Sushchanskii 在 [16],中定义的转导器（我们简称为 GNS）是一种机器，它会“读取”字母，然后在不同的“状态”之间“转换”，并相应地“写入”字母。这些机器随后可以逐个读取字母，从而读取字。

可以将其理解为：为字母表 X_n 中的每个字母指定一个状态集上的变换，并为每个状态指定一个要写出的字。然后，利用 X_n^* 的“自由性”性质，将这一指定扩展到其所有元素。我们的定义着眼于读取/写入半群的元素，但并不限于自由幺半群。

定义 11.1（换能器，预备知识：1.1、2.2、4.5、5.2）。如果满足以下条件，我们称 $T:=(Q_T,D_T,R_T,\boldsymbol{\pi}_T,\boldsymbol{\lambda}_T)$ 是一个换能器：

(1) Q_T 是一个集合（称为状态集合）。(2) D_T 是一个半群（称为定义域半群）。(3) R_T 是一个半群（称为值域半群）。(4) $\boldsymbol{\pi}_T$：$Q_T\times D_T\to Q_T$ 是 D_T 在离散集合 Q_T 上的作用（称为转移函数）。(5) $\boldsymbol{\lambda}_T$：$Q_T\times D_T\to R_T$是一个函数，具有如下性质：对于所有的 $q\in Q_T$和 $s,\ t\in D_T$，我们有

$$(q,st)\boldsymbol{\lambda}_T=(q,s)\boldsymbol{\lambda}_T((q,s)\boldsymbol{\pi}_T,t)\boldsymbol{\lambda}_T\ \text{(called the output function)}.$$

注记 11.2（转导器与同态，预备知识：11.1）。
定义一个定义域为 D、值域为 R 的单状态转导器，等价于定义一个从 D 到 R 的半群同态。从这个意义上说，转导器可以被视为半群同态的推广。

请注意，我们对转导器的定义只包含一个集合、两个半群以及它们之间的一些映射。因此，将转导器视为某个范畴的对象是自然而然且轻而易举的。这一观点将是本部分后续许多论证的关键。

De定义 11.3（转导器同态，预备知识：2.3、4.5、4.16、11.1 ）.
设 A, B 是转导器。若 ϕ 是从 A 到 B 的**转导器同态**（记作 $\phi: A \to B$），且 ϕ 是一个满足以下性质的三元组（ϕ_Q, ϕ_D, ϕ_R），则称 ϕ 为从 A 到 B 的转导器同态:

（1） $\phi_R : R_A \to R_B$ 是半群同态。（2） $\phi_D : D_A \to D_B$ 是半群同态。（3） $\phi_Q : Q_A \to Q_B$ 是函数，满足

$$\langle \boldsymbol{\pi}_A, \boldsymbol{\lambda}_A \rangle_{Q_A \times R_A} \langle \pi_0 \phi_Q, \pi_1 \phi_R \rangle_{Q_B \times R_B} = \langle \pi_0 \phi_Q, \pi_1 \phi_D \rangle_{Q_B \times D_B} \langle \boldsymbol{\pi}_B, \boldsymbol{\lambda}_B \rangle_{Q_B \times R_B}$$

（回忆定义 2.3）。或者等价地，对于所有 $q \in Q_A$ 和 $s \in D_A$，我们有

$$(q,s)\boldsymbol{\pi}_A \phi_Q = ((q)\phi_Q, (s)\phi_D)\boldsymbol{\pi}_B \quad \text{and} \quad (q,s)\boldsymbol{\lambda}_A \phi_R = ((q)\phi_Q, (s)\phi_D)\boldsymbol{\lambda}_B.$$

如果映射 ϕ_D, ϕ_R 都是恒等映射，那么我们称 ϕ 为强的。我们逐分量复合转导器同态。容易验证，转导器与转导器同态构成一个范畴。此外，转导器与强转导器同态构成该范畴的一个子范畴。

如果转导器同态 ϕ 中的每个映射 ϕ_Q, ϕ_D, ϕ_R 都是满射（因此每个都是定义4.16中所说的商映射），我们就称其为**商映射**。如果 $\phi : A \to B$ 是转导器与转导器同态范畴中的一个同构，或者等价地，映射 ϕ_Q, ϕ_D, ϕ_R 各自都是双射，我们就称 $\phi : A \to B$ 为**转导器同构**。

如果存在转导器同构 $\phi : A \to B$，我们就称两个转导器 A, B **同构**（记作 $A \cong B$）。类似地，如果存在强转导器同态 $\phi : A \to B$，我们就称 A, B **强同构**（记作 $A \cong_S B$）。

下面的“最小转导器”概念对应于 GNS 中“合并等价状态”的概念。GNS 中“约简”的概念就是定理 11.19 中讨论的概念。
定义 11.4（最小换能器，预备知识：1.10、11.3）。
若 T 是一个转导器，且对于所有 $r \in R_T$, λ_r 都是单射，则定义其**最小转导器** M_T 为 $(Q_T/\sim_{M_T}, D_T, R_T, \boldsymbol{\pi}_{M_T}, \boldsymbol{\lambda}_{M_T})$，其中 $\sim_{M_T}$, π_{M_T} 和 λ_{M_T} 定义如下:

(1) $\sim_{M_T}$ 是等价关系

$$\left\{ (p,q) \in Q_T^2 \;\middle|\; (p,s)\boldsymbol{\lambda}_T = (q,s)\boldsymbol{\lambda}_T \text{ for all } s \in D_T \right\};$$

(2) 若 $q \in Q_T$, $s \in D_T$，则 $([q]_{\sim_{M_T}}, s)\boldsymbol{\pi}_{M_T} = [(q, s)\boldsymbol{\pi}_T]_{\sim_{M_T}}$;
(3) 若 $q \in Q_T$, $s \in D_T$，则 $([q]_{\sim_{M_T}}, s)\boldsymbol{\lambda}_{M_T} = (q, s)\boldsymbol{\lambda}_T$。

此外，我们定义强商映射 q_T: $T \to M_T$，由 $(p)\, q_T Q = [p]_{\sim_{M_T}}$ 给出。我们将在引理 11.5 中证明这些定义的合理性。

引理 11.5（最小换能器是有效的，预备知识：11.4）。
定义 *11.4* 中定义的对象定义良好，并具有所述性质。此外，如果 A 是转导器，λ_r 对所有 $r \in R_A$ 都是单射，且 $\phi\colon A \to B$ 是强商映射，那么存在一个强商映射 $\psi : B \to M_A$，使得 $q_A = \phi\psi$。

证明。设 T 如定义 11.4 所述。我们首先需要证明 $\boldsymbol{\pi}_{M_T}$ 定义良好。设 p、$q \in Q_T$ 和 $s \in D_T$ 满足 $p \sim_{M_T} q$。我们需要证明 $(p, s)\boldsymbol{\pi}_T \sim_{M_T} (q, s)\boldsymbol{\pi}_T$ 且 $(p, s)\boldsymbol{\lambda}_T = (q, s)\boldsymbol{\lambda}_T$。根据 $\sim_{M_T}$ 的定义，等式 $(p, s)\boldsymbol{\lambda}_T = (q, s)\boldsymbol{\lambda}_T$ 显然成立。为证明 $(p, s)\boldsymbol{\pi}_T \sim_{M_T} (q, s)\boldsymbol{\pi}_T$，只需证明：若 $t \in D_T$ 任意，则 $((p, s)\boldsymbol{\pi}_T, t)\boldsymbol{\lambda}_T = ((q, s)\boldsymbol{\pi}_T, t)\boldsymbol{\lambda}_T$。这由下式可得

$$\begin{aligned}
((p,s)\boldsymbol{\pi}_T, t)\boldsymbol{\lambda}_T &= ((((p,s)\boldsymbol{\pi}_T, t)\boldsymbol{\lambda}_T)\lambda_{(p,s)\boldsymbol{\lambda}_T})\lambda^{-1}_{(p,s)\boldsymbol{\lambda}_T} \\
&= ((p,s)\boldsymbol{\lambda}_T((p,s)\boldsymbol{\pi}_T, t)\boldsymbol{\lambda}_T)\lambda^{-1}_{(p,s)\boldsymbol{\lambda}_T} \\
&= ((p, st)\boldsymbol{\lambda}_T)\lambda^{-1}_{(p,s)\boldsymbol{\lambda}_T} \\
&= ((q, st)\boldsymbol{\lambda}_T)\lambda^{-1}_{(q,s)\boldsymbol{\lambda}_T} \\
&= ((q,s)\boldsymbol{\lambda}_T((q,s)\boldsymbol{\pi}_T, t)\boldsymbol{\lambda}_T)\lambda^{-1}_{(q,s)\boldsymbol{\lambda}_T} \\
&= ((((q,s)\boldsymbol{\pi}_T, t)\boldsymbol{\lambda}_T)\lambda_{(q,s)\boldsymbol{\lambda}_T})\lambda^{-1}_{(q,s)\boldsymbol{\lambda}_T} \\
&= ((q,s)\boldsymbol{\pi}_T, t)\boldsymbol{\lambda}_T.
\end{aligned}$$

接下来，我们需要证明 q_T 是一个商映射。根据定义，映射 q_{TD}，q_{TR}，q_{TQ} 都是满射，因此我们只需证明 q_T 是一个变换器同态。如果 $q \in Q_T$ 与 $s \in D_T$，那么根据定义，我们有

$$(q,s)\boldsymbol{\pi}_T q_{TQ} = [(q,s)\boldsymbol{\pi}_T]_{\sim_{M_T}} = ([q]_{\sim_{M_T}}, s)\boldsymbol{\pi}_{M_T} = ((q)q_{TQ}, (s)q_{TD})\boldsymbol{\pi}_{M_T},$$

$$(q,s)\boldsymbol{\lambda}_T q_{AR} = (q,s)\boldsymbol{\lambda}_T = ([q]_{\sim_{M_T}}, s)\boldsymbol{\lambda}_{M_T} = ((q)q_{AQ}, (s)q_{AD})\boldsymbol{\lambda}_{M_T}$$

如所需。我们定义 $\psi\colon B \to M_A$，令 ψ_D，ψ_R 为恒等映射，并按如下方式定义 ψ_Q：

$$((q)\phi_Q)\psi_Q := (q)q_{AQ}.$$

由于 q_{AQ} 是满射，只需证明 ψ 是一个定义良好的变换器同态。注意，映射 ϕ_D，ϕ_R，ψ_D，ψ_R，q_{AD} 与 q_{AR} 全都是恒等映射，因此在此证明中可以忽略它们。我们首先证明 ψ 定义良好。假设 q_0，$q_1 \in Q_A$ 满足 $(q_0)\phi_Q = (q_1)\phi_Q$。我们需要证明 $q_0 \sim_{M_T} q_1$。任取 $s \in D_A$，有

$$(q_0, s)\boldsymbol{\lambda}_A = ((q_0)\phi_Q, s)\boldsymbol{\lambda}_B = ((q_1)\phi_Q, s)\boldsymbol{\lambda}_B = (q_1, s)\boldsymbol{\lambda}_A.$$

因此确实有 $q_0 \sim_{M_T} q_1$。接下来只需证明 ψ 是一个同态。利用 ϕ_Q 是满射这一事实，任取 $(p,\ s) = ((q)\phi_Q,\ s) \in Q_B \times D_B$。我们需要证明 ψ 满足成为变换器同态的第三个条件。我们有

$$\begin{aligned}
(p,s)\boldsymbol{\pi}_B\psi_Q &= ((q)\phi_Q, s)\boldsymbol{\pi}_B\psi_Q && \text{by the definition of } p \\
&= (q,s)\boldsymbol{\pi}_A\phi_Q\psi_Q && \text{because } \phi \text{ is a homomorphism} \\
&= (((q)\phi_Q)\psi_Q, s)\boldsymbol{\pi}_{M_A} && \text{because } q_A = \phi\psi \text{ is a homomorphism} \\
&= ((p)\psi_Q, s)\boldsymbol{\pi}_{M_A} && \text{by the definition of } p,
\end{aligned}$$

同理，$(p,\ s)\boldsymbol{\lambda}_B = ((p)\psi_Q,\ s)\boldsymbol{\lambda}_{M_A}$，如所需。 □

定义 11.6（子转导器，预备知识：1.3、11.1）。
若 $A,\ B$是转导器，$Q_A \subseteq Q_B,\ D_A \subseteq D_B$、$R_A \subseteq R_B$、$\boldsymbol{\pi}_A \subseteq \boldsymbol{\pi}_B$与 $\boldsymbol{\lambda}_A \subseteq \boldsymbol{\lambda}_B$，则我们称 A 为 的子转导器。为简便起见，有时我们会将具有完整定义域和值域的转导器的子转导器与其状态集等同起来。

以下定义中的转导器与映射将是我们的主要关注对象（由于定理 11.16）。

定义 11.7（$(d,\ n)$-转导器，预备知识：10.1、11.1）。
若 $d,\ k \in \mathbb{N}$且 $n,\ m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$，则我们将 $(d,\ n,\ k,\ m)$-转导器 定义为一个转导器 T，其定义域为 $(X_n^*)^d$，值域为 $(X_m^*)^k$，并且对所有 $q \in Q_T$，都有

$$(q,\varepsilon_d)\boldsymbol{\pi}_T = q, \quad \text{and} \quad (q,\varepsilon_d)\boldsymbol{\lambda}_T = \varepsilon_k.$$

我们主要关注 $d = k$ 与 $n = m$ 的情形。因此，为简化记号，我们将 (d,n)-转导器定义为 (d,n,d,n)-转导器。

定义 11.8（读取无限词，预备知识：11.7）。
设 $d,k \in \mathbb{N}$, $n,m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, T 是一个 (d,n,k,m)-转导器，且 $q \in Q_T$。如果 $w \in ((X_n)^{\mathbb{N}})^d$ 且 $j \in \mathbb{N}$，那么我们将 $(X_n^j)^d$ 中唯一的、作为 w 前缀的元素记为 $w\restriction_j$。注意，如果 $i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ 且 $j_0 \leq j_1$，那么 $(q,w\restriction_{j_0})\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i \subseteq (q,w\restriction_{j_1})\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i$。

因此，我们可以将 $f_{T,q}\colon (X_n^{\mathbb{N}})^d \to (X_m^{\mathbb{N}} \cup X_m^*)^k$ 定义为满足以下条件的映射

$$(w)f_{T,q}\pi_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (q,w\restriction_j)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i$$

对所有 $i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ 都成立。特别地，$(w)f_{T,q}$ 是 $(X_m^{\mathbb{N}} \cup X_m^*)^k$ 中大于 $(q,w')\boldsymbol{\lambda}_T$ 的最小元素，其中对所有满足 $w' \leq w$ 的 $w' \in (X_n^*)^d$ 都成立。

备注 11.9（诱导映射保持不变，预备知识：11.4、11.8）。
设 $d,k \in \mathbb{N}$ 和 $n,m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$。若 A 是一个 (d,n,k,m)-转导器，$q \in Q_A$ 且 $\phi\colon A \to B$ 是一个强转导器同态，则映射 $s \to (q,s)\boldsymbol{\lambda}_A$ 和 $s \to ((q)\phi,s)\boldsymbol{\lambda}_B$ 相等。因此$f_{A,q} = f_{B,(q)\phi_{Q}}$。特别地，商映射 q_A 也如此。

容易验证，以下定义中的“退化”概念与 GNS 中的“退化”概念在两者均适用时等价。

定义 11.10（退化转导器，预备知识：10.1、11.8）。
设 $d,k \in \mathbb{N}$与 $n,m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$。若存在$q \in Q_T$, $x \in \mathfrak{C}_n^d$ 使得 $(x)f_{T,q} \notin \mathfrak{C}_m^k$，则称 (d,n,k,m)-转导器 T 为退化的。

引理 11.11（转导器的连续性，预备知识：10.1、11.10）。
设 $d,b \in \mathbb{N}$与 $n,l \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$。若 T是一个非退化(d,n,b,l)-转导器，且 $q \in Q_T$，则对所有$m \in \mathbb{N}$，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $i \in \{0,1,\ldots,b-1\}$ 和 $w \in (X_n^k)^d$，都有 $|(q,w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i| \geq m$。

此外，映射 $f_{T,\ q}\colon \mathfrak{C}_n^d \to \mathfrak{C}_l^b$ 是连续的。

证明。设 T是一个非退化的 $(d,\ n,\ b,\ l)$-转导器，且 $q \in Q_T$是任意的。为证明第一个断言，反设存在 $m \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $w \in (X_n^k)^d$ 与$i \in \{0,1,\ldots,b-1\}$，满足 $|(q,\ w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i| < m$。

U利用这一假设，我们通过归纳法定义 $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$，使其属于 $(X_n^*)^d$，如下所示：

(1) 定义 $w_0 := \varepsilon_d$。

(2) 假设 w_j 已定义，选择 $w_{j+1} \in (X_n^{j+1})^d$，使得

(a) $w_j \le w_{j+1}$，(b) 存在 $i \in \{0,1,\dots,b-1\}$ 使得 $|(q,\ w_{j+1})\boldsymbol{\lambda}_T \pi_i| \le m$，且 (c) 对所有 $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,\dots,j\}$，存在 $w_{j+1,\ k} \in (X_n^k)^d$ 使得 $w_{j+1} \le w_{j+1,\ k}$，并且存在 $i \in \{0,1,\dots,b-1\}$ 使得 $|(q,\ w_{j+1,\ k})\boldsymbol{\lambda}_T \pi_i| \le m$。

由于 b 是有限的，因此必定存在某个 $i \in \{0,1,\dots,d-1\}$，使得对于无限多个（因而对于所有）$j \in \mathbb{N}$，都有 $|(q,\ w_j)\boldsymbol{\lambda}_T \pi_i| \le m$。因此，如果我们定义 $w \in (X_n^{\mathbb{N}})^d$ 为满足对所有 $i \in \{0,1,\dots,b-1\}$ 都有

$$(w)\pi_i = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (w_j)\pi_i,$$

于是 $|(w)f_{T,q}\pi_i| \le m$。这与假设 T 是非退化的相矛盾。

$(X_n^{\mathbb{N}})^d$ 上的拓扑是积拓扑。因此，只需证明：若 $x \in (X_n^{\mathbb{N}})^d, i \in \{0,1,\dots,n-1\}$ 与 $j \in \mathbb{N}$，则存在 U 的一个邻域，记为 $(X_n^{\mathbb{N}})^d$，使得对所有 $y \in U$，都有 $(j)((i)((y)f_{T,q})) = (j)((i)((x)f_{T,q}))$。根据引理的第一部分，我们可以选取 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $a \in \{0,1,\dots,b-1\}$ 和 $w \in (X_n^k)^d$，都有 $|(q,w)\boldsymbol{\lambda}_T \pi_a| \ge j+1$。因此，定义

$$U := \left\{ y \in (X_n^{\mathbb{N}})^d \;\middle|\; ((y)\pi_a) \restriction_j = ((x)\pi_a) \restriction_j \text{ for all } a \in \{0,1,\dots,d-1\} \right\}$$

便得到 x所需的邻域。 □

我们给出两种不同的转导器相乘方式。第一种（定义 11.12）是对 GNS 所给定义的扩展，第二种（定义 11.14）是一个范畴积对象。

定义 11.12（转导器复合，预备知识：11.1）。

若 A 和 B 是转导器，且 A 的值域包含于 B的定义域中，则我们将它们的复合 定义为

$$AB := (Q_{AB}, D_{AB}, R_{AB}, \boldsymbol{\pi}_{AB}, \boldsymbol{\lambda}_{AB}).$$

其中

(1) $Q_{AB} := Q_A \times Q_B$, $D_{AB} := D_A$，以及 R_{AB}：

$= R_B$。(2) $((a,\ b)\ s)\boldsymbol{\pi}_{AB} = ((a,\ s)\boldsymbol{\pi}_A,\ (b,\ (a,\ s)\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\pi}_B)$。(3) $((a,\ b)\ s)\boldsymbol{\lambda}_{A,\ B} = (b,\ (a,\ s)\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\lambda}_B$。

引理 11.13（复合符合预期，预备知识：11.8、11.11、11.12）。若 A 是一个非退化的（a, b, c, d）-转导器，且 B 是一个非退化的（c, d, e, f）转导器，并且 $(p, q) \in Q_A \times Q_B$，那么 $f_{A,\ p} f_{B,\ q} = f_{AB,\ (p,q)}$（特别地，$AB$ 是非退化的）。

证明。任取 $w \in (X_b^{\mathbb{N}})^a$。根据定义 11.8，只需证明 $(w)f_{A,p}f_{B,q}$ 是 $(X_f^{\mathbb{N}} \cup X_n^*)^e$ 中大于所有满足 $w' \le w$ 的 $w' \in (X_b^*)^a$ 的 $((p,q)\ w')\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ 的最小元素。

任取满足 $w' \le w$ 的 $w' \in (X_b^*)^a$。我们有 $(p, w')\boldsymbol{\lambda}_A \le (w)f_{A,p}$，因此

$$((p,q),w')\boldsymbol{\lambda}_{AB} = (q,(p,w')\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\lambda}_B \le ((w)f_{A,p})f_{B,q} = (w)f_{A,p}f_{B,q}.$$

现在我们有 $(w)f_{A,\ p}f_{B,\ q} \ge (w)f_{AB,\ (p,q)}$。要证明等式，只需证明 $(w)f_{AB,\ (p,q)} \in (X_f^{\mathbb{N}})^e$。令 $m \in \mathbb{N}$ 任意，我们证明对于所有 $i \in \{0,1,\dots,e-1\}$ 都有 $|(w)f_{AB,\ (p,q)}\pi_i| \ge m$。根据引理 11.11，令 $k_A,\ k_B \in \mathbb{N}$，使得如果 $w_A \in (X_b^{k_A})^a,\ w_B \in (X_d^{k_B})^c$，那么对于 i 的所有有效取值，我们都有

$$|(p, w_A)\boldsymbol{\lambda}_A \pi_i| \ge k_B, \quad \text{and} \quad |(p, w_B)\boldsymbol{\lambda}_B \pi_i| \ge m.$$

