arXiv:2601.13291v1 [math.CA] 19 Jan 2026

带有反射和分段常值自变量的二阶周期边值问题

Alberto Cabada 和 Paula Cambeses-Franco[1] CITMAga，15782，西班牙加利西亚圣地亚哥-德孔波斯特拉[2] 圣地亚哥-德孔波斯特拉大学数学学院统计学、数学分析与优化系，西班牙。alberto.cabada@usc.es；paula.cambeses.franco@usc.es

摘要

本文分析了一个带有分段常值自变量和反射、并与周期边界条件相结合的二阶微分方程。我们的主要贡献是构造相关的格林函数，并详细分析其性质。特别是，我们确定了格林函数具有恒定符号的参数区域，该区域取决于参数 m 和 M。在某些情况下，我们能够根据适当狄利克雷问题的第一特征值来刻画这些参数值。基于这些结果，我们应用Krasnosel'skii方法证明不同非线性问题解的存在性，并证明扰动薛定谔方程存在一个正解。

AMS主题分类： 34B05, 34B08, 34B10, 34B15, 34B18, 34B27.
关键词： 格林函数、含反射的方程、分段常值自变量、恒定符号、第一特征值、薛定谔方程。

1 引言

含分段常数自变量的微分方程和对合方程因其广泛的应用而受到广泛关注。分段常数自变量模型用于描述变量和/或其某些导数在离散区间上取值的系统。这些模型在控制工程和生物医学等领域尤为重要。对合方程通常涉及反射，也出现在生物医学和物理现象中，例如弯曲杆的热方程。

对合方程的研究可追溯至 1940, [18] 年 Silberstein 的工作。随着时间推移，许多研究都探讨了这类方程 [1, 6, 7, 15]。类似地，关于微分

含分段常数自变量的方程的研究始于 20 世纪 80 年代，它融合了微分方程和差分方程的方法，以应对相关难题 [12, 13]。

我们的工作结合了对这两类方程的研究，借鉴了 [3] 的方法，并运用了格林函数。格林函数的作用尤为重要：确定其保持恒定符号的区域后，便可应用上下解方法或不动点定理等技巧。进而，这些工具使我们能够保证一大类非线性边值问题存在定号解，而这类问题的某些变量涉及对合和分段常数依赖。

我们的主要目标是推导含对合和分段常值自变量的二阶问题的格林函数显式形式，分析其主要性质，并应用比较原理对该函数保持恒定符号的区域进行数值近似。在某些情况下，我们还根据相关狄利克雷问题的特征值，对这一恒定符号区域给出解析刻画。这种方法颇具新意，也尤其吸引人，因为它无需显式计算格林函数。基于这些信息，我们将采用Krasnosel'skii方法，证明非线性问题解的存在性。具体而言，我们将证明扰动薛定谔方程存在正解。

本文组织如下：第 2 节介绍研究该问题的动机，并引入本文末尾将研究的薛定谔方程。第 3 节给出后续分析所需的预备结果。第 4 节推导含对合和分段常值自变量的二阶问题的格林函数表达式，并考察其若干关键性质。第 5 节对格林函数具有恒定符号的区域进行数值近似，并将结果与解析预期进行比较。第 6 节根据相关狄利克雷问题的特征值刻画这一恒定符号区域；这种方法尤为有用，因为它无需显式计算格林函数。最后，第 7 节运用 Krasnosel'skii方法证明适当的非线性问题（例如薛定谔方程）存在解。

2 动机与应用

形如以下形式的方程

$$v''(t) = f(t, v(t), v(-t), v([t]))$$

自然地出现在这样的情形中：系统表现出连续动力学、离散干预以及时间对称性或记忆效应。这类泛函微分方程描述了仅靠标准常微分方程无法准确建模的现象。

基于这一思路，自光学阱中首次开展玻色–爱因斯坦凝聚体（BECs）实验以来，人们就已发现，经典线性薛定谔方程无法充分描述周期介质中量子粒子的动力学。考虑到

粒子间相互作用、周期结构和非局域效应的需要，促使人们提出了更复杂形式的薛定谔方程。

具体而言：

- 通过类似 $\psi(-x,\ t)$ 的项引入的空间反射，可以对具有 $\mathcal{PT}$-对称势的系统中的对称性和非局域效应进行建模。这类势已被证明在孤子的形成与稳定性方面发挥着关键作用 [21]。

- 势对单元平均密度的依赖由 $|\psi([x],\ t)|^2$ 表示。在研究光晶格或超晶格中的玻色-爱因斯坦凝聚体时，这种依赖自然会出现，因为原子的局部密度会改变每个单元中的有效势 [10]。

综合这些效应，我们的模型由非局域非线性薛定谔方程描述：

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_p}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \alpha\,|\psi([x],t)|^2\psi(x,t) + \beta\,\psi(-x,t) \quad x\in I := [-T,T], \quad t\in[a,b], \tag{2.1}$$

其中，$\hbar$ 是约化普朗克常数，m_p 是粒子质量，α 和 β 是实常数。在定态情况下，假设解的形式为 $\psi(x,\ t) = e^{-i\mu t/\hbar}\phi(x)$，则前述方程可化简为：

$$\mu\,\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_p}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \alpha|\phi([x])|^2\phi(x) + \beta\,\phi(-x), \quad x\in I, \tag{2.2}$$

其中，μ 是定态的化学势或本征能。

本研究是对这类方程进行研究的第一步，将单元尺度的非线性相互作用与空间反射效应结合起来，并为分析具有非局域对称性的周期介质中的离散孤子、呼吸子和能带打开了大门。这类模型可用于光学超晶格、晶格中的玻色-爱因斯坦凝聚体以及复杂量子系统的模拟。

3 预备知识

本节汇集后文所需的符号、定义和结果。我们依据文献 [22, 23] 回顾对合这一概念。

定义 3.1. 设 $A\subset\mathbb{R}$ 是一个包含多个点的集合，并设 $f\colon A\to A$ 是一个函数，且 f 不是恒等映射 Id。那么，当且仅当满足以下条件时，f 是一个对合：

$$f^2 \equiv f\circ f = Id \text{ on } A$$

或者，等价地，若

$$f = f^{-1} \text{ on } A.$$

如果 $A=\mathbb{R}$，我们称 f 为强对合。

如果函数 f 表示反射，即 $f(x) = -x$，那么在任意以 0 为中心的对称区间上， f 都是对合的一种特殊情况。

基于 [6, 第 3]，节概述的理论框架，我们可以推导含对合的微分方程的格林函数。

此外，我们还需要分析涉及分段常值自变量的微分问题，例如形式为 $v([t])$ 的问题，其中函数 $[t]$ 定义如下:

$$[t] = \begin{cases} n, & \text{if} \quad t \in [n, n+1) \\ -n, & \text{if} \quad t \in (-n-1, -n]. \end{cases}$$

其中 $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$。注意，对于每个 $t \in (-1, 1)$， $[t] = 0$。

在本文中，我们用 Λ 表示所有函数 $v : I \to \mathbb{R}$ 的集合，这些函数在 $I = [-T, [-T]) \cup [[-T], [-T]+1) \cup \ldots \cup [-2, -1) \cup [-1, 1) \cup [1, 2) \cup \ldots \cup [[T]-1, [T]) \cup [[T], T]$ 上连续，且对所有 $t \in \{[-T], \ldots, -1, 1, \ldots, [T]\}$， $v(t^-) \in \mathbb{R}$ 存在。此外，如果 $v \in \Lambda$，我们认为对所有 $t \in \{[-T], \ldots, -1, 1, \ldots, [T]\}, t^+ \in I$， $v(t) = v(t^+)$，前提是这样的定义有意义。

注记 **3.2.** 如果 $T \in \mathbb{N}$，那么点 $[-T]$ 和 $[T]$ 位于 I 的边界上，因此极限 $v([-T]^-)$ 和 $v([T]^+)$ 不存在。在这种情况下， $v \in C(\hat{I} \cup \{T\})$。

此外，令 Ω^2 表示所有函数 $v : I \to \mathbb{R}$ 的集合，其中 v 是 $W^{2,1}(I)$，且存在 $v'' \in \Lambda$，其中

$$W^{2,1}(I) = \{v \in C^1(I), v' \in \mathcal{AC}(I)\},$$

$$AC(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \;\middle|\; \exists f' \in \mathcal{L}^1(I),\, f(t) - f(s) = \int_s^t f'(r)\mathrm{d}r,\, \forall\, t, s \in I \right\},$$

为

$$\mathcal{L}^1(I) = \{f \text{ is a Lebesgue measurable function on } I \text{ such that } \int_I |f| < \infty\}.$$

按照 [3,第 3]，节所述的步骤，我们可以推导出任何同时包含对合和分段常数自变量、形式为 $v([t])$ 的微分方程的格林函数。

4 方程 $v''(t) + mv(-t) + Mv([t]) = \sigma(t)$ 在周期条件下的研究

本节着重分析包含反射项和分段常值函数的线性二阶微分方程，并考虑周期边界条件。具体而言，我们将讨论以下方程:

$$\begin{aligned} v''(t) + mv(-t) + Mv([t]) = \sigma(t), \quad \text{a.e. } t \in I, \\ v(T) = v(-T), \quad v'(-T) = v'(T), \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $T>0$、 m、 M 为实常数，且 $\sigma\in\mathcal{L}^1(I)$。

若函数 $v:I\to\mathbb{R}$ 满足 $v\in\Omega^2$ 且满足方程 (4.1)，则称其为问题 (4.1) 的解。

作为研究问题 (4.1) 的第一步，我们将针对 $M=0$ 的特殊情形，按照 [6, 第 3] 节中给出的结果，推导格林函数的表达式。

4.1 与周期边界条件耦合的方程 $v''(t)+mv(-t)=\sigma(t)$ 的研究

我们考虑以下带反射的二阶问题，它是问题 (4.1) 的一个特殊情形：

$$\begin{aligned} v''(t)+m\,v(-t)&=\sigma(t),\quad \text{a.e. } t\in I,\\ v(T)&=v(-T),\quad v'(-T)=v'(T), \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $T>0$、 $m\in\mathbb{R}$，且 $\sigma\in\mathcal{L}^1(I)$。

我们用 G_m 表示与问题（4.2）相关的格林函数。因此，应用 [4] 中描述的算法，并结合第 3.2 节的形式体系，1], 我们得到 G_m [19] 的显式表达式。

观察该表达式可知，对于所有的 $s,t\in I$， $G_m(t,s)=G_m(-t,-s)$，且 $G_m(t,s)=G_m(s,t)$。因此，只需将函数写在三角区域 $-t\le s\le t$ 上，便可利用对称性恢复完整表达式。为简便起见，我们只在此区域内给出表达式。

若 $m>0$，且 $-t\le s\le t$，则有：

$$G_m(t,s)=\frac{\cos(\sqrt{m}s)\csc(\sqrt{m}T)\cos(\sqrt{m}(t-T))+\sinh(\sqrt{m}s)\operatorname{csch}(\sqrt{m}T)\sinh(\sqrt{m}(t-T))}{2\sqrt{m}}. \tag{4.3}$$

