arXiv:2601.13321v1 [math.LO] 19 Jan 2026

关于广义测度的问题：不可能性结果

CLAUDIO AGOSTINI ，FERNANDO BARRERA ，以及 VINCENZO DIMONTE

Abstract. 本文研究了将测度理论扩展到不可分结构的问题：从广义描述集合论出发，拓展到超越这一框架的更广泛空间类。尽管零测度集理想等各种概念已经得到推广，但在广义描述集合论中能否定义出令人满意的 λ^+-测度这一问题仍悬而未决。我们引入一大类λ^+-测度，将其定义为取值于任意带无穷和的正全序幺半群中的函数。该定义仅依赖于极小假设，并涵盖了这一背景下大多数自然的测度推广。随后我们证明，在某些基数假设下，在 $\kappa\lambda$ 上不存在此类连续 λ^+-测度；在任何 λ^+-Borel 空间或权不超过 λ 的 T_0拓扑空间上也不存在。我们还证明了这些基数假设的最优性。

Contents

1. 引言 2
2. 设置 6
2.1. 拓扑与广义描述集合论 6
2.2. 全序幺半群 11
3. 幺半群上的无限运算 13
3.1. 幺半群示例 17
4. 测度 19
4.1. 测度的性质 20
4.2. 极小 λ^+-可测空间 22
4.3. 测度的扩张与限制 23
5. 关于（平凡） λ^+-测度的存在性 26

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：03E15、28E15、54H05；次要分类：06F05。*Key words and phrases.* 广义描述集合论、测度、广义 Baire 空间的拓扑、全序幺半群、无穷元运算。本研究由奥地利科学基金（FWF）P35655 和 P35588、OeAD Ernst Mach 全球奖学金以及奥地利科学基金（FWF） [10.55776/STA139], 、乌迪内大学（意大利）、2022年PRIN项目——模型、集合与分类——项目代码：2022TECZJA CUP G53D23001890006（由欧盟 NextGenerationEU——PNRR M4 C2 I1.1 资助）、国家高等数学研究所（INdAM）的国家代数结构、几何结构及其应用小组（GNSAGA），以及欧盟地平线2020研究与创新计划下的玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动 101210902（TopAspOfGDST）资助。文中所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或地平线2020计划的观点。欧盟和资助机构均不对此承担责任。为实现开放获取，作者已将知识共享署名许可（CC BY）适用于本次投稿所产生的任何作者接受稿版本。

5.1. 狄拉克型测度与可数情形的特殊性 265.2. 非连续和幺半群的可能性定理 326. 关于连续 λ^+-测度的不存在性 376.1. 错误次数幺半群中的测度 376.2. 非 0-连续幺半群中的测度 376.3. 非阿基米德幺半群中的测度 386.4. 连续统以上的狄拉克型测度 396.5. 不可能性定理的证明 397. 关于 λ-测度的存在性与可测基数 428. 最后评论 45 参考文献 46

1. Introduction

广义描述集合论的根源可以追溯到上世纪下半叶（例如参见 [Sto62、MV93]）。在过去十年中，该领域迅速发展，越来越多的概念和结果正从经典描述集合论扩展到其广义对应领域。例如，广义贝尔空间 ${}^\kappa\kappa$ 上博雷尔等价关系的可约性（其中 κ 是满足 $2^{<\kappa} = \kappa$的正则不可数基数）在[FHK14], 中得到了研究，而关于Souslin拟序的经典结果则在 [AMR22] 中被扩展到了这一情形。最近，这一框架得到了进一步发展（例如参见[CS16、Gal19、AMRS23]），以涵盖比${}^\kappa\kappa$更一般形式的拓扑空间；研究表明，可以在这一背景下引入度量的适当推广，并且所得理论仍然具有良好的性质。其他项目（例如参见 [DMR25、Ago22、ACMRP25]）旨在将这一理论进一步扩展到所有满足 $2^{<\lambda} = \lambda$ 的基数 λ，包括奇异基数。

贝尔性质、完美集性质、Hurewicz二分定理等各种正则性性质，已在广义情形中得到推广和研究（例如，参见 [LMRS16、Sch17、KW20]）。这些结果表明，至少在某些情形下，这些性质在广义情形中也能够表现出非常良好的性质。

然而，测度论是经典描述集合论中的一个重要主题，并在数学其他领域有诸多应用，但在广义情形中仍未找到恰当的类似结果。人们已经尝试推广与测度相关的概念。例如， [FL17] 和 [CS19] 提出了针对广义贝尔空间中的零集理想的不同推广。然而，进一步的进展面临着重大的技术和概念障碍。因此，在这一背景下能否建立一种令人满意的“测度”概念，这个问题一直悬而未决。

本文通过证明，在非常宽松的假设下，对于足够大的基数 λ，不可能在一个 λ^+-Borel 空间上定义非平凡的广义测度，从而解决了这一问题。特别地，广义贝尔空间上不存在这样的测度。

我们采用的框架比广义描述集合论中通常采用的框架稍为一般（见第2.1小节）。我们的结果适用于任意形如 X 、权为 λ 的 $X \subseteq {}^\gamma A$空间，其中 A 是集合， γ是序数，并赋予

有界拓扑。对于这种形式的空间，我们认为适当的测度概念是 λ^+-可加测度（命题2.3）。

实际上，我们可以将问题化简到一个等价且更熟悉的情形。任取两个基数 λ 和 κ，其中 $\kappa \leq \lambda$ 和 κ 均为正则基数；我们讨论（直到第 8节）权为 ${}^{\kappa}\lambda$的 λ 子空间（事实2.4 和推论2.5）。这样，当κ =cof(λ) 且 $2^{<\lambda} = \lambda$时，我们便得到广义描述集合论中其他论文所采用的、基于基数 λ 的标准框架（例如，参见 [Ago22、ACMRP25]）。

然而，我们并未预先施加任何基数假设。这使我们能够研究空间 ${}^{\kappa}\lambda$和 ${}^{\lambda}2$，即使在 $\kappa \neq \mathrm{cof}(\lambda$ 或 $2^{<\lambda} \neq \lambda$ 的情况下也是如此；这类情形通常未被纳入广义描述集合论的研究范围。相较之下，我们证明，假设 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ 总可以在不失一般性的前提下作出：在同胚意义下，任何形如 ${}^{\kappa}\lambda$的空间都同胚于某个空间 ${}^{\kappa}\lambda'$，其中 λ' 满足（λ'）$^{<\kappa} = \lambda'$（命题 2.6）。广义康托空间也有类似结论（命题2.8）。

要获得有意义的不可能性定理，主要挑战之一是使用足够广泛的“广义测度”类，以涵盖人们可能考虑的所有合理的测度推广。为此，我们尽可能放宽经典测度的假设，引入一种“统摄性定义”，以囊括将测度推广到 ${}^{\kappa}\lambda$ 的子空间时大多数（即使不是全部）自然的推广形式。

回顾一下，集合 X 上的**（经典）可测空间**是一个二元组 $(X,\ \mathfrak{M})$，其中X是一个集合，$\mathfrak{M}$ 是 σ上的一个 σ-代数。如果 X 是一个拓扑空间，则还进一步要求 $\tau \subseteq \mathfrak{M}$，即 $\mathfrak{M}$包含 σ上的 Borel 集的 σ-代数。在经典描述集合论中，人们通常将注意力限制在**博雷尔空间**上，即形如 $(X,\ \mathfrak{M})$ 的二元组，其中 X 是一个第二可数的 T_0 拓扑空间，而 $\mathfrak{M}$ 是由 X的拓扑生成的最小 σ-代数。

这些概念可以直接推广到不可数情形。我们将一对 $(X,\mathfrak{M})$ 定义为 λ^+-可测空间，其中 X 是拓扑空间，$\mathfrak{M}$ 是包含 X 的所有开子集的 λ^+-代数（也就是说，它是一个对大小至多为 λ 的并与交运算以及补运算封闭的族）。若 $\mathfrak{M}$ 是由权至多为 λ 的 T_0 拓扑生成的 λ^+-代数，则称一对 $(X,\mathfrak{M})$ 为 λ^+-博雷尔空间；等价地说，若 $\mathfrak{M}$ 分离 X 中的点，且由一个大小至多为 λ 的子族生成，也可称其为 λ^+-博雷尔空间（例如参见 [ACMRP25，命题 3.24]）。

由于我们的目标是尽可能放宽这些假设，因此我们采用一类更大的结构，它扩展了 λ^+-可测空间和 λ^+-博雷尔空间这两类结构。具体而言，我们不再要求 $\mathfrak{M}$ 对补集或交集封闭，甚至不要求 Bor(X) $\subseteq \mathfrak{M}$。

定义 1.1. **λ^+弱 λ^+-可测空间** 是一个有序对 $(X,\mathfrak{M})$，其中 X 是拓扑空间，而 $\mathfrak{M}$ 是 X 的子集族，对大小为 $\leq \lambda$ 的并运算封闭，且包含 X 的所有开子集。

在经典可测空间（X，$\mathfrak{M}$）上，通常将测度定义为定义在 $\mathfrak{M}$ 上、取值于 $\mathbb{R}_\infty = [0,\infty)$ 的函数 $\cup \infty$。更确切地说，可测空间（X，$\mathfrak{M}$）上的**（经典）测度** μ 是一个偏函数 μ：$\mathscr{P}$（X）$\to \mathbb{R}_\infty$，满足 $\mathfrak{M} \subseteq$ dom（μ），μ（$\emptyset$）$= 0$，并且

$$\mu(\bigcup_{i\in\omega} A_i) = \sum_{i\in\omega} \mu(A_i)$$

对于任意可数族 $(A_i)_{i<\omega} \subseteq \mathfrak{M}$ 互不相交的集合。我们称 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为 **(经典) 测度空间**。为避免平凡情形，通常要求 $\mu(X) > 0$，以确保 μ不恒等于 0。

要将这一定义扩展到不可数情形，需要一种带有运算的有序结构，并且该运算能够扩展到所需（无限）长度的序列。在经典情形中，这一角色由正全序幺半群$\mathbb{R}_\infty$ 及无穷元运算 $\sum$共同承担。

尽管人们曾尝试将实数推广到不可数情形，同时尽可能保留 $\mathbb{R}$的诸多性质（例如参见[DW96、Gal19、Won23]），但我们采取了不同的方法。由于我们的目标是建立一个尽可能一般的不可能性定理，我们使用任意的正全序幺半群 $\mathbb{S} = (S、0、+、\leq)$，而不是将自身限制于某种特定结构。类似的推广——即将 $\mathbb{R}$ 替换为幺半群——已在相关背景下取得成功，例如在度量领域（参见 [Rei79]）。

作为无穷和的一种推广，我们允许任意偏函数 $\mathsf{Sum}\colon {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S} \rightharpoonup \mathbb{S}$，它在定义域内的有限序列上与 $+$ 一致，并且在极限长度的序列上是**连续** 的，也就是说，满足

$$\mathsf{Sum}(s) = \sup\{\mathsf{Sum}(s \restriction \alpha) \mid \alpha < \mathrm{lh}(s),\ s \restriction \alpha \in \mathrm{dom}(\mathsf{Sum})\}$$

对所有 $s \in \mathrm{dom}(\mathsf{Sum})$，若 $\mathrm{lh}(s)$ 是极限序数，且 $s \restriction \alpha \in \mathrm{dom}(\mathsf{Sum})$ 对共尾多个 $\alpha < \mathrm{lh}(s$ 成立（见定义 3.1）。我们将这样的运算称为**无穷元运算** 或 **无穷和**，定义在 $\mathbb{S}$上。