由此可得，如果 $w' \in (X_b^{k_A})^a$、 $w' \le w$ 与 $i \in \{0,1,\dots,e-1\}$，那么

$$|(w)f_{AB,(p,q)}\pi_i| \ge |((p,q),w')\boldsymbol{\lambda}_{AB}\pi_i| = |(q,(p,w')\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\lambda}_B\pi_i| \ge m$$

正如所要求的。 □

定义 11.14（转导器积，预备知识：2.3、4.14、11.3、11.15）。如果 $(A)_{i\in I}$ 是转导器，那么我们将它们的积 $\prod_{i\in I} A_i$ 定义为转导器 P where

$$Q_P := \prod_{i\in I} Q_{A_i}, \quad D_P := \prod_{i\in I} D_{A_i}, \quad R_P := \prod_{i\in I} R_{A_i},$$

并且对于所有 $(p_i)_{i\in I} \in Q_P$ 和 $(s_i)_{i\in I} \in D_P$，我们有

$$((p_i)_{i\in I},(s_i)_{i\in I})\boldsymbol{\pi}_P = ((p_i,s_i)\boldsymbol{\pi}_{A_i})_{i\in I},$$

$$((p_i)_{i\in I},(s_i)_{i\in I})\boldsymbol{\lambda}_P = ((p_i,s_i)\boldsymbol{\lambda}_{A_i})_{i\in I}.$$

我们将在引理 11.15 中证明，$(P,\ ((\pi_i,\ \pi_i,\ \pi_i))_{i\in I})$ 是转导器与转导器同态范畴中的一个积（回忆定义 2.3）。

引理 11.15（转导器积是积，预备知识：2.3、4.14、11.3、11.15）。如果（A）$_{i\in I}$ 是转导器，那么（$\prod_{i\in I} A_i$，（（π_i，π_i，π_i））$_{i\in I}$）是转导器与转导器同态范畴中的一个积。

证明。令 $P{:=}\prod_{i\in I} A_i$。注意，根据 P 的定义，对于所有 $i \in I$，三元组 $(\pi_i,\ \pi_i,\ \pi_i)$ 是一个从 P 到 A_i的转导器同态。

令 B 为一个转导器，并且对每个 $i \in I$，令 ϕ_i 为一个从 B 到 A_i的转导器同态。我们必须证明，存在唯一的转导器同态 $\psi : B \to P$，使得对所有 $i \in I$，转导器同态 ψ 与转导器同态 $(\pi_i,\ \pi_i,\ \pi_i)$ 的复合为 ϕ_i。

由于 $(Q_P,\ (\pi_i)_{i\in I})$、$(D_P,\ (\pi_i)_{i\in I})$ 和 $(R_P,\ (\pi_i)_{i\in I})$ 是集合与函数范畴中的积，因此存在唯一的函数 $\psi_Q\colon Q_B \to Q_P$、 $\psi_D\colon D_B \to D_P$ 和 $\psi_R\colon R_B \to R_P$，使得

$$\psi_Q \circ \pi_i = \phi_{iQ}, \quad \psi_D \circ \pi_i = \phi_{iD}, \text{ and } \psi_R \circ \pi_i = \phi_{iR}$$

对所有 $i \in I$。由此可知， $\psi{:=}(\psi_Q,\psi_D,\psi_R)$ 是唯一一个三元函数组，其坐标逐项复合 (π_i,π_i,π_i) 后，对所有 $i \in I$ 都得到 ϕ_i。因此，只需证明 ψ 是从 B 到 P 的变换器同态。

由于 $(D_P,(\pi_i)_{i\in I})$ 和 $(R_P,(\pi_i)_{i\in I})$ 也是半群范畴中的积，且态射为同态，因此映射 ψ_D 和 ψ_R 是半群同态。对于所有 $q \in Q_B$ 和 $s \in D_B$，我们有

$$\begin{aligned}(q,s)\boldsymbol{\pi}_B\psi_Q &= ((q,s)\boldsymbol{\pi}_B\psi_{iQ})_{i\in I} = (((q)\psi_{iQ},(s)\psi_{iD})\boldsymbol{\pi}_{A_i})_{i\in I}\\ &= (((q)\psi_{iQ})_{i\in I},((s)\psi_{iD})_{i\in I})\boldsymbol{\pi}_P = ((q)\psi_Q,(s)\psi_D)\boldsymbol{\pi}_P\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}(q,s)\boldsymbol{\lambda}_B\psi_R &= ((q,s)\boldsymbol{\lambda}_B\psi_{iR})_{i\in I} = (((q)\psi_{iQ},(s)\psi_{iD})\boldsymbol{\lambda}_{A_i})_{i\in I}\\ &= (((q)\psi_{iQ})_{i\in I},((s)\psi_{iD})_{i\in I})\boldsymbol{\lambda}_P = ((q)\psi_Q,(s)\psi_D)\boldsymbol{\lambda}_P\end{aligned}$$

由此可知， ψ 是所需的变换器同态。 □

定理 11.16（可转导的 =连续，预备知识：2.3、10.1、11.11）。
函数 $h\colon \mathfrak{C}_n^d \to \mathfrak{C}_n^d$ 连续，当且仅当存在一个非退化的 (d,n)-转导器 T 与 $q \in Q_T$，使得 $h = f_{T,q}$。

证明。($\Leftarrow$)：这直接由引理 11.11 得出。

($\Rightarrow$)：设 $h\colon \mathfrak{C}_n^d \to \mathfrak{C}_n^d$ 是一个连续映射。我们定义一个 (d,n)-转导器 T，然后证明 T 定义良好、非退化，并满足 $f_{T,\varepsilon_d} = h$。

(1) 定义 $Q_T := (X_n^*)^d$, $D_T := (X_n^*)^d$, $R_T := (X_n^*)^d$。(2) 定义 $\boldsymbol{\pi}_T\colon Q_T \times D_T \to Q_T$，使得 $(q,w)\boldsymbol{\pi}_T := qw$。(3) 对每个 $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$，如下定义 $\boldsymbol{\lambda}_{T,i}\colon Q_T \times D_T \to X_n^*$：(a) 若 $q = w = \varepsilon_d$，则 $(q,w)\boldsymbol{\lambda}_{T,i} = \varepsilon$；(b) 若 $q = \varepsilon_d$ 且 $w \neq \varepsilon_d$ 且 $|(w\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i| > 1$，则将 $(q,w)\boldsymbol{\lambda}_{T,i}$ 定义为 $(w\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i$ 中所有字的最长公共前缀；(c) 若 $q = \varepsilon_d$, $w \neq \varepsilon_d$，对于某个 $x \in X_n^{\mathbb{N}}$，有 $(w\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i = \{x\}$，且对所有 $w' < w$，$(q,w')\boldsymbol{\lambda}_{T_i}$ 已有定义，则将 $(q,w)\boldsymbol{\lambda}_{T_i}$ 定义为 x 的前缀，其长度为

$$\max\left(\{|(w)\pi_0|, |(w)\pi_1|, \dots, |(w)\pi_{d-1}|\} \cup \left\{ |(q,w')\boldsymbol{\lambda}_{T,i}| \;\middle|\; w' < w \right\}\right);$$

(d) 若 $q \neq \varepsilon_d$，则规定 $(q,\ w)\boldsymbol{\lambda}_{T,\ i}$ 为 $((\varepsilon_d,\ qw)\boldsymbol{\lambda}_{T,\ i})\lambda^{-1}{}_{(\varepsilon_d,\ q)\boldsymbol{\lambda}_{T,\ i}}$。

接着，我们通过 $\boldsymbol{\lambda}_T = \langle \boldsymbol{\lambda}_{T,\ 0},\ \boldsymbol{\lambda}_{T,\ 1},\ \dots,\ \boldsymbol{\lambda}_{T,\ d-1}\rangle_{(X_n^*)^d}$ 来定义 $\boldsymbol{\lambda}_T\colon Q_T \times D_T \to R_T$（定义 2.3）。为了证明 T 是定义良好的，我们首先需要证明：若 $i \in \{0,1,\dots,d-1\}$、q，$w \in D_T$ 与 $q \neq \varepsilon_d$，则 $(\varepsilon_d,\ q)\boldsymbol{\lambda}_{T,\ i}$ 是 $(\varepsilon_d,\ qw)\boldsymbol{\lambda}_{T,\ i}$ 的一个前缀。需要考虑两种情况：

(1) 若 $|(qw\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i| \geq 2$，则由于 $(qw\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i \subseteq (q\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i$，可知 $(\varepsilon_d,\ q)\boldsymbol{\lambda}_{T,\ i}$ 是 $(q\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i$ 中所有字的最长公共前缀。因此 $(\varepsilon_d,\ q)\boldsymbol{\lambda}_{T,\ i}$ 是 $(qw\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i$ 中所有字的最长公共前缀，所以它是最长公共前缀 $(\varepsilon_d,\ qw)\boldsymbol{\lambda}_{T,\ i}$ 的一个前缀。

(2) 如果 $(qw\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i = \{x\}$ 对某个 $x \in X_n^{\mathbb{N}}$ 成立，那么（通过 $3b$ 或 $3c$）$(\varepsilon_d, q)\boldsymbol{\lambda}_{T,i}$ 是 x 的有限前缀。此外，根据定义，$(\varepsilon_d, qw)\boldsymbol{\lambda}_{T,i}$ 也是 x 的前缀，且 $|(\varepsilon_d, qw)\boldsymbol{\lambda}_{T,i}| \geq |(\varepsilon_d, q)\boldsymbol{\lambda}_{T,i}|$。因此，$(\varepsilon_d, qw)\boldsymbol{\lambda}_{T,i} \geq (\varepsilon_d, q)\boldsymbol{\lambda}_{T,i}$。

接下来我们需要证明 T 是一个转导器。如果 $q \in Q_T$ 和 s，$t \in D_T$ 是任意的，那么 $(q,\ st)\boldsymbol{\pi}_T = qst = ((q,\ s)\boldsymbol{\pi}_T,\ t)\boldsymbol{\pi}_T$，因此 $\boldsymbol{\pi}_T$ 是 D_T 在 Q_T 上的作用。此外，对所有 $i \in \{0,1,\dots,d-1\}$，我们有

$$\begin{aligned}
((q,s)\boldsymbol{\lambda}_T(qs,t)\boldsymbol{\lambda}_T)\pi_i &= ((\varepsilon_d, qs)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i)\lambda^{-1}_{(\varepsilon_d,q)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i}((\varepsilon_d, qst)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i)\lambda^{-1}_{(\varepsilon_d,qs)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i} \\
&= (((\varepsilon_d, qst)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i)\lambda^{-1}_{(\varepsilon_d,qs)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i})\lambda_{(\varepsilon_d,qs)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i}\lambda^{-1}_{(\varepsilon_d,q)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i} \\
&= ((\varepsilon_d, qst)\boldsymbol{\lambda}_{T,i})\lambda^{-1}_{(\varepsilon_d,q)\boldsymbol{\lambda}_{T,i}} \\
&= (q, st)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i.
\end{aligned}$$

接下来我们证明 $h = f_{T,\ \varepsilon_d}$。令 $i \in \{0,1,\dots,d-1\}$ 任意。根据定义，若 $w' \in (X_n^*)^d$ 与 $w' \leq w \in (X_n^{\mathbb{N}})^d$，则字 $(\varepsilon_d,\ w')\boldsymbol{\lambda}_{T,\ i}$ 是 $(w)h\pi_i$ 的前缀。因此，我们只需证明：对于所有 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $k_m \in \mathbb{N}$，使得若 $w' \in (X_n^k)^d$，则 $|(\varepsilon_d,\ w')\boldsymbol{\lambda}_{T,\ i}| \geq m$。

对于每个 $v \in (X_n^m)^d$，根据假设，$(v\mathfrak{C}_n^d)h^{-1}$ 是既开又闭的。因此，存在某个 $k_v \in \mathbb{N}$ 与 $S_v \subseteq (X_n^{k_v})^d$，使得

$$(v\mathfrak{C}_n^d)h^{-1} = \bigcup_{s \in S_v} s\mathfrak{C}_n^d.$$

令 $k_m := \max\left(\left\{k_v \;\middle|\; v \in (X_n^m)^d\right\} \cup \{m+1\}\right)$。因此，如果 $w' \in (X_n^{k_m})^d$，那么集合 $((w')\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i$ 中所有元素的最长公共前缀长度至少为 m。于是 $|(\varepsilon_d, w')\boldsymbol{\lambda}_{T,i}| \geq m$。由此确实可得 $h = f_{T,\varepsilon_d}$。

最后，我们证明 T 非退化。令 $q \in Q_T$ 与 $w \in (X_n^{\mathbb{N}})^d$ 任意。反设 $(w)f_{T,\ q} \notin (X_n^{\mathbb{N}})^d$。由此可得

$$(qw)h = (w)f_{T,\varepsilon_d} = (\varepsilon_d, q)\lambda_T(w)f_{T,q} \notin (X_n^{\mathbb{N}})^d,$$

这就产生了矛盾。 □

我们需要用具体的转导器来表示康托空间的同胚。我们在前一定理的证明中构造了这样的转导器，但这些转导器的定义相当繁杂。对于同胚，定义可以稍微简化一些，下面就来说明。

定义 11.17（转导同胚，预备知识：5.1、10.1、11.4、11.18）。若 $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)$，则定义 T_h 为满足以下条件的（d，n）转导器：

（1） $Q_{T_h} := (X_n^*)^d$，$D_{T_h} := (X_n^*)^d$，以及 $R_{T_h} := (X_n^*)^d$。（2）$(s,\ t)\boldsymbol{\pi}_{T_h} = st$。（3）$((s,\ t)\boldsymbol{\lambda}_{T_h})\pi_i$ 是 $(b)\lambda_a^{-1}$，其中 b 是集合 $((st\mathfrak{C}_n^d)h)\boldsymbol{\pi}_i$ 中各字的最长公共前缀，而 a 是集合 $((s\mathfrak{C}_n^d)h)\boldsymbol{\pi}_i$ 中各字的最长公共前缀。

此外，我们定义 $M_h := M_{T_h}$ 与 $e_h := (\varepsilon_d)^{q_{T_h}Q}$。由引理 11.18 可知 $f_{M_h,\ e_h} = h$。因此，我们称 M_h 为的最小转导器。

引理 11.18（最小转导器是良好的，预备知识：11.9、11.16、11.17）。

如果 $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)$，那么 T_h 是一个定义良好且非退化的（d、n）转导器，并且 $f_{M_h,\ e_h} = h$。此外，如果 $q \in Q_{M_h}$，那么 $f_{M_h,\ q}$ 是从 $\mathfrak{C}_n^d$ 到 $\mathfrak{C}_n^d$ 的一个开闭子集的同胚。

证明。注意，当 $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)$ 是一个同胚且 $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ 时，$(\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i$ 中各个字的最长公共前缀是 ε。此外，由于 h 将开集映射为开集，如果 $w \in (X_n^*)^d$，那么 $(w\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i$ 是 $\mathfrak{C}_n$ 的一个开子集。特别地，$|(w\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i| \neq 1$。由此可知，$T_h$ 与定理 11.16 的证明中定义的转导器 T 相同。因此 $f_{T_h,\ \varepsilon_d} = h$。根据备注 11.9，可得 $f_{T_h,\ \varepsilon_d} = f_{M_h,\ e_h}$，因此特别有 $f_{M_h,\ e_h} = h$。

任取 $q \in Q_{M_h}$，并令 $w' \in Q_{T_h}$ 满足 $(w')^{q_{T_h}Q} = q$。接下来证明 $f_{M_h,\ q}$ 是单射。假设 w_0，$w_1 \in \mathfrak{C}_n^d$，且 $(w_0)f_{M_h,\ q} = (w_1)f_{M_h,\ q}$。我们有

$$(w'w_0)h = (e_h, w')\boldsymbol{\lambda}_{M_h}(w_0)f_{M_h,q} = (e_h, w')\boldsymbol{\lambda}_{M_h}(w_1)f_{M_h,q} = (w'w_1)h.$$

因此 $w'w_0 = w'w_1$，从而 $w_0 = w_1$，如所需。

由于 $w'\mathfrak{C}_n^d$ 是既开又闭集，集合 $(w'\mathfrak{C}_n^d)h$ 也是既开又闭集。此外，若 $x \in \mathfrak{C}_n^d$ 任意，则

$$(w'x)h = (e_h, w')\boldsymbol{\lambda}_{M_h}(x)f_{M_h,q}.$$

因此，由于 h 是同胚，$f_{M_h,\ q}$ 是到其像上的同胚。此外，$(w'\mathfrak{C}_n^d)h$ 中的每个元素都大于 $(e_h,\ w')\boldsymbol{\lambda}_{M_h}$。因此存在某个有限 $S \subseteq (X_n^*)^d$，使得

$$(w'\mathfrak{C}_n^d)h = \bigcup_{s\in S}(e_h, w')\boldsymbol{\lambda}_{M_h}s\mathfrak{C}_n^d.$$

由此可知 $(\mathfrak{C}_n^d)f_{M_h,\ q} = \bigcup_{s\in S} s\mathfrak{C}_n^d$ 因此它既开又闭，符合要求。

□

下述定理表明，GNS 中约化换能器（见 [16]的命题 2.8）表示同胚的概念在我们的语境中仍然适用。

定理 11.19（最小转导器的唯一性，预备知识：11.3、11.4、11.5、11.17、11.18）。

Let $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$。设 $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)$，且 (T, q) 是一对满足条件的有序对 *t:*

(1) T 是一个(d, n)转导器， $q \in Q_T$ 与 $f_{T,q} = h$；(2) 若 p_0、$p_1 \in Q_T$ 与 $p_0 \sim_{M_T} p_1$，则 $p_0 = p_1$；(3) $Q_T = (q, D_T)\boldsymbol{\pi}_T$；(4) 若 $p \in Q_T$、 $w \in R_T$ 与 $(\mathfrak{C}_n^d) f_{T,p} \subseteq w\mathfrak{C}_n^d$，则 $w = \varepsilon_d$ （我们称此条件为完全响应）。

那么存在唯一的强换能器同构 ϕ: $T \to M_h$ ，满足 $(q)\phi_Q = e_h$。此外，若 $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)$ 任意取定，则有序对 (M_h, e_h) 满足上述所有条件。

证明。设 T 是一个 (d, n)-转导器，且 $q \in Q_T$ 满足上述条件。若ϕ: $T \to M_h$ 符合要求，则必有:

(1) ϕ_D, ϕ_R 都是 $(X_n^*)^d$上的恒等函数;

(2) if $w \in D_T$ then $((q, w)\boldsymbol{\pi}_T)\phi_Q = ((q)\phi_Q, w)\boldsymbol{\pi}_{M_h} = (e_h, w)\boldsymbol{\pi}_{M_h}$.

由于 $Q_T = (q, D_T)\boldsymbol{\pi}_T$，可知上述两个条件定义了 ϕ。因此，若所需的 ϕ 存在，则它是唯一的。

定义 ψ_Q: $Q_{T_h} \to Q_T$，使得 $(p)\psi_Q = (q, p)\pi_T$。由于 $D_T = Q_{T_h}$，由关于 T 的第二个条件可知，ψ_Q 是满射。设 ψ_D, ψ_R 是 $(X_n^*)^d$上的恒等函数。可知，若 $\psi := (\psi_Q, \psi_D, \psi_T)$ 是一个变换器同态，则 ψ 是一个强商映射。现在我们证明 ψ 是一个变换器同态。

令 $p \in Q_{T_h}$, $s, t \in (X_n^*)^d$ 任意。于是

$$(p, s)\boldsymbol{\pi}_{T_h}\phi_D = (q, (p, s)\boldsymbol{\pi}_{T_h})\boldsymbol{\pi}_T = (q, ps)\boldsymbol{\pi}_T = ((q, p)\boldsymbol{\pi}_T, s)\boldsymbol{\pi}_T = ((p)\phi_Q, s)\boldsymbol{\pi}_T.$$

我们需要证明 $(p, s)\boldsymbol{\lambda}_{T_h} = ((p)\phi_Q, s)\boldsymbol{\lambda}_T$。对所有 $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，根据定义，我们有 $(p, s)\boldsymbol{\lambda}_{T_h}\pi_i = (b)\lambda_a^{-1}$，其中 b 是集合 $(ps\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i$ 中各元素的最长公共前缀，而 a 是集合 $(p\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i$ 中各元素的最长公共前缀。定义 $a' := (q, p)\boldsymbol{\lambda}_T$, $b' := (q, ps)\boldsymbol{\lambda}_T$。由于 T 是一个转导器，我们有

$$a'((p)\phi_Q, s)\boldsymbol{\lambda}_T = (q, p)\boldsymbol{\lambda}_T((q, p)\boldsymbol{\pi}_T, s)\boldsymbol{\lambda}_T = (q, ps)\boldsymbol{\lambda}_T = b'.$$

因此 $((p)\phi_Q, s)\boldsymbol{\lambda}_T = (b')\lambda_{a'}^{-1}$。要得出 $(p, s)\boldsymbol{\lambda}_{T_h} = ((p)\phi_Q, s)\boldsymbol{\lambda}_T$，只需证明 $a' = a$ 和 $b' = b$。我们证明 $a' = a$，即证明 $b' = b$ 几乎完全相同。由于 $a' = (q, p)\boldsymbol{\lambda}_T$ 且 $f_{T,q} = h$，可知 a' 是集合 $(p\mathfrak{C}_n^d)h\pi_i$ 中所有字的前缀。特别地， $a' \leq a$。令 $w' \in X_n^*$ 满足 $a'w' = a$。对所有 $x \in \mathfrak{C}_n^d$，我们有

$$a'((x)f_{T,(q,p)\boldsymbol{\pi}_T}\pi_i) = (px)f_{T,q}\pi_i = (px)h\pi_i \in a\mathfrak{C}_n = a'w'\mathfrak{C}_n.$$

因此 $(\mathfrak{C}_n^d)\ f_{T,\ (q,p)}\boldsymbol{\pi}_T\pi_i \subseteq w'\mathfrak{C}_{n}$。由于 T 具有完全响应，因此可得 $w' \leq$ $(\varepsilon_d)\ \pi_i = \varepsilon$ 与 $a = a'$。

