arXiv:2601.13287v1 [cs.GT] 19 Jan 2026

紧致 A 具有外部性的公平分配的渐近界

Frank Connor麦吉尔大学
frank.connor@mail.mcgill.ca

Max Dupr´e laTour麦吉尔大学
maxduprelatour@gmail.com

Vishnu V. Narayan印度孟买理工学院vishnu.narayan@mail.mcgill.ca

ˇSimon Schierreich
克拉科夫AGH科技大学、布拉格捷克理工大学schiesim@fit.cvut.cz

2026年1月19日

摘要

我们研究如何在偏好包含外部性的参与者之间分配一组不可分物品。与标准公平分配模型不同，参与者不仅可能从直接分配给自己的物品中获得正效用或负效用，也可能从分配给其他参与者的物品中获得效用。由于无法保证精确的无嫉妒，先前的研究聚焦于其松弛形式。然而，两个核心问题仍未解决：是否总存在一种分配，使得在移除一件物品后便能实现无嫉妒（EF1）？如果不存在，那么始终能够达到的最优松弛 EF-k 是什么?

我们通过推导出消除嫉妒所需物品数量的紧渐近界，解决了这两个问题。我们证明，对于任意包含 n 个参与者的实例，始终存在一种分配，使得移除至多 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 件物品后即可实现无嫉妒，并且该分配可在多项式时间内找到。我们还证明了一个匹配的 $\Omega(\sqrt{n})$ 下界，表明即使在二元估值的情况下，该结果也是紧的；这说明当参与者存在外部性时，EF1 分配并不存在。

1 引言

不可分物品的公平分配，包括行政任务、实验室设备或继承人之间的遗产分配，是一个活跃的研究领域，连接着计算机科学与经济学 [Brams and Taylor, 1996; Thomson, 2016; Amanatidis 等人, 2023; Nguyen and Rothe, 2023]。传统上，一个公平分配实例由一组不可分物品和一组参与者构成，其中每位参与者都有一个估值函数，为每个可能的物品束赋予数值效用。关键在于，在标准模型中，参与者的效用仅取决于分配给它的物品。目标是在参与者之间划分物品，使给定的公平性标准得到满足。一个重要例子是无嫉妒 (EF) [Foley, 1967], ，它要求每位参与者对自己的物品束的偏好至少不低于对任何其他参与者物品束的偏好。由于无嫉妒分配并不保证存在（例如，两位参与者只有一件价值为正的物品），人们研究了若干种放宽条件，其中最著名的是至多移除一件物品后无嫉妒 (EF1) [Lipton等人, 2004; Budish, 2011; Caragiannis 等人, 2019] 以及至多移除任意一件物品后无嫉妒 (EFX) [Caragiannis 等人, 2019; Plaut和Roughgarden, 2020]。已知在标准公平分配模型中，EF1 分配总是存在 [Lipton等人, 2004]。

然而，在许多情况下，代理人所获得的效用并非仅取决于自身的物品束。设想一所宿舍要在学生之间分配新购置的设备：学生不仅会从直接分配给自己的物品中受益，也会从分配给

其室友的物品中受益，因为他们可以共享这些物品。相反，在竞争企业之间分配资源时，例如独占许可、专利或地域权利，即使某家企业自身的分配保持不变，当竞争对手获得一项有价值的资产时，该企业也可能受到损害。外部性也可能兼有利弊：在学者之间分配研究资助时，研究人员可能会因合作伙伴获得合作项目的资金而受益，但如果同一领域的竞争者获得资助，则可能受到损害。

这些例子有一个共同之处：代理人的估值中固有的外部性 。尽管外部性在资源分配领域更广泛的经济学文献中已有深入研究 [Ayres and Kneese, 1969; Katz and Shapiro, 1985; Velez, 2016], 但公平分配领域的大多数既有研究都聚焦于可分 物品 [Brˆanzei 等, 2013b; Li 等，2015]。具有外部性的不可分物品公平分配模型直到最近才被提出 [Seddighin 等, 2019; Mishra等, 2022; Aziz 等, 2023; Deligkas 等，2024]。与我们的工作最相关的是 Aziz 等 [2023]„ 他们将标准的基于嫉妒的公平性概念推广到外部性情境，并证明在一些特殊情形下 EF1 分配的存在性；以及 Deligkas 等 [2024], ，他们研究了判定公平分配是否存在的计算复杂性。尽管取得了这些进展，也许最根本的问题仍未得到解答：

是否保证存在一个 EF1 分 配，适用于每个带有外部性的公平分配实例 ？

我们对这个问题的认识目前仍然有限。已知对于两个代理人，以及对于具有二元估值且没有负担物品的三个代理人，始终存在 EF1 分配 [Aziz 等人， 2023].[1] 除这些特殊情形外，甚至对于任意常数 k ，EF-k 分配是否存在也尚不明确。Aziz 等人 [2023] 明确指出：“我们尚未解决的一个重要开放问题是，是否始终存在 EF1 分配 [...] 如果答案是否定的，那么合理的做法是询问能够达到的最优松弛 EF-k 。”Deligkas 等人 [2024] 猜想，对于二元估值，始终存在 EF1 分配；他们也承认，鉴于即使对三个代理人也需要进行大量的情形分析和计算机验证，证明“似乎极具挑战性”。

1.1 我们的贡献

我们证明，即使参与者的偏好是二元的，EF1 分配也不一定存在，从而解决了 Aziz 等人 [2023] 和 Deligkas 等人 [2024]提出的开放问题。我们进一步证明，可达到的最优松弛 EF-k 为 $k = \Theta_(\sqrt{n})$，其中 n 是参与者的数量，从而回答了 Aziz等人 [2023]提出的第二个开放问题。

在第2节正式定义带外部性的公平分配模型之后，我们将在第3节介绍用于证明结果的技术工具。主要有两个组成部分。首先，我们引入非对称嫉妒模型 ，并证明它与外部性模型等价。与原始外部性模型中的估值相比，非对称嫉妒模型中的估值更接近标准的可加估值。尽管如此，这一模型主要具有理论意义：这些估值不易解释，而且基于这些估值，甚至无法明确定义社会福利最大化分配。我们工作的第二个关键组成部分是多色差异 框架 [Doerr and Srivastav，2003年；Manurangsi 和 Suksompong，2022；Caragiannis 等，2025年；Manurangsi and Meka, 2026]。值得注意的是，我们将先前研究中已知的一些差异界推广到物品与负担物品混合的情形，这一结果本身也可能具有独立的研究价值。

在第4节中，我们利用第3节中构建的技术工具箱证明，对于任何具有外部性的公平分配问题，都存在一种确定性多项式时间机制 $\mathcal{M}_1$ ，能够找到一个分配，使其在 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 个物品范围内无嫉妒。重要的是，在第5节中，我们证明

[1]外部性模型中负担物品的正式定义见第2节。

该机制是渐近最优的。具体而言，我们证明，在外部性模型中存在一个实例，即使估值是二元的且不存在负担物品，我们所能达到的最佳 EF-k 放宽程度也是 $k \in \Omega(\sqrt{n})$。这从否定的角度解决了 EF1 是否存在的问题，因此推翻了 Deligkas 等人*et al.* [2024]的猜想。此外，我们证明，对于外部性高度结构化的实例，同一下界仍然成立：即使所有外部性都指向一个指定的代理人 a_1，结论依然成立。

在第 7 节通过开放问题和未来方向作总结之前，我们将在第 6 节介绍另一种随机机制 $\mathcal{M}_2$。该机制总能产生一个至多对 $\mathcal{O}(n)$ 件物品无嫉妒的分配，其保证弱于机制 $\mathcal{M}_1$ 的保证。然而，与 $\mathcal{M}_1$ 不同， $\mathcal{M}_2$ 会产生一个共识分配，这意味着我们可以任意置换物品束，同时维持公平性保证。因此， $\mathcal{M}_2$ 是期望真实的，即任何参与者都无法通过虚报其估值来提高其期望效用。这将 Bu 和 Tao [2025] 的结果扩展到了具有外部性的情形，但我们所获得的公平性放宽界限略弱。