若 $m<0$，且 $-t\le s\le t$，则：

$$G_m(t,s)=\frac{\sin(\sqrt{-m}s)\csc(\sqrt{-m}T)\sin(\sqrt{-m}(t-T))-\cosh(\sqrt{-m}s)\operatorname{csch}(\sqrt{-m}T)\cosh(\sqrt{-m}(t-T))}{2\sqrt{-m}}. \tag{4.4}$$

在此基础上，我们现在给出一系列关于格林函数 G_m 性质的评注。

评注 **4.1.** 当 $|m|\neq(k\pi/T)^2, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 时，格林函数 G_m 有明确定义，且问题（4.2）有唯一解，其表达式为

$$v(t):=\int_{-T}^{T}G_m(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s.$$

注意，当 $m=0$ 时，该问题没有唯一解。

注**4.2。** 对于所有 $T>0$ 和 $|m|\neq(k\pi/T)^2, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，可立即验证$v_0(t)=\frac{1}{m}$ 是所有满足 $\sigma(t)\equiv1$的 $t\in I$ 对应的问题（4.2）的唯一解。此外，有

$$v_0(t)=\frac{1}{m}=\int_{-T}^{T}G_m(t,s)\mathrm{d}s,\quad\forall t\in I. \tag{4.5}$$

另一方面，考虑到格林函数的性质以及G_m的表达式，我们可以推导出函数 G_m的一系列性质。

命题 4.3。 G_m 满足以下性质：

1. G_m 存在且在 $I \times I$上连续，*2.* $\frac{\partial G_m}{\partial t}$和 $\frac{\partial^2 G_m}{\partial t^2}$存在且在 $\{(t,s) \in I \times I | s \neq t\}$上连续，*3.* 对所有 $t \in I$，$\frac{\partial G_m}{\partial t}(t,t^-)$和 $\frac{\partial G_m}{\partial t}(t,t^+)$均存在且有限，并且满足 $\frac{\partial G_m}{\partial t}(t,t^-) - \frac{\partial G_m}{\partial t}(t,t^+) = 1$，对所有 $t \in I$均成立，*4.* 对所有 $t,s \in I$, $s \neq t$, $\frac{\partial^2 G_m}{\partial t^2}(t,s) + m\, G_m(-t,s) = 0$，*5.* 对所有 $s \in (-T,T)$, $G_m(T,s) = G_m(-T,s)$，*6.* 对所有 $s \in (-T,T)$, $\frac{\partial G_m}{\partial t}(T,s) = \frac{\partial G_m}{\partial t}(-T,s)$，*7.* 对所有 $t,s \in I$, $G_m(t,s) = G_m(-t,-s)$，*8.* 对所有 $t,s \in I$, $G_m(t,s) = G_m(s,t)$，*9.* 对所有 $t \in (-T,T)$, $G_m(t,T) = G_m(t,-T)$，*10.* 对所有 $t \in (-T,T)$, $\frac{\partial G_m}{\partial s}(t,T) = \frac{\partial G_m}{\partial s}(t,-T)$，*11.* 对所有 $t,s \in I$, $s \neq t$, $\frac{\partial^2 G_m}{\partial s^2}(t,s) + m\, G_m(t,-s) = 0$。

此外，根据表达式 (4.3)、(4.4) 和 (4.5)，结合前述性质，也可以确定格林函数 G_m 的符号。

我们先给出以下注记：

注记 **4.4.** 由表达式 (4.5) 可知，若 G_m 在 $I \times I$上具有恒定符号，则

$$m\, G_m(t,s) \geq 0 \text{ on } I \times I.$$

综合以上结果，我们得到以下定理。

定理 4.5. *1.* 若 $m \in \left(0, \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2\right)$，则 G_m 在 $I \times I$上严格为正。

2. 若 $m = \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2$, G_m在 $P := \{(-T,-T), (0,0), (T,T), (T,-T), (-T,T)\}$ 处为零，且在 $(I \times I) \setminus P$上严格为正。

3. 设 c^-是.....的最小正解

$$\tan(\bar{c}) = \frac{1}{\tanh(\bar{c})} \tag{4.6}$$

其近似为 $c \approx 0.937552$。因此，我们得到：如果 $m \in \left(-\left(\frac{2c}{T}\right)^2, 0\right)$，则函数 G_m 在 $I \times I$ 上严格为负。

4. If $m = -\left(\frac{2\bar{c}}{T}\right)^2$, G_m *vanishes at* $P_1 := \{(-T/2, T/2), (T/2, -T/2)\}$.

5. If $m \in \mathbb{R} \setminus \left[-\left(\frac{2\bar{c}}{T}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2\right]$, *then* G_m *changes sign on* $I \times I$.

证明。首先，考虑到由命题 4.3 的性质 7 和 8 导出的函数 G_m 的对称性，为了研究函数 G_m 的符号，我们可以将分析函数在三角区域 $-s \leq t \leq s$ 中的行为限制为，其中 $(t,\ s) \in I \times I$。

另一方面，如果 G_m 严格为正，那么根据前面的注记，必有 $m > 0$。此外，根据命题 4.3 的性质 4 和 11，我们可以保证函数 $G_m(\cdot, s)$ 和 $G_m(t, \cdot)$ 的凹性。由此可推知，当 G_m 为正时，其最小值只能在 $t = s$ 或 $t = -s$ 处取得。

因此，为了分析函数严格为正的区域，只需研究 $t = s$ 或 $t = -s$ 且满足 $-s \leq t \leq s$ 和 $m > 0$ 的情形。通过分析这些表达式并考察它们的最小值，可以很容易地验证，当 $0 \leq m\,T < \frac{\pi}{2}$ 时，函数 G_m 为正；而在 $m\,T = \frac{\pi}{2}$ 时，它在 $(0,0)$、(T,T) 和 $(-T,T)$ 处为零。考虑到 G_m 的对称性，我们可以推出断言 1 和 2。

另一方面，根据前面的注释，要研究格林函数为负的区域，只需考虑由 $-t \leq s \leq t$ 定义的三角形区域，其中 $(t,\ s) \in I \times I$ 且 $m < 0$。

为简便起见，我们采用记号 $\alpha = \sqrt{-m} > 0$。在这种情况下：

$$G_m(t,s) = \frac{\sin(\alpha s)\csc(\alpha T)\sin(\alpha(t-T)) - \cosh(\alpha s)\mathrm{csch}(\alpha T)\cosh(\alpha(t-T))}{2\alpha}. \tag{4.7}$$

对 t求导，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}G_m(t,s) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha s)\csc(\alpha T)\cos(\alpha(t-T)) - \cosh(\alpha s)\mathrm{csch}(\alpha T)\sinh(\alpha(t-T))\right). \tag{4.8}$$

由于我们要寻找一点 $(\hat{t},\ \hat{s}) \in I \times I$，使得 G_m 在该点取得最大值，因此令上述表达式等于零，从而得到

$$\cosh(\alpha \hat{s})\mathrm{csch}(\alpha T) = \frac{\sin(\alpha \hat{s})\csc(\alpha T)\cos(\alpha(\hat{t}-T))}{\sinh(\alpha(\hat{t}-T))}. \tag{4.9}$$

接下来，将上述表达式代入 (4.7)，得到

$$G_m(\hat{t},\hat{s}) = \frac{\sin(\alpha \hat{s})\csc(\alpha T)\sin(\alpha(\hat{t}-T)) - \sin(\alpha \hat{s})\csc(\alpha T)\cos(\alpha(\hat{t}-T))\coth(\alpha(\hat{t}-T))}{2\alpha}. \tag{4.10}$$

由于我们要寻找最大值为零的点，因此令前一个表达式等于零，可得

$$\tan(\alpha(\hat{t}-T)) = \frac{1}{\tanh(\alpha(\hat{t}-T))}. \tag{4.11}$$

需要注意的是，如果考虑 $\hat{s} = 0$，表达式 (4.10) 也等于零。然而，显然在这种情况下，方程 (4.9) 将不成立。

接下来，对 s 重复同样的步骤：对 s 求导，将导数设为零，将其代入表达式 (4.7)，然后再次令其等于零。在这种情况下，我们将得到

$$\tan(\alpha\hat{s}) = \frac{1}{\tanh(\alpha\hat{s})}. \tag{4.12}$$

因此，由表达式 (4.11) 和 (4.12)，我们必须求得满足方程 (4.6) 的最小正值 c。此外，我们得出

$$\bar{c} = |\overline{\alpha}\hat{s}| = -\overline{\alpha}(\hat{t} - T), \tag{4.13}$$

其中 $\overline{\alpha} > 0$。

由于函数 $\tan(x)$ 和 $\tanh(x)$ 都具有旧有的性质，显然，c 是 (4.6) 的一个解，当且仅当 $-c$ 也是一个解。

此外，由方程 (4.13) 可知，有两种可能的情况：

$$\bar{c} = \overline{\alpha}\hat{s} > 0 \text{ with } \hat{s} > 0 \text{ or } \bar{c} = -\overline{\alpha}\hat{s} > 0 \text{ with } \hat{s} < 0.$$

1. 情况 1：$\hat{s} > 0$

将 $c = \alpha\hat{s}$ 代入方程 (4.9)，得到

$$\frac{\sin(\overline{\alpha}T)}{\sinh(\overline{\alpha}T)} = \frac{\sin(\bar{c})\cos(\bar{c})}{-\cosh(\bar{c})\sinh(\bar{c})} = -\frac{\sin(2\bar{c})}{\sinh(2\bar{c})} < 0.$$

事实上，由方程 (4.6) 可知 $0 < 2c < \pi$，因此 $\sin 2c > 0$。所以，如果解存在，它必然满足

$$\overline{\alpha}T > \pi.$$

2. 情形 2：$\hat{s} < 0$

若 $\hat{s} < 0$，利用方程 (4.9) 进行类似计算可得

$$\frac{\sin(\overline{\alpha}T)}{\sinh(\overline{\alpha}T)} = \frac{\sin(-\bar{c})\cos(-\bar{c})}{\cosh(-\bar{c})\sinh(-\bar{c})} = \frac{\sin(2\bar{c})}{\sinh(2\bar{c})} > 0.$$

在此情形下，由于 $2\bar{c} \in (0, \pi)$，函数

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sinh(2x)}$$

在此区间上是单射。因此，存在唯一的 $\alpha > 0$，使得

$$\overline{\alpha}T \in (0, \pi) \text{ and } \overline{\alpha}T = 2\bar{c}. \tag{4.14}$$

由于我们关注的是 $\alpha > 0$ 的最小正值，因此必然要选择第二种情况。

此外，结合表达式 (4.13) 和 (4.14)，我们可以计算出 $\hat{}t$ 和 $\hat{}s$ 的值，从而得到 $\hat{}\, t = T/2$ 和 $\hat{}\, s = -T/2$。

基于前面的分析，我们现在可以断言，当函数为负时，其最大值在点 $(T/2,\ -T/2)$ 及其对称点 $(-T/2,\ T/2)$ 处取得（4.3 的性质 7）。因此，断言 3 和 4 成立。

需要注意的是，尽管根据命题 4.3 中给出的函数 G_m 的性质，该函数在 $t = s$ 处不可微，但这并不影响我们之前的推理，因为性质 3 所述的格林函数一阶导数的跳跃已经保证最大值不可能在 $t = s$ 处取得。