取值于幺半群且具有非连续函数 Sum 的测度通常无法满足那些使经典理论饶有趣味的大多数基本性质。因此，对这类对象的研究仅限于第 5.2 小节；在论文其余部分，我们将注意力限定于连续无穷和。

这种设定提供了很大的自由度，因为与域或群相比，幺半群涵盖了种类多得多的例子，其行为也更加多样。例如，可数度的全序群不可能是戴德金完备的，但在幺半群范畴中，其戴德金完备化确实存在（命题 3.10）。与此同时，幺半群也可能具有极其病态的性质。它们可能不满足消去律，也可能含有幂等元，即满足 $a \in \mathbb{S}$使得 $a + a = a$的元素。此外，代数运算可能与序结构配合不佳，甚至不连续：可能存在一个界$c \in \mathbb{S}^+$ 使得 $a+a \geq c$对每个 $a \in \mathbb{S}^+$都成立。由于我们的目标是在完全一般的情形下证明不可能性定理，因此我们有意允许任意幺半群，包括这类性质不佳的例子。

然而，这一设定的普遍性要求我们对测度施加额外条件。这些条件可视为类似于经典情形下由代数结构以及 $\mathbb{R}_\infty$ 和σ-代数的性质所导出的性质（例如参见 [Rud87，定理 1。19]）。我们将其中一些性质直接纳入定义。按照文献中的惯例，我们用 $x \in \mathfrak{M}$和 $\mu(x)$ 代替 $\{x\} \in \mathfrak{M}$ 和 $\mu(\{x\})$。

定义 1.2. 设 $(X, \mathfrak{M})$ 是弱 λ^+-可测空间，且 $\mathbb{S}$ 是带有无穷和 Sum 的正全序幺半群。$(X, \mathfrak{M})$ 上的 λ^+**-测度** 是偏函数 $\mu\colon \mathscr{P}(X) \to (\mathbb{S}, \mathsf{Sum})$，满足 $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{dom}(\mu)$，并且：

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(M2) $\mu(X) > 0$, (M3) $A \subseteq B$ 蕴含对所有 A, $B \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) \leq \mu(B)$, (M4) 对于每个由序型为 $\gamma < \lambda^+$ 的互不相交集族 $(A_i)_{i<\gamma} \subseteq \mathfrak{M}$，有

- $\langle \mu(A_i) \mid i < \gamma \rangle \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})$,
- $\mu(\bigcup_{i\in\gamma} A_i) = \mathrm{Sum}^{i\in\gamma}\, \mu(A_i)$,

（M5） μ 是**点正则**的，即，对于满足 $x \in \mathfrak{M}$ 的每个 $x \in X$，以及对于在 x 处序型为 $\gamma < \lambda^+$的每个（开）局部基 $\{A_i \mid i < \gamma\}$，我们有

$$\mu(x) = \inf_{i<\gamma} \mu(A_i).$$

我们称 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为一个**弱 λ^+-测度空间**。若对每个 $x \in X$，都有 $x \in \mathfrak{M}$ 且 $\mu(x) = 0$，则称 μ 是**连续**的。

事实证明，即使在这些宽松条件下，也已经不可能在广义贝尔空间上（或其任何子空间上）得到连续测度。

定理 1.3。设 γ 是一个序数，A 是一个集合，$X \subseteq {}^{\gamma}A$ 是一个权为 $\lambda \geq \mathfrak{c}$ 的空间。那么，不存在连续弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$。

特别地，若 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ 且 λ 至少具有连续统的基数 $\mathfrak{c}$，那么在 ${}^{\kappa}\lambda$ 上不存在连续弱 λ^+- 测度空间 $({}^{\kappa}\lambda, \mathfrak{M}, \mu)$（推论 8.1）。

处理 λ^+-测度以及这类一般形式的幺半群，需要采用与处理 $\mathbb{R}_\infty$上的经典测度截然不同的技巧。因此，在第 2–4 节中，我们分析幺半群的基本性质，建立测度和无穷和的定义，并说明如何将问题化简为一个更简单的框架。

在第 5 节中，我们证明了定理 1.3 中假设的最优性。在第 5.1 小节中，我们分析了情形 $\lambda^{<\kappa} = \lambda < \mathfrak{c}$，由此可推出 $\kappa = \omega$。我们证明，在此情形下，存在定义在 $X = {}^{\omega}\lambda$ 上的连续弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$（命题 5.3）。然而，我们称这些测度为 λ-狄拉克测度；它们是“平凡的”，因为它们只集中在空间的一小部分上，这与经典情形中的狄拉克测度类似。在第 5.2 小节中，我们证明，如果进一步放宽对幺半群的假设，并允许无穷元函数 Sum 不连续，那么即使 $\lambda^{<\kappa} = \lambda \geq \mathfrak{c}$，仍可在 $X = {}^{\kappa}\lambda$ 上得到连续的（非 λ-狄拉克）弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$（定理 5.17）。然而，我们认为，以这种方式得到的测度非常人为，而允许函数 Sum 不连续通常会产生病态对象（例如，见命题 5.13）；因此，我们不采用这一概念。

在第 6 节中，我们证明定理 1.3。在命题 6.10 中，我们确立了一个更具技术性的不可能性结果，表明即使在 $\lambda < \mathfrak{c}$的情况下，每个连续测度都可以分解为 ω_1-狄拉克测度。这很好地补充了定理 1.3 以及第 5.1 小节的结果，表明每个连续弱λ^+-测度，本质上都是先从可分子空间上的一个可数测度出发，再将其扩展到整个空间而得到的。这种刚性现象凸显了经典可数情形的本质唯一性，并进一步表明，测度概念从根本上刻画的是可分情形。

在第 7 节中，我们研究连续弱 λ-测度空间（X，$\mathfrak{M}$，μ）上的情形，其中 $X = {}^{\kappa}\lambda$。我们证明，若结构 $\mathbb{S}$ 可以遍历所有正全序幺半群，则这样的 λ-测度总是存在（命题7.1）。相反，若将 $\mathbb{S}$ 固定为单位区间 $[0, 1]$，，则此类 λ-测度空间的存在性等价于 λ 的（实值）可测性（命题7.2 和推论 7.3）。

最后，在第 8 节中，我们简要讨论研究结果的推论。在推论 8.1–8.6 中，我们全面总结了在所有可能的基数情形下，空间 $^{\kappa}\lambda$ 和 $^{\lambda}2$ 上测度存在与不存在的情况。接着，我们证明，对于 λ^+-测度空间，所有结果都可由相应的弱 λ^+-测度空间结果推出。这使我们得以将结论推广到更广泛的空间类别，包括 λ^+-博雷尔空间以及更一般的拓扑空间（也就是说，X 不一定是 $^{\kappa}\lambda$ 的子集），例如可得以下结果。

推论 (推论 8.10)。假设 $2^{<\lambda} = \lambda > \omega$。令 X 为一个 T_0 权为 $\leq \lambda$ 的拓扑空间。那么，不存在连续的 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$。

推论 (推论 8.11)。假设 $2^{<\lambda} = \lambda > \omega$。令 $(X, \mathfrak{M})$ 为一个 λ^+-博雷尔空间。那么，不存在连续的 λ^+-测度。

2. Setup

我们首先简要回顾一下贯穿本文使用的关键概念。

2.1. 拓扑与广义描述集合论。

请读者参阅 [Eng89]以及 [AMR22、Ago22、AMRS23]，分别了解一般拓扑和广义描述集合论的基本概念。

回顾一下，给定一个集合 A 和一个序数 γ，我们用 $^{\gamma}A$ 表示由 A 中元素组成的、长度为 γ 的序列的集合。我们还令 $^{<\gamma}A = \bigcup_{\alpha<\gamma} {}^{\alpha}A$。$^{\gamma}A$ 上的有界拓扑由形如 $\mathrm{N}_s(^{\gamma}A) = \{x \in {}^{\gamma}A \mid s \subseteq x\}$ for$s \in {}^{<\gamma}A$ 的集合（称为锥）生成。为简便起见，当环境空间由上下文明确时，我们通常只写作 N_s。族 $\mathcal{B} = \{\mathrm{N}_s \mid s \in {}^{<\gamma}A\}$由既开又闭集组成，并且对小于 $\mathrm{cof}(\gamma)$ 的基数的交集封闭。因此，$\mathcal{B}$ 是 $^{\gamma}A$ 上有界拓扑的一个基；我们称其为典范基。对于任意子空间$X \subseteq {}^{\gamma}A$，我们也用 $\mathcal{B}(X)$ 表示 X 的典范基，该基由既开又闭锥 $\mathrm{N}_s(X) = \mathrm{N}_s \cap X$ 组成，并满足 $\mathrm{N}_s \cap X \neq \emptyset$。$\mathcal{B}$（以及 $\mathcal{B}(X)$）对小于 $\mathrm{cof}(\gamma)$ 的基数的交集封闭，这保证了有界拓扑自身也对小于 $\mathrm{cof}(\gamma)$ 的基数的交集封闭；换言之，它是 $\mathrm{cof}(\gamma)$-可加的。

以下这个众所周知的事实（例如参见 [Nyi99，定理 2。7] 或 [Ago22，命题 2.2。24]）表明，有界拓扑在一个强意义下也是零维的：每个开覆盖都可以细化为由基本既开又闭锥组成的既开又闭划分。

事实 2.1。设 γ 是一个序数，A 是一个集合，且 $X \subseteq {}^{\gamma}A$。对于 X 的每个开集族 $\mathcal{V}$，都存在一个不相交锥族 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}(X)$，它细化 $\mathcal{V}$ 并满足 $\bigcup \mathcal{P} = \bigcup \mathcal{V}$。

回顾一下，给定一个基数 δ，如果一个空间是 **δ-Lindel¨的**，那么称它为该基数意义下的 Lindelöf 空间，即每个开覆盖都有一个大小严格小于 δ的子覆盖。根据事实 2.1，我们可以得到下面这个直接推论。

推论 2.2。设 γ 是一个序数，A是一个集合，且 $X \subseteq {}^{\gamma}A$。以下命题等价：

(1) X 不是 λ-*Lindel¨of*。(2) X 包含一个大小至少为 λ 的既开又闭划分。(3) X 包含一个大小（至少）为 λ 的闭离散集合。

证明。 (1)⇒(2)。令 $\mathcal{U}$ 为一个开覆盖，且不包含任何大小小于 λ 的子覆盖。令 $\mathcal{P}$ 为 X 的一个细化 $\mathcal{U}$，如事实 2.1所述。如果$|\mathcal{P}| < \lambda$，那么选择 $U_P \in \mathcal{U}$ 使得 $P \subseteq U_P$ 对每个 $P \in \mathcal{P}$ 都成立，将会导致矛盾。因此，$|\mathcal{P}| \geq \lambda$。

(2)⇒(3)。令 $\mathcal{P}$ 为 X 的一个划分，其大小至少为 λ，并对每个 $P \in \mathcal{P}$选取 $x_p \in P$。于是 $\{x_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ 是闭且离散的，正如所需。

(3)⇒(1)。只需注意，λ-Lindel¨of 空间的每个闭子空间仍然是 λ-Lindel¨of，而大小为 λ 的离散空间不是 λ-Lindel¨of。□

回顾一下，拓扑空间的权 w 是其拓扑的一个基的最小基数；稠密度 d 是稠密子集的最小基数；而胞腔度c 是满足以下条件的最小基数 δ：每个两两不交开集族的大小至多为 δ。

众所周知（例如参见 [Eng89，练习 1.7.12(a)]），对于每个拓扑空间 X，都有 $c(X) \leq d(X) \leq w(X)$。在任何带有有界拓扑的子空间 $X \subseteq {}^{\gamma}A$中，这三个基数相等。

命题 2.3。设 γ 是一个序数，设 A 是一个集合，并设 $X \subseteq {}^{\gamma}A$。若 X 的权为 λ，则它包含一个由 λ个两两不相交的基本既开又闭集组成的族。
In particular, $c(X) = d(X) = w(X)$.