现在我们得到 $\psi : T_h \to T$ 是一个强商映射。根据引理 11.5，存在一个强商映射 ϕ: $T \to M_h$ ，满足 $\psi\phi = q_{T_h}$。由此等式可推出 $(q)\phi = (\varepsilon_d)^{q_{T_h}Q} = e_h$。接下来我们

证明 ϕ_Q 是单射。任取 $p_0, p_1 \in Q_T$，满足 $(p_0)\phi_Q = (p_1)\phi_Q$，我们将证明$p_0 = p_1$。设 $p'_0, p'_1 \in Q_{T_h}$，使得 $(p'_0)\psi_Q = p_0$ 且 $(p'_1)\psi_Q = p_1$。我们有

$$(p'_0)q_{T_h} = (p'_0)\psi_Q\phi_Q = (p_0)\phi_Q = (p_1)\phi_Q = (p'_1)\psi_Q\phi_Q = (p'_1)q_{T_h}.$$

因此 $p'_0 \sim_{M_{T_h}} p'_1$，而由于 ψ 是变换器同态，可得 $p_0 \sim_{M_T} p_1$。根据关于 T的第二个假设，可得 $p_0 = p_1$。由于 ψ_Q 是单射，因此 ϕ 是所需的强换能器同构。

最后，我们证明 M_h 和 e_h 满足所需条件。第一个条件由引理 11.18 立即得出。第二个条件由 M_h的定义得出。由于对于所有 $p \in Q_{T_h}$，$(p)q_{T_h} = (e_h,\ p)\boldsymbol{\pi}_{M_h}$，第三个条件得以满足。第四个条件由 T_h 的定义以及备注 11.9 立即得出。□

12. Generalizing the synchronizing homeomorphisms of Bleak, Cameron, Maissel, Navas, and Olukoya

现在我们得到了一类用于描述连续映射的换能器。我们将换能器限定为表示 dV_n自同构的那些换能器。与 [3], 中的情况一样，这通过同步条件来实现。

定义 12.1（同步换能器，预备知识：1.3、1.6、11.7）。设 T 是一个（d, n）-换能器，且 $k \in \mathbb{N}$。如果对于所有 p, $q \in Q_T$ 以及满足 $\min\left(\left\{|\ (w)\ \pi_i| \;\middle|\; i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}\right\}\right) \geq k$ 的 $w \in (X_n^*)^d$，都有.....，则称 T 在层级 k 同步。

$$(p, w)\pi_T = (q, w)\pi_T.$$

如果存在某个层级使 T 在该层级同步，则称 T 为同步的，并将满足条件的最小层级称为 T 的同步长度。此时，我们定义函数

$$\mathfrak{s}_T := \left\{(w, q) \in (X_n^*)^d \times Q_T \;\middle|\; \text{for all } p \in Q_T \text{ we have } (w, p)\boldsymbol{\pi}_T = q\right\}.$$

映射 $\mathfrak{s}_T$ 本质上是将 $\boldsymbol{\pi}_T$ 限制在其定义域中不需要输入状态的部分。$\mathfrak{s}_T$ 的像记为 Core(T)，称为 T 的核心。

注 12.2（核心转导器，预备知识：11.6，12.1）。
假设 T 是一个具有同步层级 k 的（d, n）-转导器。如果 $q \in$ Core(T)，$s \in (\{q\})\mathfrak{s}_T^{-1}$ 与$w \in D_T$，那么

$$(q, w)\boldsymbol{\pi}_T = ((s)\mathfrak{s}_T, w)\boldsymbol{\pi}_T = (sw)\mathfrak{s}_T \in \mathrm{Core}(T).$$

因此，Core(T) 是 T 的子转导器。此外，$\mathfrak{s}_T \subseteq \mathfrak{s}_{\mathrm{Core}(T)}$ 与 Core(T) $=$（$(X_n^k)^d$）$\mathfrak{s}_T$，所以 Core(T) 至多有 n^{kd} 个状态，且同步长度至多为 k。

同步转导器的核心恰好由那些“始终可达”的状态组成。特别地，它是仍然具有与原转导器相同定义域和值域的最小子转导器。

定义 12.3（恒等状态，预备知识：11.6，11.19）。
如果 $I \in$Aut($\mathfrak{C}_n^d$) 是恒等映射，那么（根据定理 11.19） M_I 是一个只有一个状态 e_I 的转导器，其输出函数由 $(e_I, w)\boldsymbol{\lambda}_{M_I} = w$ 给出（对所有 $w \in (X_n^*)^d$）。我们将与这个转导器强同构的转导器称为恒等转导器。

如果 T 是一个 (d,n)-转导器，且 $q \in Q_T$ 满足 $\{q\}$ 是 T 的一个子转导器，并且与恒等转导器同构，那么我们称 q 为恒等状态。

现在我们可以证明，与 $G_{n,r}$ [3] 的情形一样， dV_n 的元素恰好是那些具有“平凡”核心的元素。

命题 12.4 (dV_n 换能器，预备知识：10.2、11.19、12.1、12.2、12.3)。若 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$、$n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ 与 $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)$，则 $h \in dV_n$ 当且仅当 M_h 是一个同步转导器，且其核心是一个恒等换能器。

证明。($\Rightarrow$)：令 $h \in dV_n$，并令 F_1, F_2 为 $\mathfrak{C}_n^d$ 与 ϕ 的完全前缀码： $F_1 \to F_2$ 为一个双射，使得 $h = f_\phi$ （如定义 10.2 所述）。定义

$$k := \max\left(\left\{|(w)\pi_i| \;\middle|\; i \in \{0,1,\ldots,d-1\}, w \in F_1\right\}\right).$$

任取 $w \in (X_n^*)^d$，使得 $\min\left(\left\{|(w)\pi_i| \;\middle|\; i \in \{0,1,\ldots,d-1\}\right\}\right) \geq k$。我们证明，对于所有 $s \in (X_n^*)^d$，都有 $(w,s)\boldsymbol{\lambda}_{T_h} = s$。

根据 k 与 F_1的定义，存在唯一的 $w' \in F_1$ 使得 $w' \leq w$。由此可得$(e_h, w)\boldsymbol{\lambda}_{M_h} = (\varepsilon_d, w)\boldsymbol{\lambda}_{T_h} = (w)\lambda_{w'}^{-1}\lambda_{(w')\phi}$。因此，若 $s \in (X_n^*)^d$ 任意，则有

$$(e_h, ws)\boldsymbol{\lambda}_{M_h} = (ws)\lambda_{w'}^{-1}\lambda_{(w')\phi} = (w)\lambda_{w'}^{-1}\lambda_{(w')\phi}s$$

因此$(w,s)\boldsymbol{\lambda}_{T_h} = s$。由此可知，若 $v, w \in (X_n^*)^d$ 任意，且

$$\min\left(\left\{|(v)\pi_i| \;\middle|\; i \in \{0,1,\ldots,d-1\}\right\}\right) \geq k, \quad \min\left(\left\{|(w)\pi_i| \;\middle|\; i \in \{0,1,\ldots,d-1\}\right\}\right) \geq k,$$

那么$(v)^{q_{T_h Q}} = (w)^{q_{T_h Q}}$，而且此状态是一个恒等状态。因此， M_h 的同步长度至多为 k，且 M_h 的核心只包含一个恒等状态。

($\Leftarrow$)：设 $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)$满足 M_h 具有恒等核心。我们证明 $h \in dV_n$。设 k 为 M_h 的同步长度， I 为 M_h的核心状态。定义 $F_1 := (X_n^k)^d$，并注意到F_1 是 $\mathfrak{C}_n^d$的完全前缀码。定义 $\phi: F_1 \to (X_n^*)^d$，使得$(w)\phi = (e_h, w)\boldsymbol{\lambda}_{M_h}$。若 $x \in \mathfrak{C}_n^d$ 和$w \in (X_n^k)^d$ 任意，则

$$(wx)h = (wx)f_{M_h,e_h} = (e_h, w)\boldsymbol{\lambda}_T(x)f_{M_h,I} = (w)\phi x = (wx)\lambda_w^{-1}\lambda_{(w)\phi}.$$

令 $F_2 := \mathrm{img}(\phi)$。由于 h 是同胚，由等式 $(wx)h = (wx)\lambda_w^{-1}\lambda_{(w)\phi}$ 可知，F_2 是完全前缀码，且 ϕ 是 F_1 与 F_2之间的双射。因此 $h = f_\phi \in dV_n$。 □

De定义 12.5 （用图示定义换能器，预备知识：10.1、11.7） .

正如我们在例 12.6 中看到的，将换能器视为由一组点（表示状态）及其间的箭头（表示转移函数和输出函数）组成的图示很有用。如果 T 是一个换能器，且 X 是 D_T的生成集，那么我们可以为每个状态针对 X的每个元素各画一条从该状态出发的箭头。我们给每条从状态 q 指向状态 p 的箭头标上 x/s 这种形式的标签，其中 $x \in X$ 且 $s \in R_T$。其含义是

$$(q,x)\boldsymbol{\pi}_T = p \quad \text{and} \quad (q,x)\boldsymbol{\lambda}_T = s.$$

由于 X 生成 D_T，转导器定义中的条件决定了其余的映射$\boldsymbol{\pi}_T$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_T$。如果 D_T 中的某个元素可以用多种方式表示为 X 中元素的积，那么这可能导致某个特定图示无法良好定义 $\boldsymbol{\pi}_T$ 或 $\boldsymbol{\lambda}_T$，因此并非所有此类图示都能给出良定义的换能器。

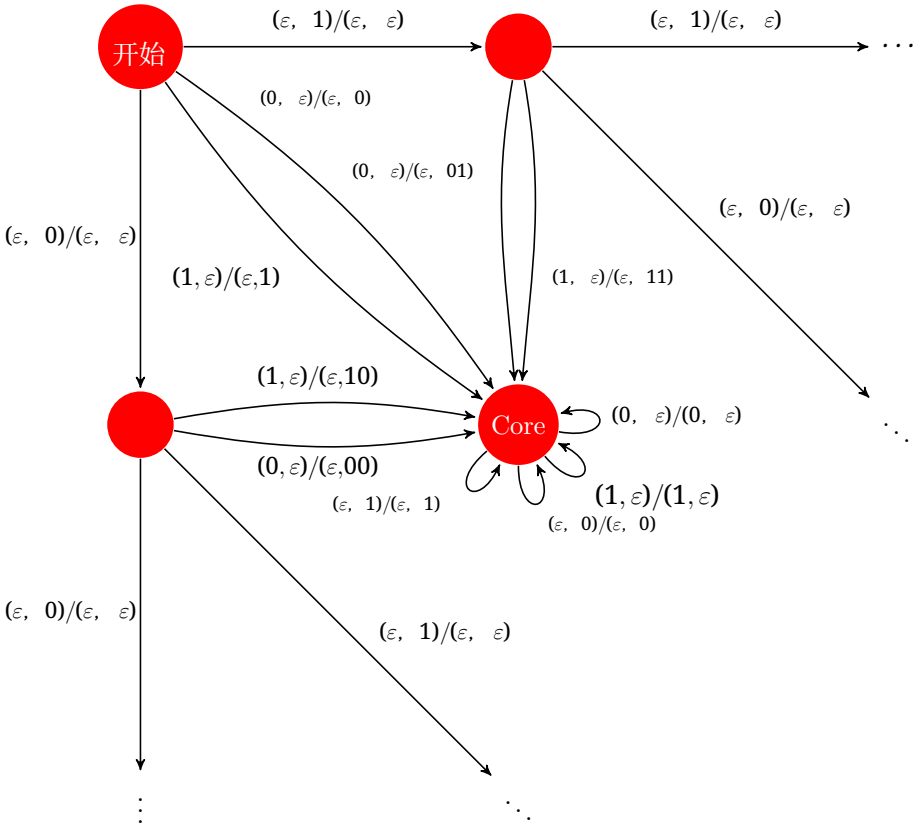


FIGURE 1. 一个最小换能器的部分，其定义域和值域为 $(X_2^*)^2$ 。这表示 $2V$ 中的贝克映射（该换能器是无限的，且每个状态都有一条以核心为目标的边）。

我们将特别关注使用以下生成集的 (d, n)-转导器

$$\left\{x_{d,i} \;\middle|\; x \in X_n, i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}\right\}$$

（回顾定义 10.1）。对于 $n = 1$ ，这种情况特别简单，因为 X_n^* 的每个元素都能以唯一的方式表示为生成元的积，因此所有图示都定义了有效的转导器（GNS 中也是如此）。

例 12.6 （贝克映射，预备知识：10.2、11.19、12.3、12.4、12.5）。
与 V_n 不同， dV_n 中元素的最小换能器有时可能是无限的。例如，若我们定义 $F_1 := \{(0, \varepsilon), (1, \varepsilon)\}$, $F_2 := \{(\varepsilon, 0), (\varepsilon, 1)\}$ 以及 $\phi\colon F_1 \to F_2$，定义如下：

$$(0, \varepsilon)\phi = (\varepsilon, 0), \quad (1, \varepsilon)\phi = (\varepsilon, 1).$$

那么，映射 $b := f_\phi \in 2V$ （称为贝克映射）具有这样的性质： M_b 有无限多个状态。

观察可知，若 $w \in (X_2^*)^2$ 且 $(w)\pi_0 = \varepsilon$，则 $(w, (0, \varepsilon))\boldsymbol{\lambda}_T = (0, w)$。因此，若 $v, w \in (X_2^*)^2$ 互不相同，则 $(e_b, v)\boldsymbol{\pi}_{M_b} \neq (e_b, v)\boldsymbol{\pi}_{M_b}$。图1中展示了转导器$M_b$的示意图。

定义 12.7（同步同胚，预备知识：11.19、12.1）。
如果 M_h 是同步的，我们就称元素 $h \in$Aut($\mathfrak{C}_n^d$) 为同步的 。我们将 $d\mathcal{S}_{n,1}$ 定义为 Aut($\mathfrak{C}_n^d$) 中所有同步元素构成的集合。

上述定义中的下标 1 源于这些同胚与来自 [3] ($\mathcal{S}_{n,1} = 1\mathcal{S}_{n,1}$) 的同胚群 $\mathcal{S}_{n,r}$ 之间存在交集。出于同样的原因，后面我们将使用记号 $d\mathcal{B}_{n,1}$ 和 $d\mathcal{O}_{n,1}$ 。

我们需要能够根据分别表示各个同胚的最小换能器，计算同胚乘积的最小换能器代表元（见定理 11.19）。为此，我们需要能够将定义同胚的转导器转换为具有完全响应的转导器。

GNS 提供了一种实现这一点的方法（见 [16] 的命题 2.16）；现在我们将说明，类似的构造也适用于我们的情形。

定义 12.8（移除不完全响应，预备知识：11.18、11.19、12.9）。
假设 T 是一个（d, n）转导器，并且对于所有 $q \in Q_T$，函数 $f_{T,\,q}$ 都是从 $\mathfrak{C}_n^d$ 到 $\mathfrak{C}_n^d$ 的某个开闭子集的同胚。我们定义

$$CR(T) := (Q_T, D_T, R_T, \boldsymbol{\pi}_T, \boldsymbol{\lambda}_{CS(T)}).$$

映射 $\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)}$：$Q_T \times D_T \to R_T$ 定义为

$$(q, s)\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)}\pi_i = (b)\lambda_a^{-1},$$

其中，b 是 $(s\mathfrak{C}_n^d)f_{T,\,q}\pi_i$ 中各元素的最长公共前缀，a 是 $(\mathfrak{C}_n^d)f_{T,\,q}\pi_i$ 中各元素的最长公共前缀。我们将在引理 12.9 中证明，$CR(T)$ 是一个定义良好的（d, n）转导器。

引理 12.9（移除不完全响应有效，预备知识：11.18、11.19、12.8）。
设 T 是一个(d、n)-转导器，并且对所有 $q \in Q_T$，函数 $f_{T,\,q}$ 都是从$\mathfrak{C}_n^d$ 到 $\mathfrak{C}_n^d$的一个开闭子集的同胚。定义 *12.8* 中定义的对象 $CR(T)$ 是一个具有完全响应的(d、n)-转导器（见定理 *11.19*）。

此外，$CR(T)$ 是非退化的；如果 $q \in Q_T = Q_{CR(T)}$ 且 p 是 $(\mathfrak{C}_n^d)f_{T、\,q}$ 中各元素的最长公共前缀，那么 $f_{CR(T)、\,q} = f_{T、\,q}\lambda_p^{-1}$。

证明。我们首先证明 $CR(T)$ 是一个 (d、n)-转导器。我们需要证明 $\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)}$ 的像包含于 R_T 中。对于每个 $p \in Q_T$，映射 $f_{T、\,q}$ 将开集映射为开集，因此如果 $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，那么 $(s\mathfrak{C}_n^d)f_{T、\,q}\pi_i$ 是 $\mathfrak{C}_n$ 的一个开子集。因此 $|(s\mathfrak{C}_n^d)f_{T、\,q}\pi_i| \neq 1$，所以 $(s\mathfrak{C}_n^d)f_{T、\,q}\pi_i$ 中各字的最长公共前缀是有限的。

令 $p \in Q_{CR(T)}$与 $s, t \in D_{CR(T)}$为任意对象。由于 T是转导器，映射 $\boldsymbol{\pi}_T = \boldsymbol{\pi}_{CR(T)}$是一个作用。我们需要证明

$$(p, st)\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)} = (p, s)\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)}((p, s)\boldsymbol{\pi}_{CR(T)}, t)\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)}.$$

根据假设，我们有 $(p, st)\boldsymbol{\lambda}_T = (p, s)\boldsymbol{\lambda}_T((p, s)\boldsymbol{\pi}_T, t)\boldsymbol{\lambda}_T$，因此若 $x \in \mathfrak{C}_n^d$，则

$$(sx)f_{T,p} = (p, s)\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)}(x)f_{T,(p,s)\boldsymbol{\pi}_T}$$

因此，如果 $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，那么 a是集合 $(\mathfrak{C}_n^d)$ 中所有字的前缀$f_{T,\,p}\pi_i$ 当且仅当 $(p,\ s)\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)}\pi_i a$ 是集合 $(s\mathfrak{C}_n^d)$ 中所有字的最长公共前缀$f_{T,\,p}\pi_i$。所需的关于$\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)}$ 的条件由此得出。

接下来我们证明 $CR(T)$ 具有完全响应。设 $p \in Q_{CR(T)}$，并假设 $w \in (X_n^*)^d$ 满足 $(\mathfrak{C}_n^d) f_{CR(T),q} \subseteq w\mathfrak{C}_{n\circ}^d$ 任取 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，并令 a 为集合 $((\mathfrak{C}_n^d) f_{T,\ p})\pi_i$ 中所有字的最长公共前缀。根据 $\boldsymbol{\lambda}_{CS(T)}$ 的定义， $a((w)\pi_i)$ 也是集合 $((\mathfrak{C}_n^d) f_{T,\ p})\pi_i$ 中所有字的最长公共前缀。因此 $a \leq a((w)\pi_i) \leq a$ 且 $((w)\pi_i) = \varepsilon$。由于 i 是任意的，因此得到 $w = \varepsilon_d$，如所要求。

现在令 $q \in Q_T$ 为任意元素。根据假设，集合 $(\mathfrak{C}_n^d) f_{T,q}$ 是开集，因此对于每个 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，集合 $(\mathfrak{C}_n^d) f_{T,q}\pi_i$ 都是开集。因此，元素 $p \in (X_n^*)^d$ 满足：其中每个 $(p)\pi_i$ 都是集合 $(\mathfrak{C}_n^d) f_{T,q}\pi_i$ 中各字的最长公共前缀；它是 $(X_n^*)^d$ 中小于 $(\mathfrak{C}_n^d) f_{T,q}$ 所有元素的最大元。

对于所有 $w \in \mathfrak{C}_n^d$ 与满足 $w' \leq w$ 的 $w' \in (X_n^*)^d$，都有 $p(q,w')\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)}$ 是 $(X_n^*)^d$ 中小于 $(w'\mathfrak{C}_n^d) f_{T,q}$ 所有元素的最大元素。特别地， $p(q,w')\boldsymbol{\lambda}_{CR(T)} \leq (w) f_{T,q\circ}$ 由于 h 连续可知，若 $m \in \mathbb{N}$，则存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $w' \in (X_n^k)^d$，都存在 $v \in (X_n^m)^d$ 满足 $(w'\mathfrak{C}_n^d) f_{T,q} \subseteq v\mathfrak{C}_{n\circ}^d$ 因此 $p(w) f_{CR(T),q} \in \mathfrak{C}_{n\circ}^d$ 由于 $p(w) f_{CR(T),q}$ 也与 $(w) f_{T,q}$ 可比较，因此 $(w) f_{T,q} = p(w) f_{CR(T),q\circ}$ 由于 $w \in \mathfrak{C}_n^d$ 是任意的，结论得证。□

引理 12.10（核生成核，预备知识：11.12、11.11、12.1、12.2）。若 A、B 是同步的、非退化的（d，n）转导器，则它们的复合 AB 也如此。此外 $\mathrm{Core}(AB)$ 是复合转导器 $\mathrm{Core}(A)\mathrm{Core}(B)$ 的子转导器。

证明。设 k_A，k_B 分别是 A 和 B 的同步长度。由注 12.2 可知，$\mathrm{Core}(A)$ 有限。此外，由引理 11.11，对每个 $q \in \mathrm{Core}(A)$，都存在 $k_q \in \mathbb{N}$，使得若 $w \in (X_n^*)^d$，则 $\min\left(\left\{(w)\pi_i \;\middle|\; i \in \{0,1,\ldots,d-1\}\right\}\right) \geq k_q$，且 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，那么 $|(q,\ w)\boldsymbol{\lambda}_A| \geq k_{B\circ}$ 任取满足以下条件的 $(p_0,\ p_1) \in Q_{AB}$ 与 $w \in D_{AB} = (X_n^*)^d$：

$$\min\left(\left\{(w)\pi_i \;\middle|\; i \in \{0,1,\ldots,d-1\}\right\}\right) \geq k_A + \max\left(\left\{k_q \;\middle|\; q \in \mathrm{Core}(A)\right\}\right).$$