为了证明断言 5，我们将使用表达式 (4.4) 以及 [3] 的命题 4.1。在这一具体情形下，我们有

$$G_{m_0}(t,s) = G_{m_1}(t,s) + (m_1 - m_0)\int_{-T}^{T} G_{m_1}(t,r)G_{m_0}(-r,s)\mathrm{d}r$$

其中，G_{m_0} 和 G_{m_1} 分别是与 m_0和 $m_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$对应的问题（4.2）的格林函数。

由此可推知，当 G_m 符号恒定时，它会随着 m的增大而减小。结合这一点以及注 4.4，我们完成了定理的证明。

□

据我们所知，这是首次刻画问题（4.2）的格林函数G_m 的符号。

有了这些结果，我们现在可以推导并刻画问题 (4.1) 的格林函数的显式表达式。

4.2 问题 (4.1)的格林函数

在计算并分析了不含分段常数自变量的问题的格林函数显式表达式后，我们接下来求出并研究问题 (4.1) 的格林函数显式表达式，记为$H_{m,\ M}$。为此，我们遵循 [3, 第 3]节所述的步骤。

假设问题 (4.1) 有唯一解 $v(t)$。那么，我们可以将其写为

$$v(t) = \int_{-T}^{T} H_{m,M}(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s.$$

根据 [3], 中的方程（3.5），我们可以用 G_m表示格林函数 $H_{m,\ M}$，得到以下表达式:

$$H_{m,M}(t,s) = G_m(t,s) - M\left[\sum_{j=[-T]}^{[T]}\sum_{i=[-T]}^{[T]} G_m(j,s)\int_{-T}^{T} G_m(t,r)\alpha_{ij}(r)\mathrm{d}r\right], \tag{4.15}$$

其中， G_m 是问题（4.2）的格林函数，$\alpha_{ij}:\ I\to\mathbb{R}$ 定义如下

$$\begin{aligned}
\alpha_{[-T]j}(r) &:= \tilde{a}_{[-T]j}\chi_{(-T,-[T])}(r),\\
\alpha_{[-T+1]j}(r) &:= \tilde{a}_{[-T+1]j}\chi_{(-[T],-[T+1])}(r),\\
&\vdots\\
\alpha_{0j}(r) &:= \tilde{a}_{0j}\chi_{(\max\{-1,T\},\min\{1,T\}\})}(r),\\
&\vdots\\
\alpha_{[T]j}(r) &:= \tilde{a}_{[T]j}\chi_{([T],T)}(r),
\end{aligned}$$

其中， $j\in\{[-T],[-T+1],\dots,0,\dots,[T]\}$ 和 $\tilde{a}_{ij}$是由下式给出的矩阵A 的逆矩阵的元素

$$A\equiv\begin{pmatrix}
Ma_{[-T][-T]}+1 & Ma_{[-T][-T+1]} & \cdots & Ma_{[-T]0} & \cdots & Ma_{[-T][T]}\\
Ma_{[-T+1][-T]} & Ma_{[-T+1][-T+1]}+1 & \cdots & Ma_{[-T+1]0} & \cdots & Ma_{[-T+1][T]}\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \dots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \dots & \vdots\\
Ma_{[T][-T]} & Ma_{[T][-T+1]} & \cdots & Ma_{[T]0} & \cdots & Ma_{[T][T]}+1
\end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
a_{l,[-T]} &:= \int_{-T}^{[-T]} G_m(l,s)\,\mathrm{d}s,\\
a_{l,[T]} &:= \int_{[T]}^{T} G_m(l,s)\,\mathrm{d}s,\\
a_{l,0} &:= \int_{\max\{-T,-1\}}^{\min\{1,T\}\}} G_m(l,s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

and

$$a_{l,k} := \int_{k-1}^{k} G_m(l,s)\mathrm{d}s \text{ for } k\in\{[-T]+1,\dots,[T]-1\}\setminus\{0\}.$$

在 $T\in(0,1]$ 的特殊情况下，我们得到以下表达式

$$H_{m,M}(t,s)=G_m(t,s)-M\frac{\int_{-T}^{T}G_m(t,r)\mathrm{d}r}{1+M\int_{-T}^{T}G_m(0,r)\mathrm{d}r}G_m(0,s). \tag{4.16}$$

考虑到表达式 (4.5)，最终可得

$$H_{m,M}(t,s)=G_m(t,s)-\frac{M}{m+M}G_m(0,s)\quad\forall(t,s)\in I\times I,\ \forall T\in(0,1]. \tag{4.17}$$

从现在起，如同在 [3, 第 3]节中一样，我们将引入以下集合：

$$D \equiv \{-[T], \dots, 0, \dots, [T]\}$$

and

$$D_t \equiv D \cup \{t, -t\}, \text{ for } t \in I \text{ given.}$$

根据格林函数的定义以及命题 4.3 中所示的 G_m 的性质，不难验证：

命题 4.6. 与问题 (4.1)相关的格林函数 $H_{m,M}$ 满足以下条件：

1. $H_{m,M}(\cdot, s)$ 对所有 $t \in I$ 均定义良好且连续；对所有 $t \in I$, $t \neq s$，它属于 C^1 类；对所有 $t \in I$, $t \neq s$ 和 $t \notin D \setminus \{0\}$，它属于 C^2 类。

2. $H_{m,M}(t, \cdot)$ 对所有 $s \in I$ 均定义良好且连续。此外，$H_{m,M}(t, \cdot)$ 对所有 $s \in I$, $s \notin D_t$ 均属于 C^2 类。

3. 对于每个 $s \in (-T, T)$，函数 $t \to H_{m,M}(t, s)$ 是以下微分方程的解：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} H_{m,M}(t,s) + m\, H_{m,M}(-t,s) + M\, H_{m,M}([t],s) = 0, \tag{4.18}$$

对于所有的 $t \in I$、$t \neq s$ 和 $t \notin D \setminus \{0\}$。

4. 对于每个 $t \in (-T, T)$，$t \notin D$，左右极限：

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{m,M}(t^-, t) = \frac{\partial}{\partial t} H_{m,M}(t, t^+) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t} H_{m,M}(t, t^-) = \frac{\partial}{\partial t} H_{m,M}(t^+, t),$$

均存在且为实数。此外，

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{m,M}(t^+, t) - \frac{\partial}{\partial t} H_{m,M}(t^-, t) = \frac{\partial}{\partial t} H_{m,M}(t, t^-) - \frac{\partial}{\partial t} H_{m,M}(t, t^+) = 1.$$

5. 对于每个 $s \in (-T, T)$，函数 $t \to H_{m,M}(t, s)$ 满足边界条件：

$$H_{m,M}(T, s) = H_{m,M}(-T, s) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t} H_{m,M}(T, s) = \frac{\partial}{\partial t} H_{m,M}(-T, s).$$

6. 对于 每个 $t \in (-T, T)$，函数 $s \to H_{m,M}(t, s)$ 满足边界条件：

$$H_{m,M}(t, T) = H_{m,M}(t, -T) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial s} H_{m,M}(t, T) = \frac{\partial}{\partial s} H_{m,M}(t, -T).$$

7. 对所有 t、$s \in I$，$H_{m,M}(t, s) = H_{m,M}(-t, -s)$。

8. $\frac{\partial^2}{\partial s^2} H_{m,M}(t, s) + m\, H_{m,M}(t, -s) = 0$ 对所有 t、$s \in I$、$s \notin D_t$。

5 格林函数$H_{m,M}$的恒定符号区域

本节旨在确定关于参数 m 和 M的函数关系，即格林函数 $H_{m,\ M}$ 在 $I \times I$上保持恒定符号的区域。

我们首先推导 $H_{m,M}$ 为正或为负的必要条件。为此，我们给出以下结果：

命题 5.1. 与问题(4.1)相关的格林函数 $H_{m,M}$在 $I \times I$ 上为正的必要条件是 $m + M > 0$。类似地，$H_{m,M}$ 在 $I \times I$ 上为负的必要条件是 $m + M < 0$。

证明。 我们假设对于任意 $\sigma \in \mathcal{L}(I)$，问题 (4.1) 都有唯一解。证明直接由以下事实得出：若对于所有 $t \in I$， $\sigma(t) = 1$，则 $v(t) = \frac{1}{m+M}$ 是其唯一解。 □

注 **5.2**。 注意，曲线 $M = -m$ 是问题 (4.1) 的特征值曲线。

其次，我们将尝试限定点 $(t, s) \in I \times I$ 的范围；当函数 $H_{m,M}$ 为正时，它可能在这些点处达到最小值；当它为负时，则可能达到最大值，并据此近似确定该区域。

在此背景下，我们给出以下结果：

命题 5.3。 设 $H_{m,\ M}$ 为问题 (4.1)的格林函数，并假设其为定号函数。那么：

1. 若 $m \geq 0$ 且 $M \geq 0$，当 $H_{m,\ M}$ 为正时，最小值必在对角线 $t = s$ 处取得，其中 $s \in I$。 *2.* 若 $m \geq 0$，当 $H_{m,\ M}$ 为正时，最小值必在 s 的整数值处（其中 $s \in I \cap \mathbb{Z}$）或在对角线 $s = t$ 处取得，其中$t \in I$；当其为负时，最大值必在这些位置之一取得。

证明。 第一部分直接由命题 4.6 的第 (1)、(3)、(4) 和 (5) 项得出，这些条目分别讨论了 $H_{m,\ M}(\cdot,\ s)$ 的正则性、在假设条件下的凹性、对角线上导数的跳跃条件以及周期边界条件。

第二个结论由第 (2)、(4)、(6) 和 (8) 项推出，它们分别描述了 $H_{m,M}(t, \cdot)$ 的正则性、对角线处的跳跃条件、周期边界条件，以及 $H_{m,M}$ 为正时是凹函数、为负时是凸函数这一事实。 □

另一方面，由于命题 4.6 第 7 部分所示函数 $H_{m,M}$ 的对称性，为了寻找最小值或最大值并界定恒定符号区域，只需考察 $t \in I$ 和 $s \in [0, T]$ 的取值。

按照 [3, 第 4 节1], 所述步骤，我们可以推导出与问题 (4.1) 相关的格林函数 H_{m,M_0} 和 H_{m,M_1} 之间的关系，其参数分别为 (m, M_0) 和 (m, M_1)，

。公式如下：

$$H_{m,M_0}(t,s) = H_{m,M_1}(t,s) + (M_1 - M_0)\int_{-T}^{T} H_{m,M_1}(t,r)H_{m,M_0}([r],s)\mathrm{d}r. \tag{5.1}$$

由方程（5.1）及 [3], 中的后续步骤可推知，由于我们要寻找满足 $\min_{(t,s)\in I\times I} H_{m,M_0}(t,s) = H_{m,M_0}(\hat{t},\hat{s}) = 0$ 的 M_0（其中存在某个 $(\hat{t},\hat{s}) \in I\times I$），因此我们的目标是对每个 m，求出满足条件的最小 M_0

$$M_0 = \overline{T}_m(M_0,\hat{t},\hat{s}) \text{ for some } (\hat{t},\hat{s}) \in I\times I,$$