证明。若 X 是离散的，则结论成立，因此不妨设其不是离散的。于是，γ 是极限序数，且 $\kappa = \mathrm{cof}(\gamma)$是无限的；又由于 X 是 κ-可加的且非离散的，必有 $\kappa \leq \lambda$。

若 $\lambda = \kappa$，则结论成立：对于任意非孤立点 $x \in X$，都有共尾多个 $\alpha < \gamma$ 使得集合 $\mathbf{N}_{x\restriction\alpha}(X) \setminus \mathbf{N}_{x\restriction\alpha+1}(X)$非空。令$\{\alpha_i \mid i < \kappa\}$ 为这些 α（其中一些）的一个枚举。由于 $\mathcal{B}(X)$是X 的一个基，且 $\mathbf{N}_{x\restriction\alpha+1}(X) \setminus \mathbf{N}_{x\restriction\alpha}(X)$是既开又闭的，对于每个 $i < \kappa$，都存在 $s_i \in {}^{<\kappa}\lambda$使得 $\mathbf{N}_{s_i}(X) \neq \emptyset$ 且 $\mathbf{N}_{s_i}(X) \subseteq \mathbf{N}_{x\restriction\alpha_i}(X) \setminus \mathbf{N}_{x\restriction\alpha_i+1}(X)$；由此得到一个由 $\kappa = \lambda$个非空、两两不相交的基本既开又闭集组成的族$\{\mathbf{N}_{s_i}(X) \mid i < \kappa\}$，正如所需。

因此，假设 $\kappa < \lambda$。令 $\langle \gamma_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ 为 γ 中的一个共尾序列。那么，该族

$$\tilde{\mathcal{B}}(X) = \{\mathbf{N}_s(X) \mid s \in \bigcup {}^{\gamma_\alpha}A\} \subseteq \mathcal{B}(X)$$

仍是 X 的一个基。由于 X 的权为 λ，我们可以找到 $T \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} {}^{\gamma_\alpha}A$，使得$\mathbf{N}_s(X) = \mathbf{N}_s \cap X \neq \emptyset$ 对每个 $s \in T$ 和

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{N}_s(X) \mid s \in T\} \subseteq \tilde{\mathcal{B}}(X)$$

是 X 的一个最小基数的基。不失一般性，我们可以假设对每个 $s \in T$ 和 $\alpha < \kappa$，都有 $s \restriction \gamma_\alpha \in T$。对每个 $\alpha < \kappa$，令 $\mathrm{Lev}_\alpha(T) = {}^{\gamma_\alpha}A \cap T$。若存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| = \lambda$，则结论成立，因此不妨设不存在。于是，对每个 $\alpha < \kappa$，都有 $|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < \lambda$，且 $\lambda = \sup_{\alpha<\kappa} |\mathrm{Lev}_\alpha(T)|$，因此 $\mathrm{cof}(\lambda) = \kappa < \lambda$。

递归地进行，我们可以构造一个共尾集 $I \subseteq \kappa$，使得

$$\kappa < |\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < |\mathrm{Lev}_\beta(T)| < \lambda$$

对于满足 $\alpha < \beta$的每个 $\alpha, \beta \in I$，令 $I = \{\alpha_i \mid i < \kappa\}$ 为其递增枚举。由于对于每个 $s \in T$ 和 $\alpha < \kappa$，都有 $s \restriction \gamma_\alpha \in T$，根据鸽巢原理，对于每个 $i < \kappa$，存在 $s(i) \in \mathrm{Lev}_{\alpha_i}(T)$，使得

$$|\{t \in \mathrm{Lev}_{\alpha_{i+1}}(T) \mid s(i) \subseteq t\}| > \mathrm{Lev}_{\alpha_i}(T).$$

由于我们假设 $|\mathrm{Lev}_{\alpha_i}(T)| > \kappa$，并且对于每个 $i,\ j < \kappa$，至多存在一个 $t \in \mathrm{Lev}_{\alpha_{i+1}}(T)$ 使得 $t \subseteq s(j)$，因此我们有

$Z_i = \{t \in \mathrm{Lev}_{\alpha_{i+1}}(T) \mid s(i) \subseteq t$ 且对于每个 $j < \kappa$，我们都有 $t \nsubseteq s(j)\}$仍具有基数 $|Z_i| > |\mathrm{Lev}_{\alpha_i}(T)|$，对每个 $i < \kappa$ 均成立。由于 $\lambda = \sup_{\alpha<\kappa} |\mathrm{Lev}_\alpha(T)|$，我们有 $|\bigcup_{i<\kappa} Z_i| = \lambda$，因此

$$\{\mathbf{N}_t(X) \mid t \in \bigcup_{i<\kappa} Z_i\}$$

是一个由两两不交的基本既开又闭集构成的族，其基数为 λ，正如所需。 □

基数为 λ 的广义描述集合论通常研究配备有界拓扑的空间 ${}^{\lambda}2$ 和 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$（及其子空间）。在这种情形下，通常假设 $2^{<\lambda} = \lambda$，这蕴含较弱的条件 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \lambda$，从而确保例如 ${}^{\lambda}2$ 和 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$ 的权都为 λ。

这里，我们采用一个稍微更一般的框架：考虑权为 λ 形如 $X \subseteq {}^{\gamma}A$的任意空间，其中某个集合为 A，某个序数为 γ，并赋予它从 ${}^{\gamma}A$继承的有界拓扑。这类空间相当广泛。例如，它包括所有 Lebesgue 零维度量空间（等价地说，所有超度量空间）[Eng89，定理 7.3.15 和习题 7.3.F]，以及所有 μ-可度量化空间，其中 $\mu > \omega$ [Nyi99，定理 3。3] 它们具有所需的权，此外还有其他空间（另见 [Ago22，定理 2.2。1]）。

根据命题2.3，显然，在拓扑空间$X \subseteq {}^{\gamma}A$的权为 λ这一语境下，适当的测度概念是 λ^+-测度：任何这样的空间都包含一个开集，它可以划分为 λ 个开集，因此在此语境下，任何 γ-测度（其中 $\gamma < \lambda^+$）都不足以提供有用信息。这一点在研究空间 ${}^{\kappa}\lambda$而不假设 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$时尤为重要，也表明在 ${}^{\kappa}\lambda$上应研究的正确对象是（λ'）$^+$-测度，而非 λ^+-测度，其中 $\lambda' = \lambda^{<\kappa}$ 是 ${}^{\kappa}\lambda$的权。

从操作层面看，借助以下 [Ago22中广为人知的事实（例如，命题 2.2）33]，我们的设定可以化归为一个更熟悉的设定。

事实 2.4。设 γ 是一个序数，A 是一个集合，且 $X \subseteq {}^{\gamma}A$。设 λ 是 X 的权，且 $\kappa = \mathrm{cof}(\gamma)$。那么，$X$ 同胚于 ${}^{\kappa}\lambda$的一个子空间。

当 X 不是离散的时，以这种方式得到的基数 κ 是唯一的，并且满足$\kappa \leq \lambda$。事实上，回顾一下，拓扑空间的特征是最小的基数 κ，使得 X 中的每个点都有一个大小至多为 κ的局部基；而拓扑空间的可加性是唯一的基数 κ，使得该拓扑是 κ-可加的，但不是 κ^+-可加的[1]。形如 ${}^{\gamma}A$的空间的每个非离散子空间，其特征和可加性都等于$\mathrm{cof}(\gamma)$。由于这些概念在同胚下保持不变，因此，如果 X 是一个非离散空间，既嵌入 ${}^{\gamma}A$又嵌入 ${}^{\delta}B$，那么$\mathrm{cof}(\gamma) = \mathrm{cof}(\delta)$，且这个数与 X的特征和可加性相同。此外，由于权小于 κ 的每个 κ-可加空间都是离散的，对于权为 λ且可加性为 κ的每个非离散空间 X，我们也有 $\kappa \leq \lambda$。

另一方面，如果 $X \subseteq {}^{\gamma}A$是离散的，那么 X 嵌入到 ${}^{\omega}\lambda$中，其中 λ是 X的权。

[1]等价地，最小的基数 κ 是指拓扑不对大小为 κ 的交集对交封闭的情况。

综合这些观察，我们得到如下事实的推论 2.4。

推论 2.5。 设 γ 是一个序数， A 是一个集合，且 $X \subseteq {}^{\gamma}A$。设 λ 是 X的权。那么，存在一个正则基数 $\kappa \leq \lambda$ ，使得 X 与 ${}^{\kappa}\lambda$的一个子空间同胚。

特别地，不失一般性，我们可以将讨论限制在权为 λ的子空间$X \subseteq {}^{\kappa}\lambda$上，其中 κ 是正则的，且 $\kappa \leq \lambda$。为求完整，并遵循广义描述集合论中的惯例，我们也允许权至多为 λ的空间，尽管在权严格小于 λ的空间上考虑 λ^{+}-测度时，本文的大多数结果都会变得平凡。

在本文余下部分，我们用符号 λ 和 κ 表示无限基数，其中 κ 是正则的，且 $\kappa \leq \lambda$。

我们用(X, τ)（或简写为 X）表示 ${}^{\kappa}\lambda$ 的一个权至多为 λ 的子空间，并始终赋予其有界拓扑。

在本小节余下部分，我们将比较本文的设定与文献中采用的设定，特别关注广义贝尔空间和康托空间${}^{\kappa}\lambda$与 ${}^{\lambda}2$，以及基数假设 $2^{<\lambda} = \lambda$ 和$\lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \lambda$的作用与必要性，最重要的是， $\kappa = \mathrm{cof}(\lambda)$。

经典的广义描述集合论在基数 λ下，主要是在假设 $\lambda^{<\lambda} = \lambda$的前提下研究空间 ${}^{\lambda}\lambda$和 ${}^{\lambda}2$；该条件等价于 $2^{<\lambda} = \lambda$ 且 λ 为正则。较新的研究旨在将该理论推广到空间 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$和 ${}^{\lambda}2$，其中基数 λ 可以是任意基数（可能是奇异基数），但需满足 $2^{<\lambda} = \lambda$。该条件蕴含较弱的条件 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \lambda$。由于空间 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$的权为 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)}$，而空间 ${}^{\lambda}2$的权为 $2^{<\lambda}$，这一设定也确保两个空间的权均为 λ。

在这一框架中，同一个基数 λ 同时承担着几种不同的角色。首先，它决定了所考虑空间的“维度”，即权。其次，它确定了相关概念应具有的恰当“规模”，例如 λ^{+}-Borel 集、 λ- 紧致性、 λ^{+}- 测度及相关概念。最后，它还与其共尾性一起，用于定义空间 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$和 ${}^{\lambda}2$本身的基集合与指数。

正是这种角色的合一，使得采用额外的基数假设成为必要。正如在测度的背景下，命题 2.3 之后所论证的那样，对于形如 $X \subseteq {}^{\gamma}A$的拓扑空间（尤其是对于 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$），恰当的概念应当是相对于其权定义的。然而，这个基数先验上独立于定义 X时出现的基数；强迫它们相等，就相当于假设诸如 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \lambda$ 和$2^{<\lambda} = \lambda$ 这样的基数等式。