只需证明（$(p_0,\ p_1)\ w$）$\boldsymbol{\pi}_{AB}$ 是 Core（A）Core（B）的一个元素，且不依赖于（p_0，p_1）。令 $w = w_0w_1$，其中 $w_0 \in (X_n^{k_A})^d$。于是

$$\begin{aligned}
((p_0,p_1),w)\boldsymbol{\pi}_{AB} &= ((p_0,w)\boldsymbol{\pi}_A, (p_1,(p_0,w)\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\pi}_B) \\
&= ((w)\mathfrak{s}_A, (p_1,(p_0,w)\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\pi}_B) \\
&= ((w)\mathfrak{s}_A, (p_1,(p_0,w_0)\boldsymbol{\lambda}_A((p_0,w_0)\boldsymbol{\pi}_A, w_1)\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\pi}_B) \\
&= ((w)\mathfrak{s}_A, ((p_1,(p_0,w_0)\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\pi}_B, ((p_0,w_0)\boldsymbol{\pi}_A, w_1)\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\pi}_B) \\
&= ((w)\mathfrak{s}_A, ((p_1,(p_0,w_0)\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\pi}_B, ((w_0)\mathfrak{s}_A, w_1)\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\pi}_B) \\
&= ((w)\mathfrak{s}_A, (((w_0)\mathfrak{s}_A, w_1)\boldsymbol{\lambda}_A)\mathfrak{s}_B).
\end{aligned}$$

注意， p_0 和 p_1 在上面的最终表达式中没有出现。此外，这是 Core（A）与 Core（B）的复合的一个状态。□

推论 12.11 (同步幺半群，预备知识：4.5、11.18、11.19、12.7、12.9、12.10)。若 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 和 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$，则 $d\mathcal{S}_{n,\ 1}$ 是一个幺半群（在函数复合下）。

证明。首先注意到，根据定义 12.3，我们知道 $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}_n^d} \in d\mathcal{S}_{n,\ 1\circ}$ 令 f，$g \in d\mathcal{S}_{n,\ 1}$ 为任意对象。只需证明 $fg \in d\mathcal{S}_{n,\ 1\circ}$ 由引理 11.13 和 11.18，我们有 $f_{M_fM_g,\ (e_f,\ e_g)} = fg_\circ$

此外，根据引理 12.10，转导器 M_fM_g 是同步的。令 M' 为 M_fM_g 的子转导器，其状态集为 $((e_f, e_g), (X_n^*)^d)$ $\boldsymbol{\pi}_{M_fM_g}$。

根据引理 11.13 和 11.18，对于所有的 $q \in Q_{M'}$，函数 $f_{M',q}$ 是从 $\mathfrak{C}_n^d$ 到 $\mathfrak{C}_n^d$ 的一个开子集的同胚。因此，根据引理 12.9，$CR(M')$ 是一个定义良好的非退化（d, n）转导器，且具有完全响应，使得 $f_{CR(M'),(e_f,e_g)} = f_{M',(e_f,e_g)} = fg$。此外，由于 M_fM_g 是同步的，M' 也同步，因此 $CR(M')$ 也同步。

我们知道，转导器 $M_{CR(M')}$ 是同步的，并且满足定理 11.19 要求的所有条件。因此，M_{fg} 与同步转导器 $M_{CR(M')}$ 强同构，所以 M_{fg} 也同步，并且 $fg \in d\mathcal{S}_{n,1}$，正如所要求的。□

定义 12.12（核心幺半群，预备知识：1.10、4.5、11.3、12.11、12.13）。对于 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 和 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$，我们定义 $\widetilde{d\mathcal{O}_{n,1}} := \left\{\text{Core}(M_f) \;\middle|\; f \in d\mathcal{S}_{n,1}\right\} / \cong_S$（回顾定义 1.10 和 11.3），并在 $d\mathcal{O}_{n,1}$ 上定义二元运算

$$[\text{Core}(M_f)]_{\cong_S}[\text{Core}(M_g)]_{\cong_S} = [\text{Core}(M_{fg})]_{\cong_S}.$$

我们将在引理 12.13 中证明，上述运算定义良好，并使 $d\mathcal{O}_{n,1}$ 成为一个幺半群。**引理 12.13**（核心幺半群成立；预备知识：12.10、12.11、12.12）。

$\widetilde{\text{定义 } 12.12 \text{ 中定义的对象 } d\mathcal{O}_{n,1} \text{ 是一个定义良好的幺半群，由 } (h)\gamma_{d,n} = [\text{Core}(M_h)]_{\cong_S} \text{ 定义的映射 } \gamma_{d,n} : d\mathcal{S}_{n,1} \to d\mathcal{O}_{n,1} \text{是一个商映射，并且对所有 } f,g \in d\mathcal{S}_{n,1}\text{，都有}}$

$$\text{Core}(M_{fg}) \cong_S M_{CR(\text{Core}(\text{Core}(M_f)\,\text{Core}(M_g)))}.$$

证明。</style>若 $,_1$ 定义良好，则根据定义，映射 $\gamma_{d,n}$ 是一个满同态。根据引理 12.11，集合 $d\mathcal{S}_{n,1}$ 是一个幺半群。因此，$d\mathcal{O}_{n,1}$ 是一个幺半群，当且仅当乘法运算定义良好。

在引理 12.11 的证明中，已证明若 $f,g \in d\mathcal{S}_{n,1}$，则 M_{fg} 与转导器 $M_{CR(M')}$ 强同构，其中 M' 是 M_fM_g 的子转导器（(e_f, e_g)，$(X_n^*)^d$）$\boldsymbol{\pi}_{M_fM_g}$。由此可得

$$\text{Core}(M_{fg}) \cong_S \text{Core}(M_{CR(M')}) \cong_S M_{\text{Core}(CR(M'))} = M_{CR(\text{Core}(M'))}.$$

由于转导器 T 的核心包含于 T 的每个具有相同定义域和值域的子转导器中，因此可得 $\text{Core}(M_{fg}) \cong_S M_{CR(\text{Core}(M'))} = M_{CR(\text{Core}(M_fM_g))}$。于是，由引理 12.10 可得

$$\text{Core}(M_{fg}) \cong_S M_{CR(\text{Core}(\text{Core}(M_f)\,\text{Core}(M_g)))}.$$

因此，$\text{Core}(M_{fg})$ 的强同构类型由 $\text{Core}(M_f)$ 和 $\text{Core}(M_g)$ 的同构类型唯一确定，并且该运算按要求定义良好。□

定义 12.14 ($d\mathcal{B}_{n,1}$ 与 $d\mathcal{O}_n$，预备知识：4.9、12.12、12.13)。
对于 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$，我们将 $d\mathcal{B}_{n,1}$ 定义为 $d\mathcal{S}_{n,1}$ 的单位群，并将 $d\mathcal{O}_{n,1} :=$ ($d\mathcal{B}_{n,1}$) $\gamma_{d,n}$ 定义为：

$d\mathcal{B}_{n,1}$ 和 $d\mathcal{O}_{n,1}$ 这两个群是本节的主要研究对象；正如我们将在定理 12.18 中证明的，它们分别是 dV_n 的自同构群和外自同构群。

引理 12.15 (dV_n 是正规子群，预备知识：5.6、12.4、12.13、12.14)。若 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$，则 $d\mathcal{V}_n \trianglelefteq d\mathcal{B}_{n,1}$ 与 $d\mathcal{B}_{n,1}/d\mathcal{V}_n \cong d\mathcal{O}_{n,1}$。

证明。由于 $\mathrm{id}_n^{\mathfrak{C}_n^d}$ 是$d\mathcal{B}_n$,1的单位元，$(\mathrm{id}_n^{\mathfrak{C}_n^d})\gamma_{d,n}$ 是$d\mathcal{O}_n$,1的单位元。因此，若$f \in d\mathcal{B}_n$,1，则$(f)\gamma_{d,n}$ 是单位元，当且仅当 f 的核心是恒等换能器。由命题 12.4，$(f)\gamma_{d,n}$ 是单位元，当且仅当 $f \in dV_n$。因此， dV_n 是$d\mathcal{B}_n$,1的正规子群。此外，映射 $hdV_n \to (h)\gamma_{d,n}$ 是$d\mathcal{B}_{n,1}/d\mathcal{V}_n$ 与$d\mathcal{O}_n$,1之间定义良好的同构。□

引理 12.16（正规化子的局部同步，预备知识：5.6、11.11、11.13、11.18、11.19、12.4）。

令 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $h \in N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)}(dV_n)$ 和 $s,t \in (X_n^*)^d\backslash\{\varepsilon_d\}$。存在 $K_{h,s,t} \in \mathbb{N}$，使得对所有满足 $\min\left(\left\{|(a)\pi_i| \;\middle|\; i \in \{0,1,\dots,d-1\}\right\}\right) \geq K_h$ 的 $a \in (X_n^*)^d$，都有 $(e_h, sa)\boldsymbol{\pi}_{M_h} = (e_h, ta)\boldsymbol{\pi}_{M_h}$。

证明。对所有 $x \in (X_n^*)^d$，令 $q_x := (e_h, x)\boldsymbol{\pi}_{M_h}$。由于 s,t 是非平凡的，我们可以找到 $\mathfrak{C}_n^d$ 的完全前缀码 F_s, F_t，使得 $s \in F_s, t \in F_t$ 且 $|F_s| = |F_t|$。令 $\phi\colon F_s \to F_t$ 为一个双射，使得 $(s)\phi = t$，并令 $f := f_\phi$（定义 10.2）。

由于 $h \in N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)}(dV_n)$，我们有 $hdV_n = dV_n h$。特别地， $fh \in hdV_n$。令 $g \in nV$ 使得 $fh = hg$。因此，由引理 11.13 和 11.18 可得

$$f_{M_f M_h,(e_f,e_h)} = fh = hg = f_{M_h M_g,(e_h,e_g)}.$$

由命题 12.4， M_f, M_g 的核心各有一个单位元状态。令 I_f, I_g 分别为 M_f 和 M_g 的核心状态。注意

$$((e_f,e_h),s)\boldsymbol{\pi}_{M_f M_h} = (I_f, q_t), \quad ((e_h,e_g),s)\boldsymbol{\pi}_{M_h M_g} = (q_s, (e_g, (q_h,s)\boldsymbol{\lambda}_{M_h})\boldsymbol{\pi}_{M_g}).$$

由引理 11.11 应用于 M_h 的状态 q_s，令 $K \in \mathbb{N}$ 满足：对于所有满足 $w \in (X_n^*)^d$ 的

$$\min\left(\left\{|(w)\pi_i| \;\middle|\; i \in \{0,1,\dots,d-1\}\right\}\right) \geq K,$$

$\min\left(\left\{|(q_s,w)\boldsymbol{\lambda}_{M_h}\pi_i| \;\middle|\; i \in \{0,1,\dots,d-1\}\right\}\right)$ 至少为 M 的同步长度

我们有 g.

令 $a \in (X_n^*)^d$ 为任意满足 $\min\left(\left\{|(a)\pi_i| \;\middle|\; i \in \{0,1,\dots,d-1\}\right\}\right) \geq K$ 的对象。只需证明 $q_{ta} = q_{sa}$。由 K 的选取，我们得到

$$((e_f,e_h),sa)\boldsymbol{\pi}_{M_f M_h} = (I_f, q_{ta}), \quad ((e_h,e_g),sa)\boldsymbol{\pi}_{M_h M_g} = (q_{sa}, I_g).$$

因此，对于所有 $v \in (X_n^{\mathbb{N}})^d$，我们有

$$\begin{aligned}
((e_f,e_h),sa)\boldsymbol{\lambda}_{M_f M_h}(v) f_{M_h,q_{ta}} &= ((e_f,e_h),sa)\boldsymbol{\lambda}_{M_f M_h}(v) f_{M_f M_h,(I_f,q_{ta})} \\
&= (sav)fh \\
&= (sav)hg \\
&= ((e_h,e_g),sa)\boldsymbol{\lambda}_{M_h M_g}(v) f_{M_h M_g,(q_{sa},I_g)} \\
&= ((e_h,e_g),sa)\boldsymbol{\lambda}_{M_h M_g}(v) f_{M_h,q_{sa}}.
\end{aligned}$$

根据上述方程，对所有 $i \in \{0,1,\dots,d-1\}$，字 $((e_f,\ e_h)\ sa)\boldsymbol{\lambda}_{M_f M_h}\pi_i$ 与 $((e_h,\ e_g)\ sa)\boldsymbol{\lambda}_{M_h M_g}\pi_i$ 都是可比较的。

如果存在 $i \in \{0,1,\dots,d-1\}$ 使得 $((e_f,\ e_h)\ sa)\lambda_{M_f M_h}\pi_i \neq ((e_h,\ e_g)\ sa)\lambda_{M_h M_g}\pi_i$，那么可推出映射 $f_{M_h,\ q_{ta}}$ 或 $f_{M_h,\ q_{sa}}$ 的像包含于某个真锥中。根据定理 11.19，转导器 M_h 具有完全响应，因此这种情况不可能发生，我们必须有 $((e_f,\ e_h)\ sa)\lambda_{M_f M_h} = ((e_h,\ e_g)\ sa)\lambda_{M_h M_g}$。

由等式

$$((e_f,e_h),sa)\lambda_{M_f M_h}(v) f_{M_h,q_{ta}} = ((e_h,e_g),sa)\lambda_{M_h M_g}(v) f_{M_h,q_{sa}}$$

可得 $f_{M_h,\ q_{ta}} = f_{M_h,\ q_{sa}}$。因此，由于 M_h 具有完全响应，我们有 $q_{ta} \sim_{M_h} q_{sa}$。最后，由于 M_h 是极小元，可得 $q_{ta} = q_{sa}$，如所需。□

引理 12.17（同步正规化子，预备知识：12.14、12.16）。对于 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$，群 $N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)}(dV_n)$ 包含于 $d\mathcal{B}_{n,\ 1}$。

证明。任取 $h \in N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)}(dV_n)$。我们证明 $h \in d\mathcal{S}_n$；由于 h 是任意的，我们还可得出 $h^{-1} \in d\mathcal{S}_n$，因此 h 必定是 $d\mathcal{S}_n$的单位元。

因此我们只需证明 M_h 是一个同步变换器。我们定义

$$K := \max\left(\left\{K_{h,x_{d,i},y_{d,j}z_{d,k}} \;\middle|\; x,y,z \in X_n, i,j,k \in \{0,1,\dots,d-1\}\right\}\right) + 1$$

其中 $x_{d,\ i}$，$y_{d,\ j}$，$z_{d,\ k}$ 如定义 10.1 中所述，而 $K_{h,\ x_{d,\ i},\ y_{d,\ j}z_{d,\ k}}$ 如引理 12.16 中所述。任取 $w \in (X_n^*)^d$，使得

$$\min\left(\left\{|(w)\pi_i| \;\middle|\; i \in \{0,1,\dots,d-1\}\right\}\right) \geq K.$$

只需证明对所有 $q \in Q_{M_h}$，我们有 $(q,w)\boldsymbol{\pi}_{M_h} = (e_h,w)\boldsymbol{\pi}_{M_h}$。任取 $q \in Q_{M_h}$，并令 $v \in (X_n^*)^d$ 满足 $(e_h,v)\boldsymbol{\pi}_{M_h} = q$。令 $w = w_0 w'$，并令 $v = v_0 v_1 \dots v_l$，其中

$$v_0, v_1, \dots, v_l, w_0 \in \left\{x_{d,i} \;\middle|\; x \in X_n, i \in \{0,1,\dots,d-1\}\right\}.$$

根据 w 的选取，我们得到：

$$\begin{aligned}
(q,w)\boldsymbol{\pi}_{M_h} &= (e_h, vw)\boldsymbol{\pi}_{M_h} = (e_h, v_0v_1v_2\dots v_l w_0 w')\boldsymbol{\pi}_{M_h} \\
&= (e_h, (v_0v_1)(v_2\dots v_l w_0 w'))\boldsymbol{\pi}_{M_h} = (e_h, (v_1)(v_2\dots v_l w_0 w'))\boldsymbol{\pi}_{M_h} \\
&= (e_h, (v_1v_2)(v_3\dots v_l w_0 w'))\boldsymbol{\pi}_{M_h} = (e_h, (v_2)(v_3\dots v_l w_0 w'))\boldsymbol{\pi}_{M_h} \\
&\vdots \\
&= (e_h, (v_l w_0)w')\boldsymbol{\pi}_{M_h} = (e_h, w_0 w')\boldsymbol{\pi}_{M_h} = (e_h, w)\boldsymbol{\pi}_{M_h}
\end{aligned}$$

这正是所需的。 □

现在，我们可以将所有内容串联起来，并利用 Rubin 定理将我们的群与 dV_n 的自同构群联系起来。

定理 12.18 (自同构刻画，预备知识：12.15、12.17)。设 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 和 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$。群 $N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)}(dV_n)$ 与 $d\mathcal{B}_{n,1}$ 相等，且是可数无限群，并同构于 自同构群(dV_n)。此外，外自同构群$(dV_n) \cong d\mathcal{O}_{n,1}$。

证明。我们来证明这些大陆

$$N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)}(dV_n) \subseteq d\mathcal{B}_{n,1} \subseteq N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)}(dV_n)$$

分别在引理 12.17 和 12.15 中。因此 $N_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_n^d)}(dV_n) = d\mathcal{B}_{n,1}$。

由于 $\mathfrak{C}_n^d$的完全前缀码有可数无限多个，群 dV_n 是可数无限的。根据定理 12.15，我们有

$$|d\mathcal{B}_{n,1}| = |dV_n||d\mathcal{B}_{n,1}/dV_n| = |dV_n||d\mathcal{O}_{n,1}|.$$

$d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 是由有限核心换能器构成的强同构类。此外，幺半群 $(X_n^*)^d$ 是有限生成的，并且根据换能器的定义，输出映射和转移映射由它们在 $(X_n^*)^d$的生成元上的作用所确定。因此，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，具有 k 个状态的 $(d,\ n)$-换能器按强同构计只有有限多个。于是群 $d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 是可数的，因此

$$|d\mathcal{B}_{n,1}| = |dV_n||d\mathcal{O}_{n,1}| = |\mathbb{N}||d\mathcal{O}_{n,1}| = |\mathbb{N}|.$$

根据 Rubin 定理（推论 5.50）和引理 12.15，只需证明由 $(p,\ f)a = (p)f$给出的标准作用a：$\mathfrak{C}_n^d \times dV_n \to \mathfrak{C}_n^d$是局部移动的（定义 5.41）。

令 $x \in \mathfrak{C}_n^d$ 为任意元素，并令 $w\mathfrak{C}_n^d$ 为 x的一个基本开邻域。任取 $u_x,\ v \in (X_n^*)^d$，使得 $w < v$ 且 $w < u_x < x$。只需证明 $(x)(dV_n)_{w\mathfrak{C}_n^d,\ a} \cap v\mathfrak{C}_n^d \neq \varnothing$。

令 $S \subseteq (X_n^*)^d$ 满足：$\left\{s\mathfrak{C}_n^d \;\middle|\; s \in S\right\}$ 是将 $\mathfrak{C}_n^d \backslash w\mathfrak{C}_n^d$ 划分为既开又闭集的划分。另取$F_{u_x},\ F_v \subseteq (X_n^*)^d$，使得 $|F_{u_x}| = |F_v|,\ u_x \in F_{u_x},\ v \in F_v$与 $\left\{s\mathfrak{C}_n^d \;\middle|\; s \in F_{u_x}\right\},\ \left\{s\mathfrak{C}_n^d \;\middle|\; s \in F_v\right\}$均为将 划分为既开又闭集的划分。令：为任意一个满足 $()$的双射，并令：$(,\ s) \;\middle|\; s \in S\}$。由此可知，映射 f_ϕ 是 $(dV_n)_{w\mathfrak{C}_n^d,\ a}$ 的一个元素，并满足 $(x)f_\phi \in v\mathfrak{C}_n^d$，如所需。□

13. Rationality

在 GNS [16], 中引入了有理同态的概念（GNS 还证明了命题 13.2）。

定义 13.1（有理变换，预备知识：2.2、5.1、11.7、11.8、11.13）。如果说 $f\colon\ \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{C}_m$是有理的，当且仅当 $f = f_{T,\ q}$对于某个具有有限多个状态的 $(1,\ n,\ 1,\ m)$-转导器 T以及某个 $q \in Q_T$。由引理 11.13 可知，对象集合

$$\left\{\mathfrak{C}_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\right\}$$

与态射集合

$$\left\{f : \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{C}_m \;\middle|\; f \text{ is rational and } n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\right\}$$

构成一个小范畴。我们称其为有理变换范畴，并将其记为 $\mathcal{R}$。我们$\widetilde{\ }$分别将该范畴中 $\mathfrak{C}_n$ 的自同态幺半群和自同构群记为 $\mathcal{R}_n$ 和 $\mathcal{R}_n$。

命题 13.2（参见 [16],有理同构，预备知识：12.5、13.1 ）.
对于所有 n、$m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$，对象 $\mathfrak{C}_n$、$\mathfrak{C}_m$ 在范畴 $\mathcal{R}$ 中同构，因此

$$\widetilde{\mathcal{R}_n} \cong \widetilde{\mathcal{R}_m}, \quad and \quad \mathcal{R}_n \cong \mathcal{R}_m.$$

证明。任取 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$。我们给出一个从 $\mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_n$出发的有理同构。我们定义$F_1$：$= \{1, 01, 001, \ldots, 0^{n-1}1\}$, $F_2 := X_n$与 ϕ：$F_1 \to F_2$，使得对所有 $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$，$((0)^i 1)\phi = i$。然后，我们按照图 2（回顾定义 12.5）定义 $f_\phi : \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{C}_n$ 和 $f_{\phi^{-1}} : \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{C}_2$。

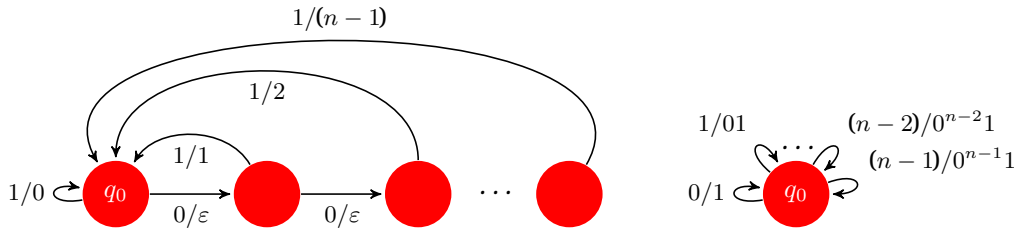


FIGURE 2. 定义 $f_\phi := f_{T,\ q_0}$ 其中 T 是左转导器，与 $f_{\phi^{-1}} := f_{T,\ q_0}$其中 T 是右转导器