其中，算子 T_m：$\mathbb{R}\overline{\times} I\times I \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$\overline{T}_m(M_0,t,s) = \frac{G_m(t,s)}{\int_{-T}^{T} G_m(t,r)H_{m,M_0}([r],s)\mathrm{d}r}.$$

对于 $(t,s) \in I\times I$，求 $T_m(M_0,t,s)$的最小值或最大值，在计算上可能比最小化H_{m,M_0}高效得多。这是因为积分可以拆分为若干独立区间，使得只需在 $t \in I$的整数值处计算H_{m,M_0}，而不必在 I内对 t 的每个取值都进行计算。此外，对于较大的 T，计算H_{m,M_0} 可能需要很高的计算成本。

考虑到这一点，并按照 [3,第 4.2 节和第 5.4 小节2], ，我们可以数值近似$H_{m,M}$ 对任意给定的 T 均为正的区域。例如，当$T = 1.6$时，我们得到图 1 所示的图像。

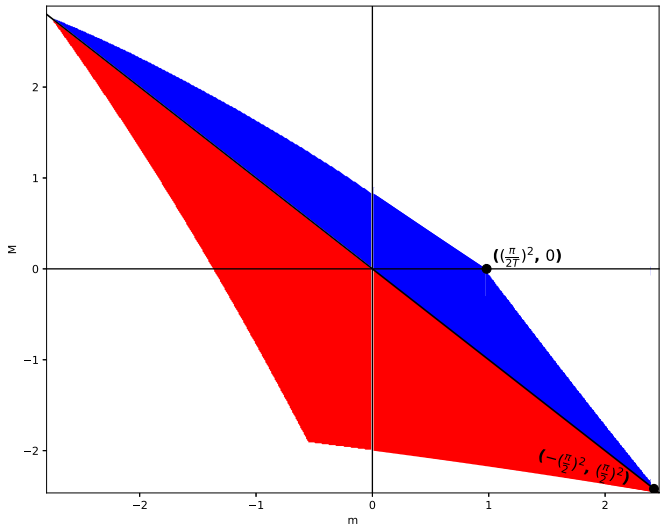


图 1：格林函数 $H_{m,\ M}$ 保持恒定符号的区域的数值近似。满足 $H_{m,\ M} > 0$ 的区域以蓝色表示，而满足 $H_{m,\ M} < 0$ 的区域以红色表示。

获得恒定符号区域的数值近似后，我们尝试确定该区域的精确表达式。为此，我们需要找出格林函数$H_{m,M}$取得最小值或最大值的点（$\hat{t},\hat{s}$）$\in I\times I$。

当 $m>0$ 时，并结合命题 5.3，我们的数值探索表明，对于使函数保持为正的 M 的最大值，$H_{m,\ M}$ 的最小值似乎在点（T，T）$\in I\times I$（当 $m\in\left(0,\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2\right)$ 时）以及（0，0）$\in I\times I$（当 $m\in\left(\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2,\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$ 时）处取得。

类似地，当 $H_{m,\ M}$ 变为负值且 $m>0$ 时，我们的计算表明，其最大值在（T，0）处取得（见附录 7.1）。

另一方面，当 $m<0$ 时，数值证据表明，格林函数 $H_{m,\ M}$ 在为正时，其最小值可能在 $(0,\ 0)\in I\times I$ 或 $(3T/4,\ 3T/4)\in I\times I$ 处取得；而在为负时，其最大值似乎可能在 $(T,\ 0)\in I\times I$ 或 $(T/2,\ -T/2)\in I\times I$ 处取得。

因此，通过计算格林函数 $H_{m,\ M}$ 在这些通过数值检验确定的候选点处的值，将所得表达式设为零，并求解 M 关于 m 的函数关系，我们得到了 $H_{m,\ M}$ 为正或为负时相应区域的显式公式。该过程给出了该区域的符号描述。

对于 $T=1.6$ 的情形，该分析得到图 2 所示的区域。

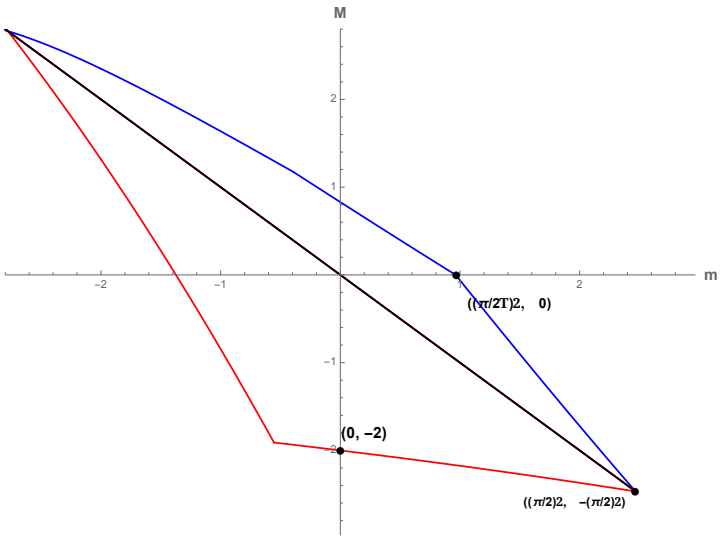


图 2：明确猜想的区域，在这些区域中，当 $T=1.6$ 时，格林函数$H_{m,\ M}$ 保持恒定符号。$H_{m,\ M}>0$ 所在的区域显示在黑色曲线与蓝色曲线之间，而 $H_{m,\ M}<0$ 所在的区域显示在黑色曲线与红色曲线之间。

从图形上看，我们验证了图 1 和图 2 所示的两个区域重合，这进一步证实了我们结果的有效性。

我们可以运用相同的推理，确定格林函数在哪些区域内

$H_{m,\ M}$ 对于 T的其他取值具有恒定符号。

此外，当 $T \le 1$ 时，表达式 (4.16) 给出了 $H_{m,\ M}$ 的显式公式，因此我们可以直接对其进行研究。按照定理 4.5 的方法，即分别计算 $H_{m,\ M}$ 关于 t 和 s 的偏导数，并在每种情形 $m \ge 0$ 或 $m < 0$ 下令其为零；或者直接考察对角线 $t = s$，便可以通过符号方法确定 $H_{m,\ M}$ 取得极小值或极大值的点，而无需依赖数值近似。进而，我们可以精确地得到 $H_{m,\ M}$ 在 $T \le 1$ 时恒定符号的区域。

对于 $T < 1$，考虑到方程 (4.17) 中给出的函数 $H_{m,\ M}$ 的显式形式，我们可以轻松得到恒符号区域的显式表达式。函数 $H_{m,\ M}$ 在以下情形下为正：

$$-m < M < \begin{cases} \dfrac{m}{-1+\sec(\sqrt{m}\,T)}, & m \in \left(0, \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2\right), \\ \dfrac{2}{T^2}, & m = 0, \\ \dfrac{m\cosh(\sqrt{-m}\,T)}{1-\cosh(\sqrt{-m}\,T)}, & m \in (\frac{\alpha_2}{T^2}, 0), \\ F(m,T), & m \in \left(-\left(\frac{\pi}{T}\right)^2, \frac{\alpha_2}{T^2}\right), \end{cases}$$

其中，$F(m,\ T)$ 由下式给出

$$-m - \frac{m\,\mathrm{csch}\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{4}\right)\,\mathrm{sech}\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{2}\right)}{\coth\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{4}\right) - \mathrm{csch}\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{4}\right)\,\mathrm{sech}\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{2}\right) + \tan\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{4}\right) + \tan\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{2}\right)}$$

且 $\alpha_2 < 0$ 是方程的第一个根

$$F\left(\alpha_2/T^2, T\right) = \frac{\alpha_2/T^2\cosh(\sqrt{-\alpha_2})}{1-\cosh(\sqrt{-\alpha_2})}.$$

这个根 d　不依赖于参数 T，且近似等于 $\alpha_2 \approx -2.091$　　.

类似地，函数 H_m　　$_{,M}$ 在以下情形下为负：

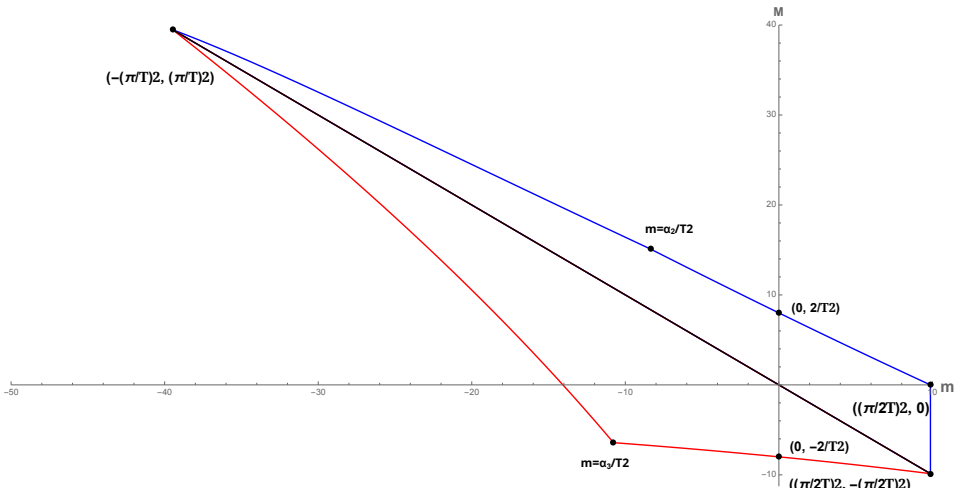
$$-m < M < \begin{cases} \dfrac{m}{-1+\cos\left(\sqrt{m}T\right)}, & m \in \left(0, \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2\right), \\ -\dfrac{2}{T^2}, & m = 0, \\ \dfrac{m}{\cosh\left(\sqrt{-m}T\right)-1}, & m \in \left(\frac{\alpha_3}{T^2}, 0\right), \\ \dfrac{m\left(\coth\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{2}\right)-\tan\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{2}\right)\right)}{-\coth\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{2}\right)+\mathrm{csch}\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{2}\right)+\tan\left(\frac{\sqrt{-m}\,T}{2}\right)}, & m \in \left(-\left(\frac{\pi}{T}\right)^2, \frac{\alpha_3}{T^2}\right), \end{cases}$$