我们采用的设定则严格更为一般，使我们无需基数假设即可开展研究。首先，当 $\kappa =\mathrm{cof}(\lambda)$ 且 $2^{<\lambda} = \lambda$ 时，我们便回到了上述通常设定，因为在这种情况下，空间 ${}^{\kappa}\lambda$ 本身（及其所有子空间）的权至多为 λ，且 ${}^{\lambda}2$ 与 ${}^{\kappa}\lambda$ 的一个子空间同胚。然而，我们既不要求 $\kappa = \mathrm{cof}(\lambda)$，也不要求 $2^{<\lambda} = \lambda$ 或 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \lambda$。因此，即使基数假设 $2^{<\lambda} = \lambda$ 和 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \lambda$ 均不成立，我们仍可研究空间 ${}^{\lambda}2$ 和 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$ 及其子空间；这种情形通常不属于广义描述集合论的研究范围。

事实上，${}^{\mathrm{cof}(\kappa)}\lambda$总是包含权至多为 λ的子空间，无论 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\kappa)} = \lambda$ 是否成立，而且这类空间未必是离散的。一个例子是 ${}^{\lambda}2$中所述的 X_0 的子空间 [AMRS23，公式 2。3]（或者类似地，${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$中由除有限多个坐标外均为常数的序列组成的子空间）。另一个更有意思的例子是 $[T]$ 这一 λ-Kurepa 树T 的体（当这样的树存在时），因为 λ-Kurepa 树$[T]$ 的定义保证其权至多为 λ，无论 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\kappa)} = \lambda$ 是否成立。我们框架中建立的结果适用于所有这些空间。

此外，我们的设定也使我们能够分析空间 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$本身，即使相关的基数假设 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \lambda$ 不成立也是如此。这可直接由事实 2.4推出：该空间总能约化为某个${}^{\mathrm{cof}(\kappa)}\lambda'$的子空间，其中 $\lambda' = \lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)}$ 是 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$的权。请注意，这个新的 λ' 不一定满足 $\kappa = \mathrm{cof}(\lambda')$，因此我们至关重要地利用了基数 κ 可以不同于 $\mathrm{cof}(\lambda$这一事实。

实际上，情况甚至更加简单优雅。一旦允许 $\kappa \neq \mathrm{cof}(\lambda)$，在同胚意义下，空间 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$，以及更一般地，任何形如 ${}^{\kappa}\lambda$ 的空间，都可以视为形如 ${}^{\kappa}\lambda'$ 的空间，而该空间满足相关的基数假设 $(\lambda')^{<\kappa} = \lambda'$，如下述结果所示。

命题 2.6. 设 $\lambda' = \lambda^{<\kappa}$。那么，$(\lambda')^{<\kappa} = \lambda'$，且空间 ${}^{\kappa}\lambda$同胚于 ${}^{\kappa}\lambda'$。

证明。 设 $\lambda' = \sup\{\lambda^\gamma \mid \gamma < \kappa \text{ 基数}\}$。若对于某个 $\gamma < \kappa$ 有 $\lambda' = \lambda^\gamma$，则

$$(\lambda')^{<\kappa} = \sup\{(\lambda^\gamma)^\delta \mid \delta < \kappa \text{ cardinal}\} = \sup\{\lambda^\delta \mid \delta < \kappa \text{ cardinal}\} = \lambda'$$

如所需。反之，假设 $\lambda^\gamma < \lambda'$ 对于每个 $\gamma < \kappa$ 都成立。那么族$\{\lambda^\gamma \mid \gamma < \kappa \text{ 基数}\}$ 在 λ'中共尾，因此特别地，$\mathrm{cof}(\lambda') = \kappa$ 且 $\delta^\gamma < \lambda'$ 对于每个 $\gamma < \kappa$，并且 $\delta < \lambda'$。于是，根据 [Jec03，定理 5，20] 我们有 $(\lambda')^\gamma = \lambda'$ 对于每个 $\gamma < \kappa$，如所需。

为证明 ${}^{\kappa}\lambda$ 与 ${}^{\kappa}\lambda'$ 同胚，设 $\kappa \leq \lambda$。

命题 2.6.1. 对于每个 $s \in {}^{<\kappa}\lambda$，都存在 $\mathbf{N}_s({}^{\kappa}\lambda)$ 的一个划分 $\mathcal{P}_s \subseteq \mathcal{B}$，其大小为 λ'，且由基本既开又闭集构成。

证明。 若对某个 $\gamma < \kappa$，有 $\lambda' = \lambda^\gamma$，则

$$\mathcal{P}_s = \{\mathbf{N}_{s^\frown t} \mid t \in {}^{\gamma}\lambda\}$$

便如所需。否则，假设族 $\{\lambda^\gamma \mid \gamma < \kappa \text{ 基数}\}$ 在 λ' 中共尾，并令 $\{\gamma_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ 为小于 κ 的基数的一个枚举。对于每个$\alpha < \kappa$，令 $\delta_\alpha = \lambda^{\gamma_\alpha}$。定义

$$\mathcal{P}_s = \{\mathbf{N}_{s^\frown\langle\alpha\rangle} \mid \kappa \leq \alpha < \lambda\} \cup \{\mathbf{N}_{s^\frown\langle\alpha\rangle^\frown t} \mid t \in {}^{\gamma_\alpha}\lambda, \alpha < \kappa\}.$$

由于 $\kappa \leq \lambda$，族 $\mathcal{P}_s$ 的大小为 $|\mathcal{P}_s| = \sup_{\alpha<\kappa} \delta_\alpha = \lambda'$，且按构造，它是由基本既开又闭集构成的$\mathbf{N}_s({}^{\kappa}\lambda)$的覆盖，正如所需。□

然后，递归地应用断言2.6.1，我们可以得到一个族 $\{\mathcal{P}_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$，它是 ${}^{\kappa}\lambda$的由基本既开又闭集构成的划分，并满足

- $\hat{}\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}_\alpha$ 是 ${}^{\kappa}\lambda$的一个基，

对每个 $\alpha < \beta < \kappa$，• $\mathcal{P}_\beta$ 细化 $\mathcal{P}_\alpha$，并且

- $\{P' \in \mathcal{P}_{\alpha+1} \mid P \subseteq P'\}$对于每个 $\alpha < \kappa$ 和 $P \in \mathcal{P}_\alpha$，其大小为 λ'。

那么，显然 $(\hat{\mathcal{B}}, \supseteq)$ 与 ${}^{<\kappa}\lambda'$作为一棵树同构，而这一同构在 ${}^{\kappa}\lambda$和 ${}^{\kappa}\lambda'$之间诱导出一个拓扑空间的同胚（另见 [Ago22，事实 2.1。5]或 [HN74，引理 2。1]），正如所需。□

请注意，命题 2.6 依赖于我们的隐含假设 $\kappa \leq \lambda$。如果 $\lambda = \omega$ and$\kappa > \omega$ 是弱紧的（参见 [Jec03，定义 9.8]），那么 $2^{<\kappa} = \kappa > \lambda$；然而，空间 ${}^{\kappa}\omega$（它与 ${}^{\kappa}2$ 同胚）与任何 ${}^{\kappa}\lambda'$ 都不同胚，因为前者是 κ-Lindel¨of，而后者不是（例如参见 [Nyi99]）。另一方面，如果 κ 不是弱紧的，那么对于每个满足 $2 \leq \lambda \leq \kappa$ 的 λ， ${}^{\kappa}\lambda$ 都与 ${}^{\kappa}\kappa$ 同胚；因此在这种情况下，即使没有假设 $\kappa \leq \lambda$，命题 2.6 仍然成立。

我们也可以得到命题 2.6 关于空间 ${}^{\lambda}2$的类似结果。首先，众所周知，尽管 ${}^{\lambda}2$ 本身可能不是 ${}^{\kappa}\lambda$的子空间，但在假设 $2^{<\lambda} = \lambda$ 下，它总是与 ${}^{\kappa}\lambda$的一个子空间同胚（例如参见 [Ago22，命题 2.2。54]）。

事实 2.7. 假设 $2^{<\lambda} = \lambda$。那么， ${}^{\lambda}2$同胚于${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$的一个闭子空间。

根据命题 2.6，无论假设 $2^{<\lambda} = \lambda$如何，都可以得到类似的结果。

命题 2.8. 设 $\lambda' = 2^{<\lambda}$。那么，$(\lambda')^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \lambda'$，且空间 ${}^{\lambda}2$同胚于 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda'$ 的一个闭子空间。

证明。 设 $\lambda' = \sup\{2^{\gamma} \mid \gamma < \lambda \text{ 基数}\}$。若对某个 $\gamma < \lambda$ 有 $\lambda' = 2^{\gamma}$，则

$$\lambda' \leq (\lambda')^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \sup\{(2^{\gamma})^{\delta} \mid \delta < \mathrm{cof}(\lambda) \text{ 基数}\} \leq \sup\{2^{\delta} \mid \delta < \lambda \text{ 基数}\} = \lambda'$$

如所求。反之，假设 $2^{\gamma} < \lambda'$ 对每个 $\gamma < \lambda$都成立。那么族 $\{2^{\gamma} \mid \gamma < \lambda\text{基数}\}$ 在 λ' 中共尾，因此特别有 $\mathrm{cof}(\lambda') = \mathrm{cof}(\lambda)$，且 $\delta^{\gamma} < \lambda'$ 对每个 $\gamma < \mathrm{cof}(\lambda)$ 都成立，且 $\delta < \lambda'$。于是，根据 [Jec03，定理 5。20] 我们有 $(\lambda')^{\gamma} = \lambda'$对每个 $\gamma < \mathrm{cof}(\lambda)$ 都成立。

证明的其余部分基本沿用通常的论证，即将康托空间嵌入 Baire 空间。令 $\kappa = \mathrm{cof}(\lambda)$，并令 $(\lambda_i)_{i<\kappa}$ 为 λ中序数的一个共尾序列。那么，族 $\hat{\mathcal{B}} = \bigcup_{i<\kappa}\{N_s({}^{\lambda}2) \mid s \in {}^{\lambda_i}2\}$ 是 ${}^{\lambda}2$ 的一个基。由于对每个 $i < \kappa$ 都有 $|\{N_s({}^{\lambda}2) \mid s \in {}^{\lambda_i}2\}| \leq \lambda'$，因此存在一棵在初始段下闭的树$T \subseteq {}^{<\kappa}\lambda'$，使得 $(\hat{\mathcal{B}}, \supseteq)$ 与T同构（作为树）。此同构在 ${}^{\lambda}2$和 $[T] \subseteq {}^{\kappa}\lambda'$之间诱导出一个拓扑空间的同胚（例如参见 [Ago22, 事实 2.1.5] 或 [HN74, 引理 2.1]），如所需。□

这将使我们能够在第 8节中将我们的研究扩展到广义康托空间。

2.2. **全序幺半群**。 现在我们回顾全序幺半群的一些基本概念和定义。这里主要参考文献是 [Fuc63，第 X 章]。

一个**全序幺半群**是一个结构 $\mathbb{S} = (S, 0, +, \leq)$，满足

(1) $+$ 是 $\mathbb{S}$ 上的二元结合律运算（即，$(S, +)$ 是一个半群）；(2) 0 是运算 $+$ 的单位元（即，$(S, +, 0)$ 是一个幺半群）；(3) $(S, \leq)$ 是一个全序集；(4) 序关系 $\leq$ 是（弱）平移不变的（即，对于任意 $a, b, c, d \in \mathbb{S}$，如果 $a \leq b$ 且 $c \leq d$，那么 $a + c \leq b + d$）。