注意到

$$(wx)f_\phi = (w)\phi(x)f_\phi, \quad \text{and} \quad (vy)f_{\phi^{-1}} = (v)\phi^{-1}(y)f_{\phi^{-1}}$$

其中 $w \in F_1$， $v \in F_2$， $x \in \mathfrak{C}_2$， $y \in \mathfrak{C}_n$ 均为任意取值。特别地，我们有 f_ϕ， $f_{\phi^{-1}}$ 互为逆关系。由于这些映射是有理的，结论得证。□

若 k， $n \in \mathbb{N}$，则字母表 X_n 上长度至多为 k 的字只有有限多个。因此，由注 12.2 可知 $1\mathcal{B}_{n,\ 1} \leq \mathcal{R}_n$。然而，若 $d \geq 2$，则 $(X_n^*)^d$ 中存在无限多个元素 w，其

$$\min\left(\left\{|(w)\pi_i| \;\middle|\; i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}\right\}\right) < k.$$

因此，在 $d\mathcal{B}_{n,\ 1}$ 的情况下，这一推理并不成立。图1显示，贝克映射不能由有限的 (2，2)-转导器定义。

在 [2] 定理5.2 中，证明了 $2V$ 可以嵌入有理群。他们通过映射 f 对其进行共轭，从而嵌入 $2V$；该映射由图5中的转导器定义。由于 $\mathcal{B}_{2,\ 1} \leq \mathcal{R}_2$ 与 $f2Vf^{-1} \leq \mathcal{R}_4$，人们可能会认为 $f2\mathcal{B}_{2,\ 1}f^{-1} \leq \mathcal{R}_4$。我们将在命题13.4中证明事实并非如此。

例13.3 ($0 \leftrightarrow 00$ 转导器，预备知识：11.7、11.8、12.1、12.5)。
设 T 是图3中的左侧 (1,2)-转导器（回忆定义 12.5）。转导器 T 是同步的，且 Core(T) $= T$。此外，若 $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, m_0, m_1, \ldots \in (\mathbb{N}\backslash\{0\}) \cup \{\infty\}$ 与 $s:\ \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 是满足 $(1)s = 2$, $(2)s = 1$, $(n)s = n$ 的置换，其中 $n \notin \{1, 2\}$，则

$$(0^{n_0}1^{m_0}0^{n_1}\ldots)f_{T,q_0} = 0^{(n_0)s}1^{m_0}0^{(n_1)s}\ldots.$$

特别地，f_{T,q_0} 是一个同胚。

证明。 根据 T 的定义可知，对所有 $q \in Q_T$，都有

$$(q, 000)\boldsymbol{\pi}_T = b, \quad (q, 100)\boldsymbol{\pi}_T = c, \quad (q, 10)\boldsymbol{\pi}_T = a \quad , (q, 1)\boldsymbol{\pi}_T = q_0$$

特别地，若 T 在第 3 层是同步的。根据定义，我们有

$$(0^{n_0}1^{m_0}0^{n_1}\ldots)f_{T,q_0} = (q_0, 0^{n_0}1^{m_0})\boldsymbol{\lambda}_T(0^{n_1}1^{m_1}0^{n_2}\ldots)f_{T,(q_0,0^{n_0}1^{m_0})\boldsymbol{\pi}_T}.$$

此外，由于 $m_0 \geq 1$ 与 $(q, 1)\boldsymbol{\pi}_T = q_0$ 对所有 $q \in Q_T$ 均成立，我们有 $(q_0, 0^{n_0}1^{m_0})\boldsymbol{\pi}_T = q_0$。因此

$$(0^{n_0}1^{m_0}0^{n_1}\ldots)f_{T,q_0} = (q_0, 0^{n_0}1^{m_0})\boldsymbol{\lambda}_T(0^{n_1}1^{m_1}0^{n_2}\ldots)f_{T,q_0}.$$

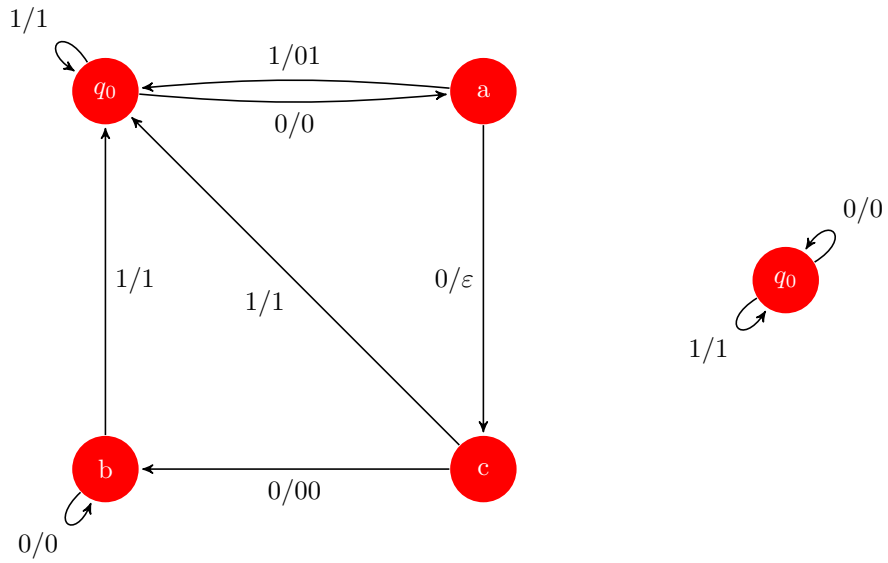


FIGURE 3. 两个定义域和值域为 X_2^* 的换能器

通过反复应用上述等式，只需证明 $(q_0, 0^{n_0}1^{m_0})\boldsymbol{\lambda}_T = 0^{(n_0)^s}1^{m_0}$。若 $n \in \mathbb{N}$ 是任意的，则根据定义

$$(q_0, 0^1 1^{m_0})\boldsymbol{\lambda}_T = (0)(01)(1)^{m_0-1} = 0^2 1^{m_0},$$

$$(q_0, 0^2 1^{m_0})\boldsymbol{\lambda}_T = (0)()(1)(1)^{m_0-1} = 0^1 1^{m_0},$$

$$(q_0, 0^{3+n} 1^{m_0})\boldsymbol{\lambda}_T = (0)()(00)(0)^n(1)(1)^{m_0-1} = 0^{3+n} 1^{m_0},$$

如所需。 □

命题13.4（高维有理性问题，预备知识：12.5、12.4、11.13、11.17、4.28、13.3、11.19）。

设 $f\colon\ \mathfrak{C}_4 \to \mathfrak{C}_2^2$ 是图5中转导器定义的同胚（回忆定义 *12.5*）。该转导器有有限个状态，但 f^{-1} 不能由一个状态有限的(2、2、1、2)-转导器定义。此外，我们有

$$f 2 V f^{-1} \subseteq \mathcal{R}_4 \quad but \quad f 2 \mathcal{B}_{2,1} f^{-1} \not\subseteq \mathcal{R}_4.$$

证明。设 T 为图5中的转导器。注意，若 $w \in (X_2^*)^2,$，则 $w \in (Q_T \times D_T)\boldsymbol{\lambda}_T$ 当且仅当 $|(w)\pi_0| = |(w)\pi_1|$。设 D 为由下式定义的 (2，2，1，4)-转导器

(1) $Q_D := (X_2^* \times \{\varepsilon\}) \cup (\{\varepsilon\} \times X_2^*)$。（2）$(q,\ s)\boldsymbol{\pi}_T = p$，其中 $p \in Q_D$ 满足存在 $b \in (X_2^*)^2$，使得 $|(b)\pi_0| = |(b)\pi_1|$，满足 $qs = bp$。（3）$(q,\ s)\boldsymbol{\lambda}_T = w$，其中 $w \in X_4^*$ 满足存在 $p \in Q_D$，使 $qs = (q_0,\ w)\boldsymbol{\lambda}_T p$。

注意，D 定义良好。此外，对所有 $p \in Q_D$ 和 $x \in \mathfrak{C}_2^2$，我们有 $(x)f_{D,\ p} = (px)f^{-1}$。特别地，$f_{D,\ \varepsilon_2} = f^{-1}$。

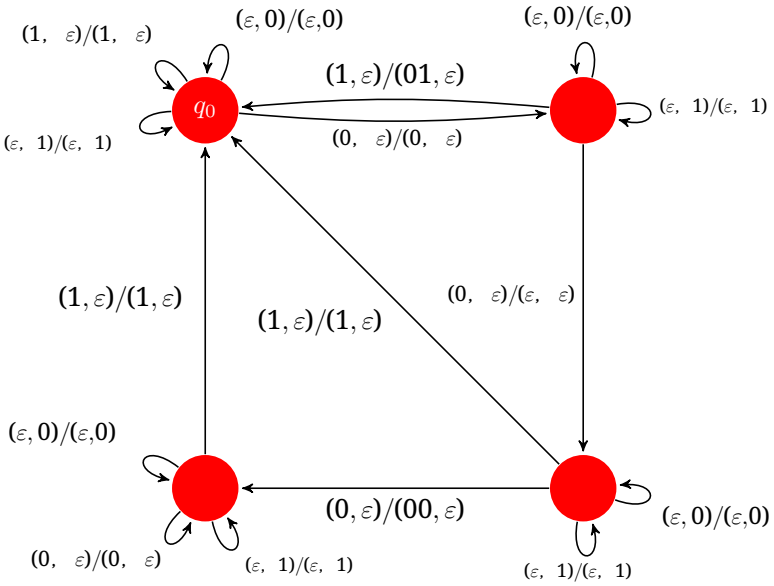


FIGURE 4. 图 3 中转导器的范畴积所得到的转导器

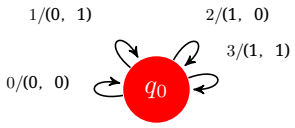


FIGURE 5. 一个定义从 $\mathfrak{C}_4$到 $\mathfrak{C}_2^2$ 的同胚的单状态 (1，4，2，2)-转导器（类似于图 2 中的转导器）

现在我们证明 $f2Vf^{-1} \subseteq \mathcal{R}_4$。任取 $g \in 2V$。由定理12.4，转导器 M_g是同步的，且其核心是一个单独的恒等状态。令 k 为 M_g的同步长度。因此，由引理 11.13 可得

$$fgf^{-1} = f_{TM_gD,(q_0,e_g,\varepsilon_2)}.$$

我们定义 $P := TM_gD$与 $e := (q_0, e_g, \varepsilon_2)$。由于 D有无限多个状态， P也如此。然而，如果 $w \in X_4^*$是任意的且 $|w| \geq k$，那么

$$||((q_0, e_g), w)\boldsymbol{\lambda}_{TM_g}\pi_0| - |((q_0, e_g), w)\boldsymbol{\lambda}_{TM_g}\pi_1||$$

等于

$$||((q_0, e_g), w \restriction_k)\boldsymbol{\lambda}_{TM_g}\pi_0| - |((q_0, e_g), w \restriction_k)\boldsymbol{\lambda}_{TM_g}\pi_1||.$$

因此， P的子转导器 $S := (e, X_4^*)\boldsymbol{\pi}_P$有有限个状态，并满足 $f_{S,e} = fgf^{-1}$，因此fgf^{-1}是有理的，符合要求。

接下来我们证明 $f2\mathcal{B}_{2,\ 1}f^{-1} \not\subseteq \mathcal{R}_2$。令 $b := f_{B,\ q_0}$，其中 B 是图4中的转导器。根据例13.3，我们知道 $b \in 2\mathcal{B}_{2,\ 1}$。我们证明 $fbf^{-1} \notin \mathcal{R}_4$。

根据定义，对于所有 $n \in 3\mathbb{N}$，我们有

$$(q_0, (02)^n)\boldsymbol{\lambda}_T = ((01)^n, (00)^n)$$
$$(q_0, ((01)^n, (00)^n))\boldsymbol{\lambda}_B = ((001)^n, (00)^n) = ((001)^n, (000)^{2n/3})$$
$$(\varepsilon_2, ((001)^n, (000)^{2n/3}))\boldsymbol{\lambda}_D = (\varepsilon_2, ((001)^{2n/3}, (000)^{2n/3}))\boldsymbol{\lambda}_D = (002)^{2n/3}.$$

因此 $((q_0, q_0, \varepsilon_2), (02)^n)\boldsymbol{\lambda}_{TBD} = (002)^{2n/3}$。此外，我们有

$$((02)^n\mathfrak{C}_4)fbf^{-1} = (((001)^n, (000)^{2n/3})\mathfrak{C}_2^2)f^{-1} = (002)^{2n/3}(((001)^{n/3}, \varepsilon)\mathfrak{C}_2^2)f^{-1}.$$

对于所有 $n \in 3\mathbb{N}$，令 $p_n := ((q_0, q_0, \varepsilon_2), (02)^n)\boldsymbol{\pi}_{TBD}$。由上述等式可知

$$(\mathfrak{C}_4)f_{TBD,p_n} = (((001)^{n/3}, \varepsilon)\mathfrak{C}_2^2)f^{-1}.$$

特别地，对于 $n \neq m$，我们有 $f_{TBD,p_n} \neq f_{TBD,p_m}$，并且 TBD 从这些状态出发具有完备响应。考虑 TBD 的子转导器 $S := ((q_0, q_0, \varepsilon_2)\ X_4^*)\boldsymbol{\pi}_{TBD}$。

根据定理 11.19，若 S' 是任意一个 (1,4)-转导器，且存在 $q \in Q_{S'}$ 使得 $(q, X_4^*)\boldsymbol{\pi}_{S'} = Q_{S'}$ 与 $f_{S',q} = fbf^{-1}$，则 $M_{fbf^{-1}} \cong_S M_{CR(S')}$。因此，由上述观察可知，$S'$ 必定是无限的，所以 fbf^{-1} 是非有理的。

剩下要证明的是，f^{-1} 不能由一个状态数有限的转导器定义。反设 D' 是一个定义 f^{-1}的有限状态转导器。由此可知，TBD' 是一个状态数有限的转导器，其中有一个状态定义了 fbf^{-1}。由于 fbf^{-1}不是有理的，这就产生了矛盾。

□

14. A closer look at the groups $d\mathcal{O}_{n,\ 1}$

本节将研究上一节中用于描述 dV_n的外自同构的核心换能器。我们证明，$d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 中的一个元素可以“分解”为 d 个$1\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 中的元素，并以此证明 Out(dV) 是一个冠积（定理 14.19）。

定义 14.1（半直积，预备知识：5.2）。
若 G，H 是群，且 $a\colon G \times H \to G$ 是 H 在 G上的一个作用，则定义半直积$G \rtimes_a H$ 为底集为 $G \times H$ 且运算如下的群：

(1) 若 (g_0, h_0),$(g_1, h_1) \in G \rtimes_a H$，则

$$(g_0, h_0)(g_1, h_1) = (g_0(g_1, h_0^{-1})a, h_0h_1),$$

(2) 若 $(g, h) \in G \rtimes_a H$，则

$$(g, h)^{-1} = ((g^{-1}, h)a, h^{-1}).$$

不难验证，这定义了一个群。

定义 14.2（花环积，预备知识：14.1）。
若 G, H 是群，且 $a\colon X \times H \to X$ 是 H 在集合 X上的一个作用，则定义冠积 $G \wr_a H$ 为群 $G^X \rtimes_{a'} H$，其中 $a'\colon G^X \times H \to G^X$ 定义如下：

$$((g_x)_{x\in X}, h)a' = (g_{(x,h)a})_{x\in X}.$$

首先，我们确定半群 $d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 在集合 $\{0, 1, \ldots, d-1\}$ 上的作用。

定义 14.3（受限坐标，预备知识：10.1）。
对于 $d\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$，$n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ 与 $S\subseteq\{0,1,\dots,d-1\}$，我们定义

$$F_{d,n,S}:=\left\{w\in(X_n^*)^d\;\middle|\;(w)\pi_i=\varepsilon\text{ for all }i\in\{0,1,\dots,d-1\}\backslash S\right\}.$$

因此，$F_{d,\ n,\ S}$ 是 $(X_n^*)^d$ 的子幺半群，由仅允许在S 坐标上取非平凡值的那些元素组成。

引理 14.4 ($d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 独立作用于坐标，预备知识：1.3、1.6、11.11、11.18、12.12、14.3)。

设 $d\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$。若对于某个 $f\in d\mathcal{S}_{n,\ 1}$，有 $T=\mathrm{Core}(M_f)$，则

$$\psi_T:=\left\{(i,j)\in\{0,1,\dots,d-1\}^2\;\middle|\;(Q_T\times F_{d,n,\{i\}})\boldsymbol{\lambda}_T\subseteq F_{d,n,\{j\}}\right\}$$

是一个定义域为 $\{0,1,\dots,d-1\}$ 的函数。

证明。只需证明，对于所有 $i\in\{0,1,\dots,d-1\}$，集合 $(\{i\})\psi_T$（回忆定义 1.6）都是单元素集。任取 $i\in\{0,1,\dots,d-1\}$，我们先证明 $(\{i\})\psi_T\neq\varnothing$。回忆，对于所有 $q\in Q_T$，映射 $f_{T,\ q}$ 必为单射（引理 11.18）。

反设存在 $i,\ \alpha,\ \beta\in\{0,1,\dots,d-1\}$ 与 $(q_0,\ l_0),\ (q_1,\ l_1)\in Q_T\times F_{d,\ n,\ \{i\}}$，使得

$$\alpha\neq\beta,\qquad|(q_0,l_0)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_\alpha|>0,\quad\text{ and }\quad|(q_1,l_1)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_\beta|>0.$$

不失一般性，我们可以假设 $\alpha=0$ 与 $\beta=1$。

固定 $p_0\in Q_T$。转导器 T 是非退化的（因为它是 M_f的子转导器），因此根据引理 11.11，存在 $s\in(X_n^*)^d$，使得对所有 $j\in\{0,1,\dots,d-1\}$，$|(p_0,\ s)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j|\geq 1$。对每个 $j\in\{0,1,\dots,d-1\}$，定义 $s_j\in F_{d,\ n,\ \{j\}}$，使得 $s=s_0s_1s_2\dots s_j$。此外，对每个 $j\in\{1,2,3,\dots,d-1\}$，定义 $p_j:=(p_0,\ s_0s_1\dots s_{j-1})\boldsymbol{\pi}_T$。由于 T是一个转导器，因此

$$(p_0,s)\boldsymbol{\lambda}_T=(p_0,s_0s_1s_2\dots s_j)\boldsymbol{\lambda}_T=(p_0,s_0)\boldsymbol{\lambda}_T(p_1,s_1)\boldsymbol{\lambda}_T\dots(p_{d-1},s_{d-1})\boldsymbol{\lambda}_T.$$

因此，对于所有 $j\in\{0,1,2,3,\dots,d-1\}\backslash\{0,1\}$，我们可以选取某些 $q_j\in Q_T$、$i_j\in\{0,1,\dots,d-1\}$ 与 $l_j\in F_{d,\ n,\ \{i_j\}}$，使得 $|(q_j,\ l_j)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j|>0$。我们还将 i_0 与 i_1 都定义为 i。

对于所有 $j\in\{0,1,\dots,d-1\}$，现在都有 $|(q_j,\ l_j)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j|>0$。此外，$i_0=i_1$，因此我们可以固定某个 $b\in\{0,1,\dots,d-1\}\backslash\{i_0,i_1,\dots,i_{d-1}\}$。我们将利用这一观察来与单射性矛盾。

对于每个 $j\in\{0,1,\dots,d-1\}$，选取某个 $w_j\in(\{q_j\})\mathfrak{s}_T^{-1}$。现在，如果 $p\in Q_T$ 是任意的，那么 $|(p,\ w_jl_j)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j|\geq|(q_j,\ l_j)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j|\geq 1$。对于每个 $j\in\{0,1,\dots,d-1\}$，定义 $w_{j,\ b}\in F_{d,\ n,\ \{b\}}$ 与 $w'_j\in F_{d,\ n,\ \{0,1,\dots,d-1\}\backslash\{b\}}$，使得 $w_j=w_{j,\ b}w'_j$。

对于每个 $m\in\mathbb{N}$，我们定义

$$t_m:=w_{0,b}w_{1,b}\dots w_{d-1,b}(w'_0l_0w'_1l_1\dots w'_{d-1}l_{d-1})^m.$$

对于每个 $j\in\{0,1,\dots,n-1\}$，元素 $w_{j,\ b}\in F_{d,\ n,\ \{b\}}$ 与该积可交换

$$w'_0l_0w'_1l_1\dots w'_{d-1}l_{d-1}\in F_{d,n,\{0,1,\dots,d-1\}\backslash\{b\}}.$$

因此，对于所有的 $m\in\mathbb{N}$ 与 $j\in\{0,1,\dots,d-1\}$，我们都可以找到 $u_{j,\ m},\ v_{j,\ m}\in(X_n^*)^d$，使得

$$t_m=u_{j,m}w_{j,b}(w'_0l_0w'_1l_1\dots w'_{d-1}l_{d-1})^mv_{j,m}.$$

此外，$w_{j,\ b}$ 与 $F_{d,\ n,\ \{0,1,\ldots,d-1\}\setminus\{b\}}$ 的所有元素交换，因此，如果 $q \in Q_T$，$j \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，$m \in \mathbb{N}$ 是任意的，那么

$$\begin{aligned}
|(q,t_m)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j| &= |(q,u_{j,m}w_{j,b}(w_0'l_0w_1'l_1\ldots w_{d-1}'l_{d-1})^m v_{j,m})\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j| \\
&\geq |((q,u_{j,m}w_{j,b})\boldsymbol{\pi}_T,(w_0'l_0w_1'l_1\ldots w_{d-1}'l_{d-1})^m)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j| \\
&\geq |((w_j)\mathfrak{s}_T,l_jw_{j+1}'l_{j+1}\ldots w_{d-1}'l_{d-1}(w_0'l_0w_1'l_1\ldots w_{d-1}'l_{d-1})^{m-1})\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j| \\
&\geq 1+|((w_{j,b}w_j'l_j\ldots w_{d-1}'l_{d-1})\mathfrak{s}_T,(w_0'l_0w_1'l_1\ldots w_{d-1}'l_{d-1})^{m-1})\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j| \\
&= 1+|((w_j'l_j\ldots w_{d-1}'l_{d-1}w_{j,b})\mathfrak{s}_T,(w_0'l_0w_1'l_1\ldots w_{d-1}'l_{d-1})^{m-1})\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j| \\
&\geq 2+|((w_j'l_j\ldots w_{d-1}'l_{d-1}w_{j,b})\mathfrak{s}_T,(w_0'l_0w_1'l_1\ldots w_{d-1}'l_{d-1})^{m-2})\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j| \\
&\vdots \\
&\geq m.
\end{aligned}$$