其中， $\alpha_3 < 0$ 是以下方程的第一个根

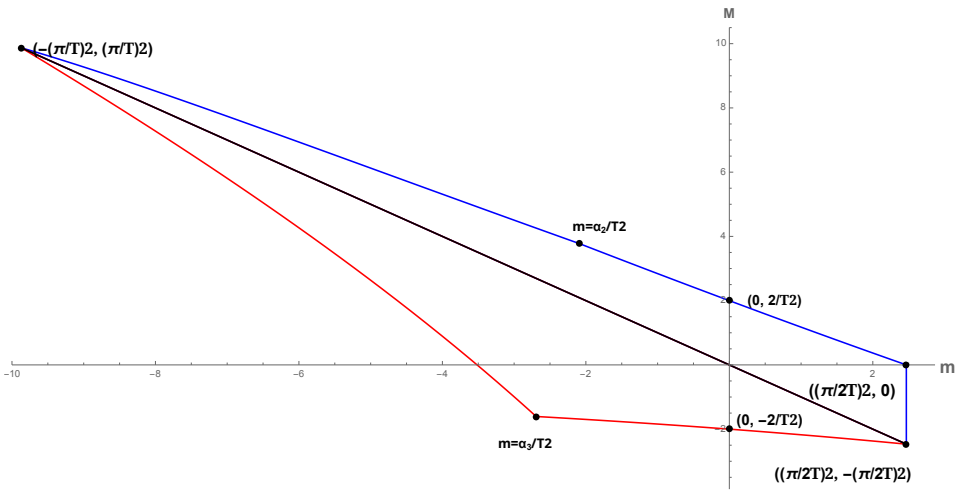
$$\frac{1}{\cosh(\sqrt{-\alpha_3}) - 1} = \frac{1\left(\coth\left(\frac{\sqrt{-\alpha_3}}{2}\right) - \tan\left(\frac{\sqrt{-\alpha_3}}{2}\right)\right)}{-\coth\left(\frac{\sqrt{-\alpha_3}}{2}\right) + \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{-\alpha_3}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\sqrt{-\alpha_3}}{2}\right)},$$

由此可推得 $\alpha_3 \approx -2.693$。

我们在图3中表示 $T = 0.5$ 和 $T = 1$ 的区域。



(a) $T = 0.5$时的恒符号区域。



(b) $T = 1$时的恒符号区域。

图3：函数 $H_{m,M}$ 在 T 取不同值时的恒符号区域表示。带正号的区域位于蓝线和黑线之间，而带负号的区域位于黑线和红线之间。

对于 $T > 1$，直接获得恒符号区域的显式表达式更加困难。当 $m \in \left(0, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$ 且 $-1+\frac{m}{\cos(\sqrt{m})} < M < -m$，或当 $m = 0$ 且 $-2 < M < 0$ 时，无论 T 取何值，函数 $H_{m,M}$ 似乎均为负。然而，这一断言仍然只是一个猜想。

6 $H_{m,\ M}$ 在 $m \geq 0$ 且 $M \geq 0$ 时恒定符号格林函数的特征值刻画

当 $m \geq 0$ 且 $M \geq 0$ 时，命题 5.3 表明，格林函数 $H_{m,\ M}$ 为正时，其最小值必在 $t = s$ 处取得，且满足 $s \in I$。由此得到以下定理：

定理 6.1. 设 $H_{m,\ M}$ 为问题 (4.1) 的格林函数，并假设 $m \geq 0$、$M \geq 0$ 和 $m + M > 0$。那么，$H_{m,\ M}$ 为正当且仅当 $M \in (-m, \lambda_1)$，其中 λ_1 是以下问题的最小正狄利克雷特征值：

$$
z''(t) = \begin{cases} -m\, z(-t - 2s_0) - M\, z(T + [T + t + s_0] - s_0), & \text{if} \quad t \in I^1_{s_0}, \\ -m\, z(-t - 2s_0) - M\, z(-T + [T + t + s_0] - s_0), & \text{if} \quad t \in I^2_{s_0}, \\ -m\, z(-t - 2s_0) - M\, z(T + [-T + t + s_0] - s_0), & \text{if} \quad t \in [-s_0, T - 2s_0), \\ -m\, z(-t - 2s_0 + 2T) - M\, z(T + [-T + t + s_0] - s_0), & \text{if} \quad t \in [T - 2s_0, T], \end{cases}
$$

$$
z(-T) = z(T) = 0, \tag{6.1}
$$

其中 $I^1_{s_0} = [-T, \text{最小值}\{[s_0] + 1 - s_0 - T, -s_0\}])$ 且 $I^2_{s_0} = [\text{最小值}\{[s_0] + 1 - s_0 - T\}, -s_0)$，若 $s_0 \notin \mathbb{N}$。或者，若 $s_0 \in \mathbb{N}$，

$$
z''(t) = \begin{cases} -m\, z(-t - 2s_0) - M\, z(-T + [T + t + s_0] - s_0), & \text{if} \quad t \in [-T, -s_0), \\ -m\, z(-t - 2s_0) - M\, z(T + [-T + t + s_0] - s_0), & \text{if} \quad t \in [-s_0, T - 2s_0), \\ -m\, z(-t - 2s_0 + 2T) - M\, z(T + [-T + t + s_0] - s_0), & \text{if} \quad t \in [T - 2s_0, T], \end{cases}
$$

$$
z(-T) = z(T) = 0. \tag{6.2}
$$

其中 $t \in I$ 和 $s_0 \in [0, T]$。

证明。 由命题 5.3 可知，当格林函数 $H_{m,M}$ 为正时，其最小值在 $t = s$ 处取得，其中 $s \in I$。然而，由于命题 4.6 第 7 条中所述的 $H_{m,M}$ 的对称性，寻找最小值可限定在对角线 $t = s$ 上，其中 $s \in [0, T]$。

固定一个值 $s_0 \in [0, T]$，函数 $H_{m,M}(t, s_0)$，视为关于 t 的函数时，是区间 $[-T, s_0)$ 和 $(s_0, T]$ 上方程 (4.1) 的一个解，并满足命题 4.6 的性质 5。

因此，我们可以构造

$$w(t)=\begin{cases} v(t), & \text{if} \quad t\in[s_0,T],\\ v(t-2T), & \text{if} \quad t\in[T,2T+s_0]. \end{cases}$$

该函数属于 $C^1(s_0,\ 2\,T+s_0)$ 类，并且如前所示，在s_0 和 $2\,T+s_0$处取得最小值，此时它必然取值为 0。此外，若 $s_0\notin\mathbb{N}$，它必须满足以下方程：

$$w''(t)=\begin{cases} -m\,w(-t+2T)-M\,w([t]+2T), & \text{if} \quad t\in[s_0,\min\{[s_0]+1,T\}]),\\ -m\,w(-t+2T)-M\,w([t]), & \text{if} \quad t\in[\min\{[s_0]+1,T\},T),\\ -m\,w(-t+2T)-M\,w([t-2T]+2T), & \text{if} \quad t\in[T,2T-s_0),\\ -m\,w(4T-t)-M\,w([t-2T]+2T), & \text{if} \quad t\in[2T-s_0,2T+s_0], \end{cases}$$

$w(s_0)=w(2T+s_0)=0.$

当 $s_0\in\mathbb{N}$ 时，我们有

$$w''(t)=\begin{cases} -m\,w(-t+2T)-M\,w([t]), & \text{if} \quad t\in[s_0,T),\\ -m\,w(-t+2T)-M\,w([t-2T]+2T), & \text{if} \quad t\in[T,2T-s_0),\\ -m\,w(4T-t)-M\,w([t-2T]+2T), & \text{if} \quad t\in[2T-s_0,2T+s_0], \end{cases}$$

$w(s_0)=w(2T+s_0)=0.$

接下来，我们进行平移

$$z(t)=w(T+t+s_0).$$

不难验证，函数 z 属于 $C^1(I)$ 类；当$s_0\notin\mathbb{N}$ 时满足方程 (6.1)，当 $s_0\in\mathbb{N}$时满足方程 (6.2)。此外， z 的最小值在 $-T$和 T处取得。

因此，使函数 $H_{m,\ M}$ 不再为正的 $M(m)$ 的最小值必须满足 $z(-T)\ =z(T)\ =0$ ，并且当 $s_0\notin\mathbb{N}$ 时它与狄利克雷问题 (6.1) 的最小特征值重合，或当 $s_0\in\mathbb{N}$时与 (6.2) 的最小特征值重合。

□

分别分析 $m=0$ 或 $M=0$ 的特殊情形很有用。在 $M=0$ 的情况下，有如下结果：

定理 6.2。 设 G_m 为问题 (4.2) 的格林函数，并假设 $m>0$。那么，当且仅当 $m\in(0,\lambda_1)$ 时， G_m 为正，其中 $\lambda_1=\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2$ 是问题的最小正狄利克雷特征值

$$z''(t)=-m\,z(-t),\quad t\in I,\quad z(-T)=z(T)=0. \tag{6.3}$$

证明。 一方面，根据定理 4.5，我们知道，使格林函数 $H_{0,M}(= G_m)$保持为正的 m 的最大值为 $m = \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2$。

另一方面，容易验证， $m = \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2$ 对应于问题（6.3）的第一特征值。

因此，我们推得，对于满足 $M = 0$ 的定理 6.1 中的狄利克雷问题，最小特征值 λ^{s_0} 在 $s_0 = T$ 处取得。

综合以上观察，定理的证明即告完成。 □

现在来考虑 $m = 0$ 的情形。

借助 Wolfram Mathematica，我们可以得到当 $m = 0$ 时问题（6.1）和（6.2）的第一狄利克雷特征值的显式表达式（见附录 7.1）。我们观察到（$T = 4.8$ 的情形见图 4），随着 s_0 增大，这些特征值逐渐减小，并在 $s_0 = T$ 处达到最小值。

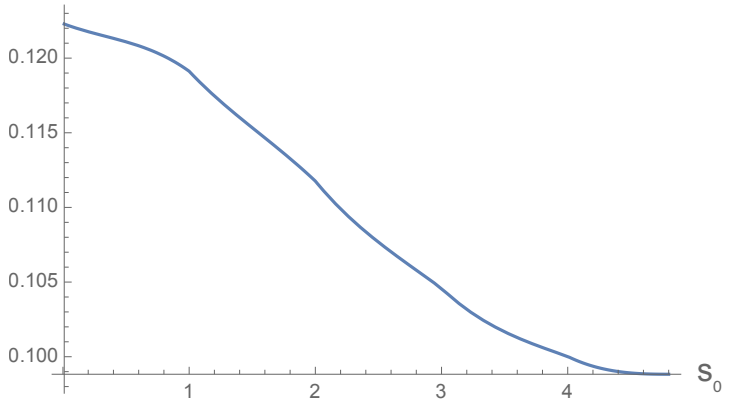


图 4：对于 $T = 4.8$，第一狄利克雷特征值随 s_0 增大而单调递减的图示。

对于数值不太大的 T，具体而言，当 $T \leq 5$ 时，附录 7.1 中开发的程序使我们能够得到特征值 λ^{s_0} 的显式表达式。通过分析该表达式，很容易从解析上证明，特征值会随着 s_0 的增大而减小，这表明对于这些 T 的取值，最小值在 $s_0 = T$ 处取得。

另一方面，数值实验表明，即使对于 $T \geq 5$，最小值似乎仍在 $s_0 = T$ 处取得。

基于以上所有观察，我们提出如下猜想：

$$\lambda_1 = \min\left\{ \lambda^{s_0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda^{s_0} \text{ is the first eigenvalue of Problem (6.1) with } m = 0 \text{ if } s_0 \in [0,T] \setminus \mathbb{N}, \\ \text{or of Problem (6.2) with } m = 0 \text{ if } s_0 \in \mathbb{N} \cap [0,T] \end{array} \right\} = \lambda^T \tag{6.4}$$