1.2 相关工作

除上述直接研究可分物品和不可分物品公平分配中外部性的论文外，文献中还存在若干相关模型的研究方向。

首先，有一种具有分配者偏好 [的公平分配模型（Bu等），以及具有社会影响 [的模型（Flammini等，2025 年；Deligkas等， 2026]）。在这两种模型中，目标不仅是找到参与者之间公平的分配，还要满足分配者的特定目标。原则上，这一额外的偏好维度可以用外部性来表示：将分配者视为一个对所有其他参与者具有外部性的额外参与者。然而，关键区别在于，分配者无法获得任何物品，而原参与者之间不存在成对的外部性。一个更一般的模型是群组公平分配 [（Manurangsi 和 Suksompong，2017 年；Suksompong，2018 年；Segal-Halevi 和 Nitzan，2019 年；Manurangsi 和 Suksompong，2024年；G¨olz 和 Yaghoubizade，2025年；Dupr´e la Tour， 2026], ），其中参与者被划分为不同群组，并共享分配给其所属群组的物品，同时每位参与者保留自己的主观估值；在该模型中，已知在大多数情形下不存在无嫉妒的常数放宽。

在渐近公平分配中 [Manurangsi 和 Suksompong, 2020, 2021, 2025; Manurangsi等人, 2025; Garg 等人，2026], 研究的任务并非决定能够保证何种公平性放宽形式（因为在标准模型中，EF1 分配总是存在），而是找出在什么条件下可以实现无嫉妒或比例公平等更强的保证。这些研究中有许多给出了所需物品数量的紧界，并且与我们的方法类似，很大程度上依赖偏差理论的结果。

偏好中的外部性也出现在公平分配以外的领域。典型例子包括组合拍卖 [Funk, 1996年; Jehiel 和 Moldovanu, 1996年; Zhang等人，2018], 匹配 [Mumcu 和 Saglam, 2010; Brˆanzei 等人, 2013a年; Fisher 和 Hafalir, 2016年; Anshelevich等人,2017], 设施选址 [Li等人, 2019; Wang 等人, 2024年; Li等人, 2025], 以及房屋分配 [Massand 和 Simon, 2019; Elkind 等人, 2020年; Agarwal 等人, 2021年; Gross-Humbert 等人, 2022; Knop 和 Schierreich, 2023]。在这些情境中，代理人通常只被分配一件物品（伴侣、地点或房屋），其解概念与我们的有很大不同。

2 预备知识

在公平分配问题中，输入包括一个由不可分物品组成的集合 M 和一个由 n 名参与者组成的集合 N。集合 M 中的物品需要在集合 N中的参与者之间进行分配。形式上，物品的一种分配 是

由 M的两两不相交子集组成的元组：$(A_1$、.....、 $A_n)$，其中每个 $A_i \subseteq M$都是分配给参与者 i的物品束。若分配是完全的，则称其为完全分配，当且仅当 $\bigcup_{i\in[n]} A_i = M$。除非另有说明，我们只考虑完全分配。令 $\mathcal{A}$ 为所有分配构成的集合。此外，我们用 $[n]$表示集合$\{1,\ldots,n\}$。

在 Aziz等人 [2023], 提出的带外部性的公平分配模型中，每位参与者 $i \in N$ 都与一个函数相关联

$$V_i \colon \mathcal{A} \to \mathbb{R},$$

该函数为每种分配 $A \in \mathcal{A}$赋予一个价值。我们假设估值是可加的：对于任意参与者 $i \in N$和任意分配 $(A_1,\ldots,A_n) \in \mathcal{A}$,

$$V_i(A) = \sum_{j\in N} \sum_{x\in A_j} V_i\big(x^{(j)}\big),$$

其中， $x^{(j)} \in \mathcal{A}$ 表示这样一种分配：参与者 j 获得单个物品 x ，而所有其他参与者均未获得任何物品，即,

$$x^{(j)} = (\emptyset,\ldots,\emptyset,\underbrace{\{x\}}_{j^{\text{th}}\text{ coordinate}},\emptyset,\ldots,\emptyset).$$

为简化记号，我们用 $V_i(j,x)$ 表示 $V_i\big(x^{(j)}\big)$ ，因此

$$V_i(A) = \sum_{j\in N} \sum_{x\in A_j} V_i(j,x).$$

请注意，可加性尤其意味着估值是规范化的：对于每位参与者$i \in N$，空分配的价值为零，即 $V_i(\emptyset,\ldots,\emptyset) = 0$。

如果参与者 $i \in N$ 的估值 V_i 满足以下条件，我们就称其不含负担物品：对于每位参与者 $j \in N$ 和每件物品 $x \in M$，均有

$$V_i(i,x) \geq V_i(j,x).$$

That 是指，代理人 i 本人更愿意获得物品 x，而不是由另一位参与者获得 x。

我们称 V_i 为 二元，如果对于所有 $j \in N$ 和所有 $x \in M$,

$$V_i(j,x) \in \{0,1\}.$$

2.1 外部性模型中的公平性

给定一个分配 $A \in \mathcal{A}$和两个不同的代理人 $i,\ j \in N$，我们用 $A^{i\leftrightarrow j}$表示通过交换代理人 i 和 j的物品束而从 A 得到的分配，同时其他所有代理人的物品束保持不变。在分配 A中，如果代理人 i 嫉妒代理人 j ，则

$$V_i(A) < V_i\big(A^{i\leftrightarrow j}\big),$$

也就是说，代理人 i 更愿意与代理人 j交换物品束。若分配 A 中没有任何代理人嫉妒其他代理人，则称其为无嫉妒（EF）。若对每一对不同的代理人 $i,\ j \in N$，都存在一个物品集合 $S \subseteq M$，满足 $|S| \leq c$，并且定义$B = (A_1 \setminus S,\ \ldots\ldots,\ A_n \setminus S)$后有

$$V_i(B) \geq V_i\big(B^{i\leftrightarrow j}\big).$$

也就是说，对于每一对参与者 i 和 j，都存在一个至多包含 c 个物品的集合，移除这些物品即可消除代理人 i对代理人 j的嫉妒。

请注意，由于假设估值是可加的，用于消除代理人 i对代理人 j 的嫉妒的集合 S 总可以选为 $A_i \cup A_j$ 的子集，因为分配给其他代理人的物品对 $V_i(B)$ 和 $V_i(B^{i\leftrightarrow j})$ 的贡献相同。此外，如果估值 V_i 不涉及任何负担物品，则集合 S 可以选为 A_j的子集。最后，在不存在外部性的情况下（即对于每个物品 x 和每一对参与者 i，j，$V_i(j,\ x) = 0$），此定义与标准的至多移除 c 个物品即可实现无嫉妒的定义一致。

3 技术工具

本节将介绍我们在证明中使用的一些技术工具。首先，我们介绍公平分配实例的一种替代模型——非对称嫉妒模型，并证明就我们的用途而言，该模型是等价的。接下来，我们描述多色差异问题及其与公平分配的联系。我们的多数结果都是通过多色差异的界限推导出公平分配的界限。

3.1 非对称嫉妒模型

现在，我们引入非对称嫉妒模型。这是一种替代的公平分配模型，允许参与者的估值函数之间存在外部性。我们将证明，就基于嫉妒的公平性概念而言，非对称嫉妒模型与外部性模型等价。我们使用非对称嫉妒模型分析大多数结果，因为该模型中的基于嫉妒的公平性概念更易于处理。该模型不会为完全分配赋予每位参与者一个数值，因此，福利最大化之类的概念并没有明确定义。相反，它规定了不同参与者对之间的嫉妒概念 $i,\ j \in N$。该模型具有非对称 性，因为定义参与者 i 对参与者 j 的嫉妒程度的函数取决于有序对 $(i,\ j)$。 i 对 j 的嫉妒由估值函数 $v_{i,\ j}$表示，而无嫉妒以及至多移除 c 件物品后无嫉妒等标准概念，都可以用这些估值函数来定义。更确切地说，对于每一对满足 $i \neq j$的参与者 $i,\ j \in N$，我们给定一个估值函数

$$v_{i,j} \colon 2^M \to \mathbb{R}.$$

我们假设这些估值是可加的，也就是说，对于每个集合 $S \subseteq M$，

$$v_{i,j}(S) = \sum_{x \in S} v_{i,j}(x).$$

我们称 $v_{i,j}$ 没有负担物品，如果 $v_{i,j}(x) \geq 0$ 对所有 $x \in M$均成立。我们称该实例是二元 的，如果$v_{i,j}(x) \in \{0, 1\}$ 对所有 $i \neq j$ 及所有 $x \in M$均成立。

3.1.1 非对称嫉妒模型中的公平性

给定一个分配 $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}$，如果满足以下条件，则称代理人 i 嫉妒 代理人 j

$$v_{i,j}(A_i) < v_{i,j}(A_j).$$

分配 A 在非对称嫉妒模型中无嫉妒（EF$_a$），是指没有代理人嫉妒另一位代理人。A 在非对称嫉妒模型中至多移除 c 件物品后无嫉妒（EF$_a$-c），是指对于每一对不同的参与者 $i,\ j \in N$，都存在一个物品集合 $S \subseteq A_i \cup A_j$，满足 $|S| \leq c$，使得

$$v_{i,j}(A_i \setminus S) \geq v_{i,j}(A_j \setminus S).$$

请注意，如果 $v_{i,\ j}$ 没有负担物品，则集合 S 总可以选为 A的子集 $_{j}$.