一个**全序群** $\mathbb{G} = (G, \mathbf{0}, +, \leq)$ 是一个全序幺半群，并且 $(G, +)$ 是一个群。

正锥 $\mathbb{S}^+$ 定义为 $\mathbb{S}^+ = \{s \in \mathbb{S} \mid 0 < s\}$，而 $\mathbb{S}$的**度**记作 $\mathbf{Deg}(\mathbb{S})$，是正锥 $\mathbb{S}^+$ 相对于 $\leq$的共初性，也就是说，是满足以下条件的集合 $A \subseteq \mathbb{S}^+$ 的最小基数：对于每个 $\varepsilon \in \mathbb{S}^+$，都存在某个 $a \in A$使得 $a \leq \varepsilon$。根据定义，$\mathbf{Deg}(\mathbb{S})$ 始终是一个正则基数。若全序幺半群 $\mathbb{S}$ 满足 $\mathbb{S}^+ \neq \emptyset$ 且 $\mathbb{S} = \mathbb{S}^+ \cup \{0\}$，即 $\mathbf{0}$ 是序的最小元，且 $\mathbb{S}$ 不是平凡幺半群 $\{0\}$，则称其为**正序**。注意，对于每个全序幺半群 $\mathbb{S}$，$\mathbb{S}^+ \cup \{0\}$ 都是一个正全序幺半群（或平凡幺半群 $\{0\}$）。由于本文只研究 $\mathbb{S}^+ \cup \{0\}$，我们可以将注意力限制在正序幺半群上。

正全序幺半群 $\mathbb{S}$ 的子集 $A \subseteq \mathbb{S}$ 称为 **阿基米德**，如果对于每个 $a, b \in A \setminus \{0\}$，只要 $a < b$，就存在 $n \in \omega$ 使得 $n \cdot a \geq b$，其中 $n \cdot a = a + ... + a$ 表示由 n 个等于 a 的元素相加所得的和。我们称 $\mathbb{S}$ 是阿基米德的，如果 $A = \mathbb{S}$ 是阿基米德的。对于 $a, b \in \mathbb{S}$ 且 $a < b$，当对每个 $n \in \omega$，有 $n \cdot a < b$ 时，我们记作 $a \ll b$。由此，（正全序）幺半群是阿基米德的，当且仅当 $a \ll b$ 蕴含 $a = 0$。

定义 2.9. 若正全序幺半群 $\mathbb{S}$ 存在 $a \in \mathbb{S}^+$，使得开区间 $(\mathbf{0}, a)$ 是阿基米德的，则称其为 **初始阿基米德** 。

定义 2.10. 设 $\mathbb{S} = (S, 0, +, \leq)$ 是一个正全序幺半群。设$\bar{a} = \langle a_i \mid i < \gamma \rangle$ 是 $\mathbb{S}$中的一个元素序列。我们称 $\bar{a}$ 为:

(1) **递减的，** 若 $a_i \leq a_j$ 对所有 $j < i < \gamma$，**(2) 严格递减的，** 若 $a_i < a_j$ 对所有 $j < i < \gamma$，**(3) 强递减的，** 若 $a_i + a_i < a_j$ 对所有 $j < i < \gamma$，**(4) 处处非阿基米德的（递减的），** 若 $a_i \ll a_j$ 对所有 $j < i < \gamma$。

注记 2.11. 注意，对于正全序幺半群 $\mathbb{S}$中的序列 $\bar{a}$，我们有 (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)。

下面的引理表明，每个幺半群要么是病态的，要么是初始阿基米德且具有可数度，要么以一种强方式非阿基米德。

引理 2.12. 设 $\mathbb{S}$ 是一个正全序幺半群。那么，以下情况恰有一种成立：

(1) 存在 $c \in \mathbb{S}^+$，使得对于每个 $b \in \mathbb{S}^+$，都有 $b + b \geq c$。(2) $\mathrm{Deg}(\mathbb{S}) = \omega$，且 $\mathbb{S}^+$ 包含一个可数的强递减阿基米德序列 $\bar{a} = \langle a_i \mid i < \omega \rangle$，它在 $\mathbb{S}^+$ 中共初。(3) $\mathrm{Deg}(\mathbb{S}) = \delta \geq \omega$，且 $\mathbb{S}^+$ 包含一个处处非阿基米德递减序列$\bar{a} = \langle a_i \mid i < \delta \rangle$，它在 $\mathbb{S}^+$ 中共初。

证明. 假设第一种情况不成立。那么，对于每个 $c \in \mathbb{S}^+$，都存在$b \in \mathbb{S}^+$ 使得 $b + b < c$。这意味着 $\delta = \mathbf{Deg}(\mathbb{S}) \geq \omega$ 是无限的（且正则）。因此，设 $\bar{a} = \langle a_i \mid i < \delta \rangle$ 在 $\mathbb{S}^+$ 中共初，且 $\delta = \mathbf{Deg}(\mathbb{S})$。

我们递归地定义 $\bar{a}$ 的一个强递减子序列。令 $\alpha_0 = 0$。现在考虑 $i < \delta$，并假设我们已经为所有 $j < i$定义了 $\alpha_j \geq j$。令 $\gamma = \sup\{\alpha_j \mid j < i\}$。根据 δ 的正则性，我们有 $i \leq \gamma < \delta$。由于$\gamma < \delta = \mathbf{Deg}(\mathbb{S})$，存在 $c \in \mathbb{S}^+$，使得对于每个 $j \leq \gamma$，都有 $c \leq a_j$。因此，根据假设，我们可以找到某个 $b \in \mathbb{S}^+$，使得 $b + b < c$。现在，如果它存在，令 b_γ 满足 $b_\gamma \ll c$。否则，令 $b_\gamma = b$。由于 $\bar{a}$ 在 $\mathbb{S}^+$ 中共初，存在一个

$\alpha_i < \delta$，使得 $a_{\alpha_i} \leq b_\gamma$，因此对于每个 $j \leq \gamma$，都有 $a_{\alpha_i} + a_{\alpha_i} \leq b_\gamma + b_\gamma < a_j$。这也意味着 $\alpha_i > \gamma$。由此可知，以这种方式得到的序列 $\bar{a}' = \langle a_{\alpha_i} \mid i < \delta \rangle$ 是强递减且共初的。

现在先假设，对于每个 $c \in \mathbb{S}^+$，都存在 $b \in \mathbb{S}^+$ 使得 $b \ll c$。根据构造，这意味着 $\bar{a}' = \langle a_{\alpha_i} \mid i < \delta \rangle$ 处处非阿基米德，正如所需。

反过来，假设存在 $c \in \mathbb{S}^+$，使得对于所有 $b \in \mathbb{S}^+$，我们都有 $n \cdot b \geq c$ 对某个 $n \in \omega$ 成立。这意味着整个区间 $[0, c]$ 都是阿基米德的。注意，如果 $\bar{a}' = \langle a_{\alpha_i} \mid i < \delta \rangle$ 是一个基数为不可数基数 δ、收敛到 0 的强递减序列，那么 $\bar{a}' = \langle a_{\alpha_i} \mid i < \delta,\ i$ 极限序数$\rangle$ 是一个长度相同且收敛到 0 的处处非阿基米德序列。因此，为了使 $[0, c]$ 是阿基米德的，我们必须有 $\mathrm{Deg}(\mathbb{S}) = \delta = \omega$。令 $j < \delta$ 满足 $a_{\alpha_j} < c$。那么，正如所需，我们有 $\bar{a}' = \langle a_{\alpha_{j+i}} \mid i < \omega \rangle$ 是阿基米德的、强递减的，并且强收敛到 0。□

注意，无限可数度的幺半群 $\mathrm{Deg}(\mathbb{S}) = \omega$ 可以属于引理 2.12中描述的三种类型中的任意一种。在这种情况下，使这三种情况互斥的唯一因素是运算 $+$的性质。

沿用 [Rei79], 的记号，我们将非病态幺半群称为 0-连续幺半群，即满足引理 (2) 或 (3) 的幺半群2.12。这个名称基于这样一个事实：在 0-连续幺半群 $(\mathbb{S},\ 0,\ +,\ \leq)$ 中，运算 $+$ 在 0 处连续：若两个等长序列在序拓扑下都收敛于 0，则它们的逐点和也收敛于 0。

定义 2.13。我们称全序幺半群 $\mathbb{S}$ 为无限度，且 $\mathbb{S}^+$ 包含一个强递减的共初序列，当且仅当它是 **0-连续**的。

由引理2.12，我们还可以得到以下有趣的推论。

推论 2.14。 每个0-连续的正全序幺半群，其度 -
不可数，都不是阿基米德的（甚至不是初始阿基米德的）。

注意，（稠密有序的）群总是 0-连续的；若一个幺半群包含一个稠密的 0-连续子幺半群，那么它本身也是 0-连续的。

3. Infinite operations on monoids

为了定义 λ^+-测度，我们需要一种结构，使得可以计算 λ个元素的和：理想情况下，这是一个具有至少 λ元运算的幺半群。无穷元运算及其性质已得到广泛研究（主要针对群和域的情形），研究者也特别关注如何将其用于推广分析学和描述集合论（例如，参见 [Won23]）。正如引言中所预期的，我们在此采用一种仅要求极小公理的无穷和定义。

回顾一下，对于每个集合 A，由 A中的元素构成的序列是一个从序数 γ 到 A 的函数。我们用 ${}^{<\mathsf{On}}A = \bigcup_{\gamma \in \mathsf{On}} {}^{\gamma}A$表示任意长度的、由 A 中的元素构成的序列类。给定一个序列 $s = (s_\alpha)_{\alpha < \gamma} \in {}^{<\mathsf{On}}A$，若存在集合 $I = \{\alpha_i \mid i < \delta\} \subseteq \gamma$ 使得对所有 $i < j < \delta$ 都有 $\alpha_i < \alpha_j$ 且 $t = \langle s_{\alpha_i} \mid i < \delta \rangle$，则称序列 t 是 s 的**子序列**。给定 $B \subseteq A$，用 $s \restriction B$ 表示从 s中移除所有不属于 B 的元素后得到的 s的子序列，即 $s \restriction B = (s_{\alpha_i})_{i < \delta}$，其中$\{\alpha_i \mid i < \delta\}$ 是 $\{\alpha < \gamma \mid s_\alpha \in B\}$中各序数的递增枚举。$s$的**重排**或**置换**是指对某个双射 $\pi : \delta \to \gamma$，形如$(s_{\pi(j)})_{j < \delta}$ 的序列。

我们还用 Conc 表示将序列的二元连接运算 $^\frown$ 扩展到 $({}^{<\mathsf{On}}A)^{<\mathsf{On}}$ 中的所有序列的序列。形式上，我们定义 $\mathrm{Conc}(\emptyset) = \emptyset$。接下来，按长度递归地进行定义：给定由序列 $s^\alpha = (a_i^\alpha)_{i<\mathrm{lh}(s^\alpha)} \in {}^{<\mathsf{On}}A$构成的序列 $\bar{s} = \langle s^\alpha \mid \alpha < \beta\rangle$，若 β 是极限序数，则定义

$$\mathrm{Conc}(\bar{s}) = \mathrm{Conc}_{\alpha<\beta}\, s^\alpha = \bigcup_{\varepsilon<\beta} \mathrm{Conc}_{\alpha<\varepsilon}\, s^\alpha = \bigcup_{\varepsilon<\beta} \mathrm{Conc}(\bar{s}\restriction\varepsilon),$$

当 $\beta = \gamma + 1$ 时，定义

$$\mathrm{Conc}(\bar{s}) = \mathrm{Conc}_{\alpha<\beta}\, s^\alpha = (\mathrm{Conc}_{\alpha<\gamma}\, s^\alpha)^\frown s^\gamma = \mathrm{Conc}(\bar{s}\restriction\gamma)^\frown s^\gamma.$$