或者，等价地， λ_1 是问题的第一个狄利克雷特征值

$$z''(t) = -Mz([t]), \quad t \in I, \quad z(-T) = z(T) = 0. \tag{6.5}$$

同样地，借助 Wolfram Mathematica，我们绘制了 λ_1 作为 T的函数时的取值，得到图5所示的图像。我们还给出了当 $T \leq 3$ 时， M 关于 T 的显式表达式（表1）。随着 T 的增大，该表达式逐渐变得更加复杂。

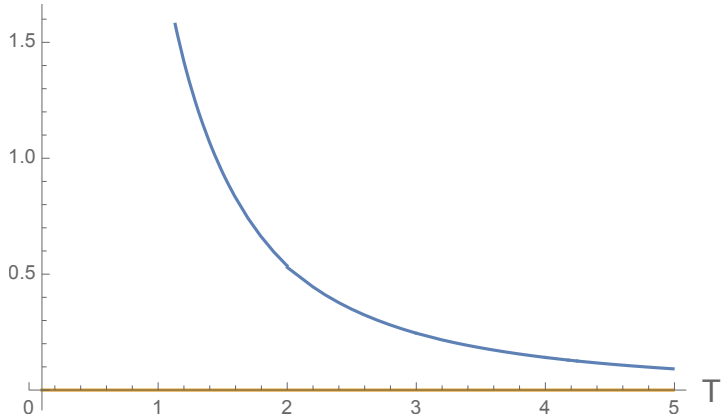


图5：特征值 λ_1 作为 T的函数的表示。

T的区间	M的表达式
$0 < T < 1$	$M = \frac{2}{T^2}$
$1 < T < 2$	$M = \frac{T^3 - \sqrt{-4 + 8T - 4T^2 + T^4}}{1 - 2T + T^2}$
$2 < T < 3$	$M = \frac{1}{24(-2+T)^2}\left(208 + 32T(-7+2T) - \frac{8i(-i+\sqrt{3})P(T)}{(i+\sqrt{3})\Delta^{1/3}}\Delta^{1/3} + 8i(\right.$

表1：取决于 T区间的 M表达式。 Δ和 $P(T)$的定义如下。

Δ和 P（T）的定义：

$$
\begin{aligned}
P(T) &= 169 + T(-364 + T(288 + T(-100 + 13T))),\\
\Delta &= 2413 + T(-7530 + T(9762 + T(-6734 + T(2607 + T(-537 + 46T)))))\\
&\quad + 3\sqrt{3}\sqrt{(-2+T)^4 \cdot \left(2305 - T(7314 + T(-9600 + T(6680 + T(-2558 + T(446 + T(25 + 3(-8+T)T)))))))\right)}.
\end{aligned}
$$

带有 $m = 0$ 的问题 (4.1) 已在多篇文献中得到研究，例如 [2, 14]。然而，通常尚未明确刻画格林函数的恒定符号。据我们所知，这是首篇从相关狄利克雷问题的特征值角度进行刻画的研究。这一结果尤为重要，因为了解

格林函数的确切符号，有助于应用不动点定理来研究非线性问题。

另一方面，观察图5中的图像可见，特征值 λ^T随着 T 的值增加而减小。我们将证明这一结论，但首先需要陈述一些预备结果。

我们先定义正算子、锥和半非支撑算子的概念。

定义 6.3. [17, 定义 2.4] 设 E、 F 为有序向量空间，且 K_T：$E \to F$为线性算子。若对所有 $x > 0$, 都有 $K_T x > 0$ ，则称 K_T 为正算子（符号表示： $K_T \geq 0$）。

定义 6.4. 设 X为巴拿赫空间，若 $K \subset X$ 是 X 的闭凸子集，并满足以下性质，则称 $K \subset X$ 为锥。

- 若 $x \in K$，则对所有 $\lambda \geq 0$，都有 $\lambda x \in K$ 。
- $K \cap (-K) = \{0\}$。

定义 6.5。 [16, 定义 1] 设 X 是一个赋范于 $\mathbb{R}$ 上的巴拿赫空间，其偏序由锥K给出。线性算子 K_T 是 X 上的半非支撑算子（相对于 K ），如果 K_T 为正，并且对每个非零的 $x \in K$ 以及每个非零的 $f \in K^*$ （ K的对偶空间），都存在一个自然数 $n = n(x, f)$ ，使得 $f(K_T^n x) > 0$。

下一个定理给出了半非支撑算子的一个刻画 s.

定理 6.6。 *[16,* 定理 *2]* 记 $\rho(K_T)$ 为算子 K_T的谱半径。设K_T具有预解式 $R(\lambda, K_T)$ ，且点 $\lambda = \rho(K_T)$ 是其极点。则有如下逻辑关系：

$$K_T \text{ is semi-non-supporting operator} \Leftrightarrow \rho(K_T) > 0 \text{ and } K_T \text{ satisfies } (A),$$

其中，条件(A) 由下式给出

(A) 谱半径 $\rho(K_T)$ 是 K_T 的单特征值，且对应的特征向量位于锥 K的内部。伴随算子 K_T^* 存在一个与 $\rho(K_T)$相关联的严格正特征泛函。

最后，我们给出以下定理，并将在证明中使用它。

定理 6.7. *[11,* 定理 *4.3]* 设 $K \subset X$ 为闭锥，且 K_{T_1}, K_{T_2}： $X \to X$为正有界线性算子。设 K_{T_2} 为半非支撑算子， $\rho(K_{T_2})$ 为 K_{T_2} 和 $K_{T_2}^*$ 的特征值，其特征向量为 $x_0 \in K$ ，特征泛函为 $x_0' \in K^*$；设 $\rho(K_{T_1})$ 为伴随算子 $K_{T_1}^*$ 的特征值，其特征泛函为 $x_1' \in K^*$。若

$$K_{T_2} \geq K_{T_1}, K_{T_2} \neq K_{T_1},$$

then

$$\rho(K_{T_1}) < \rho(K_{T_2}).$$

在确立上述结果后，我们现在可以陈述以下结论。

命题 6.8。 设 λ^T 表示定义在区间 I 上的问题 （6.5）的第一个（最小的）正特征值。则映射

$$T \longrightarrow \lambda^T$$

是递减的：若 $0 < T_1 < T_2$ ，则

$$\lambda^{T_2} < \lambda^{T_1}.$$

证明。 设 Gd_T 表示与问题相关的格林算子

$$-u''(t) = \sigma(t), \quad t \in I, \quad u(-T) = u(T) = 0, \tag{6.6}$$

也就是说， Gd_T： $C(I) \to C(I)$ 表示将每个 $\sigma \in C(I)$ 映射到问题（6.6）的唯一解 $u \in C^2(I) \subset C(I)$ 的算子。此外，设 B： $C(I) \to PC(I)$ 为由 $(Bu)(t) := u([t])$ 定义的算子，其中 $PC(I)$ 表示在形如 $[[t], [t] + 1$ 的每个区间上均为常数的函数空间。

于是，问题（6.5）可以写成算子形式

$$u = M\, Gd_T(Bu).$$

特别地， M 是原问题的特征值，当且仅当 $1/M$ 是算子 $K_T := Gd_T \circ B$ 的非零特征值。由于 Gd_T 是紧算子且 B 连续，复合算子 K_T 是紧算子。

由与问题（6.6）相关的格林函数 gd_T （算子 Gd_T 的核）的表达式可知，对于所有 t, $s \in (-T,\ T)$， gd_T严格为正，且随参数 T 严格递增。具体而言，若 $T_2 > T_1$ ，则

$$gd_{T_2}(t, s) > gd_{T_1}(t, s) \text{ for all } t, s \in (-T_1, T_1).$$

根据上述结果，将 Gd_{T_2} 限制在 $(-T_1,\ T_1)$ 上后，在通常的算子序下大于 Gd_{T_1} 。

算子 B 保持非负函数锥的正性。因此，每个K_T 都是紧正算子。于是，根据 Krein-Rutman定理 [9]

$$M(T) = \frac{1}{\rho(K_T)}.$$

此外，容易验证 K_T 满足定理 6.6 的条件，这意味着 K_T 是半非支撑算子。另外，定理 6.7 的假设也得到满足，这意味着

$$\rho(K_{T_2}) > \rho(K_{T_1}).$$

因此，

$$M(T_2) = \frac{1}{\rho(K_{T_2})} < \frac{1}{\rho(K_{T_1})} = M(T_1).$$

这证明了 $M(T)$ 关于 T 严格递减，从而完成证明。 □

作为定理 6.1 的推论，还可得到以下对 $T \leq 1$ 成立的结果。

推论 6.9. 设 $H_{m,M}$ 是与问题 (4.1) 相关的格林函数，并假设$m \geq 0$, $M \geq 0$, $m+M > 0$ 和 $T \in (0,1]$. 那么，当且仅当 $M \in (-m, \lambda_1)$时，$H_{m,M}$ 为正，其中 $\lambda_1 = {}^{m}_{-1+\sec\sqrt{mT}}$ 是该问题的第一个狄利克雷特征值:

$$z''(t) = -mz(-t) - Mz([t]), \quad t \in I, \quad z(-T) = z(T) = 0. \tag{6.7}$$

证明。 根据定理 6.1，我们知道， λ_1 是以下问题中的最小狄利克雷特征值:

$$z''(t) = \begin{cases} -m\, z(-t-2s_0) - M\, z(T-s_0), & \text{if} \quad t \in [-T, T-2s_0), \\ -m\, z(-t-2s_0+2T) - M\, z(T-s_0), & \text{if} \quad t \in [T-2s_0, T]. \end{cases} \tag{6.8}$$

我们计算与上述问题相关的狄利克雷特征值 λ^{s_0} 关于 s_0的函数表达式，并得到

$$\lambda^{s_0} = m\left(-\frac{1}{\sinh(\sqrt{m}s_0)\sin(\sqrt{m}T)\operatorname{csch}(\sqrt{m}T)\sec(\sqrt{m}(s_0-T))\sinh(\sqrt{m}(s_0-T)) + \cos(\sqrt{m}s_0) - 1} - 1\right)$$

通过分析 λ^{s_0} 的表达式及其关于 s_0的导数的变化，可以看出，当 $m \in \left(0, \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2\right)$时，特征值 λ^{s_0} 在 $s_0 = T$处取得最小值。因此，我们得到

$$\lambda_1 = \lambda^T = \frac{m}{-1+\sec\sqrt{m}T},$$

它是问题 (6.7) 的第一狄利克雷特征值。 □

注**6.10**。数值证据表明，推论 6.9 对$T > 1$的取值可能仍然成立。基于这一观察，我们提出以下猜想:

猜想**6.11**。设 $H_{m,\ M}$ 为问题 4.1 的格林函数，并假设 $m \geq 0$,$M \geq 0$, $m + M > 0$。那么，当且仅当 $M \in (-m,\ \lambda_1)$ 时，$H_{m,\ M}$ 为正，其中 λ_1 是与以下问题相关的第一狄利克雷特征值:

$$z''(t) = -mz(-t) - Mz([t]), \quad t \in I, \quad z(-T) = z(T) = 0.$$

在分析并刻画格林函数$H_{m,\ M}$的恒符号区域后，我们现在转而研究相应非线性问题的解的存在性。

7 非线性问题的解的存在性

本节将介绍一些结果，借此推导具有周期边界条件的非线性问题的解的存在性。了解格林函数 $H_{m,\ M}$ 在哪些区域具有恒定符号，可以直接应用各种不动点定理，例如单调方法或克拉诺谢尔斯基定理等。这里，我们着重讨论克拉诺谢尔斯基方法。