接下来，我们证明，对于无嫉妒和 EF-c 等基于嫉妒的公平性概念，非对称嫉妒模型与外部性模型是等价的。也就是说，存在一种从外部性模型的实例到非对称嫉妒模型的实例的自然归约，使得非对称嫉妒模型中的任何嫉妒界都意味着外部性模型中存在等价的界。

命题 1. 存在一个函数 f，它将外部性模型中的每个实例 I 映射为非对称嫉妒模型中的一个实例 $f(I)$，使得对于每个分配 $A \in \mathcal{A}$，当且仅当分配A 在 I 中是无嫉妒（分别为 *EF-c*）时，它在 $f(I)$ 中是 EF_a （分别为 EF_a-c）。此外，如果 I 没有负担物品，那么 $f(I)$ 也没有负担物品。另外:

- 对于非对称嫉妒模型中估值为可加的 的任意实例 J，都存在外部性模型中的一个实例I，使得 $J = f(I)$ （即， f 是满射）。
- 对于非对称嫉妒模型中的任意实例 J，若其估值为二元可加，则存在一个无负担物品的二元外部性模型实例 I，使得 $J = f(I)$。

证明。设 I是一个估值为 $(V_i)_{i\in N}$ 的外部性实例。定义 $f(I)$ 如下：对于每个有序对 $i \neq j$ 和每个物品 $x \in M$,

$$v_{i,j}(x) \ := \ V_i(i,x) - V_i(j,x),$$

并以可加方式扩展至所有物品束。

固定一个分配 $A \in \mathcal{A}$ 和两个不同的代理人 i， j。由于交换 A_i 和 A_j 只会改变这两个物品束中物品的接收者，根据可加性可得

$$\begin{aligned} V_i\big(A^{i\leftrightarrow j}\big) - V_i(A) &= \sum_{x\in A_j} \big(V_i(i,x) - V_i(j,x)\big) \\ &\quad + \sum_{x\in A_i} \big(V_i(j,x) - V_i(i,x)\big) \\ &= v_{i,j}(A_j) - v_{i,j}(A_i). \end{aligned}$$

因此,

$$V_i(A) < V_i\big(A^{i\leftrightarrow j}\big) \quad \Longleftrightarrow \quad v_{i,j}(A_i) < v_{i,j}(A_j),$$

所以嫉妒比较一致，因此 I 中的无嫉妒与 $f(I)$ 中的无嫉妒$_a$ 一致。

丢弃任意一组物品 $S \subseteq M$ （即，对于分配 $A \setminus S$）后，同一恒等式仍然成立。因此，对于每一对 $i \neq j$，存在一个集合 S，使得 $|S| \leq c$ 消除 i 对 j 的嫉妒，当且仅当存在这样一个 S，能够消除 f（I）中的嫉妒。因此， I 中的 EF-c 与 f（I）中的 EF$_a$-c一致。此外，若 I没有负担物品，则对于所有 $i \neq j$ 和 x， $v_{i,\ j}$（x） $= V_i$（i， x） $- V_i$（j， x） ≥ 0，因此 f（I）没有负担物品。

对于其他结论:

- 给定一个加性实例 J，其满足（$v_{i,\ j}$），且 $_{i\neq j}$ 处于非对称嫉妒模型中，定义 V_i（i， x） $=$1和 V_i（j， x） $= 1 - v_{i,\ j}$（x），其中 $j \neq i$。那么 V_i（i， x） $- V_i$（j， x）$= v_{i,\ j}$（x），因此 f（I） $= J$，这就推出了第一个结论。

- 给定非对称嫉妒模型中的一个二元加性实例 J，其中 $(v_{i,j})_{i\neq j}$，定义$V_i(i,x) = 1$以及 $V_i(j,x) = 1 - v_{i,j}(x)$，其中 $j \neq i$。于是，由于 $v_{i,j}(x) \in \{0,1\}$，我们有$V_i(j,x) \in \{0,1\}$, $V_i(i,x) \geq V_i(j,x)$，且 $f(I) = J$，这就推出了第二个结论。 □

3.2 多色差异与公平分配

Manurangsi 和 Suksompong [2022]证明，可以利用多色差异方面的工具，为参与者分组的模型中形如 EF-c 的公平性概念推导出更优的界。本节将介绍我们后续将用到的具体定义和差异保证。我们还将他们的结论从“仅含物品”的情形推广到可能同时包含物品和负担物品的实例。

我们以一种针对不可分物品分配而定制的表述来介绍多色差异。这等价于标准的基于矩阵的定义，但对我们的目的而言更为方便。我们所需的多色差异版本是 Manurangsi and Meka [2026]最近提出的推广；它处于一种非对称情形中，其中估值取决于颜色。

令 $k \geq 1$ 为表示颜色数量的整数，并令 M 为一个包含 m 个物品的集合。令 $n_1 \geq \cdots \geq n_k$ 为正整数。对于每个 $\ell \in [k]$，令 $\mathcal{V}_\ell = \{v_{\ell,1}, \ldots, v_{\ell,n_\ell}\}$ 为一个包含 n_ℓ 个可加估值函数的集合，并定义 $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \ldots\ldots, \mathcal{V}_k)$。

M 的 k-着色 是一个映射 $\chi\colon M \to [k]$，它诱导出一个划分

$$M = \chi^{-1}(1) \cup \cdots \cup \chi^{-1}(k).$$

非对称差异 $\mathcal{V}$ 定义为

$$\operatorname{asymdisc}(\mathcal{V}, k) := \min_{\chi: M \to [k]} \max_{\ell \in [k]} \max_{i \in [n_\ell]} \left| \tfrac{1}{k} v_{\ell,i}(M) - v_{\ell,i}(\chi^{-1}(\ell)) \right|.$$

换言之，asymdisc($\mathcal{V}$, k) 是对 M 的所有 k-着色取最小值，其中最大值（在颜色和估值函数上取最大）表示 $v_{\ell,\,i}$ 将其自身颜色类赋予的价值与比例基准 $\frac{1}{k} v_{\ell,\,i}(M)$ 之间的偏差。

定理 1 ([Manurangsi and Meka，2026，定理 5。4])。 假设对于每个 $\ell \in [k]$、 $i \in [n_\ell]$ 和 $x \in M$，都有 $v_{\ell,\,i}(x) \in [0, 1]$。那么

$$\operatorname{asymdisc}(\mathcal{V}, k) \leq \mathcal{O}(\sqrt{n_1}).$$

此外，可以在确定性多项式时间内找到达到此上界的着色 *[Levy 等人， 2017]*。

在对称情形下，若 $n = n_1 = \cdots = n_k$ 且 $v_{\ell,\,i} = v_{\ell',\,i}$ 对所有 $i \in [n]$ 和所有ℓ， $\ell' \in [k]$均成立，则该结果与 Manurangsi 和 Suksompong [2022] 的定理A.1完全一致。

我们将定理 1 与以下引理结合，以获得无嫉妒$_a$-c 保证。Manurangsi 和 Suksompong[2022]在其上界证明中隐含了一个相关推论；在此，我们证明一个扩展版本，使其适用于物品与负担物品的混合情形。