定义 3.1. 设 $\mathbb{S} = (S,\ 0,\ +,\ \trianglelefteq)$ 是一个正全序幺半群。无穷元运算 **无穷元运算** 或 **无穷和** 是一个偏函数 $\mathrm{Sum}:\ {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S} \to \mathbb{S}$，满足：

(S1) Sum 与 **相容** $+$，即，
- $\mathrm{Sum}(\emptyset) = 0$,
- $\mathrm{Sum}(s) = s_0 + \ldots + s_n$ 对于每个非空有限 $s = (s_i)_{i\le n} \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})$,

(S2) Sum 是**连续**的，即，对于所有满足 $\mathrm{lh}(s)$ 为极限序数的 $s \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})$，如果对于共尾多个 $\alpha < \mathrm{lh}(s)$ 都有$s\restriction\alpha \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})$，那么

$$\mathrm{Sum}(s) = \sup\{\mathrm{Sum}(s\restriction\alpha) \mid \alpha < \mathrm{lh}(s), s\restriction\alpha \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})\}.$$

此外，如果还满足以下条件，我们称 Sum 是**自然**的

(S3) $\mathrm{dom}(\mathrm{Sum})$ 是**向下封闭**的，即，对于所有 $s \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})$ 和 $\alpha < \mathrm{lh}(s)$，都有

$$s\restriction\alpha \in \mathrm{dom}(s),$$

(S4) Sum 满足**结合律**，即，对于每个满足 $\mathrm{Conc}(\bar{s}) \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})$ 的 $\bar{s} = (s^\alpha)_{\alpha<\gamma} \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})^{<\mathsf{On}}$，都有
- $\langle \mathrm{Sum}(s^\alpha) \mid \alpha < \gamma\rangle \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})$,
- $\mathrm{Sum}(\mathrm{Conc}(\bar{s})) = \mathrm{Sum}(\langle \mathrm{Sum}(s^\alpha) \mid \alpha < \gamma\rangle)$,

(S5) Sum 是**交换的**，即，对于每个 $s \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})$ 以及任何 $s'$of s 的重排，我们都有
- $s' \in \mathrm{dom}(\mathrm{Sum})$,
- $\mathrm{Sum}(s) = \mathrm{Sum}(s')$.

在定义1.2中，我们使用任意形式的无穷和定义了测度。本节和下一节的目标之一是证明，即使测度是用非自然的和定义的，这个和在测度有定义的定义域子集上也必定是自然的（命题4.1）。

每个（正全序）幺半群都自然地配备了一个无穷元运算。

定义 3.2. 设 $\mathbb{S} = (S,0,+,\trianglelefteq)$ 是一个正全序幺半群。偏函数 $\sum:\ {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 定义为

$$\sum(s) = \sup\{s_{\alpha_0} + \ldots + s_{\alpha_k} \mid \alpha_0 < \ldots < \alpha_k < \gamma\}$$

对于每个序数 γ 以及每个序列 $s = \langle s_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle \in {}^\gamma\mathbb{S}$，只要上确界 $\sup\{s_{\alpha_0} + \ldots + s_{\alpha_k} \mid \alpha_0 < \ldots < \alpha_k < \gamma\}$ 在 $\mathbb{S}$中存在。

回顾一下，如果每个集合都有**上确界和下确界**，则称线性序为戴德金完备。每个线性序 $(\mathbb{S}, \preceq)$ 都有一个戴德金完备化（在同构意义下唯一）$(\hat{\mathbb{S}}, \preceq)$，其中该线性序是稠密的（例如，参见 [Mac37，Fuc63，FM08]）。

给定 A，$B \subseteq \mathbb{S}$，若对每个 $c \in \mathbb{S}$，只要 $b \leq c$ 对每个 $b \in B$，就有 $a \leq c$ 对每个 $a \in A$，则记 $\sup(A) \leq \sup(B)$（即使 $\sup(A)$ 或 $\sup(B)$ 未定义）。容易验证，当 $\sup(A)$ 和 $\sup(B)$ 均有定义时，这与通常的 $\leq$关系 $\mathbb{S}$一致。

我们还记 $\sup(A) = \sup(B)$，条件是 $\sup(A) \leq \sup(B)$ 且 $\sup(A) \geq \sup(B)$；其他类似表达式也同理，例如 $\sup(A) \leq b$ 对 $b \in \mathbb{S}$（使用 $b = \sup(\{b\})$），等等。含义相同地，给定 s，$t \in {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S}$我们记 $\sum(s) \leq \sum(t)$，$\sum(s) = \sum(t)$，$\sum(s) \leq b$ 对某个 $b \in \mathbb{S}$，等等，即使 $\sum(s)$ 或 $\sum(t)$ 未定义。

注记 3.3。这与比较戴德金完备化中集合的上确界和 $\sum$ 序列的上确界[2]相同。

回顾一下，幺半群 $\mathbb{S}$ 是**下半连续的**，如果对于每个 A，$B \subseteq \mathbb{S}$ 满足 $a =$上确界 A 和 $b =$上确界 B存在的情形，我们有 $a + b =$上确界$\{x + y \mid x \in A, y \in B\}$([Fuc63，第 XI 章。7])。

命题 3.4。对于每个正全序幺半群 $\mathbb{S} = (S, 0, +, \leq)$，运算 $\sum$ 是一个无穷和，并且还满足：

(a) 0 是 $\sum$的单位元，即 $\sum(s) = \sum(s \restriction (\mathbb{S} \setminus \{0\}))$ 对每个$s \in {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S}$都成立。特别地，$s \in \mathrm{dom}(\sum)$ 当且仅当 $s \restriction (\mathbb{S} \setminus \{0\}) \in \mathrm{dom}(\sum)$。*(b)* $\sum$是无穷平移不变的，即

$$\sum(s) \leq \sum(t)$$

对每个 $s = (s_i)_{i<\gamma}, t = (t_i)_{i<\delta} \in {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S}$，使得 $\gamma \leq \delta$ 且对每个 $i < \gamma$都有 $s_i \leq t_i$。*(c)* 若 $\mathbb{S}$ 的序是戴德金完备的，则 $\sum$ 是全定义的，即它对任意长度的每个序列都有定义。特别地，在这种情况下，$\sum$ 满足公理 *(S3)*。*(d)* 若 $\mathbb{S}$ 的序是戴德金完备的，且 $\mathbb{S}$ 的运算 $+$ 是下半连续的，则 $\sum$ 满足公理 *(S4)*。*(e)* $\mathbb{S}$ 的运算 $+$ 是交换的，当且仅当 $\sum$ 满足公理 *(S5)*。

证明。首先，我们来证明 $\sum$ 是一个无穷元运算。显然，$\sum$满足公理 (S1)。

为证明 $\sum$ 满足公理 (S2)，假设 $s \in \mathrm{dom}(\sum)$ 的长度是极限长度，且存在一个在 $\mathrm{lh}(s)$ 中共尾的序列 $\langle \beta_i \mid i < \gamma \rangle$，使得对所有 $i < \gamma$ 都有 $s \restriction \beta_i \in \mathrm{dom}(\sum)$。对每个 $\alpha < \gamma$，令 $i(\alpha)$ 为满足 $\alpha < \beta_{i(\alpha)}$ 的极小值。那么，对每个 $\alpha_0 < \ldots < \alpha_n < \gamma$，根据 $\sum$ 的定义，我们有 $s_{\alpha_0} + \ldots + s_{\alpha_n} \leq \sum(s \restriction \beta_{i(\alpha_n)}) \leq \sum(s)$。这表明 $\sup\{\sum(s \restriction \beta_i) \mid i < \gamma\}$ 存在，并且

$$\sum(s) = \sup\{s_{\alpha_0} + \ldots + s_{\alpha_n} \mid n < \omega\} \leq \sup\{\sum(s \restriction \beta_i) \mid i < \gamma\} \leq \sum(s),$$

并且公理 (S2)成立，正如所需。

[2]戴德金完备化（$\hat{\mathbb{S}}$，$\leq$）是一个全序，但这足以在 $\mathbb{S}$的所有序列上定义 $\sum$。我们不需要在$\hat{\mathbb{S}}$的序列上定义 $\sum$

根据定义，$\sum$ 具有无穷平移不变性，且 0 是单位元。因此，陈述 (a) 和 (b) 成立。显然，如果 $\mathbb{S}$ 的序是戴德金完备的，那么 $\sum$ 就是全序；并且，$+$ 在$\mathbb{S}$ 上的运算是交换的，当且仅当 $\sum$ 满足公理 (S5)。因此，陈述 (c) 和 (e) 成立。

最后，为了证明命题 (d) (并且 $\sum$ 满足公理 (S4))，假设 $+$ 是下半连续的，且 $\leq$ 是戴德金完备的。于是，根据前一点，$\sum$ 是全的。首先考虑 $s,\ t \in {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S}$。于是，

$$\sum s + \sum t =$$
$$= \text{上确界}\{s_{i_0} + \ldots + s_{i_k} \mid i_0 < \ldots < i_k < \mathsf{lh}(s)\} + \text{上确界}\{t_{j_0} + \ldots + t_{j_k} \mid j_0 < \ldots < j_k < \mathsf{lh}(t)\} =$$
$$\text{上确界}\{s_{i_0} + \ldots + s_{i_k} + t_{j_0} + \ldots + t_{j_k} \mid i_0 < \ldots < i_k < \mathsf{lh}(s)\ j_0 < \ldots < j_k < \mathsf{lh}(t)\} =$$
$$= \sum(s^\frown t)$$

根据 $\sum$ 和下半连续性的定义。通过归纳法，很容易看出，对于所有有限的 $\bar{s} = (s^i)_{i\leq k} \in \mathsf{dom}(\mathsf{Sum})^{<\omega}$，都有$\sum(s^0 {}^\frown \ldots {}^\frown s^k) = \sum s^0 + \ldots + \sum s^k$。

现在固定 $\beta \geq \omega$。令 $\bar{s} = \langle s^\alpha : \alpha < \beta\rangle$ 满足：对于每个 $\alpha < \beta$，都有 $s^\alpha \in {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S}$。注意到

$$\sum(\mathrm{Conc}(\bar{s})) \leq \sum(\langle\sum(s^\alpha) : \alpha < \beta\rangle),$$

根据 $\sum$的定义。另一方面，我们有

$$\sum(\langle\sum(s^\alpha) : \alpha < \beta\rangle) = \sup\{\sum(s^{\alpha_0}) + \ldots + \sum(s^{\alpha_n}) : \alpha_0 < \ldots < \alpha_n < \beta\},$$

根据前面对有限序列的论证，我们得到

$$\sum(s^{\alpha_0}) + \ldots + \sum(s^{\alpha_n}) = \sum(s^{\alpha_0} {}^\frown \ldots {}^\frown s^{\alpha_n}) \leq \sum(\mathrm{Conc}(\bar{s})).$$

综上可得，$\sum(\mathrm{Conc}(\bar{s})) = \sum(\langle\sum(s^\alpha) : \alpha < \beta\rangle)$，证毕。 □

推论 3.5. 对于任意戴德金完备、下半连续、交换正全序幺半群 $\mathbb{S} = (S, 0, +, \leq)$，运算 $\sum$ 是自然无穷和。

在命题 3.10中，我们证明了存在任意指定度的戴德金完备、下半连续、交换正全序幺半群。特别地，这表明存在任意度且具有自然无穷和的正全序幺半群。

下面的命题表明，所有自然无穷和都来自对 $\sum$ 的限制。

命题 3.6。 设 $\mathbb{S} = (S, 0, +, \leq)$ 是一个带有自然无穷和 $\mathsf{Sum} : {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 的正全序幺半群。那么，我们有 $\mathrm{dom}(\mathsf{Sum}) \subseteq \mathrm{dom}(\sum)$，且对每个 $s \in \mathrm{dom}(\mathsf{Sum})$，都有 $\mathsf{Sum}(s) = \sum(s)$。