7.1 Krasnosel'skii 不动点方法

本节将调整 [8] 中使用的方法，以证明微分方程解的存在性，并为问题展示新的存在性结果

$$v''(t) = f(t, v(t), v(-t), v([t]) \quad \text{a.e.} \quad t \in I, \quad v(-T) = v(T),\, v'(-T) = v'(T), \tag{7.1}$$

其中 f： $I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 t 中是 $2T$ 周期的，且是 Carath´eodory 函数。也就是说 ，

- 对于几乎处处的 $t \in I$，函数（x， y， z） $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to f$（$t$， x， y， z） $\in \mathbb{R}$ 是连续的。
- 对于所有（x， y， z） $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，函数 $t \in I \to f$（t， x， y， z）是勒贝格可测的 .
- 对于所有 $R > 0$，存在 $h_R \in \mathcal{L}^1$（I），使得若 $|x| < R$ 且 $|y| < R$，则

$$|f(t, x, y, z)| \le h_R(t) \text{ a.e } t \in I.$$

现在陈述我们将要使用的不动点定理 [8]。

定理 7.1. ***(Krasnosel'skii)*** 设 $\mathcal{B}$ 是一个巴拿赫空间， $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$中的一个锥。假设 Ω_1, Ω_2 是 $\mathcal{B}$ 中的开子集，且 $0 \in \Omega_1, \Omega_1 \subset \Omega_2,$，并设 $\mathcal{T}$: $\mathcal{P} \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1) \to \mathcal{P}$ 是一个紧算子，满足以下条件之一:

$(K_1) \|\mathcal{T}v\| \le \|v\|$ 若 $v \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$，且 $\|\mathcal{T}v\| \ge \|v\|$ 若 $v \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$。
$(K_2) \|\mathcal{T}v\| \ge \|v\|$ 若 $v \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$，且 $\|\mathcal{T}v\| \le \|v\|$ 若 $v \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$。

那么， $\mathcal{T}$在 $\mathcal{P} \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$至少有一个不动点。

从现在起，我们将把 $m \in \mathbb{R}$、 $M \in \mathbb{R}$ 和 $H_{m,M}$ 视为与问题相关的格林函数

$$\begin{aligned} &v''(t) + m\, v(-t) + M v([t]) = \sigma(t), \text{ a.e. } t \in I \\ &v(-T) = v(T), \quad v'(T) = v'(-T), \end{aligned}$$

其中 $T > 0$、 $m \in \mathbb{R}$ 和 $M \in \mathbb{R}$。
令 $L = \max\{H_{m,M}(t, s) : (t, s) \in I \times I\}$，且 $l = \min\{H_{m,M}(t, s) : (t, s) \in I \times I\}$。

定理 7.2。 设 (m, M) 是一对满足以下条件的量：格林函数 $H_{m,M}$ 在 $I \times I$上为正。假设存在 r、 $R \in \mathbb{R}^+$、 $r < R$，使得

$$f(t, x, y, z) + my + Mz \ge 0, \quad \forall\, x, y, z \in \left[\frac{l}{L} r, \frac{L}{l} R\right], \text{ a.e. } t \in I. \tag{7.2}$$

那么，如果满足以下任一条件:

1.

$$f(t,x,y,z)+my+Mz\geq\frac{L}{2Tl^2}\,x,\quad\forall x,y,z\in\left[\frac{l}{L}r,r\right],\quad\text{a.e..}\ t\in I,$$
$$f(t,x,y,z)+my+Mz\leq\frac{1}{2TL}\,x,\quad\forall x,y,z\in\left[R,\frac{L}{l}R\right],\ \text{a.e.}\ t\in I,$$

2.

$$f(t,x,y,z)+my+Mz\leq\frac{1}{2TL}\,x,\quad\forall x,y,z\in\left[\frac{l}{L}r,r\right],\quad\text{a.e.}\ t\in I,$$
$$f(t,x,y,z)+my+Mz\geq\frac{L}{2Tl^2}\,x,\quad\forall x,y,z\in\left[R,\frac{L}{l}R\right],\ \text{a.e..}\ t\in I,$$

则问题(7.1) 在 I 上有一个正解。

证明直接沿用 [20]的方法。

通过作变量代换 $\hat{}v(t)=-v(t)$，即可得到定理 7.2 的以下推论。

推论 7.3。 设 m和 M是一对值（m,M），其中格林函数 $H_{m,M}$为正。假设存在 $r,R\in\mathbb{R}^+$，$r<R$，使得

$$f(t,x,y,z)+my+Mz\leq 0,\forall x,y,z\in\left[-\frac{L}{l}R,-\frac{l}{L}r\right],\ \text{a.e.}\ t\in I.$$

那么，若满足以下任一条件，

1.

$$f(t,x,y,z)+my+Mz\leq\frac{L}{2Tl^2}\,x\quad\forall x,y,z\in\left[-r,-\frac{l}{L}r\right],\quad\text{a.e.}\ t\in I,$$
$$f(t,x,y,z)+my+Mz\geq\frac{1}{2TL}\,x\quad\forall x,y,z\in\left[-\frac{L}{l}R,-R\right],\ \text{a.e.}\ t\in I,$$

2.

$$f(t,x,y,z)+my+Mz\geq\frac{1}{2TL}\,x\quad\forall x,y,z\in\left[-r,-\frac{l}{L}r\right],\quad\text{a.e.}\ t\in I,$$
$$f(t,x,y,z)+my+Mz\leq\frac{L}{2Tl^2}\,x\quad\forall x,y,z\in\left[-\frac{L}{l}R,-R\right],\ \text{a.e.}\ t\in I,$$

则问题(7.1) 在 I上有一个负解。

最后，我们给出一个例子，说明如何利用 Krasnosel'skii 不动点定理推导出的结果，确保某个问题存在解。

例7.4. 我们考虑具有周期边界条件的问题（2.2）。在这种情况下，我们有：

$$f(t,x,y,z)=\frac{\alpha|z|^2x-\mu x+\beta y}{\hbar^2/2m_p}$$

并且我们将选择一对 $(m,\ M)$，使得

$$m=-\frac{2\beta m_p}{\hbar^2}$$

并且与问题（2.2）相关的格林函数 $H_{m,\ M}$为正（即该对 $\left(\frac{-2\beta m_p}{\hbar^2},M\right)$满足定理 7.2 的性质）。那么，根据定理 7.2，如果

$$\frac{\alpha|z|^2-\mu}{\hbar^2/2m_p}x+M\,z\geq 0\quad\forall x,z\in\left[\frac{l}{L}r,\frac{L}{l}R\right]$$

并且以下条件之一成立

1.

$$\left(\frac{\alpha|z|^2-\mu}{\hbar^2/2m_p}-\frac{L}{2Tl^2}\right)x+M\,z\geq 0,\quad\forall x,z\in\left[\frac{l}{L}r,r\right],$$
$$\left(\frac{\alpha|z|^2-\mu}{\hbar^2/2m_p}-\frac{1}{2TL}\right)x+M\,z\leq 0,\quad\forall x,z\in\left[R,\frac{L}{l}R\right],$$

2.

$$\left(\frac{\alpha|z|^2-\mu}{\hbar^2/2m_p}-\frac{L}{2Tl^2}\right)x+M\,z\leq 0,\quad\forall x,z\in\left[\frac{l}{L}r,r\right],$$
$$\left(\frac{\alpha|z|^2-\mu}{\hbar^2/2m_p}-\frac{1}{2TL}\right)x+M\,z\geq 0,\quad\forall x,z\in\left[R,\frac{L}{l}R\right],$$

问题（2.2）在周期边界条件下于 I上有一个正解。若考虑如下特殊情形：

$$m=-\frac{2\beta m_p}{\hbar^2}\leq\left(\frac{\pi}{2\,T}\right)^2\ \text{and}\ M=0,$$

那么，经过一些代数运算，并考虑到 m_p、 μ 和 $\hbar$ 必须为正，我们得到：如果：

$$-\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2\frac{\hbar^2}{2m_p}\leq\beta\leq 0,\quad\alpha\geq\frac{\mu L^2}{l^2r^2},$$

并且满足以下条件之一

1.
$$\frac{L^2}{l^2 r^2}\left(\frac{\hbar^2 L}{4m_p T l^2}+\mu\right) \leq \alpha \leq \frac{l^2}{L^2 R^2}\left(\frac{\hbar^2}{4m_p T L}+\mu\right),$$

2.
$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{\hbar^2}{4m_p T L}+\mu\right) \leq \alpha \leq \frac{1}{r^2}\left(\frac{\hbar^2 L}{4m_p T l^2}+\mu\right),$$

对于某些 $r>0$ 和 $R>0$，则问题（2.2）在周期边界条件下于 I 上有一个正解。

我们可以采用类似的方法，应用推论 7.3 来确保负解的存在。

附录

函数 $H_{m,\ M}$ 的最大值和最小值的数值搜索

为了推断点 $(\hat{t},\ \hat{s}) \in I \times I$，即函数 $H_{m,\ M}$ 在为正（负）时达到其最小值（最大值）的点，我们开发了一个 Python 程序，针对不同的数值对 $(m,\ M)$ 搜索函数在 $m \geq 0$ 时达到其最小值（或最大值）的点。随后，我们绘制了这些数值 $(m,\ M)$ 所对应的点。所得图形如图 6 所示。

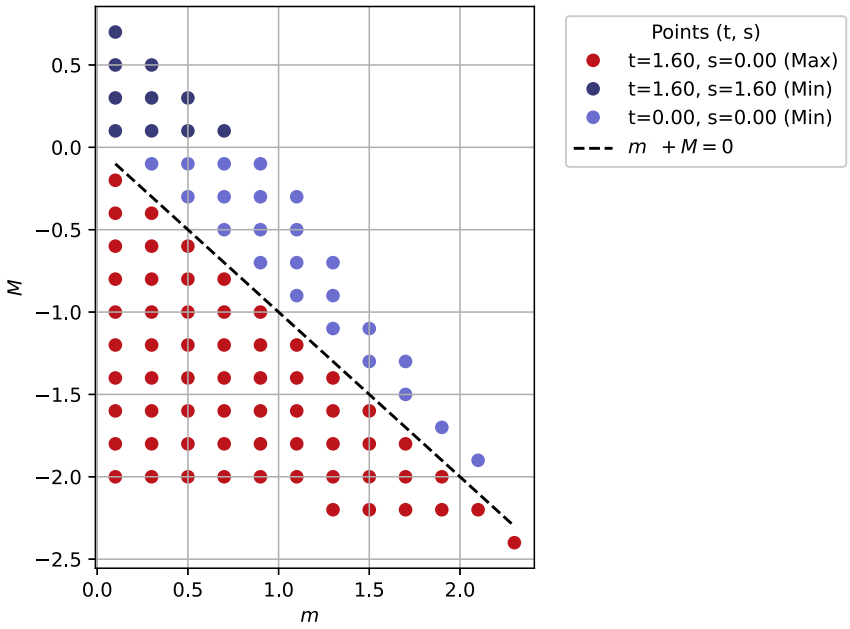


图 6：表示为 m 和 M 的函数时，函数 $H_{m,\ M}$ 取得最小值（当其为正时）或最大值（当其为负时）的点。

函数 H_m 的最大值 M 似乎总是在 $(T, 0) \in I \times I$处取得，而当函数为正时，最小值在 $(T, T) \in I \times I$处或在 $(0, 0) \in I \times I$处取得。令 $H_{m,M}(T,T) = 0$ 以及 $H_{m,M}(0, 0) = 0$，并求解 M关于 m的函数关系，即可绘制两条曲线。我们观察到，对于 $m \in \left(0, \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2\right)$，函数 $H_{m,M}(T,T)$ 在 M小于 $H_{m,M}(0, 0)$ 所对应的值时不再为正；而当 $m \in \left(\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$时，情况则相反。因此，当 $m \in \left(0, \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2\right)$ 时，我们必须选择点 (T,T)，而在 $m \in \left(\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$ 时选择 $(0, 0)$。