引理 1. 设 $k \geq 1$，且设 T 为一个正整数阈值。设 $v\colon 2^M \to \mathbb{R}$ 是一个可对物品赋予正值和负值的加性估值函数。那么，存在四个辅助可加估值函数 $v^1, v^2, v^3, v^4\colon 2^M \to \mathbb{R}$，使得对所有 $j \in [4]$ 和所有 $x \in M$，都有 $v^j(x) \in [0, 1]$，并满足以下性质：若 $A, B \subseteq M$ 是两个互不相交的物品集合，且对所有 $j \in [4]$ 和所有 $X \in \{A, B\}$

$$\left| \tfrac{1}{k} v^j(M) - v^j(X) \right| \leq T, \tag{1}$$

那么，通过从 $A \cup B$ 中至多丢弃 $14T$ 件物品，就可以消除 A 对 B 的嫉妒；类似地，通过从 $A \cup B$ 中至多丢弃 $14T$ 件物品，就可以消除 B 对 A 的嫉妒。

证明。固定 $k, T,$和 v。令 $M^+ := \{x \in M\colon\ v(x) > 0\}$和 $M^- := \{x \in M\colon\ v(x) < 0\}$。令$L := \min\{m, 6Tk\}$, 并令 $S \subseteq M$为由 L 个物品中绝对值 $|v(x)|$最大的物品构成的任意子集（并列时任意打破平局）。令 $S^+ := S \cap M^+$和 $S^- := S \cap M^-$。令 $R := M \setminus S$表示剩余物品的集合，并令 $R^+ := R \cap M^+$ 和 $R^- := R \cap M^-$。

定义 $p := \min_{x\in S} |v(x)|$，则每个“小”物品 $x \in R$ 都满足 $|v(x)| \le p$。对于每个 $x \in M$，令

$$
\begin{aligned}
v^1(x) &= \mathbf{1}[x \in S^+],\\
v^2(x) &= \mathbf{1}[x \in S^-],\\
v^3(x) &= \begin{cases} v(x)/p, & x \in R^+, \text{ and } p > 0,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\\
v^4(x) &= \begin{cases} -v(x)/p, & x \in R^-, \text{ and } p > 0,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

那么 v^1、v^2、v^3、v^4 均为可加的，并且对于所有 j 和 x，都满足 $v^j(x) \in [0, 1]$。

对于任意 $X \subseteq M$，有 $v^1(X) = |X \cap S^+|$ 且 $v^2(X) = |X \cap S^-|$，因此对每个 $X \in \{A, B\}$，利用 (1)（当 $j = 1$，2 时）可得，

$$
\left||X \cap S^+| - \tfrac{|S^+|}{k}\right| \le T, \qquad \left||X \cap S^-| - \tfrac{|S^-|}{k}\right| \le T. \tag{2}
$$

特别地，由于 $|S^+| + |S^-| = L \le 6Tk$,

$$
|B \cap S^+| \le \tfrac{L}{k} + T \le 7T, \qquad |A \cap S^-| \le \tfrac{L}{k} + T \le 7T.
$$

令 $P := B \cap S^+$ 且 $Q := A \cap S^-$。根据前一个不等式，$|P|$，$|Q| \le 7T$。我们将证明

$$
v(A \setminus Q) \ge v(B \setminus P). \tag{3}
$$

这意味着，通过丢弃至多 $|P| + |Q| \le 14T$ 个物品，可以消除 A 对 B 的任何嫉妒。由对称性（交换 A 和 B），反方向的结论也成立，因此引理得证。

情况 1： $L = m$ （因此 $S = M$）。于是 $R = \emptyset$。根据构造，$B \setminus P$不包含物品，且 $A \setminus Q$不包含负担物品，因此 $v(A \setminus Q) \ge 0 \ge v(B \setminus P)$，从而证明了 (3)。

情形 2： $L = 6Tk$ （因此 $m \ge 6Tk$）。若 $p = 0$，则对所有 $x \in R$，$v(x) = 0$，因此 $v(A \cap R) = v(B \cap R) = 0$，此时情况 1 中的论证仍然适用。

Assu我 $p > 0$。对 $j = 3$，4 使用 (1) 并乘以 p，对于 $X \in \{A, B\}$，我们有

$$
\begin{aligned}
\left|\tfrac{1}{k} v(R^+) - v(X \cap R^+)\right| &\le pT,\\
\left|\tfrac{1}{k} v(R^-) - v(X \cap R^-)\right| &\le pT.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
|v(A \cap R^+) - v(B \cap R^+)| &\le 2pT,\\
|v(A \cap R^-) - v(B \cap R^-)| &\le 2pT,
\end{aligned}
$$

因此

$$
v(A \cap R) - v(B \cap R) \ge -4pT. \tag{4}
$$

由于每个 $x \in S$ 都满足 $|v(x)| \geq p$，因此对于 $x \in S^+$，有 $v(x) \geq p$；对于 $x \in S^-$，有 $v(x) \leq -p$。此外，$A \setminus Q$ 包含 $A \cap S^+$ 且不包含来自 $A \cap S^-$的任何物品，而 $B \setminus P$包含 $B \cap S^-$ 且不包含来自 $B \cap S^+$的任何物品。因此

$$\begin{aligned} v(A \setminus Q) - v(B \setminus P) = \big(v(A \cap S^+) - v(B \cap S^-)\big) \\ + \big(v(A \cap R) - v(B \cap R)\big). \end{aligned} \tag{5}$$

我们对式 (5) 中的第一项给出下界：

$$v(A \cap S^+) - v(B \cap S^-) \geq p\big(|A \cap S^+| + |B \cap S^-|\big). \tag{6}$$

根据式 (2),

$$|A \cap S^+| \geq \tfrac{|S^+|}{k} - T, \qquad |B \cap S^-| \geq \tfrac{|S^-|}{k} - T,$$

so

$$|A \cap S^+| + |B \cap S^-| \geq \tfrac{|S^+|+|S^-|}{k} - 2T = \tfrac{L}{k} - 2T = 4T. \tag{7}$$

结合式 (6) 和 (7) 可得

$$v(A \cap S^+) - v(B \cap S^-) \geq 4pT. \tag{8}$$

最后，将式 (4) 和 (8) 代入式 (5)，得到

$$v(A \setminus Q) - v(B \setminus P) \geq 4pT - 4pT = 0,$$

这就证明了式 (3)。 □

对于下界，我们将使用与之密切相关的 p加权差异度概念。给定一组由 n 个可加估值函数组成的 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 以及参数 $p \in (0,1)$，p-加权差异度定义为

$$\mathrm{wdisc}_p(V) := \min_{A \subseteq M} \max_{i \in [n]} \Big| p \cdot v_i(M) - v_i(A) \Big|.$$

Manurangsi and Meka 的定理 3.2 [2026] 确立了以下下界。

定理 2 (Manurangsi and Meka [2026])。对于每个 $p \in (0,1)$ 和 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个物品集合 M以及一个由 n 个二元可加估值函数组成的集合 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$，使得

$$\mathrm{wdisc}_p(V) \geq \tfrac{\sqrt{n-1}}{16}.$$

4 一个 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 上界

现在，我们将引理 1 与 Manurangsi and Meka 的非对称差异结果 [2026]（定理 1）结合起来，从而在非对称嫉妒模型中得到一个 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 界。该构造是非共识的，也就是说，它会根据代理标签生成分配（A_1，.....，A_n），且在物品束置换后，保证未必仍然成立。

定理 3。设 M 为物品集合，且$(v_{i,j})_{i,j \in N, i \neq j}$ 是一个包含 n 个参与者的非对称嫉妒模型实例，其中每个 $v_{i,j}$ 都是可加的，并且可以对物品赋予正值和负值。则存在一个划分

$$M = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$$

使得对于任意一对不同的参与者 $i, j \in N$，至多从 $A_i \cup A_j$ 中丢弃 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 个物品，即可消除 i 对 j 的嫉妒（以 $v_{i,j}$ 衡量），其中涉及 A_i 和 A_j。等价地，分配 $\overline{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ 是 EF_a-$\mathcal{O}(\sqrt{n})$。此外，该分配可在确定性多项式时间内计算得出。