证明。 假设 $\mathsf{Sum} : {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 是一个自然无穷和。固定 $s = (s_\alpha)_{\alpha<\gamma} \in \mathsf{dom}(\mathsf{Sum})$。对 γ 使用归纳法，现在证明 $s \in \mathsf{dom}(\sum)$ 且

$$\mathsf{Sum}(s) = \sup\{s_{\alpha_0} + \ldots + s_{\alpha_k} \mid \alpha_0 < \ldots < \alpha_k < \gamma\} = \sum(s),$$

正如所需。

显然，当 γ 为有限时，由公理 (S1) 可知此结论成立。因此，设 $\gamma \geq \omega$。

设 $\alpha_0 < \ldots < \alpha_k < \gamma$，并设 $t = (s_{\alpha_i})_{i<k}$。由公理 (S5)，存在一个 $s' \in \mathrm{dom}(\mathsf{Sum})$ 的 s 极限长度重排，使得 $t = s' \restriction k$。这表明

$t \in \mathrm{dom}(\mathsf{Sum})$，由公理 (S3)，因而 $+$ 和 $\sum$ 在限制于 $\{s_\alpha \mid \alpha < \mathrm{lh}(s)\}$时是交换的，因为 Sum 满足公理 (S5)。

现在，如果 $\gamma = \beta + 1$ 是无限的，并且归纳假设对 $1 + \beta = \beta$成立，那么

$$\mathsf{Sum}(s) = \mathsf{Sum}(s_\beta{}^\frown(s \restriction \beta)) = \sum(s_\beta{}^\frown(s \restriction \beta)) = \sum(s),$$

根据公理 (S5)、归纳假设以及 $\sum$ 在 $\{s_\alpha \mid \alpha < \mathrm{lh}(s)\}$上的交换性。反之，假设 γ 是极限序数，并且该陈述对所有 $\beta < \gamma$均成立。根据公理 (S2) 和 (S3)，对于每个 $\alpha < \gamma$ 和，我们都有 $s \restriction \alpha \in \mathrm{dom}(\mathsf{Sum})$

$$\mathsf{Sum}(s) = \sup\{\mathsf{Sum}(s \restriction \alpha) \mid \alpha < \gamma\}.$$

根据归纳假设，对于每个 $\alpha < \gamma$，我们得到 $s \restriction \alpha \in \mathrm{dom}(\sum)$，并且

$$\mathsf{Sum}(s) = \sup\{\sum(s \restriction \alpha) \mid \alpha < \gamma\}.$$

这表明

$$\sup\{\sum(s \restriction \alpha) \mid \alpha < \gamma\} = \sup\{s_{\alpha_0} + \ldots + s_{\alpha_k} \mid \alpha_0 < \ldots < \alpha_k < \gamma\}$$

已定义，因此 $s \in \mathrm{dom}(\sum)$ 且 $\mathsf{Sum}(s) = \sup\{\sum(s \restriction \alpha) \mid \alpha < \gamma\} = \sum(s)$，正如所需。□

特别地，由命题 3.6 可得如下结果。

备注 3.7. 每个自然无穷和都满足与 $\sum$ （例如命题 3.4中的性质相同的性质，但限于其定义域内。

3.1. 幺半群的例子。 下面我们给出正全序幺半群的若干不同例子。第一个例子是经典测度论中使用的著名幺半群$[0, \infty]$ 。

例 3.8。 我们用 $\mathbb{R}_\infty = ([0, \infty], 0, +, \leq)$ 表示这样的全序幺半群，其中 $[0, \infty] \setminus \{\infty\} = [0, \infty)$ 是实数的正锥，采用通常的序和运算，而 ∞是该序的最大元，也是该运算的吸收元（即对每个 $a \in [0, \infty]$）。

因此，$\mathbb{R}_\infty$ 是一个初始阿基米德、戴德金完备、下半连续、0-连续、交换正全序幺半群，因此，根据命题 $\sum$ 是其上的全定义自然无穷和3.4。

运算 $\sum$ 可以对 $[0, \infty]$ 中的任意元素序列 $r = \langle r_\beta \mid \beta < \gamma\rangle$ 按以下方式显式定义：

- $\sum r = 0$ 如果 r 为空，或者 r 的所有元素都为零，
- $\sum r = r_{n_1} + \ldots + r_{n_k}$ 如果 r 不包含 ∞，且恰有 k个元素 $\{r_{n_1}, \ldots, r_{n_k}\}$ 不等于 0，
- $\sum r = \sum_{i=0}^{\infty} r_{n_i}$ 如果 r 不包含 ∞，且有可数多个元素不等于 0，并且 $\{r_{n_i} \mid i < \omega\}$ 是这些元素的一个枚举（根据绝对收敛定理，和 $\sum_{i=0}^{\infty} r_{n_i}$ 与所选枚举无关），
- $\sum r = \infty$ 否则。

另一类例子是戴德金完备全序。

例 3.9. 设 $(S, \leq)$ 是一个具有最小元 0 的戴德金完备线性序。那么，$\mathbb{S} = (S, 0, \max, \leq)$ 是一个戴德金完备、下半连续、交换的正全序幺半群，而无穷元运算 $\sum = \sup$ 是一个全定义的自然无穷和。如果 $\mathrm{Deg}(\mathbb{S})$ 是无限的，那么 $\mathbb{S}$ 也是 0-连续的。

注意，存在具有任意共初性的戴德金完备线性序（例如，$\kappa+1$ 取反序后是一个共初性为 κ 的戴德金完备线性序，其中 κ 为任意基数）。这表明，对于任意 κ，都存在一个度为 $\mathrm{Deg}(\mathbb{S}) = \kappa$ 的戴德金完备正全序交换幺半群 $\mathbb{S}$，且它具有全定义的自然无穷和。

群的完备化还给出了其他更有趣的例子。

命题 3.10。设 $\mathbb{G} = (G, 0, +, \leq)$ 是一个交换稠密全序群。那么，运算 $+$ 和序 $\leq$ 可以扩展到 $\mathbb{G}$ 的戴德金完备化 $S_{\mathbb{G}}$，使得 $\mathbb{S}_{\mathbb{G}} = (S_{\mathbb{G}}, 0, +, \leq)$ 成为一个戴德金完备、下半连续的全序交换幺半群，并且 $\mathbb{G}$ 是其稠密子群。

特别地，$\{0\} \cup \mathbb{S}^+_{\mathbb{G}}$ 是一个戴德金完备、下半连续、0连续的 - 正全序交换幺半群，使得 $\mathrm{Deg}(\mathbb{S}_{\mathbb{G}}) = \mathrm{Deg}(\mathbb{G})$。

证明。注意，每个全序群都是拓扑群（例如，参见 [Fuc63第二章中的定理 10 及其后的段落。8]）。特别地，这表明运算 $+$在 $\mathbb{G}$上是下半连续的。根据 [FM08], ，我们可以将运算 $+$ 和序关系 $\leq$ 扩展到 $\mathbb{S}_{\mathbb{G}}$，使其成为戴德金完备的交换全序幺半群，并且 $\mathbb{G}$ 是其稠密子群；根据定义，该运算是下半连续的。□

一般而言，运算 $\sum$ 不一定是自然的。下面的例子表明，即使在下半连续的交换正全序幺半群中，$\sum$ 也不一定满足公理 (S3) 或公理 (S4)。

例 3.11。令 $\mathbb{Q}_\infty = (\mathbb{Q} \cap [0, \infty)) \cup \{\infty\} \subseteq \mathbb{R}_\infty$。那么，$\mathbb{Q}_\infty$ 是 $\mathbb{R}_\infty$ 的一个下半连续、交换正全序子幺半群。设 $(s_n)_{n<\omega}$ 是一个和为 π （或你最喜欢的无理数）的有理数序列。再设，对于每个极限序数 γ 和自然数 $n < \omega$，都有 $t_{\gamma+n} = s_n$。令 $t = (t_\alpha)_{\alpha<\omega^2}$。那么，我们有 $\sum(t) = \infty$，然而对于每个$\alpha <$lh(t)，$t \restriction \alpha \notin$ dom$(\sum)$。</v>

以下例子表明，$\sum$ 不一定满足公理(S4)，即使是在戴德金完备、交换的正全序幺半群中也是如此。

例 3.12。设 $\mathbb{S} = ([0, \infty) \cup \{\infty_0, \infty_1\}, 0, +, \leq)$，其中 $[0, \infty)$ 是实数的正锥，$+$ 和 $\leq$ 分别是其通常的运算和序。另定义 $a < \infty_0 < \infty_1$，对所有 $a \in [0, \infty)$ 都成立；并定义 $a + \infty_i = \infty_i + a = \infty_i$，对任意 $a \in [0, \infty)$ 都成立；以及对每个 $i, j \in \{0, 1\}$，定义 $\infty_i + \infty_j = \infty_1$。那么，$\mathbb{S}$是一个戴德金完备、交换的正全序幺半群，但 $\sum$ 不满足结合律，因为

$$\sum(1^{(\omega)} \frown 1^{(\omega)}) = \sum(1^{(\omega+\omega)}) = \infty_0 \neq \infty_1 = \infty_0 + \infty_0 = \sum(1^{(\omega)}) + \sum(1^{(\omega)}).$$

例 3.13. 设 $(\mathbb{M}, 0, +, \leq)$ 是一个没有最大元的交换全序幺半群。设 $\mathbb{S} = \{0\} \times \mathbb{M} \cup \{1\} \times \mathbb{M} \sqcup \{\infty\}$，其序关系由以下条件给出：对于任意 $i \in \{0, 1\}$ 和满足 $a \leq b$ 的 $a, b \in \mathbb{M}$，有 $(i, a) \leq (i, b)$；并且对于任意 $a, b \in \mathbb{M}$，有 $(0, a) \leq (1, b) \leq \infty$。设 $*$ 定义如下：若 $i+j \leq 1$，则 $(i, a)*(j, b) = (i+j, a+b)$；$(1, a)*(1, b) = \infty$；并且 $(i, a) * \infty = \infty * (i, a) = \infty$。那么，$(\mathbb{S}, (0, 0), *, \leq)$ 是一个交换正全序幺半群；若 $\mathbb{M}$ 加上一个最大元后是戴德金完备的，则它也是戴德金完备的。然而，$\sum$ 不满足结合律：若 $\langle a_i \mid i < \gamma \rangle$ 是 $\mathbb{M}$ 中的一个共尾序列，那么

$$\sum(\langle (0, a_i) \mid i < \gamma \rangle \frown \langle (0, a_i) \mid i < \gamma \rangle) = (1, 0),$$
$$\sum(\langle (0, a_i) \mid i < \gamma \rangle) + \sum(\langle (0, a_i) \mid i < \gamma \rangle) = (1, 0) + (1, 0) = \infty.$$

4. Measures

关于经典测度理论，读者可参阅例如 [Kec95、Rud87]。回顾 λ^+-测度的定义，定义1.2。注意， ω^+-测度的概念通过允许使用除 $\mathbb{R}_\infty$ 以外的幺半群，以及非 σ-代数的可测结构，恰当地扩展了经典测度的概念。

还要回想一下，采用 [Kec95练习 17 中的记号。4], 给定一个弱λ^+-测度空间 (X， $\mathfrak{M}$， μ)，若所有点都可测且测度为 μ，则称其为连续的 $\mu(x) = 0$。

尽管弱 λ^+-测度的定义可以使用任意类型的无穷和 Sum，但下一个命题表明，这种Sum 至少在 μ的值域上必须是自然的。由于在此语境下，Sum 在 μ 值域之外的取值无关紧要，因此命题 3.6 便意味着， $\sum$ 实质上是定义测度时唯一可用的无穷和。