因此，$(X_n^{\mathbb{N}})^d$ 中所有以 t_m 的所有元素为前缀的元素，在 $f_{T,\ q}$ 下都有相同的像（无论如何选择 q）。这与有无限多个这样的元素且 $f_{T,\ q}$ 是单射相矛盾。

剩下要证明 $|(\{i\})\psi_T| \leq 1$。假设 α，$\beta \in (\{i\})\psi_T$ 且 $\alpha \neq \beta$，则会导出矛盾。由此可得

$$(Q_T \times F_{d,n,\{i\}})\boldsymbol{\lambda}_T \subseteq F_{d,n,\{\alpha\}} \cap F_{d,n,\{\beta\}} = \{\varepsilon_d\}.$$

对于每个 $j \in \{0,1,\ldots,d-1\}\setminus\{i\}$，根据证明的第一部分，我们可以选取某个 $j' \in (\{j\})\psi_T$。令 $b \in \{0,1,\ldots,d-1\}\setminus\left\{j' \;\middle|\; j \neq i\right\}$。由此可知，对于所有 $q \in Q_T$ 和 $w \in (X_n^*)^d$，都有 $|(q,\ w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_b| = 0$。这与引理 11.11 相矛盾。□

定义 14.5（$d\mathcal{O}_n$ 坐标映射，预备知识：1.4、14.4）。
我们定义映射 $\Psi\colon\ d\mathcal{O}_n \to \{0,1,\ldots,d-1\}^{\{0,1,\ \ldots^{d-1}\}}$ 如下

$$([T]_{\cong_S})\Psi = \psi_T,$$

其中 ψ_T 与引理 14.4 中的相同。请注意，定义 ψ_T 的性质在强换能器同构下保持不变，因此这是一个定义良好的映射。

定理 14.6（$d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 是半直积，预备知识：2.3、5.10、11.19、12.13、14.4、14.5、14.1）。映射 $\Psi\colon\ d\mathcal{O}_n \to \{0,1,\ldots,d-1\}^{\{0,1,\ldots,d-1\}}$（定义 *14.5*）是一个半群同态。此外，群 $d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 与 $d\mathcal{K}_{n,\ 1} \rtimes_a$ 对称群(d)同构，其中

$$d\mathcal{K}_{n,1} := \left\{S \in d\mathcal{O}_{n,1} \;\middle|\; (S)\Psi = id_{\{0,1,\ldots,d-1\}}\right\},$$

$a\colon\ d\mathcal{K}_{n,\ 1} \times$对称群$(d) \to d\mathcal{K}_{n,\ 1}$ 定义为

$$([A]_{\cong_S},g)a = [\mathrm{Core}(M_{\mathbf{g}})]_{\cong_S}^{-1}[\mathrm{Core}(M_f)]_{\cong_S}[\mathrm{Core}(M_{\mathbf{g}})]_{\cong_S}$$

与 $\mathbf{g} := \langle(^{\pi_{(i)g}})_{i\in\{0,1,\ldots,d-1\}}\rangle_{\mathfrak{C}_n^d}$ *(回顾定义 2.3)*。

证明。 若 $[A]_{\cong_S},[B]_{\cong_S} \in d\mathcal{O}_{n,1}$ 任意，则由引理 12.13 可得

$$[A]_{\cong_S}[B]_{\cong_S} = [M_{CR(\mathrm{Core}(AB))}]_{\cong_S}.$$

若 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，则 $(Q_A \times F_{d,n,\{i\}})\boldsymbol{\lambda}_A \subseteq F_{d,n,\{(i)\psi_A\}}$ 与 $(Q_B \times F_{d,n,\{(i)\psi_A\}})\boldsymbol{\lambda}_B \subseteq F_{d,n,\{(i)\psi_A\psi_B\}}$。因此

$$(Q_{AB} \times F_{d,n,\{i\}})\boldsymbol{\lambda}_{AB} = (Q_B \times (Q_A \times F_{d,n,\{i\}})\boldsymbol{\lambda}_A)\boldsymbol{\lambda}_B \subseteq F_{d,n,\{(i)\psi_A\psi_B\}}.$$

由此可得

$$(Q_{CR(\mathrm{Core}(AB))} \times F_{d,n,\{i\}})\boldsymbol{\lambda}_{CR(\mathrm{Core}(AB))} \subseteq F_{d,n,\{(i)\psi_A\psi_B\}}$$

同样成立，因此映射 Ψ 是一个同态。如果 T 是恒等转导器（定义 12.3），那么 ψ_T是 $\{0,1,\ldots,d-1\}$上的恒等映射。因此，由于 $d\mathcal{O}_{n,\ 1}$是一个群，我们必有 Ψ是从 $d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 到 $\mathrm{Sym}(d)$ 的群同态。由此可得，集合 $d\mathcal{K}_{n,\ 1} = (\{\mathrm{id}_{\{0,1,\ldots,d-1\}}\})\Psi^{-1}$是一个群。

对于每个 $g \in \mathrm{Sym}(d)$，令 T_g 为状态集为 $\{0\}$、且由下式定义的 $(d,\ n)$-转导器

$$(0,w)\boldsymbol{\lambda}_{T_g} = ((w)\pi_{(0)g}, (w)\pi_{(1)g}, \ldots, (w)\pi_{(d-1)g}),$$

对所有 $w \in (X_n^*)^d$ 均成立。对于所有 $g \in \mathrm{Sym}(d)$，我们有 $f_{T_g,\ 0} = \mathbf{g}$。因此，由引理 11.19，对于所有 $g \in \mathrm{Sym}(d)$，有 $\mathrm{Core}(T_g) = T_g \cong_S M_{\mathbf{g}} = \mathrm{Core}(M_{\mathbf{g}})$。特别地，对于所有$g \in$Sym$(d)$，我们有 $\mathbf{g} \in d\mathcal{B}_{n,\ 1}$。

定义 $\Psi'\colon \mathrm{Sym}(d) \to d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 为

$$(g)\Psi' = [\mathrm{Core}(M_{\mathbf{g}})]_{\cong_S}.$$

由于映射 $g \to \mathbf{g}$ 和 $\mathbf{g} \to [\mathrm{Core}(M_{\mathbf{g}})]_{\cong}$ 都是同态，因此映射 Ψ' 是同态。此外，由于 $\mathrm{Core}(M_{\mathbf{g}}) = M_{\mathbf{g}} \cong_S T_g$，可知 $\Psi'\Psi$ 是 $\mathrm{Sym}(d)$上的恒等映射。

我们定义映射 $\phi\colon d\mathcal{K}_{n,\ 1} \rtimes_a \mathrm{Sym}(d) \to d\mathcal{O}_n$ 和 $\phi'\colon d\mathcal{O}_n \to d\mathcal{K}_{n,\ 1} \rtimes_a \mathrm{Sym}(d)$为

$$(S,g)\phi = S(g)\Psi', \quad \text{and} \quad (S)\phi' = (S((S)\Psi\Psi')^{-1}, (S)\Psi).$$

注意，ϕ' 是良定义的，因为对所有 $S \in d\mathcal{O}_n$，我们都有

$$(S((S)\Psi\Psi')^{-1})\Psi = (S(((S)\Psi)^{-1})\Psi')\Psi = (S)\Psi((S)\Psi)^{-1} = \mathrm{id}_{\{0,1,\ldots,d-1\}}.$$

根据构造，映射 $\phi\phi'$ 和 $\phi'\phi$ 都是恒等映射，因此 ϕ 是一个双射。现在只需证明 ϕ 是同态。若 $(S_0,\ g_0)$，$(S_1,\ g_1) \in d\mathcal{K}_{n,\ 1} \rtimes_a \mathrm{Sym}(d)$，则有

$$\begin{aligned}
(S_0,g_0)\phi(S_1,g_1)\phi &= S_0(g_0)\Psi' S_1(g_1)\Psi' \\
&= S_0(g_0)\Psi' S_1((g_0)\Psi')^{-1}(g_0g_1)\Psi' \\
&= S_0(S_1, g_0^{-1})a(g_0g_1)\Psi' \\
&= (S_0(S_1, g_0^{-1})a, g_0g_1)\phi \\
&= ((S_0,g_0)(S_1,g_1))\phi.
\end{aligned}$$

因此结论成立。 □

$d\mathcal{O}_{n,1}$ 是 $\mathrm{Sym}(d)$ 与群 $d\mathcal{K}_{n,1}$ 的半直积。接下来，我们将着手分解群 $d\mathcal{K}_{n,1}$ 中的换能器（见引理 14.10）。随后，我们利用对这些换能器的描述，将 $d\mathcal{K}_{n,1}$ 嵌入群 $d\mathcal{P}_{n,n-1}$ 中（定理 14.12）。

群 $d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 建立在群$\mathcal{O}_{n,\ n-1}$ 之上，来自 [3]。我们证明了 [3], ，$\mathcal{O}_{n,\ n-1}$ 是一个与外自同构群 $\mathrm{Out}(G_{n,\ n-1})$ 同构的群（因此得名）。下一定义中坚持要求 $Q_T \subseteq \mathbb{N}$ 是任意的，这样做只是为了避免出现真类。

定义 14.7 ($\mathcal{O}_{n,\ n-1}$，预备知识：1.10、4.9、11.10、11.19、12.1、12.13、14.8)。我们称转导器 T 为$\mathcal{O}_{n,\ n-1}$ 转导器，当且仅当

(1) $Q_T \subseteq \mathbb{N}$，与 $D_T = R_T = X_n^*$。(2) $T \cong_S M_T$。(3) T 具有完全响应。(4) T 是同步的，且 Core(T) $= T$。(5) 对所有 $q \in Q_T$，映射 $f_{T,q}$ 是从 $\mathfrak{C}_n^d$ 到 $\mathfrak{C}_n^d$ 的一个同胚。

我们还将 $\widetilde{\mathcal{O}_n}_{,n-1}$ 定义为集合 $\left\{T \,\middle|\, T \text{ 是一个 } \widetilde{\mathcal{O}_n}_{,n-1} \text{ 转导器}\right\} / \cong_S$，，其乘法定义为 $[A]_{\cong_S}[B]_{\cong_S} = [C]_{\cong_S}$，其中 C 与 $M_{CR(\mathrm{Core}(AB))}$ 强同构（我们将在引理 14.8 中证明该运算定义良好，并使 $\mathcal{O}_{n,n-1}$ 成为一个幺半群）。接着，我们将 $\mathcal{O}_{n,n-1}$ 定义为 $\mathcal{O}_{n,n-1}$ 的单位群，并称一个 $\mathcal{O}_{n,n-1}$ 转导器 T 是可逆 的，当且仅当 $[T]_{\cong_S} \in \mathcal{O}_{n,n-1}$。

引理 14.8 ($\mathcal{O}^{n,\ n-1}$ 如k预期 d, A设 d Knowled引：11.13、11.9、12.3、12.9、14.7)。定义 *14.7* 中给出的运算使 $\mathcal{O}_{n,\ n-1}$ 成为一个定义良好的幺半群。此外，如果 A, B是同步$(1, n)$-转导器，且 $A \cong_S M_{CR(A)}$, $B \cong_S M_{CR(B)}$ 并且存在 $a \in Q_A, b \in Q_B$使得 $f_{A,\ a} = f_{B,\ b}$，那么$\mathrm{Core}(A) \cong_S \mathrm{Core}(B)$。

证明。 </style>令 , B 为任意转导器。在本证明余下部分（为避免出现嵌套下标），若 T是一个 (1, n)-转导器，我们将改用 M(T) 表示 M_T。

首先需要证明， M(CR(Core(AB))) 与某个 $\mathcal{O}_{n,n-1}$ 转导器强同构。 A 和 B 的所有状态都定义了从 $\mathfrak{C}_n$ 到 $\mathfrak{C}_n$的开子集的同胚，因此由引理 11.13 可知， AB 的所有状态都定义了从 $\mathfrak{C}_n$ 到 $\mathfrak{C}_n$的开子集的同胚。因此，根据备注 11.9 和引理 12.9， M(CR(Core(AB)))的所有状态也都定义了从 $\mathfrak{C}_n^d$ 到 $\mathfrak{C}_n^d$的开子集的同胚。

根据构造， M(CR(Core(AB))) 是其自身的最小转导器，具有完全响应，是其自身的核心，并且具有所需的定义域和值域。因此，$\mathcal{O}_{n,n-1}$ 的运算定义良好。

断言：设 S, T 是任意的同步 (1, n)-转导器，满足 $S \cong_S M$(CR(S)) 和 $T \cong_S M$(CR(T))。若存在 $q_s \in Q_S$ 和 $q_t \in Q_T$，使得 $f_{T,q_t} = f_{S,q_s}$，则 Core(T) $\cong_S$Core(S)。

断言的证明：若 $q \in Q_T$，则对所有 $v, w \in X_n^*, x \in \mathfrak{C}_n$，我们有

(1) (q, w)$\boldsymbol{\lambda}_T$由集合 ($\mathfrak{C}_n$)$f_{T,q}$ 和 ($w\mathfrak{C}_n$)$f_{T,q}$ 确定。因此 (q, w)$\boldsymbol{\lambda}_T$由$f_{T,q}$确定。(2) (wx)$f_{T,q}$ = (q, w)$\boldsymbol{\lambda}_T$ (x)$f_{T,(q,w)\boldsymbol{\pi}_T}$与

$$(q, v)\boldsymbol{\pi}_T = (q, w)\boldsymbol{\pi}_T \iff f_{T,(q,w)\boldsymbol{\pi}_T} = f_{T,(q,v)\boldsymbol{\pi}_T},$$

因此 $f_{T,q}$决定了 (q, v)$\boldsymbol{\pi}_T$ = (q, w)$\boldsymbol{\pi}_T$ 是否成立。

(3) 核心(T) $\subseteq$ (q, X_n^*)$\boldsymbol{\pi}_T$。

结合以上观察即可得出结果。♢

具有适当定义域，值域和状态集的恒等换能器（定义 12.3）是 $\mathcal{O}_{n,\ n-1}$换能器，因此 $\mathcal{O}_{n,\ n-1}$ 具有一个单位元。

接下来需要证明我们的二元运算是结合的。设 A，B，C 是任意的 $\mathcal{O}_{n,\ n-1}$ 换能器，我们需要证明

$$M(CR(\mathrm{Core}(M(CR(\mathrm{Core}(AB)))C))) \cong_S M(CR(\mathrm{Core}(AM(CR(\mathrm{Core}(BC)))))).$$

根据证明 $\mathcal{O}_{n,n-1}$ 中的乘法定义良好的同一论证，转导器 $T :=$ $M(CR(\mathrm{Core}(ABC)))$ 是一个 $\mathcal{O}_{n,n-1}$ 转导器。

注意，Core 算子与 M 和 CR 算子可交换，因此 $T = \mathrm{Core}(M(CR(ABC)))$。令 $(a,b,c) \in Q_{ABC}$ 为任意对象。根据备注 11.9 与引理 12.9，存在某个 $q \in Q_{M(CR(ABC))}$ 和 $p \in X_n^*$，使得

$$f_{M(CR(ABC)),q} = f_{A,a} f_{B,b} f_{C,c} \lambda_p^{-1}.$$

令 $(a,b,c) \in Q_A \times Q_B \times Q_C$ 为任意对象，且满足 $(a,b) \in \mathrm{Core}(AB)$。再次根据备注 11.9 与引理 12.9，存在 $q \in Q_{M(CR(\mathrm{Core}(AB)))}$ 和 $p \in X_n^*$，使得

$$f_{M(CR(AB))C,(q,c)} = f_{A,a} f_{B,b} f_{C,c} \lambda_p^{-1},$$

因此存在 $q \in Q_{M(CR(M(CR(\mathrm{Core}(AB)))C))}$ 和 $p \in X_n^*$，使得

$$f_{M(CR(M(CR(AB))C)),q} = f_{A,a} f_{B,b} f_{C,c} \lambda_p^{-1}.$$

再次交换 Core 算子，我们得到

$$M(CR(\mathrm{Core}(M(CR(\mathrm{Core}(AB)))C))) = \mathrm{Core}(M(CR(M(CR(\mathrm{Core}(AB)))C))).$$

因此，换能器 T和 $M(CR(\mathrm{Core}(M(CR(\mathrm{Core}(AB)))C)))$ 是这样的换能器的核心：这些换能器的状态定义了一个公共映射（由于它们具有完全响应，上面对 p 的选择必须一致）。根据断言，这意味着

$$T \cong_S M(CR(\mathrm{Core}(M(CR(\mathrm{Core}(AB)))C))).$$

通过对称论证，我们也有

$$T \cong_S M(CR(\mathrm{Core}(AM(CR(\mathrm{Core}(BC)))))).$$

所以结论成立。 □

定义 14.9 ($d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$，预备知识：11.14、14.7、14.10)。
我们称换能器 T 是一个 $d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 转导器，如果 $T = \prod_{i\in\{0,1,\ldots,d-1\}} T_i$，其中 T_0，T_1、……、T_{d-1}均为 $\mathcal{O}_{n\ ,\ n-1}$ 转导器。我们还将 $d\mathcal{P}_{n\ \ ,\ n-1}$ 定义为集合 $\left\{T \;\middle|\; T \text{是一个 } d\mathcal{P}_{n\ \ ,\ n-1} \text{转导器}\right\} / \cong_S$，其乘法定义为 $[A]_{\cong_S}[B]_{\cong_S} = [C]_{\cong_S}$，其中 C与 $M_{CR(\mathrm{Core}(AB))}$强同构（我们将在引理 14.10 中证明该对象定义良好）。

引理 14.10（乘积分解，预备知识：1.10、2.3、11.5、11.18、14.6、14.7、14.9）。
如果 $[T]_{\cong_S} \in d\mathcal{K}_{n,\ 1}$ 那么 T与一个 $d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 转导器强同构。此外，如果 A、B 是 $d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$转导器，那么 $T :=$ $M_{CR(\mathrm{Core}(AB))}$ 与一个 $d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 转导器强同构，因此定义 *14.9* 中的对象 $d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 定义良好。

证明。令 T 为一个转导器，使得对于某个 $d\mathcal{P}_{n,n-1}$转导器 A 与 B，要么 $[T]_{\cong_S} \in d\mathcal{K}_{n,1}$，要么 $T = M_{CR(\mathrm{Core}(AB))}$。对于每个 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$, 令

$$\sim_i := \left\{(p,q) \in Q_T^2 \;\middle|\; \text{there is } w \in F_{d,n,\{i\}} \text{ with } (p,w)\boldsymbol{\pi}_T = q\right\}.$$

断言 1: 对于所有 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，二元关系 $\sim_i$是 Q_T上的等价关系。此外，如果 $p \in Q_T$，则存在 $w_p \in F_{d,n,\{i\}}$，使得对于所有 $q \in [p]_{\sim_i}$，我们都有 $(q,w_p)\boldsymbol{\pi}_T = p$。断言的证明：

---

(1) 自反：如果 $q \in Q_T$，那么 $(q,\varepsilon_d)\boldsymbol{\pi}_T = q$与 $\varepsilon_d \in F_{d,n,\{i\}}$。因此 $q \sim_i q$。(2) 对称：假设 $p, q \in Q_T$满足 $(p,q) \in \sim_i$。令 $w \in (\{p\})\mathfrak{s}_T^{-1}$，并令 $v \in F_{d,n,\{i\}}$满足 $(p,v)\boldsymbol{\pi}_T = q$。令 $w = w_p w'$，其中 $w_p \in F_{d,n,\{i\}}$ 与 $w' \in F_{d,n,\{0,1,\ldots,d-1\}\setminus\{i\}}$。我们有

$$\begin{aligned}(q,w_p)\boldsymbol{\pi}_T &= ((p,v)\boldsymbol{\pi}_T, w_p)\boldsymbol{\pi}_T = ((p,w)\boldsymbol{\pi}_T, vw_p)\boldsymbol{\pi}_T = (p, wvw_p)\boldsymbol{\pi}_T \\ &= (p, w_p w' v w_p)\boldsymbol{\pi}_T = (p, w_p v w' w_p)\boldsymbol{\pi}_T = (p, w_p v w)\boldsymbol{\pi}_T \\ &= ((p,w_p v)\boldsymbol{\pi}_T, w)\boldsymbol{\pi}_T = (w)\mathfrak{s}_T = p.\end{aligned}$$

因此 $q \sim_i p$。

(3) 传递：假设 $q_0 \sim_i q_1$ 与 $q_1 \sim_i q_2$。因此存在 $v_0, v_1 \in F_{d,n,\{i\}}$，使得 $(q_0, v_0)\boldsymbol{\pi}_T = q_1$ 且 $(q_1, v_1)\boldsymbol{\pi}_T = q_2$。特别地

$$(q_0, v_0 v_1)\boldsymbol{\pi}_T = ((q_0,v_0)\boldsymbol{\pi}_T, v_1)\boldsymbol{\pi}_T = (q_1,v_1)\boldsymbol{\pi}_T = q_2.$$