证明。令 k 为 $= n$（颜色数量）。令 $T = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ 为应用定理 1 时所保证的差异界

$$n_1 = 8(n-1).$$

对于每个有序对 $i \neq j$，使用参数 $k = n$ 和 T 将引理 1 应用于估值函数 $v_{i,j}$。由此得到四个可加估值函数

$$v^1_{i,j},\ v^2_{i,j},\ v^3_{i,j},\ v^4_{i,j} : 2^M \to \mathbb{R},$$

其中 $v^t_{i,j}(x) \in [0,1]$ 对所有 $t \in \{1,2,3,4\}$ 和 $x \in M$ 均成立。

现在，我们按如下方式构造一个含有 $k = n$ 种颜色的非对称差异实例。对于每种颜色 $\ell \in [n]$，定义估值函数的多重集

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\ell := &\{\, v^t_{\ell,j} : j \in [n] \setminus \{\ell\},\ t \in \{1,2,3,4\} \,\} \cup \\ &\{\, v^t_{j,\ell} : j \in [n] \setminus \{\ell\},\ t \in \{1,2,3,4\} \,\}.\end{aligned}$$

因此，对于每个 ℓ，都有 $|\mathcal{V}_\ell| = 8(n-1)$ 成立，并且所有 $\mathcal{V}_\ell$ 中的函数都满足定理 1 的有界性条件。

应用定理 1 可得到一种着色 $\chi:\ M \to [n]$，使得对于每个 $\ell \in [n]$ 和每个 $u \in \mathcal{V}_\ell$，

$$\left|\tfrac{1}{n}u(M) - u(\chi^{-1}(\ell))\right| \leq T.$$

令 $A_\ell := \chi^{-1}(\ell)$。则 $(A_1, \ldots, A_n)$ 是 M 的一个划分。

固定任意有序对 $i \neq j$。根据构造，四个函数 $v^1_{i,j}, \ldots, v^4_{i,j}$ 同时属于 $\mathcal{V}_i$ 和 $\mathcal{V}_j$，因此对于每个 $t \in \{1,2,3,4\}$，我们有

$$\left|\tfrac{1}{n}v^t_{i,j}(M) - v^t_{i,j}(A_i)\right| \leq T$$

and

$$\left|\tfrac{1}{n}v^t_{i,j}(M) - v^t_{i,j}(A_j)\right| \leq T.$$

因此，对于不相交集合 A_i 和 A_j（带有 $k = n$），引理 1 的条件 (1) 成立；引理 1 蕴含，关于 $v_{i,j}$，i 对 j 的嫉妒可以通过从 $A_i \cup A_j$ 中至多丢弃 $14T = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ 个物品来消除。

由于这对每个有序对 $i \neq j$ 都成立，因此该分配是无嫉妒 a-$\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 的。确定性多项式时间可计算性由定理 1 得出。 □

通过将定理 3 与反复应用命题 1 相结合，我们也可以为外部性模型获得相同的上界。

推论1. 给定一个有 n 个参与者的外部性模型实例，存在一种确定性多项式时间算法，可以输出一个无嫉妒-$\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 分配 $(A_1, \ldots, A_n)$。

证明。给定一个外部性实例 I，利用命题 1 得到一个等价的非对称嫉妒实例 $f(I)$，其估值为 $v_{i,j}(x) = V_i(i, x) - V_i(j, x)$。接着，对 $f(I)$ 应用定理 3，得到一个无嫉妒 a-$\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 分配。根据命题 1，同一分配在外部性模型中是无嫉妒的 $-\mathcal{O}(\sqrt{n})$。

□

5 渐近紧确的下界

本节证明一个匹配的下界，表明推论1在渐近意义上是紧的，即使实例是二元可加的，且不包含负担物品。为简洁起见，我们首先在具有二元估值的非对称嫉妒模型中证明下界。然后，我们利用命题 1 证明，这一结果意味着具有二元无负担物品估值的外部性模型中存在一个等价的下界。

令 n 为任意正奇整数， $q=(n-1)/2$，且 S_1、.....、S_q 为物品集合 M 的 q 个子集。对于任意 i，令 v^{S_i} 为由 $v^{S_i}(A) := |A \cap S_i|$ 定义的二元可加估值函数，其中对所有 $A \subseteq M$ 均成立。令 $\mathcal{V} = \{v^{S_1}, \ldots, v^{S_q}\}$。

利用上述估值概况，我们可以如下构造一个相应的非对称嫉妒模型实例。

对于所有 $j \geq 2$，令 $v_{1,\,j}(A) := |A|$。对于每个 $i \in [q]$，定义 $S_i := M \setminus S_i$。然后，对于每个 $i \in [q]$，对所有 $j \in [n] \setminus \{2i\}$，令

$$v_{2i,j}(A) := \begin{cases} v^{S_i}(A), & \text{if } j = 1, \\ v^{\bar{S}_i}(A), & \text{otherwise,} \end{cases}$$

且对于所有 $j \in [n] \setminus \{2i+1\}$，

$$v_{2i+1,j}(A) := \begin{cases} v^{\bar{S}_i}(A), & \text{if } j = 1, \\ v^{S_i}(A), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们证明，若此实例存在某个整数 c 对应的无嫉妒 c 分配，则其 $1/n$-加权差异度至多为 $6c$。

引理 2. 在上述实例中，假设存在一个划分 $M = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$，使其对某个整数 $c \geq 1$ 满足无嫉妒 c。那么

$$\mathrm{wdisc}_{1/n}(\mathcal{V}) \leq 6c.$$

证明. 固定一个无嫉妒 c 分配 $M = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$，并记 $m = |M|$。根据 $\mathrm{wdisc}^{1/n}(\mathcal{V})$ 的定义，取集合 $A_1 \subseteq M$ 可得

$$\mathrm{wdisc}_{1/n}(\mathcal{V}) \leq \max_{i \in [q]} \left| \frac{1}{n} v^{S_i}(M) - v^{S_i}(A_1) \right|.$$

由于 $v^{S_i}(X) = |S_i \cap X|$，我们有 $v^{S_i}(M) = |S_i|$ 且 $v^{S_i}(A_1) = |S_i \cap A_1|$，因此只需证明对每个 $i \in [q]$，

$$\left| |S_i \cap A_1| - \frac{|S_i|}{n} \right| \leq 6c.$$

固定 i，并简记 $S_i = M \setminus S_i$。

步骤 1：所有物品束的大小几乎相同。 回想一下，代理人 1 对每件物品的估值都是 1，因此对于每个物品束 X 和每个 $j \geq 2$，我们有 $v_{1,j}(X) = |X|$。由于该分配满足无嫉妒 c，对于每个 $j \geq 2$，

$$|A_1| = v_{1,j}(A_1) \geq v_{1,j}(A_j) - c = |A_j| - c.$$

此外，根据估值概况的定义（对于这个固定的 i），代理人 $2i$ 在与代理人 1 比较时将 S_i 计为物品，而在与代理人 $2i+1$ 比较时将 S_i 计为物品；代理人 $2i+1$ 的行为则具有对称性。沿着这些比较应用 EFc 可得

$$|S_i \cap A_{2i}| \geq |S_i \cap A_1| - c, \quad |\bar{S}_i \cap A_{2i}| \geq |\bar{S}_i \cap A_{2i+1}| - c,$$

and

$$|S_i \cap A_{2i+1}| \geq |S_i \cap A_{2i}| - c, \quad |\bar{S}_i \cap A_{2i+1}| \geq |\bar{S}_i \cap A_1| - c.$$

综上,

$$\begin{aligned} |A_{2i}| &= |S_i \cap A_{2i}| + |\bar{S}_i \cap A_{2i}| \\ &\geq (|S_i \cap A_1| - c) + (|\bar{S}_i \cap A_{2i+1}| - c) \\ &\geq |S_i \cap A_1| - c + (|\bar{S}_i \cap A_1| - 2c) \\ &= |A_1| - 3c. \end{aligned}$$

同样的论证可得 $|A_{2i+1}| \geq |A_1| - 3c$。

将 $\sum_{j=1}^{n} |A_j| = m$ 求和并利用这些不等式，可得

$$m \geq |A_1| + (n-1)(|A_1| - 3c) = n|A_1| - 3c(n-1),$$

因此

$$|A_1| \leq \frac{m}{n} + 3c.$$

步骤 2： S_i**的差异**。我们区分两种情况。

情况 *1*： $|S_i \cap A_1| \leq |S_i|/n$。由于 $S_i = \bigsqcup_{j=1}^{n}(S_i \cap A_j)$，根据平均法，存在某个 $j \neq 1$ 使得 $|S_i \cap A_j| \geq |S_i|/n$。若 $j \neq 2i+1$，则由针对代理人 $2i+1$ 的无嫉妒$_{\alpha}$-c 可得 $|S_i \cap A_{2i+1}| \geq |S_i \cap A_j| - c \geq |S_i|/n - c$；若 $j = 2i+1$，则结论显然。因此

$$|S_i \cap A_{2i+1}| \geq \frac{|S_i|}{n} - c.$$

结合 $|S_i \cap A_{2i+1}| \geq |S_i \cap A_1| - c$，我们得到

$$|A_{2i+1}| = |S_i \cap A_{2i+1}| + |\bar{S}_i \cap A_{2i+1}| \geq \frac{|S_i|}{n} + |\bar{S}_i \cap A_1| - 2c.$$