我们也为 $m < 0$ 编写了类似的程序。

第一个狄利克雷特征值的 Wolfram Mathematica 代码

这里提供了所需的 Mathematica 代码，用于符号计算当 $m = 0$取 $s_0 \in [0, T] \setminus \mathbb{N}$ 时问题 (6.1) 的第一个狄利克雷特征值，以及当 $m = 0$取 $s_0 \in \mathbb{N} \cup [0, T]$ 时问题 (6.2) 的第一个狄利克雷特征值。

清单 1：Mathematica 代码

```
1 s符号 =符号 ["s " ]; 2 t符号 =符号 [" TT " ]; 3 n = 2* 整数部分 [T] + 2; 4 M解 =常数
数组 [函数 [{s , TT }, 0] , 整数部分 [T] + 1]; 5 Soloxala =常数数组 [0 , 整数部分 [T] + 1];
6 7 Do [8 With [{ a固定 =a} , 9 A =表 [符号 ["A " <>转字符串 [i ]] , {i , 1, n }]; 10 B =表 [
符号 [" B " <>转字符串 [i ]] , {i , 1, n }]; 11 v =常数数组 [函数 [{t , M }, 0] , n ]; 12 13 (* 定义
第一个和最后一个函数 *) 14 v [[n ]] =函数 [{ t , M}, 15 -M /2*(( A [[n ]]*( TT +a - s ) +B [[
n ]]) /(1 +M /2*( TT +a - s) ^2) )*t ^2 16 +A [[n ]]* t +B [[n]] 17 ]; 18 v [[1]] =
函数 [{ t , M}, 19 -M /2* v [[n ]][TT +a - s , M]* t^2 +A [[1]]* t +B [[1]] 20 ]; 21 22
(* 前向递推 *) 23 Do [24 With [{ j固定 =j } , 25 v [[j ]] =函数 [{ t , M}, 26 -M /2* v [[j固定 -
1]][- TT +j固定 - 1 +a - s , M]* t^2 27 +A [[j固定 ]]* t +B [[j固定 ]] 28 ];
```

```
29          ] ,30{j , 2 ,  1  +整数部分 [T ] - a , 1}31          ];3233  (* 中间函数 *)34v [[n - a ]]  =函
数 [{t , M },35-M /2*(( A [[n - a ]]*( TT - s )  +B [[n - a ]]) /(1  +M /2*( TT - s) ^2) )*
                                                                                                t^2
36          +A [[n - a ]]* t  +B [[n - a ]]37          ]; 38 39 (* Backward recursion *) 40 Do [
41 With [{ jFixed  =j } , 42 v [[j ]]  =函数 [{ t , M}, 43 -M /2* v [[jFixed  + 1]][TT  +
jFixed - n  +a - s , M ]* t^244          +A [[jFixed ]]* t  +B [[jFixed ]]45          ];46          ] ,
47 {j , n - a - 1 ,  2  +IntegerPart [T ] - a , -1}48          ]; 49 Do [50 With [{ jFixed  =j } , 51
v [[j ]]  =函数 [{ t , M}, 52 -M /2* v [[jFixed -  1]][TT  +jFixed - (n - a) - s , M ]* t ^2
53          +A [[jFixed ]]* t  +B [[jFixed ]]54          ];55          ] ,56 {j , n - a  +  1, n - 1 ,
1}57          ]; 58 59 (* 导数 *) 60 vtt  =Table [D [v [[j ]][t , M ] , t ] , {j , 1, n }]; 61 vt  =
函数 [{ t , M } , #] & /@ vtt ; 62 63 (* 构建连续性方程 *) 64 eqs  =  {}; 65 Do [66 AppendTo [
eqs , v [[j ]][- TT  +j - s  +a , M]  ==v [[j  +  1]][- TT  +j
                                                                                                - s
   +a, M ]];67将 [eqs , vt [[j ]][- TT  +j - s  +a , M]  ==vt [[j  +  1]][- TT  +追加至
                                                                                                j -
   s  +a , M ]];68, {j , 1 , IntegerPart [T ] - a}69          ];70将 [eqs , v [[IntegerPart [T
] + 1- a ]][-s , M]  ==v [[IntegerP 追加至
                                                                                                art [
   T] + 2-a]][-s,M]];71追加到 [方程组, vt [[整数部分 [T] + 1-a]][-s,M
] ==vt [[整数部分 [T] + 2-a]][-s,M]];72
```

```
    Do[
    追加到[eqs,     v[[j]][TT +j - n - s + a, M] == v[[j + 1]][TT + j -
        n - s + a, M]];
    追加到[eqs,     vt[[j]][TT +j - n - s + a, M] == vt[[j + 1]][TT + j
        - n - s + a, M]];
    , {j, 整数部分[T]     + 2 -a,  n -1 -   a}
    ];
    Do[
    追加到[eqs,     v[[j]][TT +j - n - s + a + 1, M] == v[[j + 1]][TT +
        j - n - s + a + 1, M]];
    AppendTo[方程式, vt[[j]][TT +j - n - s + a + 1, M] == vt[[j + 1]][TT
        + j - n - s + a + 1, M]];
    , {j, n - a, n - 1}
    ];

    (* 边界        条件 *)
    AppendTo[eqs, v[[1]][-TT, M] == 0];
    追加到[eqs,     v[[n]][TT, M] == 0];

    (* 求解方程组          *)
    系数矩阵          =系数数组[eqs,          合并[A, B]][[2]];
    msimp   =化简[系数矩阵];
    pros =行列式[msimp];
    Sols =求解[pros     == 0, M];
    Soloxala[[a + 1]] = 解[[1]];

    (* 存储解              *)
    If[Length[解[[a    + 1]]] > 0,
    M解[[a + 1]]   =函数[{s      , TT}, 实部[M/. Soloxala[[a固定 + 1]]
        /. {s符号->s,       t符号-> TT}]],
    解[[a + 1]]    =函数[{s,       TT}, 缺失["无解"]]
    ];
    ],
    {a, 0, 整数部分[T]}
    ]
```

参考文献

[1] Aftabizadeh, A., Huang, Y.K., Wiener, J.: 带自变量反射的微分方程的有界解。《数学分析及其应用杂志》135(1), 31–37 (1988)。

[2] Buedo-Fern´andez, S., Cao Labora, D., Rodr´ıguez-L´opez, R.: 含分段常数自变量的非线性二阶函数微分方程的边值问题。《数学方法与应用科学》47(5), 3547–3581 (2024)。

[3] Cabada, A., Cambeses-Franco, P.：含分段常数自变量的反射方程。《非线性科学、数值与模拟通信》109488 (2025)。[4] Cabada, A., Cid, J.A., M´aquez-Villamar´ın, B.：利用 Mathematica 计算边值问题的格林函数。《应用数学与计算》219(4), 1919–1936 (2012)。[5] Cabada, A., Tojo, F.A.F.：含反射和周期边值条件的一阶线性算子的比较结果。《非线性分析：理论、方法与应用》78, 32–46 (2013)。[6] Cabada, A., Tojo, F.A.F.：含对合的微分方程。《Atlantis微分方程简明丛书》，第2卷。Atlantis Press，巴黎 (2015)。DOI 10.2991/978-94-6239-121-5。[7] Henderson, J., Ma, D.：四阶非局部边值问题解的存在性。《格鲁吉亚数学杂志》13(3), 473–484 (2006)。[8] Krasnosel'skii, M.A.：算子方程的正解。由 R.E. Flaherty 从俄文翻译，L.F. Boron 编。Noordhoff，格罗宁根 (1964)。[9] Krein, M. G., Rutman, M. A.：在巴拿赫空间中保持锥不变的线性算子。《数学科学进展》3(1), 3–95 (1948)。[10] Dong, G., Zhu, J., Zhang, W., Malomed, B.A.：软光学晶格中玻色–爱因斯坦凝聚体的极化激元孤子。《物理评论快报》110(25), 250401 (2013)。[11] Marek, I.：正算子的弗罗贝尼乌斯理论：比较定理及其应用。《SIAM应用数学杂志》19(3), 607–628 (1970)。[12] Myshkis, A.D.：关于偏离自变量微分方程理论中的若干问题。《俄罗斯数学调查》32(2), 181 (1977)。[13] Naranjo, R.T.：一般分段常值偏离自变量的非自治线性脉冲微分方程的振荡。《地中海数学杂志》21(7), 213 (2024)。[14] Nieto, J.J., Rodr´ıguez-L´opez, R., 等：具有非局部边界条件的含分段常数自变量的二阶线性微分方程。《应用数学与计算》218(19), 9647–9656 (2012)。[15] O'Regan, D.：自变量反射微分方程的存在性结果。《澳大利亚数学学会讲义丛书》57(2), 237–260 (1994)。[16] Sawashima, I.：关于某些正算子的谱性质。《御茶水女子大学自然科学报告》15, 53–64 (1965)。[17] Schaefer, H.H.：巴拿赫格与正算子。《数学科学基础丛书》，第215卷。Springer-Verlag，纽约-海德堡 (1974)。国际标准书号 978-3-540-06705-3

[18] Silberstein, L.：第十七章 方程的解 $f'(x) = f(1/x)$。London Edinburgh Philos. Mag. and J. Sci. 30(200)，185–186（1940）。[19] Tojo, F.A.F.、Cabada, A.、Cid, J.A.、M´aquez-Villamar´ın, B.：带反射的格林函数。Wolfram图书馆档案 / MathSource。网址：https://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/9087/（访问日期：2025年11月28日）。[20] Torres, P.J.：通过Krasnoselskii不动点定理证明某些二阶微分方程的单符号周期解的存在性。J. Differential Equations 190(2)，643–662（2003）。[21] Wen, Z.、Yan, Z.：具有PT 对称势的非局部非线性Schr¨odinger方程中的孤子及其稳定性。Chaos 27(5)（2017）。[22] Wiener, J.：泛函微分方程的广义解。World Scientific，新加坡（1993）。国际标准书号 978-981-02-1207-0。[23] Wiener, J.、Watkins, W.：一窥对合的奇妙世界。Mo. J. Math. Sci. 14(3)，175–185（2002）。