所以 $q_0 \sim_i q_2$。

。若我们选择 w_p，就像证明 $\sim_i$ 是对称的那样，那么断言的第二部分便可由同一串等式推出。 ♢

若 $q \in Q_T$， $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，并将 T 的定义域、值域和状态集分别限制为 $F_{d,n,\{i\}}$、$F_{d,n,\{i\}}$ 和 $[q]_{\sim_i}$，那么我们就得到 T 的一个子转导器（当 $[T]_{\cong_S} \in d\mathcal{K}_{n,1}$ 时，这仅仅因为 $([T]_{\cong_S})\Psi$ 是平凡的才为真）。

我们将此转导器记作 $S_{q,i}$；它是一个 $(1, n)$-转导器，可通过以自然的方式将幺半群 $F_{d,n,\{i\}}$ 替换为 X_n^* 而得到，并且与此转导器同构。

断言 2: 若 $q \in Q_T$ 且 $w \in (X_n^*)^d$，则

$$(q,w)\boldsymbol{\lambda}_T = ((q,(w)\pi_0)\boldsymbol{\lambda}_{S_{q,0}}, (q,(w)\pi_1)\boldsymbol{\lambda}_{S_{q,1}}, \ldots, (q,(w)\pi_{d-1})\boldsymbol{\lambda}_{S_{q,d-1}}).$$

断言的证明：任取 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$。我们证明 $(q, w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i = (q, (w)\pi_i)\boldsymbol{\lambda}_{S_{q,i}}$。设 $w = w_i w'$，其中$w_i \in F_{d,n,\{i\}}$ 与$w' \in F_{d,n,\{0,1,\ldots,d-1\}\setminus\{i\}}$。我们有

$$\begin{aligned}(q,w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i &= (q, w_i w')\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i = ((q,w_i)\boldsymbol{\lambda}_T((q,w_i)\boldsymbol{\pi}_T, w')\boldsymbol{\lambda}_T)\pi_i \\ &= (q,w_i)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i((q,w_i)\boldsymbol{\pi}_T, w')\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i.\end{aligned}$$

根据 T的选取，我们有 $((q, w_i)\boldsymbol{\pi}_T, w')\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i = \varepsilon$。因此

$$(q,w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i = (q,w_i)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_i = (q,(w)\pi_i)\boldsymbol{\lambda}_{S_{q,i}}$$

正如所需。 ♢

断言 3：若 $q \in Q_T$与 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，则 $S_{q,i}$与一个 $\mathcal{O}_{n,n-1}$ 转导器强同构。断言的证明：根据断言 1，转导器 $S_{q,i}$ 是同步的，且是其自身的核心。假设$p \in [q]_{\sim_i}$ 且 $w \in X_n^*$ 满足条件 $(\mathfrak{C}_n)$ $f_{S_{q,i},p} \subseteq w\mathfrak{C}_n$。由断言 2 可得

$$(\mathfrak{C}_n^d) f_{T,p} \subseteq w'\mathfrak{C}_n^d$$

其中 $(w')\,\pi_i = w$ 且 $(w')\,\pi_j = \varepsilon$，对于 $j \neq i$成立。由于 T 具有完全响应，可知 $w = \varepsilon$。因此$S_{q,\,i}$ 具有完全响应。

如果 $[T]_{\cong_S} \in d\mathcal{K}_{n,\,1}$，那么（根据注释 11.18），对于所有 $q \in Q_T$，函数 $f_{T,\,q}$ 都是单射的，并且具有开像。如果对于某个 $d\mathcal{P}_{n,\,n-1}$，$T = M_{CR(\mathrm{Core}(AB))}$ 转导器 A，B，且 $p \in Q_T$ 是任意的，那么（根据引理 11.5、11.13 和 12.9），存在 $p_a \in Q_A$、$p_b \in Q_B$ 与 $w \in (X_n^*)^{\,d}$，使得 $f_{T,\,p} = f_{A,\,p_a} f_{B,\,p_b} \lambda_w^{-1}$。因此，对于所有 $q \in Q_T$，函数 $f_{T,\,q}$ 再次是单射的，并且具有开像。

根据断言 2，可知如果 $p \in [q]_{\sim_i}$，那么

$$f_{T,p} = \langle \pi_0 f_{S_{q,0},p}, \pi_1 f_{S_{q,1},p}, \ldots, \pi_{d-1} f_{S_{q,d-1},p} \rangle_{\mathfrak{C}_n^d}.$$

特别地，$f_{S_{q,\,i},\,p}$ 是连续的、单射的，并且其像为 $(\mathfrak{C}_n^d)\,f_{T,\,p}\pi_i$（由于它是开集的投影，因此是开集）。根据注 3.18，$f^{-1}_{S_{q\,i},\,,\,p}$ 也是连续的。

还需证明 $S_{q,\,i} \cong_S M_{S_{q,\,i}}$。设 q_0，$q_1 \in Q_{S_{q,\,i}}$ 满足 $(p_0,\ v)\boldsymbol{\lambda}_{S_{q,\,i}} = (p_1,\ v)\boldsymbol{\lambda}_{S_{q,\,i}}$ 对所有 $v \in X_n^*$ 都成立。由于 $T \cong_S M_T$，只需证明 $(p_0,\ w)\boldsymbol{\lambda}_T = (p_1,\ w)\boldsymbol{\lambda}_T$ 对所有 $w \in (X_n^*)^d$ 都成立。

任取 $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，以及 $w \in F_{d,\,n,\,\{j\}}$。根据断言 2，只需证明 $(p_0,\ w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j = (p_1,\ w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j$。如果 $j = i$，则由关于 p_0，p_1 的假设即可得到结论。否则，取$s \in F_{d,\,n,\,\{i\}}$ 使得 $(p_0,\ s)\boldsymbol{\pi}_T = p_1$。于是

$$\begin{aligned}(p_0, w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j &= (p_0, w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j((p_0, w)\boldsymbol{\pi}_T, s)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j = (p_0, ws)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j = (p_0, sw)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j \\ &= ((p_0, s)\boldsymbol{\lambda}_T(p_1, w)\boldsymbol{\lambda}_T)\pi_j = (p_1, w)\boldsymbol{\lambda}_T\pi_j\end{aligned}$$

如所要求。♢

断言 4：对于所有 $w \in F_{d,\,n,\,\{0,1,\ldots,d-1\}\setminus\{i\}}$ 与 $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，映射 $p \mapsto (p,\ w)\pi_T$定义了从 $S_{q,\,i}$ 到 $S_{(q,w)\pi_T,\,i}$的强换能器同构。

断言的证明：由于 $F_{d,\,n,\,\{0,1,\ldots,d-1\}\setminus\{i\}}$ 的所有元素都与 $F_{d,\,n,\,\{i\}}$的所有元素可交换，因此该映射是一个同态。

还需证明该映射可逆。对于所有 $p \in [q]_{\sim_i}$，令 $w_p \in F_{d,\,n,\,\{i\}}$ 如断言 1 中所述。令 $w' \in (\{q\})\,\mathfrak{s}_T^{-1}$ 为任意元素，并令 $w'' \in F_{d,\,n,\,\{0,1,\ldots,d-1\}\setminus\{i\}}$ 满足 $w \in w''F_{d,\,n,\,\{i\}}$。注意，对于所有 $p \in Q_T$，都有 $q \sim_i (p,\ w'')\boldsymbol{\pi}_T$。因此，对于所有 $p \in [q]_{\sim_i}$，有

$$\begin{aligned}((p, w)\boldsymbol{\pi}_T, w'')\boldsymbol{\pi}_T &= (((p, w_p)\boldsymbol{\pi}_T, w)\boldsymbol{\pi}_T, w'')\boldsymbol{\pi}_T = (p, w_p w w'')\boldsymbol{\pi}_T \\ &= (p, ww''w_p)\boldsymbol{\pi}_T = ((p, w)\boldsymbol{\pi}_T, w''w_p)\boldsymbol{\pi}_T = p\end{aligned}$$

因此，映射 $p \mapsto (p,\ w)\pi_T$ 和 $p \mapsto (p,\ w'')\pi_T$ 是所需的互逆同态。♢

根据断言 4，对于每个 $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，，令 T_i 为与 $S_{q,\,i}$ 同构的一个 $\mathcal{O}_{n,\,n-1}$ 转导器，对所有 $q \in Q_T$ 均如此。此外，对于每个 $q \in Q_T$ 和 $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，令 $\phi_{q,\,i} : S_{q,\,i} \to T_i$ 为一个强转导器同构。对于所有 $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，定义 $\phi_{iD} = \phi_{iR}$ 为映射 $\pi_i : (X_n^*)^d \to (X_n^*)$，并将 ϕ_{iQ} 定义为映射 $\phi_{q,\,iQ}$ 对所有 $q \in Q_T$ 的并集。

断言 5：对于所有 $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$，三元组 $\phi_i := (\phi_{iQ},\ \phi_{iD},\ \phi_{iR})$ 是从 T 到 T_i 的变换器同态。

断言的证明：若 $p,\ q \in Q_T$ 与 $p \sim_i q$ 与 $w \in$ 的定义域($\mathfrak{s}_{S_{q,\ i}}$)，则

$$((w)\mathfrak{s}_{S_{q,i}})\phi_{q,iQ} = (w)\mathfrak{s}_{T_i} = ((w)\mathfrak{s}_{S_{q,i}})\phi_{p,iQ}$$

so $\phi_{q,i} = \phi_{p,i}$. 特别地，ϕ_{iQ} 是定义域互不相交的函数的并集，因此本身也是一个函数
。接下来我们证明 ϕ_i 是一个同态。任取 $q \in Q_T$ 和 $w \in D_T$。若 $w_q \in (\{q\})\mathfrak{s}_T^{-1}$，则

$$(q,w)\boldsymbol{\pi}_T\phi_{iQ} = ((w_q w)\pi_i)\mathfrak{s}_{T_i} = (((w_q)\pi_i)\mathfrak{s}_{T_i}, (w)\pi_i)\boldsymbol{\pi}_{T_i} = ((q)\phi_{iQ}, (w)\pi_i)\boldsymbol{\pi}_{T_i}.$$

关于输出函数的条件由断言 2 得出。 ◊

设 $P := \prod_{i\in\{0,1,\ldots,d-1\}} T_i$（定义 11.14），且 $\phi := \langle \phi_0,\ \phi_1,\ \ldots,\ \phi_{d-1}\rangle_P$（定义 2.3）。我们需要证明 ϕ 是一个强换能器同构。根据定义，$\phi_D = \phi_R = \langle \pi_0,\ \pi_1,\ \ldots,\ \pi_{d-1}\rangle_{(X_n^*)^d} = \mathrm{id}_{(X_n^*)^d}$，因此我们只需证明 ϕ_Q 是一个双射。

令 $(q_0,\ q_1,\ \ldots\ldots,\ q_{d-1}) \in Q_P$为任意对象。对于每个 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，令 $w_i \in (\{q_i\})\mathfrak{s}_{T_i}^{-1}$。由于 ϕ是同态，因此可得

$$(q,(w_0,w_1,\ldots,w_{d-1}))\boldsymbol{\pi}_T\phi_Q = (q_0,q_1,\ldots,q_{d-1})$$

其中 $q \in Q_T$ 是任意的。特别地，ϕ 是满射。

由引理 11.5 可知，存在一个强转导器同态 ψ，使得 $\phi\psi = q_T$。由于 $T \cong_S M_T$，商映射 q_T 是双射，因此 ϕ 也满足要求。□

定义 14.11 ($d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$，预备知识：14.9、14.10)。

我们将在定理 14.12 中证明，$d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 是一个幺半群。我们将 $d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 定义为 $d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$的单位群。此外，我们称一个 $d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 转导器 T是可逆的，如果$[T]_{\cong_S} \in d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$。

定理 14.12 ($d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 嵌入，预备知识：11.9、11.13、12.9、12.13、14.8、14.10、14.11)。

d 由 $\phi\colon\ \mathcal{O}_{n,\ n-1} \to d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 定义的函数 $([T_0]_{\cong_S}, [T_1]_{\cong_S}, \ldots, [T_{d-1}]_{\cong_S})$ $\phi = [\prod_{i\in\{0,1,\ldots,d-1\}} T_i]_{\cong_S}$是定义良好的幺半群同构。此外，存在一个嵌入 $\Phi\colon\ d\mathcal{K}_{n,\ 1} \to d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 使得当 $([T]_{\cong_S})\ \Phi = [P]_{\cong_S}$时，我们有 $P \cong_S T$。

证明。注意，如果 $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{d-1},\ B_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_{d-1}$是$\mathcal{O}_{n,\ n-1}$换能器，并且

$$\prod_{i\in\{0,1,\ldots,d-1\}} A_i \cong_S \prod_{i\in\{0,1,\ldots,d-1\}} B_i,$$

那么对于所有的 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，我们都有 $A_i \cong_S B_i$（这一点在引理 14.10 的证明中有所说明）。因此，ϕ 是一个定义良好的双射。

令 $[A]_{\cong_S}, [B]_{\cong_S} \in d\mathcal{P}_{n,n-1}$ 为任意元素，并假设 $[A]_{\cong_S}[B]_{\cong_S} = [C]_{\cong_S}$

$$([A]_{\cong_S})\phi^{-1} = ([A_0]_{\cong_S}, [A_1]_{\cong_S}, \ldots, [A_{d-1}]_{\cong_S}),$$

$$([B]_{\cong_S})\phi^{-1} = ([B_0]_{\cong_S}, [B_1]_{\cong_S}, \ldots, [B_{d-1}]_{\cong_S}),$$

$$([C]_{\cong_S})\phi^{-1} = ([C_0]_{\cong_S}, [C_1]_{\cong_S}, \ldots, [C_{d-1}]_{\cong_S}).$$

此外，令 $\alpha\colon\ A \to \prod_{i\in\{0,1,\ldots,d-1\}} A_i$, $\beta\colon\ B \to \prod_{i\in\{0,1,\ldots,d-1\}} B_i$, $\gamma\colon\ C \to \prod_{i\in\{0,1,\ldots,d-1\}} C_i$ 为转导器同构。

令 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$ 任意。要证明 ϕ 是同构（因此 $d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 是一个幺半群），我们只需证明 $M_{CR(\mathrm{Core}(A_iB_i))} \cong_S C_i$。令 $q \in Q_C$ 任意。根据备注 11.9、引理 11.13 和引理 12.9，存在 $q_a \in Q_A$、$q_b \in Q_B$ 与 $w \in (X_n^*)^d$，使得

$$f_{C,q} = f_{A,q_a} f_{B,q_b} \lambda_w^{-1}.$$

此外（由于 α、β、γ 是强转导器同构），我们有

$$f_{A,q} = \langle \pi_0 f_{A_0,(q)\alpha_Q\pi_0}, \pi_1 f_{A_1,(q)\alpha_Q\pi_1}, \ldots, \pi_{d-1} f_{A_{d-1},(q)\alpha_Q\pi_{d-1}} \rangle_{\mathfrak{C}_n^d},$$

$$f_{B,q} = \langle \pi_0 f_{B_0,(q)\beta_Q\pi_0}, \pi_1 f_{B_1,(q)\beta_Q\pi_1}, \ldots, \pi_{d-1} f_{B_{d-1},(q)\beta_Q\pi_{d-1}} \rangle_{\mathfrak{C}_n^d},$$

$$f_{C,q} = \langle \pi_0 f_{C_0,(q)\gamma_Q\pi_0}, \pi_1 f_{C_1,(q)\gamma_Q\pi_1}, \ldots, \pi_{d-1} f_{C_{d-1},(q)\gamma_Q\pi_{d-1}} \rangle_{\mathfrak{C}_n^d}.$$

因此特别有 $f_{C_i,\ (q)\ \gamma_Q\pi_i} = f_{A_i,\ (q_a)\ \gamma_Q\pi_i} f_{B_i,\ (q_b)\ \gamma_Q\pi_i} \lambda_w^{-1}$（）$_{\pi_i}$。令 $P_i := M_{CR(A_iB_i)}$。由于 Core 算子与 CR 和 M 算子可交换，我们有 Core(P_i)$= M_{CR(\mathrm{Core}(A_iB_i))}$。

By 根据备注 11.9 与引理 11.13，存在一个状态 $p \in Q_{P_i}$ 和一个字 $v \in X_n^*$，使得

$$f_{P_i,p} = f_{A_i,(q_a)\gamma_Q\pi_i} f_{B_i,(q_b)\gamma_Q\pi_i} \lambda_v^{-1}.$$

由于 P_i 和 C_i 都具有完全响应，因此可得 $f_{P_i,\ p} = f_{C_i,\ (q)\ \gamma_Q\pi_i}$。于是根据引理 14.8，我们有

$$C_i = \mathrm{Core}(C_i) \cong_S \mathrm{Core}(P_i) = M_{CR(\mathrm{Core}(A_iB_i))}$$

如所要求。

现在证明定理的最后一部分。根据引理 14.10，存在唯一的映射 $\Phi\colon \mathcal{K}_{n,\ 1} \to d\mathcal{O}_{n,\ n-1}$，使得所要求的同构类型条件成立。此外，由于 Φ 满足该条件，Φ 必为单射。Φ 是同态这一事实由引理 12.13 得出。

注意，Φ 是一个同态，$d\mathcal{K}_{n,\ 1}$ 是一个群，并且 Φ 将$d\mathcal{K}_{n,\ 1}$ 的单位元映射到$d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$的单位元。因此，($d\mathcal{K}_{n,\ 1}$)Φ 包含在$d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$的单位群中。所以，Φ 确实是从$d\mathcal{K}_{n,\ 1}$ 到$d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 的映射，正如所要求的。□

定理 14.13（wreath 嵌入，预备知识：14.6、14.12、14.2）。

群 外自同构群(dV_n) 嵌入群 $\mathcal{O}_{n,\ n-1} \wr_a$ 对称群(d) 中，其中 a 是对称群对称群(d) 在 $\{0,1,\ldots,d-1\}$上的通常作用。

证明。 这由定理 14.6 和 14.12 得出。 □

定理 14.13 给出了外自同构群(dV_n) 和外自同构群(V_n) $\wr_a$ 对称群(d) 到群$\mathcal{O}_{n,\ n-1} \wr_a$ 对称群(d) 的嵌入。因此，为了比较这些群，我们需要对这些嵌入的像作出有用的描述。为此，我们采用定义 7.6 中的签名这一概念。$\mathfrak{C}_n^d$ 的每个开闭子集都可以表示为锥的有限并（定义 10.1）。因此，$\mathfrak{C}_n^d$的任意同胚都必须将每个锥映射为有限个锥；签名映射衡量锥被分割的程度。

定义 14.14（闭开集特征，预备知识：1.1、5.6、11.14、14.7、14.12）。对每个 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$，我们定义一个映射ssig$_{d,n}$：$\left\{ S \subseteq \mathfrak{C}_n^d \;\middle|\; \overline{S}\text{是既开又闭} \right\} \to \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$为($S$)ssig$_{d,\ n} = \overline{m + (n-1)\mathbb{Z}}$，其中 m 使得存在两两不相交的 $w_0\mathfrak{C}_n^d, w_1\mathfrak{C}_n^d,$ ……, $w_{m-1}\mathfrak{C}_n^d$，满足

$$(w\mathfrak{C}_n) f_{T,q} = \bigcup_{i \in \{0,1,\ldots,m-1\}} w_i \mathfrak{C}_n^d.$$

然后我们定义一个映射 $\mathrm{ssig}_{d,n}\colon d\mathcal{P}_{n,n-1}\to\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ 为

$$([P]_{\cong_S})\overline{\mathrm{sig}_{d,n}}=((w\mathfrak{C}_n)f_{P,q})\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}}$$

其中 $w\in(X_n^*)^d$, $q\in Q_P$ 是任意的。我们将在引理 14.15 中证明这些映射定义良好。**引理 14.15**（签名成立，预备知识：11.9、11.13、12.9、14.14）。设 $d\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$。映射 $\widetilde{\overline{sig}_{d,n}}:d\mathcal{P}_{n,n-1}\to\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$（定义 *14.14*）定义良好。此外，若我们将 $\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ 视为一个以整数乘法为运算的半群，那么 $\widetilde{\overline{sig}}_{d,n}$ 是一个半群同态。

证明。我们首先证明 $\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}}$ 定义良好。设 S 是 $\mathfrak{C}_n^d$ 的一个开闭子集。假设 $F_1,F_2\subseteq(X_n^*)^d$ 满足两组集合 $\left\{v\mathfrak{C}_n^d\;\middle|\;v\in F_1\right\}$ 和 $\left\{v\mathfrak{C}_n^d\;\middle|\;v\in F_2\right\}$ 分别都两两不相交，并且

$$S=\bigcup_{v\in F_1}v\mathfrak{C}_n^d=\bigcup_{v\in F_2}v\mathfrak{C}_n^d.$$

由于 S 是紧致的，因此 F_1 和 F_2 都是有限的。我们定义

$$k:=\max\left(\left\{|(v)\pi_i|\;\middle|\;v\in F_1\cup F_2,i\in\{0,1,\dots,d-1\}\right\}\right),$$

并定义 $F_3:=\left\{v\in(X_n^k)^d\;\middle|\;v\mathfrak{C}_n^d\subseteq S\right\}$。对于所有 $v\in F_1\cup F_2$，我们有 $v\mathfrak{C}_n^d=\bigcup\left\{u\mathfrak{C}_n^d\;\middle|\;u\in F_3,v\le u\right\}$.由引理 10.3，我们得到

$$\sum_{v\in F_1}1+(n-1)\mathbb{Z}=\sum_{v\in F_1}\left|\left\{u\in F_3\;\middle|\;v\le u\right\}\right|+(n-1)\mathbb{Z}=|F_3|+(n-1)\mathbb{Z}.$$

特别地，$|F_1|+(n-1)\mathbb{Z}=|F_3|+(n-1)\mathbb{Z}$，并通过对称论证，我们得到 $|F_2|+(n-1)\mathbb{Z}=|F_3|+(n-1)\mathbb{Z}=|F_1|+(n-1)\mathbb{Z}$。因此，映射 $\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}}$ 定义良好。