利用 $|A_1| \geq |A_{2i+1}| - c$ 可得

$$|A_1| \geq \frac{|S_i|}{n} + |\bar{S}_i \cap A_1| - 3c.$$

由于 $|A_1| = |S_i \cap A_1| + |S_i \cap A_1|$，我们得出

$$|S_i \cap A_1| \geq \frac{|S_i|}{n} - 3c,$$

因此在情况 **1** 中，

$$\left| |S_i \cap A_1| - \frac{|S_i|}{n} \right| \leq 3c.$$

情形 *2*： $|S_i \cap A_1| \geq |S_i|/n$。我们首先声称

$$|\bar{S}_i \cap A_1| \geq \frac{|\bar{S}_i|}{n} - 3c.$$

事实上，如果 $|S_i \cap A_1| \geq |S_i|/n$，则无需证明。否则，通过平均法可知存在某个 $j \neq 1$ 满足 $|S_i \cap A_j| \geq |S_i|/n$，并将情况 **1** 中的论证重复一遍，用 S_i 替代 S_i（使用代理人 $2i$ 替代 $2i+1$），即可得到该界。

利用该断言以及步骤 1 中的界 $|A_1| \le m/n + 3c$,

$$\begin{aligned}|S_i \cap A_1| &= |A_1| - |\bar{S}_i \cap A_1| \\ &\le \left(\frac{m}{n} + 3c\right) - \left(\frac{|\bar{S}_i|}{n} - 3c\right) = \frac{|S_i|}{n} + 6c.\end{aligned}$$

由于情形 2 假设 $|S_i \cap A_1| \ge |S_i|/n$，我们得到

$$\left||S_i \cap A_1| - \frac{|S_i|}{n}\right| \le 6c.$$

在两种情形下，我们都证明了 $\left||S_i \cap A_1| - |S_i|/n\right| \le 6c$。对 $i \in [q]$ 取最大值，并回顾 $v^{S_i}(X) = |S_i \cap X|$ ，可得

$$\max_{i\in[q]} \left|\frac{1}{n} v^{S_i}(M) - v^{S_i}(A_1)\right| \le 6c,$$

因此，$\mathrm{wdisc}^{1/n}(\mathcal{V}) \le 6c$。 □

现在，我们正式给出外部性模型中二元无负担估值情形的下界。

定理 4。 存在一个外部性模型的二元无负担实例，其中有 n 个参与者，并且每个无嫉妒-c 分配都需要 $c = \Omega(\sqrt{n})$。

证明。 该定理的证明结合上述引理与定理 2 即可得到。Manurangsi and Meka 的实例 [2026] 由 $\Theta(n)$ 个水平堆叠的 $1\,2(\mathbf{1}_{q\times q} + \boldsymbol{H})$ 副本组成，其中 $\mathbf{1}_{q\times q}$ 是一个全 1 矩阵，而 $\boldsymbol{H}$ 是一个哈达玛矩阵。显然，该实例是二元的。若令集合 $S_1, \ldots, S_q$ 由该实例中的超边给出，则相应的估值概况 $\mathcal{V}$ 由 q 个二元可加函数组成。取 $p = 1/n$，由定理 2 可得以下下界：

$$\mathrm{wdisc}_{1/n}(\mathcal{V}) \ge \frac{\sqrt{q-1}}{16}.$$

由于 $q = (n-1)/2$，结合引理 2 可得

$$c \ge \frac{\sqrt{((n-1)/2) - 1}}{96},$$

因此 $c = \Omega(\sqrt{n})$，且非对称嫉妒模型中的相应实例对任何 $c \in o(\sqrt{n})$ 都不存在 EF$_a$-c 分配。最后，根据命题 1，存在一个外部性模型中的二元无家务实例，其中每个 EF$-c$ 分配都需要 $c = \Omega(\sqrt{n})$。

□

如前所述，这一结果的一个重要推论是：当参与者存在外部性时，即使估值是二元无家务，EF1 分配也不一定存在；这驳斥了 Deligkas 等人 [2024] 的一个猜想，并解决了 Aziz 等人[2023] 提出的开放问题。

定理 5 （定理 4 的推论）。 外部性模型中存在一个二元无家务实例，不存在无嫉妒 *EF1* 分配。

有趣的是，上述非对称嫉妒模型中的例子也可用于构造外部性模型中的一个非二元实例，但该实例具有以下性质：代理人 1 不具有任何外部性，而实例中的每个其他代理人仅对代理人 1 具有外部性。定理 4 和定理 6 共同表明，即使是具有高度结构化外部性的实例，也不允许存在 EF1 分配。

定理 6。 在外部性模型中存在一个包含 n 个参与者的实例，其中每个参与者仅对参与者 *1* 具有外部性，并且每个无嫉妒-c 分配都需要 $c = \Omega(\sqrt{n})$。

证明。 考虑非对称嫉妒模型中引理 2 的实例 $(v_{i,\ j})_{i,\ j\in[n]}$。对于所有 $x \in M$ 和 $j \geq 2$，我们令$V_1(1,\ x) = 1$ 以及 $V_1(j,\ x) = 0$。对于每个 $i \in [q]$，如果 $x \in S_i$，我们令

$$V_{2i}(j,x) := \begin{cases} -1, & \text{if } j = 1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

否则，如果 $x \in S_i$，我们令

$$V_{2i}(j,x) := \begin{cases} 1, & \text{if } j = 1, \\ 1, & \text{if } j = 2i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

类似地，对于每个 $i \in [q]$，如果 $x \in S_i$，我们令

$$V_{2i+1}(j,x) := \begin{cases} -1, & \text{if } j = 1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

否则，如果 $x \in S_i$，我们令

$$V_{2i+1}(j,x) := \begin{cases} 1, & \text{if } j = 1, \\ 1, & \text{if } j = 2i+1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

上述外部性模型中的估值概况满足

$$v_{i,j}(x) \ := \ V_i(i,x) - V_i(j,x),$$

对于引理 2 中非对称嫉妒模型实例的所有物品 $x \in M$ 和所有参与者 $i,\ j \in [n]$，因此我们可以应用该上界。显然，除参与者 1 外，没有任何参与者对其他参与者存在外部性。根据命题 1、引理 2 和定理 4，该实例中的每个无嫉妒-c分配都需要 $c = \Omega(\sqrt{n})$。

□

6 一个期望真实的机制

本节中，我们给出上界的一个共识 版本，在该版本中，所得分配的物品束可以在参与者之间任意置换，同时仍能保持公平性保证。这使我们能够将所得构造实现为一种期望真实机制，即任何参与者都无法通过虚报其估值来提高其期望价值（事前）。这里的期望是针对机制的随机性而言的；真实性质直接源于参与者可以与物品束进行均匀随机匹配这一事实。

具体而言，我们结合引理 1 和对称地应用定理 1，将 Manurangsi 和 Suksompong 给出的共识上界推广到物品与负担物品混合的情形。 [2022, 定理 1。3]

定理 7。 设 v_1、……、v_n 为可加估值函数，它们对物品既可以赋予正值，也可以赋予负值；设 k 为颜色数。存在一种将物品划分为 k 个物品束 $M = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k$ 的方式，使得对于任意 ℓ、$\ell' \in [k]$ 以及任意 $i \in [n]$，至多丢弃 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 件物品，就能消除 A_ℓ 与 $A_{\ell'}$ 之间的嫉妒（相对于 v_i）。此外，这种划分可以在确定性多项式时间内计算得出。

证明。 令 $T = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ 表示应用定理 1 并取参数 $n_1 = 4n$ 时所保证的差异界。

我们首先对每个估值函数 v_i（其中 $i \in [n]$）应用引理 1，参数取为 k 和 T。由此，对每个 i，可得到四个可加估值函数

$$v_i^1, v_i^2, v_i^3, v_i^4 : 2^M \to \mathbb{R},$$

使得对于所有 $x \in M$ 和所有 $j \in [4]$，均有 $v_i^j(x) \in [0, 1]$。

接下来，我们按如下方式构造一个对称差异实例。对每种颜色 $\ell \in [k]$，定义估值函数的多重集

$$\mathcal{V}_\ell \;=\; \{v_1^1, v_1^2, v_1^3, v_1^4, \ldots, v_n^1, v_n^2, v_n^3, v_n^4\}.$$

因此，对于每个 ℓ，都有 $n_\ell = 4n$，并且所有估值函数都满足定理 1 所要求的有界性条件。

应用定理　　将此实例中的 1 移除后，可得到一个对物品进行的 k-着色，并由此诱导出一个划分

$$M = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k,$$

使得对于每个 $\ell \in [k]$、每个 $i \in [n]$ 以及每个 $j \in [4]$，

$$\left| \tfrac{1}{k} v_i^j(M) - v_i^j(A_\ell) \right| \;\le\; T.$$

任取两个物品束 A_ℓ 和 $A_{\ell'}$ 以及任意索引 $i \in [n]$。上述不等式验证了集合 A_ℓ 和 $A_{\ell'}$ 满足引理 1 的条件 (1)。因此，引理 1 表明，相对于原始估值 v_i，A_ℓ 和 $A_{\ell'}$ 之间的嫉妒可以通过丢弃至多 $14T = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ 个物品来消除。

□

下面的推论可由定理 7 的应用与 Bu 和 Tao [2025] 所述的简单机制相结合得出，该机制以均匀随机的方式分配物品束。

推论 2. 对于具有可加估值函数、且可能对物品赋予正值或负值的 n 个代理人，存在一种在多项式时间内运行的随机事前真实机制，其输出一个分配 $(A_1, \ldots, A_n)$，该分配满足无嫉妒-$\mathcal{O}(\sqrt{n})$。

证明。 该推论可由定理 7 与 $k = n$ 种颜色结合得到，再加上 Bu 和 Tao [2025]，所描述的简单机制，该机制以均匀随机的方式分配物品束。代理人 i 获得的期望价值为 $\frac{1}{n} v_i(M)$，不受参与者报告的影响。事实上，这一保证远强于真实性：任何参与者联盟都无法影响某位代理人的期望价值。

□

在外部性模型中，将定理 7 应用于命题 1 产生的 $n(n-1)$ 非对称嫉妒估值 $(v_{i,\,j})_{i \neq j}$，可得以下推论。这给出了一个阶为 $\mathcal{O}\left(\sqrt{n(n-1)}\right) = \mathcal{O}(n)$ 的共识界。

推论 3。 给定外部性模型的一个实例，存在一种在多项式时间内运行的随机事前真实机制，可输出一个分配 $(A_1, \ldots, A_n)$，且该分配满足无嫉妒-$\mathcal{O}(n)$。

证明。 给定外部性模型的一个实例 I，使用命题 1 得到一个等价的实例 $f(I)$，它属于非对称嫉妒模型，且采用基于嫉妒的比较。将定理 7 应用于估值函数 $n(n-1)$ 的集合 $\{v_{i,j} \colon i, j \in N, i \neq j\}$，其中有 $k = n$ 种颜色。由此得到一个划分 $M = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$，使得对于任意两个物品束，每个 $v_{i,j}$ 在丢弃 $\mathcal{O}\left(\sqrt{n(n-1)}\right) = \mathcal{O}(n)$ 件物品后都是“平衡的”。

最后，如 Bu 和 Tao [2025] 所述，将物品束均匀随机地分配给参与者。由于每件物品以 $1/n$ 的概率分配给每位参与者，因此代理人 i 的期望价值为

$$\frac{1}{n} \sum_{x \in M} \sum_{j \in N} V_i(j, x),$$

无论参与者如何报告，情况都如此。由于该划分具有共识性质（即适用于每一对物品束），所得分配在 $f(I)$ 中是 EF-$\mathcal{O}(n)$，因此根据命题 1，在 I 中也满足 EF-$\mathcal{O}(n)$。

□

7 结论

对于具有外部性的参与者之间不可分物品的公平分配，我们找到了始终能够达到的最优松弛 EF-k 的渐近紧界。具体而言，对于一般的可加估值情形，我们证明始终存在 EF-$\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 分配；即使在无负担物品的二元估值特殊情形下，也给出了匹配的 $\Omega(\sqrt{n})$ 下界。在此过程中，我们回答了 Aziz等人 [2023], 提出的两个开放问题，并解决了 Deligkas等人 [2024], 的一个猜想，证明当参与者具有外部性时，EF1 分配并不总是存在。我们还提出了一种事前真实的基于共识的机制，在参与者具有外部性时能够找到 EF-$\mathcal{O}(n)$ 分配。我们的工作为未来研究提出了有趣的新方向。

- 小型显式反例：我们的证明技巧展示了如何将差异中的一个已知下界，化约为外部性模型中的一组下界实例。尽管如此，我们仍未解决如何描述一个小型显式反例，以及确定对于具有或不具有无负担物品条件的可加/二元估值，EF1 分配存在时 n 的最大取值这一问题。

- 共识下界：我们提出了一种事前真实的基于共识的机制，在参与者存在外部性时，能够找到 EF-$\mathcal{O}(n)$ 分配。在这种情况下，是否存在相应的匹配下界?

- 其他设置：我们的方法能否用于在其他设置中寻找类似界限，例如具有社会影响的公平分配 [Flammini等人，2025年；Deligkas 等人， 2026]?

致谢

本项目获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号101002854）提供的资助，以及欧盟通过“机器人与先进工业生产”项目（注册编号CZ.02.01.01/00/22 008/0004590）提供的资助。第一作者获得了 NSERC探索资助 2022-04191。我们感谢 Adrian Vetta 与我们进行讨论。



参考文献

Aishwarya Agarwal、Edith Elkind、Jiarui Gan、Ayumi Igarashi、Warut Suksompong 和 Alexandros A. Voudouris。图上的谢林博弈。人工智能，301:103576，2021年。

Georgios Amanatidis、Haris Aziz、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas、Bo Li、Herv´e Moulin、Alexandros A. Voudouris 和 Xiaowei Wu。不可分物品的公平分配：最新进展与开放问题。人工智能，322:103965，2023。

Elliot Anshelevich、Onkar Bhardwaj 和 Martin Hoefer。具有网络外部性的稳定匹配。*Algorithmica*，78(3):1067–1106，2017。

Robert U. Ayres 和 Allen V. Kneese。生产、消费与外部性。《美国经济评论》，59(3):282–297，1969。

Haris Aziz、Warut Suksompong、Zhaohong Sun 和 Toby Walsh。具有外部性的不可分物品公平概念。载于第*37*届*AAAI*人工智能大会论文集，*AAAI '23*，第5472–5480页。AAAI出版社，2023年。

Steven J. Brams 和 Alan D. Taylor。公平分配：从切蛋糕到争议解决。剑桥大学出版社，1996年。

Simina Brˆanzei、Tomasz P. Michalak、Talal Rahwan、Kate Larson 和 Nicholas R. Jennings。具有外部性和态度的匹配。载于第*12*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集，*AAMAS '13*，第295–302页。IFAAMAS，2013。

Simina Brˆanzei、Ariel D. Procaccia 和 Jie Zhang。切蛋糕中的外部性。载于第*23*届国际人工智能联合会议论文集，*IJCAI '13*，第55–61页。ijcai.org，2013。

Xiaolin Bu 和 Biaoshuai Tao。分配不可分物品的真实且近似无嫉妒机制：随机性的力量。载于《第*66*届*IEEE*计算机科学基础研讨会论文集，*FOCS '25*》。IEEE，2025年。

Xiaolin Bu、Zihao Li、Shengxin Liu、Jiaxin Song 和 Biaoshuai Tao。具有分配者偏好的公平分配。载于第*19*届网络与互联网经济国际会议（*WINE '23*）论文集，《计算机科学讲义》第14413卷，第77–94页。Springer，2023年。