设 $\widetilde{[P]}_{\cong_S}\in d\mathcal{P}_{n,n-1}$，$w\in(X_n^*)^d$ 与 $q\in Q_P$ 均为任意元素。设 k 为 P的同步长度。为了得出 $\mathrm{sig}_{d,n}$ 定义良好，我们只需证明 $((w\mathfrak{C}_n^d)f_{P,q})\mathrm{ssig}_{d,n}$ 与 w和 q无关。证明如下：

$$\begin{aligned}((w\mathfrak{C}_n^d)f_{P,q})\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}}&=\left(\left(\bigcup_{v\in(X_n^k)^d}wv\mathfrak{C}_n^d\right)f_{P,q}\right)\overline{\mathrm{sig}_{d,n}}=\left(\bigcup_{v\in(X_n^k)^d}\left(wv\mathfrak{C}_n^d\right)f_{P,q}\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}}\\&=\sum_{v\in(X_n^k)^d}\left(\left(wv\mathfrak{C}_n^d\right)f_{P,q}\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}}=\sum_{v\in(X_n^k)^d}\left((q,wv)\boldsymbol{\lambda}_P\left(\mathfrak{C}_n^d\right)f_{P,(wv)\mathfrak{s}_P}\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}}\\&=\sum_{v\in(X_n^k)^d}\left(\left(\mathfrak{C}_n^d\right)f_{P,(wv)\mathfrak{s}_P}\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}}=\sum_{v\in(X_n^k)^d}\left(\left(\mathfrak{C}_n^d\right)f_{P,(v)\mathfrak{s}_P}\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}}.\end{aligned}$$

现在需要证明 $\overline{\mathrm{sig}_{d,n}}$ 是一个半群同态。设 A，B，$C\in d\mathcal{P}_{n,n-1}$ 满足$[A]_{\cong_S}[B]_{\cong_S}=[C]_{\cong_S}$。由备注 11.9、引理 11.13 和 12.9，设 $q\in Q_C$，则存在 $(q_a,q_b)\in Q_A\times Q_B$以及 $w\in X_n^*$，使得 $f_{C,q}=f_{A,q_a}f_{B,q_b}\lambda_w^{-1}$。此外，任取 $F\subseteq(X_n^*)^d$，使得 $(\mathfrak{C}_n)f_{A,q_a}=\bigcup_{v\in F}v\mathfrak{C}_n$，并且集合族 $\left\{v\mathfrak{C}_n\;\middle|\;v\in F\right\}$ 中的集合两两不相交。

现在有

$$\begin{aligned}([C]_{\cong_S})\overline{\mathrm{sig}_{d,n}} &= ((\mathfrak{C}_n)f_{C,q})\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} = ((\mathfrak{C}_n)f_{A,q_a}f_{B,q_b}\lambda_w^{-1})\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} = ((\mathfrak{C}_n)f_{A,q_a}f_{B,q_b})\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} \\ &= \left(\left(\bigcup_{v\in F} v\mathfrak{C}_n\right) f_{B,q_b}\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} = \left(\bigcup_{v\in F}(v\mathfrak{C}_n)\, f_{B,q_b}\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} \\ &= \sum_{v\in F}((v\mathfrak{C}_n)\, f_{B,q_b})\,\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} = \sum_{v\in F}([B]_{\cong_S})\,\overline{\mathrm{sig}_{d,n}} = ([B]_{\cong_S})\,\overline{\mathrm{sig}_{d,n}}|F| \\ &= ([A]_{\cong_S})\,\overline{\mathrm{sig}_{d,n}}\,([B]_{\cong_S})\,\overline{\mathrm{sig}_{d,n}}.\end{aligned}$$

□

引理 14.16（分解得到的高维签名，预备知识：10.1、14.12、14.14、14.15）。

Let $d\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$。令 ϕ 如定理 *14.12* 中所述。若 $[T]_{\cong_S}\in d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$，则

$$([T]_{\cong_S})\overline{sig_{d,n}} = \prod_{i\in\{0,1,\dots,d-1\}}(([T]_{\cong_S})\phi^{-1}\pi_i)\overline{sig_{1,n}}$$

证明。任取 T_0，T_1，…，T_{d-1} 个 $\mathcal{O}_{n,\ n-1}$ 转导器，并令 $P:=\prod_{i\in\{0,1,\dots,d-1\}}T_i$。对每个 $i\in\{0,1,\dots,d-1\}$，令 $q_i\in Q_{T_i}$，并令 $F_i\subseteq X_n^*$ 使得 F_i 中的元素两两不可比，且

$$(\mathfrak{C}_n)f_{T_i,q_i} = \bigcup_{w\in F_i} w\mathfrak{C}_n.$$

现在我们得到

$$\begin{aligned}((\mathfrak{C}_n^d)f_{P,(q_0,q_1,\dots,q_{d-1})})\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} &= \left(\prod_{i\in\{0,1,\dots,d-1\}}(\mathfrak{C}_n)f_{T_i,q_i}\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} = \left(\prod_{i\in\{0,1,\dots,d-1\}}\bigcup_{w\in F_i} w\mathfrak{C}_n\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} \\ &= \left(\bigcup_{w\in F_0\times F_1\times\dots\times F_{d-1}} w\mathfrak{C}_n^d\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} = \prod_{i\in\{0,1,\dots,d-1\}}|F_i|+(n-1)\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

根据定义，$((\mathfrak{C}_n^d)f_{P,\ (q_0,q_1,\dots,q_{d-1})})\mathrm{ssig}_{d,\ n}=([P]_{\cong_S})\mathrm{sig}_{d,\ n}$，并且对每个 $i\in\{0,1,\dots,d-1\}$，我们有$|F_i|+(n-1)\mathbb{Z}=([T_i]_{\cong_S})\mathrm{sig}_{1,\ n}$。因此结论成立。□

在 [28] 命题 7.7中，我们使用签名的概念来描述$\mathcal{O}_{n,\ r}$ 作为$\mathcal{O}_{n,\ n-1}$的子群。现在，我们也可以对 $d\mathcal{K}_{n,\ 1}$ 以及$d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$做同样的处理。

引理 14.17（将$d\mathcal{K}_{n,\ 1}$ 与签名对应，预备知识：10.3、11.11、11.19、11.9、12.9、14.12、14.15）。

设 $d\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$。若 Φ：$d\mathcal{K}_{n,\ 1}\to d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$ 如定理 *14.12* 中所述，则

$$(d\mathcal{K}_{n,1})\Phi = (\{1+(n-1)\mathbb{Z}\})\overline{sig_{d,n}}^{-1}\cap d\mathcal{P}_{n,n-1}.$$

证明。 ($\subseteq$)：令 $[T]_{\cong_S} \in d\mathcal{K}_{n,\ 1}$ 任意，并令 $f \in d\mathcal{B}_{n,\ 1}$ 满足 $T = \mathrm{Core}(M_f)$。令 k 为 M_f 的同步长度。由此可得

$$\begin{aligned}
1+(n-1)\mathbb{Z} &= (\mathfrak{C}_n^d)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} = ((\mathfrak{C}_n^d)f)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} = \left(\bigcup_{w\in(X_n^k)^d}(w\mathfrak{C}_n^d)f\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} \\
&= \left(\bigcup_{w\in(X_n^k)^d}(e_f,w)\boldsymbol{\lambda}_{M_f}(\mathfrak{C}_n^d)f_{T,(w)\mathfrak{s}_T}\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} \\
&= \sum_{w\in(X_n^k)^d}\left((e_f,w)\boldsymbol{\lambda}_{M_f}(\mathfrak{C}_n^d)f_{T,(w)\mathfrak{s}_T}\right)\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} = \sum_{w\in(X_n^k)^d}((\mathfrak{C}_n^d)f_{T,(w)\mathfrak{s}_T})\overline{\mathrm{ssig}_{d,n}} \\
&= \sum_{w\in(X_n^k)^d}(([T]_{\cong_S})\Phi)\overline{\mathrm{sig}_{d,n}} = n^{kd}(([T]_{\cong_S})\Phi)\overline{\mathrm{sig}_{d,n}} = (([T]_{\cong_S})\Phi)\overline{\mathrm{sig}_{d,n}}
\end{aligned}$$

正如所要求的。

($\supseteq$)：令 $[P]_{\cong_S} \in (\{1+(n-1)\mathbb{Z}\})\overline{\mathrm{sig}_{d,\ n}}^{-1} \cap d\mathcal{P}_{n,\ n-1}$，并令 $q \in Q_P$ 为任意对象。接着令 $(a\mathfrak{C}_n^d)_{a\in A}$ 为并集为 $(\mathfrak{C}_n^d)f_{P,\ q}$ 的不相交锥。根据 P 的选取，我们有 $|A| \in 1+(n-1)\mathbb{Z}$。由引理 11.11，我们可以选取大于 $|A|$ 的 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $w \in (X_n^k)^d$ 和 $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$，都有

$$|(q,w)\boldsymbol{\lambda}_P\pi_i| \geq \max\left\{|(a)\pi_j| \;\middle|\; a\in A, j\in\{0,1,\ldots,d-1\}\right\}.$$

对于所有 $w \in (X_n^k)^d$，令 $a_w \in A$ 为满足 $a_w \leq (q,\ w)\boldsymbol{\lambda}_P$ 的唯一元素。根据 A 的定义，现在对所有 $a \in A$，我们都有

$$\bigcup_{\substack{w\in(X_n^k)^d \\ a_w=a}}(w\mathfrak{C}_n^d)f_{P,q} = a\mathfrak{C}_n^d.$$

特别是

$$\left\{((q,w)\boldsymbol{\lambda}_P\lambda_{a_w}^{-1})(\mathfrak{C}_n^d)f_{P,(q,w)\pi_T} \;\middle|\; w\in(X_n^k)^d \text{ satisfies } a_w = a\right\}$$

是 $\mathfrak{C}_n^d$ 的一个划分。

由于 $|A| \in 1+(n-1)\mathbb{N}$，根据引理 10.3，我们可知存在一个针对 $\mathfrak{C}_n^d$、满足 $|B| = |A|$ 的完全前缀码 B。令 ϕ： $A \to B$ 为一个双射。由此可得

$$\left\{(a_w)\phi((q,w)\boldsymbol{\lambda}_P\lambda_{a_w}^{-1})(\mathfrak{C}_n^d)f_{P,(q,w)\pi_T} \;\middle|\; w\in(X_n^k)^d\right\}$$

是 $\mathfrak{C}_n^d$ 的一个划分。我们定义一个 $(d,\ n)$-转导器 D 如下：

(1) $N := \left\{w \in (X_n^*)^d \;\middle|\; \text{存在 } i\in\{0,1,\ldots,d-1\}\text{，满足 } (w)\pi_i < k\right\}$（不失一般性，假设 o f 有 $N \cap Q_P = \varnothing$）。(2) $Q_D := Q_P \cup N$。(3) 若 $p \in N$， $w \in (X_n^*)^d$ 且 $pw \in N$，则 $(p,\ w)\boldsymbol{\pi}_D = pw$ 且 $(p,\ w)\boldsymbol{\lambda}_D = \varepsilon_d$。(4) 若 $p \in N$， $w \in (X_n^*)^d$ 且 $pw = bt$，其中 $b \in (X_n^k)^d$ 且 $t \in (X_n^*)^d$，则

$$(p,w)\boldsymbol{\pi}_D := ((q,w)\boldsymbol{\pi}_P,t)\boldsymbol{\pi}_P, \quad (p,w)\boldsymbol{\lambda}_D := (a_w)\phi((q,w)\boldsymbol{\lambda}_P\lambda_{a_w}^{-1})((q,w)\boldsymbol{\pi}_P,t)\boldsymbol{\lambda}_P.$$

(5) 如果 $p \in Q_P$ 与 $w \in (X_n^*)^d$，那么

$$(p,w)\boldsymbol{\pi}_D := (p,w)\boldsymbol{\pi}_P, \quad (p,w)\boldsymbol{\lambda}_D := (p,w)\boldsymbol{\lambda}_P.$$

不难验证， D 是一个 $(d,\ n)$-转导器。根据定义，转导器 D 是同步的，其同步长度至多为 k 加上 P 的同步长度。此外，$\mathsf{Core}(D) = P$。现在我们定义 $f \coloneqq f_{D,\ \varepsilon_d}$

如果 $w \in (X_n^k)^d$, $x \in \mathfrak{C}_n^d$，那么

$$(wx)f = (a_w)\phi((q,w)\boldsymbol{\lambda}_P\lambda_{a_w}^{-1})(x)f_{P,(q,w)\boldsymbol{\pi}_P},$$

由于映射$f_{P,\ (q,w)\boldsymbol{\pi}_P}$均为到 $\mathfrak{C}_n^d$ 的开子集的同胚，因此可得 $f \in$ 自同构群$(\mathfrak{C}_n^d)$。根据备注 11.9 和引理 12.9，再结合定理 11.19，我们可知 $M_{CR(D)} \cong_S M_f$，且 $\mathsf{Core}(M_{CR(D)}) \cong_S P$。因此，若 $f \in d\mathcal{B}_{n,\ 1}$，则 $[M_f]_{\cong_S} \in d\mathcal{O}_{n,\ 1}$ 且 $([M_f]_{\cong_S})\Phi = [P]_{\cong_S}$，如所需。

我们已经证明 $f \in d\mathcal{S}_{n,\ 1}$，因此只需证明 $f^{-1} \in d\mathcal{S}_{n,\ 1}$。根据假设，转导器 P 可逆，因此任取 $P^{-1} \in [P]_{\cong_S}^{-1}$。按照为$P$给出的相同构造，令 $g \in d\mathcal{S}_{n,\ 1}$ 满足 $\mathsf{Core}(M_g) \cong_S P^{-1}$。

因此我们有 $[\mathsf{Core}(M_{fg})]_{\cong_S} = [\mathsf{Core}(M_f)]_{\cong_S}[\mathsf{Core}(M_g)]_{\cong_S} = 1_{d\mathcal{O}_{n,\ 1}}$。由引理 12.4 可知，我们有 $fg \in dV_n$，特别是 $(fg)^{-1} \in d\mathcal{S}_{n,\ 1}$。因此， $f^{-1} = g(fg)^{-1} \in d\mathcal{S}_{n,\ 1}$也成立。□

定理 14.18 （将 $\mathsf{Out}(V_n)$ 与 $\mathsf{Out}(dV_n)$ 联系起来，预备知识：12.18、14.6、14.12、14.16、14.17）。

对于所有 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 与 $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$，我们都有

$$\mathrm{Out}(dV_n) \cong \left\{(\boldsymbol{T}, f) \in \mathcal{O}_{n,n-1} \wr_a \mathrm{Sym}(d) \;\middle|\; (\boldsymbol{T})\phi\overline{sig_{d,n}} = 1 + (n-1)\mathbb{Z}\right\},$$

此外，群 $\mathrm{Out}(V_n) \wr_a \mathrm{Sym}(d)$ 嵌入群 $\mathrm{Out}(dV_n)$中。这里， a 是 $\mathrm{Sym}(d)$ 在 $\{0,1,\ldots,d-1\}$上的标准作用，而 ϕ 与定理 *14.12* 中的相同。$\mathrm{Out}(dV_n)$。

证明。 由定理 12.18，我们有 $\mathsf{Out}(dV_n) \cong d\mathcal{O}_{n,\ 1}$。因此由定理 14.6 和引理 14.17，我们有

$$\mathrm{Out}(dV_n) \cong \left\{(\boldsymbol{T}, f) \in \mathcal{O}_{n,n-1} \wr_a \mathrm{Sym}(d) \;\middle|\; (\boldsymbol{T})\phi\overline{\mathrm{sig}_{d,n}} = 1 + (n-1)\mathbb{Z}\right\}.$$

特别地，$\mathsf{Out}(V_n) \cong \left\{(\boldsymbol{T},\ f) \in \mathcal{O}_{n,\ n-1} \;\middle|\; (\boldsymbol{T})\phi\overline{\mathsf{sig}_{1,\ n}} = 1 + (n-1)\mathbb{Z}\right\}$。该结果随后由引理 14.16 得出。

□

定理 14.19 （连接 $\mathsf{Out}(V)$ 与 $\mathsf{Out}(dV)$，预备知识：14.18） .
对于所有 $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，我们有 $\mathrm{Out}(dV) \cong \mathrm{Out}(V) \wr_a \mathrm{Sym}(d)$ （其中 a 是 $\mathrm{Sym}(d)$ 在 $\{0,1,\ldots,d-1\}$ 上的标准作用）。

证明。 注意到 $|\mathbb{Z}/(2-1)\mathbb{Z}| = 1$，因此由定理 14.18，我们有 $\mathsf{Out}(V) \cong \mathcal{O}_{n,\ n-1}$ 和 $\mathsf{Out}(dV) \cong \mathcal{O}_{n,\ n-1} \wr_a \mathsf{Sym}(d)$。□

[12]

References

[1] Mike Behrisch、JohnK. Truss 与EdithVargas-Garc´ıa. 重构有理数上的幺半群与多态克隆的拓扑。 *Studia Logica*, 105(1):65–91，2017。

[2] James Belk 与 Collin Bleak。关于异步换能器和 Brin-Thompson 群 $2V$ 的一些不可判定性结果。 *Transactions of the American Mathematical Society*，369(5):3157–3172，2016 年 12 月。

[3] Collin Bleak、Peter Cameron、Yonah Maissel、Andr´es Navas 与Feyishayo Olukoya。Richard Thompson 和 Graham Higman 的更多变色龙群：通过动力学研究 Higman 群的自同构$G_{n,\ r}$，2016年。

[4] Collin Bleak 与 Daniel Lanoue。非同构结果家族。 *Geometriae Dedicata*，146(1):21–26，2010年6月。[5] Manuel Bodirsky、Michael Pinsker 与 Andr´as Pongr´acz。重构克隆的拓扑。 *Trans. Amer.Math. Soc.*，369(5):3707–3740，2017年。[6] Matthew G. Brin。Richard J. Thompson 的变色龙群：自同构与动力学。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*，(84):5–33 (1997)，1996年。[7] Matthew G. Brin。高维 Thompson 群。 *Geometriae Dedicata*，108(1):163–192，2004年10月。[8] Matthew G. Brin。高维 Thompson 群的表示。 *Journal of Algebra*，284(2):520–558，2005年2月。[9] Matthew G. Brin 与 Fernando Guzm´an。广义 Thompson 群的自同构。 *Journal of Algebra*，203(1):285–348，1998年5月。[10] John D. Dixon、Peter M. Neumann 与 Simon Thomas。无限对称群中的小指数子群。 *Bull. London Math. Soc.*，18(6):580–586，1986年。[11] L. Elliott、J. Jonuˇsas、Z. Mesyan、J. D. Mitchell、M. Morayne 与 Y. P´eresse。幺半群与克隆上的自动连续性、唯一波兰拓扑及 Zariski 拓扑，2021年。[12] L. Elliott、J. Jonuˇsas、J. D. Mitchell、Y. P´eresse 与 M. Pinsker。关系结构自同态幺半群上的波兰拓扑，2022年。[13] Luke Elliott。使用转导器描述 aut(dvn) 与 out(dvn)，2020年。[14] David M. Evans。无限一般线性群中的小指数子群。 *Bulletin of the London MathematicalSociety*，18(6):587–590，1986年。[15] Steven Givant 与 Paul Halmos。 *Introduction to Boolean algebras*。《数学本科教材》。Springer，纽约，2009年。[16] R. I. Grigorchuk、V. V. Nekrashevich 与 V. I. Sushchanskiĭ。自动机、动力系统与群。 *Proc.Steklov Inst. Math*，231:128–203，2000年。[17] Johanna Hennig 与 Francesco Matucci。高维 Thompson 群 nV 的表示，2011年。[18] Bernhard Herwig。扩展部分同构以获得许多 ω-范畴结构的小指标性质。*Israel Journal of Mathematics*，107(1):93–123，1998年12月。[19] Wilfrid Hodges、Ian Hodkinson、Daniel Lascar 与 Saharon Shelah。 ω-稳定（ω-范畴结构与随机图）的小指标性质。 *Journal of the London Mathematical Society*，s2-48(2):204–218，1993年。[20] Trevor Irwin 与 Slawomir Solecki。射影 Fraïss´e 极限与伪弧。 *Transactions of the AmericanMathematical Society*，358，2006年7月。[21] Alexander Kechris。 *Classical descriptive set theory*，第156卷。Springer Science & Business Media，2012年。[22] Alexander S Kechris 与 Christian Rosendal。齐性结构中的湍流、amalgamation 与一般自同构。 *Proceedings of the London Mathematical Society*，94(2):302–350，2007年。[23] Aleksandra Kwiatkowska。康托集的同胚群具有丰富泛型。 *Bulletin of theLondon Mathematical Society*，44(6):1132–1146，2012年4月。[24] Mark V Lawson 与 Alina Vdovina。Thompson 群的高维推广，2019年。[25]Kathryn Mann。同胚群的自动连续性及其应用。 *Geometry & Topology*，20(5):3033–3056，2016年10月。[26] James R Munkres。拓扑学。Pearson India Education Services Pvt. Ltd.，2016年。[27] Feyishayo Olukoya。广义 Thompson 群T_n的自同构$_r$。编写中，2018年。[28] Feyishayo Olukoya。广义 Thompson 群T_n的自同构$_r$，2019年。[29] Gianluca Paolini 与 Saharon Shelah。可数稳定结构的自同构群。 *Fundamenta Mathe-maticae*，248(3):301–307，2020年。[30] Christian Pech 与 Maja Pech。齐性结构的多态克隆：门覆盖与自动同胚性。 *Algebra universalis*，79(2):35，2018年。[31] Martyn Quick。Brin 高维 Thompson 群的基于置换的表示 nV，2019年。[32] Matatyahu Rubin。根据同胚群重构拓扑空间。 *Transactions of the American Mathematical Society*，312(2):487–538，1989年。

[33] J. K. Truss。《无限置换群 II：小指标子群》。 *Journal of Algebra*，120(2):494–515，1989年2月。[34] Todor Tsankov。《酉群的自动连续性》。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，141(10):3673–3680，2013年。[35] Jan van Mill。《 *The infinite-dimensional topology of function spaces*》，第 *North-Holland MathematicalLibrary*卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，2001年。[36] Jan van Mill。《关于 Effros 定理的注记》。 *The American Mathematical Monthly*，111(9):801–806，2004年。[37] Itaï Yaacov、Alexander Berenstein 与 Julien Melleray。《波兰拓扑度量群》。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，365，2010年7月。