Eric Budish。组合分配问题：来自相等收入的近似竞争均衡。《政治经济学杂志》，119(6):1061–1103，2011年。Ioannis Caragiannis、David Kurokawa、Herv´e Moulin、Ariel D. Procaccia、Nisarg Shah 和 Junxing Wang。最大纳什福利的不合理公平性。《ACM经济学与计算汇刊》，7(3):12:1–12:32，2019。Ioannis Caragiannis、Kasper Green Larsen 和 Sudarshan Shyam。多色差异度的新下界及其在公平分配中的应用。载于第*18*届国际算法博弈论研讨会（*SAGT ’25*）论文集，《计算机科学讲义》第15953卷，第228–246页。Springer，2025年。ˇ Argyrios Deligkas、Eduard Eiben、Viktoriia Korchemna 和 Simon Schierreich。具有外部性的不可分物品公平分配的复杂性。载于第*38*届*AAAI*人工智能会议（*AAAI ’24*）论文集，第9653–9661页。AAAI出版社，2024年。ˇ Argyrios Deligkas、Eduard Eiben、Tiger-Lily Goldsmith、Duˇsan Knop 和 Simon Schierreich。为所有人谋利而分配不可分物品：缺乏社会意识时很难做到公平。载于第*40*届*AAAI*人工智能会议（*AAAI ’26*）论文集。AAAI出版社，2026年。Benjamin Doerr 和 Anand Srivastav。多色差异度。《组合学、概率与计算》，12(4):365–399，2003年。Max Dupr´e la Tour。伴侣的坏消息：不可分物品公平分配的紧下界。《CoRR》，abs/2601.01012，2026年。Edith Elkind、Neel Patel、Alan Tsang 和 Yair Zick。亲近朋友：与朋友共同分配土地。载于第*29*届国际人工智能联合会议（*IJCAI ’20*）论文集，第318–324页。ijcai.org，2020年。James C. D. Fisher 和 Isa Emin Hafalir。具有总外部性的匹配。《数学社会科学》，81:1–7，2016年。Michele Flammini、Gianluigi Greco 和 Giovanna Varricchio。具有社会影响的公平分配。载于第*39*届*AAAI*人工智能会议（*AAAI ’25*）论文集，第13856–13863页。AAAI出版社，2025年。Duncan Foley。资源分配与公共部门。《耶鲁经济论文集》，7(1)，1967年。Peter Funk。具有相互依存估值的拍卖。《国际博弈论杂志》，25:51–64，1996年。Jugal Garg、Vishnu V. Narayan 和 Yuang Eric Shen。设计渐近公平分配的真实机制。载于第*40*届*AAAI*人工智能会议（*AAAI ’26*）论文集。AAAI出版社，2026年。Paul G¨olz 和 Hannane Yaghoubizade。伴侣和小群体之间的公平分配。《CoRR》，abs/2508.13432，2025年。Nathana¨el Gross-Humbert、Nawal Benabbou、Aur´elie Beynier 和 Nicolas Maudet。用于具有配额和基于邻里关系效用的公共住房分配的顺序机制与交换机制。《ACM经济学与计算汇刊》，10(4):15:1–15:24，2022年。

Philippe Jehiel 和 Benny Moldovanu。策略性不参与。《*RAND*经济学杂志》，27(1):84–98，1996年。Michael L. Katz 和 Carl Shapiro。网络外部性、竞争与兼容性。《美国经济评论》，75(3):424–440，1985年。ˇDuˇsan Knop 和 Simon Schierreich。尊重难民住房的接纳社区。载于第*22*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集，*AAMAS '23*，第966–975页。IFAAMAS，2023年。Avi Levy、Harishchandra Ramadas 和 Thomas Rothvoss。通过乘法权重更新方法实现确定性差异最小化。载于第*19*届整数规划与组合优化国际会议论文集，*IPCO '17*，《计算机科学讲义》第10328卷，第380–391页。Springer，2017年。Minming Li、Jialin Zhang 和 Qiang Zhang。具有外部性的真实切蛋糕机制：不要让他们过分关心他人！载于第*24*届国际人工智能联合会议论文集，*IJCAI '15*，第589–595页。AAAI出版社，2015年。Minming Li、Lili Mei、Yi Xu、Guochuan Zhang 和 Yingchao Zhao。具有外部性的设施选址博弈。载于第*18*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集，*AAMAS '19*，第1443–1451页。IFAAMAS，2019年。Minming Li、Cheng Peng、Ying Wang 和 Houyu Zhou。具有外部性的群体公平设施选址博弈。载于第*24*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集，*AAMAS '25*，第2615–2617页。IFAAMAS，2025年。Richard J. Lipton、Evangelos Markakis、Elchanan Mossel 和 Amin Saberi。关于不可分物品的近似公平分配。载于第*5*届*ACM*电子商务会议论文集，*EC '24*，第125–131页。ACM，2004年。Pasin Manurangsi 和 Raghu Meka。多色差异的紧下界。载于第*9*届*SIAM*算法简洁性研讨会论文集，*SOSA '26*，第266–274页。SIAM，2026年。Pasin Manurangsi 和 Warut Suksompong。群体公平分割的渐近存在性。《数学社会科学》，89:100–108，2017年。Pasin Manurangsi 和 Warut Suksompong。无嫉妒分配何时存在？*SIAM*离散数学杂志，34(3):1505–1521，2020年。Pasin Manurangsi 和 Warut Suksompong。弥合渐近公平分配中的差距。*SIAM*离散数学杂志，35(2):668–706，2021年。Pasin Manurangsi 和 Warut Suksompong。群体近似无嫉妒：通过偏差理论改进界限。《理论计算机科学》，930:179–195，2022年。Pasin Manurangsi 和 Warut Suksompong。群体公平分割的序数最大最小保障。载于第*33*届国际人工智能联合会议论文集，*IJCAI '24*，第2922–2930页。ijcai.org，2024年。Pasin Manurangsi 和 Warut Suksompong。渐近公平分配：负担物品比物品更容易处理。载于第*34*届国际人工智能联合会议论文集，*IJCAI '25*，第3988–3995页。ijcai.org，2025年。

Pasin Manurangsi、Warut Suksompong 和 Tomohiko Yokoyama。加权公平分配的渐近分析。载于第*34*届国际人工智能联合会议论文集，*IJCAI ’25*，第3979–3987页。ijcai.org，2025年。Sagar Massand 和 Sunil Simon。图形单边市场。载于第*28*届国际人工智能联合会议论文集，*IJCAI ’19*，第492–498页。ijcai.org，2019年。Shaily Mishra、Manisha Padala 和 Sujit Gujar。具有特殊外部性的公平分配。载于第*19*届亚太人工智能国际会议论文集，*PRICAI ’22*，《计算机科学讲义》第13629卷，第3–16页。Springer，2022年。Ayse Mumcu 和 Ismail Saglam。具有外部性的稳定一对一匹配。《数学社会科学》，60(2):154–159，2010年。Trung Thanh Nguyen 和 J¨org Rothe。不可分物品公平分配的复杂性结果与精确算法：综述。载于第*32*届国际人工智能联合会议论文集，*IJCAI ’23*，第6732–6740页。ijcai.org，2023年。Benjamin Plaut 和 Tim Roughgarden。一般估值下的近似无嫉妒。*SIAM*离散数学杂志，34(2):1039–1068，2020年。Masoud Seddighin、Hamed Saleh 和 Mohammad Ghodsi。外部性与公平。载于第*28*届万维网大会论文集，*WWW ’19*，第538–548页。ACM，2019年。Erel Segal-Halevi 和 Shmuel Nitzan。家庭间的公平切蛋糕。《社会选择与福利》，53(4):709–740，2019年。Warut Suksompong。代理人群体的近似最大最小份额。《数学社会科学》，92:40–47，2018年。William Thomson。公平分配理论导论。载于 Felix Brandt、Vincent Conitzer、Ulle Endriss、J´erˆome Lang 和 Ariel D. Procaccia 编，《style id='23'>计算社会选择手册，第11章，第261–283页。剑桥大学出版社，2016年。Rodrigo A. Velez。公平与外部性。理论经济学，11(1):381–410，2016年。Ying Wang、Houyu Zhou 和 Minming Li。设施选址中的正向群体内外部性。载于第*23*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集，*AAMAS ’24*，第1883–1891页。IFAAMAS，2024年。Chaoli Zhang、Xiang Wang、Fan Wu 和 Xiaohui Bei。具有身份依赖负外部性的高效拍卖。载于第*17*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集，*AAMAS ’18*，第2156–2158页。IFAAMAS，2018年。