命题 4.1。 设 $\mathbb{S}$ 为带有无穷元运算 Sum 的正全序幺半群，且 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为一个弱 λ^+-测度空间，使得 μ 的取值在 $(\mathbb{S}$,Sum) 中。设

$\mathcal{D} = \{\langle \mu(A_i) \mid i < \gamma\rangle \mid (A_i)^{i<\gamma}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个长度为 $\gamma < \lambda^+\}$.的互不相交集族

那么，我们有 Sum $\restriction \mathcal{D}$ 是自然的，因此

$$\mu(\bigcup_{i\in\gamma} A_i) = \sum_{i\in\gamma} \mu(A_i)$$

对于 $\mathfrak{M}$ 的每个长度为 $\gamma < \lambda^+$的互不相交集族$(A_i)^{i<\gamma}$，均有。

证明。 我们希望证明 Sum $\restriction \mathcal{D}$ 是自然的，其余结论将由命题 3.6 得出。

首先，显然 Sum $\restriction \mathcal{D}$ 满足公理 (S1) 和 (S2)，因为 Sum 满足这些公理；根据 $\mathcal{D}$ 的定义以及公理 (M4)的前半部分，它也显然满足公理 (S3)。根据公理 (M4)，并且由于$\bigcup$ 是交换的，直接检查可知它满足公理 (S5)。

最后，对于公理(S4)，注意到如果 $\bar{s} = (s^\alpha)_{\alpha<\gamma} \in {}^{<\mathsf{On}}\mathcal{D}$且 Conc($\bar{s}$) $\in \mathcal{D}$，并且$\{A_i^\alpha \mid \alpha < \gamma, i < \mathrm{lh}(s^\alpha)\}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中见证 Conc($\bar{s}$) $\in \mathcal{D}$ 的互不相交的集合，那么 $\langle \bigcup_{i<\mathrm{lh}(s^\alpha)} A_i^\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ 仍然是 $\mathfrak{M}$ 中长度为 $\gamma < \lambda^+$ 的互不相交集合序列。因此，

$$\langle \mathsf{Sum}(s^\alpha) \mid \alpha < \gamma\rangle = \langle \mu(\bigcup_{i<\mathrm{lh}(s^\alpha)} A_i^\alpha) \mid \alpha < \gamma\rangle \in \mathcal{D}$$

and

$$\begin{aligned}\mathsf{Sum}(\mathrm{Conc}(\bar{s})) &= \mu(\bigcup_{\alpha<\gamma}\bigcup_{i<\mathrm{lh}(s^\alpha)} A_i^\alpha) = \\ &= \mathsf{Sum}(\langle \mu(\bigcup_{i<\mathrm{lh}(s^\alpha)} A_i^\alpha) \mid \alpha < \gamma\rangle) = \\ &= \mathsf{Sum}(\langle \mathsf{Sum}(s^\alpha) \mid \alpha < \gamma\rangle)\end{aligned}$$

正如所需。 □

因此，不失一般性，

在本文其余部分中，我们固定一个正全序幺半群 $\mathbb{S} = (S, 0, +, \leq)$，并使用定义 Sum $= \sum$ 中的无穷和3.2,

除非另有说明。此外，通过将 $\sum$ 的定义域限制为 $\mathcal{D}$，实际上我们总可以假设 $\sum$ 是自然的（在其定义域的相关部分上）。

4.1. 测度的性质。 每个经典测度也是可数次可加的，即对于每个可数的可测集族 $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{M}$，$\mu(\bigcup \mathcal{V}) \leq \sum_{V \in \mathcal{V}} \mu(V)$。在此语境下，我们可以定义一个类似的性质。

定义 4.2。 若对于每个大小为 $|\mathcal{V}| \leq \lambda$的族 $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{M}$，都有 $\mu(\bigcup \mathcal{V}) \leq \sum_{V \in \mathcal{V}} \mu(V)$，则称弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是 λ^+**-次可加的**。

一般而言，仅凭定义 1.2 的公理，我们无法断定每个弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 都是 λ^+-次可加的。

例 4.3。 设 τ 为 $\mathbb{R}$上的通常欧几里得拓扑。令 $\mathbb{Q} + \pi = \{q + \pi \mid q \in \mathbb{Q}\}$，并令

$$\mathfrak{M} = \{O \cup D \mid O \in \tau, D \in \{\emptyset, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} + \pi)\}\}.$$

于是，很容易验证，$\mathfrak{M}$ 是 $\mathbb{R}$上的弱 ω^+-可测结构。令 $\mu_L : \mathfrak{M}_L \to \mathbb{R}_\infty$ 为 $\mathbb{R}$上的通常勒贝格测度。对于每个 $M \in \mathfrak{M}$，定义$\mu(M) = \mu_L(\text{int}(M))$。

容易验证，μ 满足公理（M1）—（M2），因为 μ_L 满足这些公理。此外，对于满足 $A \subseteq B$的任意 A、$B \in \mathfrak{M}$，我们有$\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$，并且 $\mu(A) = \mu_L(\text{int}(A)) \leq \mu_L(\text{int}(B)) = \mu(B)$，因此公理（M3）也成立。由于 $\mathfrak{M}$中没有点是可测的，因此 μ 满足公理（M5）。最后，若 $\mathcal{A}$ 是一个包含 ≥ 2个元素的互不相交可测集族，则 $\mathcal{A} \subseteq \tau$，因为 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} + \pi)$在$\mathbb{R}$ 中稠密，且交集非空。因此 μ 满足公理（M4）。然而，

$$\mu((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} + \pi))) = \mu(\mathbb{R}) = \infty \not\leq 0 = \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) + \mu(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} + \pi)),$$

因此，μ 甚至不是有限次可加的。

然而，在每个 $\mathfrak{M}$ 足够良好的弱 λ^+测度空间（X，$\mathfrak{M}$，μ）中，λ^+-测度 μ 确实是次可加的。

定义 4.4. 给定一个弱 λ^+测度空间（X，$\mathfrak{M}$，μ），如果存在一个 $\bigcup \mathcal{V}$ 的划分 $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{M}$，其大小小于 λ^+，且细化 $\mathcal{V}$，我们就称族$\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{M}$ 是 λ^+**-可划分的**。

如果每个大小小于 λ^+ 的族 $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{M}$ 都是 λ^+-可划分的，我们就称（X，$\mathfrak{M}$，μ）是 λ^+-**可划分的**。

每个弱 λ^+-测度空间（X，$\mathfrak{M}$，μ），只要 $\mathfrak{M}$ 对补集运算封闭（因此是一个 λ^+-代数），也是 λ^+-可划分的。然而，这并非 λ^+-可划分的弱 λ^+-测度空间的唯一情形（见命题4.15）。

在这些空间中，次可加性以符合预期的方式成立。

命题 4.5. 设$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。那么，对于每个λ^+-可划分族 $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{M}$，我们有 $\mu(\bigcup \mathcal{V}) \leq \sum_{V \in \mathcal{V}} \mu(V)$。

请回想一下，我们遵循备注 3.3 及其前一段中引入的约定：我们写作 $\mu(\bigcup \mathcal{V}) \leq \sum_{V \in \mathcal{V}} \mu(V)$ 并不意味着$\sum_{V \in \mathcal{V}} \mu(V)$ 在 $\mathbb{S}$ 中存在。

证明。设 $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{M}$ 是一个由大小为 $< \lambda^+$ 的互不相交集合组成、细化 $\mathcal{V}$ 且满足 $\bigcup \mathcal{P} = \bigcup \mathcal{V}$的族。由于 $\mathcal{P}$细化 $\mathcal{V}$，对每个 $P \in \mathcal{P}$，存在 $V \in \mathcal{V}$使得 $P \subseteq V$。利用选择公理，我们可以找到 $\mathcal{P}$ 的一个划分 $\{\mathcal{P}_V \mid V \in \mathcal{V}\}$，使得$\mathcal{P} = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} \mathcal{P}_V$，并且对每个 $P \in \mathcal{P}_V$ 都有 $P \subseteq V$。因此，$(\bigcup \mathcal{P}_V)_{V\in\mathcal{V}}$仍然是 $\bigcup \mathcal{V}$ 的一个划分，细化 $\mathcal{V}$，其中有 $\leq \lambda$ 个元素不同于 $\emptyset$；并且每个 $\bigcup \mathcal{P}_V$ 都是可测的，因为 $\mathfrak{M}$ 对大小为 $\leq \lambda$ 的并封闭。由公理（M3），对每个 $V \in \mathcal{V}$，我们得到 $\mu(\bigcup \mathcal{P}_V) \leq \mu(V)$，因此

$$\mu(\bigcup \mathcal{V}) = \mu(\bigcup_{\substack{V\in\mathcal{V},\\ \mathcal{P}_V\neq\emptyset}} \bigcup \mathcal{P}_V) = \sum_{\substack{V\in\mathcal{V},\\ \mathcal{P}_V\neq\emptyset}} \mu(\bigcup \mathcal{P}_V) = \sum_{V\in\mathcal{V}} \mu(\bigcup \mathcal{P}_V) \leq \sum_{V\in\mathcal{V}} \mu(V)$$

由公理 (M4)以及命题 3.4 (利用 $\sum$ 具有无穷可加平移不变性，且 $0 = \mu(\emptyset)$ 是 $\sum$ 的单位元）。□

推论 4.6。 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个 λ^+-可划分的弱 λ^+-测度空间。那么，μ 是 λ^+-次可加的。

注意，根据事实 2.1 以及我们对 X 权的假设，每族开集都是可划分的。

注记 4.7. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。那么，每个开集族都是 λ^+-可划分的。

因此，由此以及命题4.5，我们得到以下结论。

推论 4.8. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。那么，零测度开集族 $\mathcal{N} = \{V \in \tau \mid \mu(V) = 0\}$ 在任意多个集合的并运算下封闭。

经典测度空间的另一个重要性质是，加入一个零测度集不应增加集合的测度。在这里，在额外假设弱 λ^+-测度空间是 λ^+-次可加的情况下，我们得到了类似的结论。

定义 4.9. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。若子集 $N \subseteq X$ 满足：对于每个 M, $M' \in \mathfrak{M}$，都有

$$M \setminus N = M' \setminus N \qquad \text{implies} \qquad \mu(M) = \mu(M').$$

注记 4.10. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。若 $N \subseteq X$ 是本质零且 $N' \subseteq N$，则 N' 也为本质零，即本质零集对子集封闭。

引理 4.11. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个 λ^+-次可加的弱 λ^+-测度空间。那么，每个零测度集也都是本质零。

证明。设 $M, M', N \in \mathfrak{M}$ 满足 $\mu(N) = 0$ 且 $M \setminus N = M' \setminus N$。则$M \subseteq M' \cup N$且 $M' \subseteq M \cup N$。因此，若 μ 是 λ^+-次可加的，我们得到

$$\mu(M) \leq \mu(M' \cup N) \leq \mu(M') + \mu(N) = \mu(M') + 0 = \mu(M')$$

反之亦然，因此 $\mu(M) = \mu(M')$，如所需。 □

虽然这些性质看起来足够重要，似乎值得我们将其作为假设，但实际上我们并不需要这样做：它们会在任何弱 λ^+测度空间的子结构中自动满足（见命题4.15）。

4.2. **极小 λ^+可测空间**。为了证明我们的主要不可能性定理，我们引入一类简单的弱 λ^+-可测空间；在需要时，我们总可以将讨论限制在这类空间上。

定义 4.12。 A**极小 λ^+-可测空间**是一个弱 λ^+-可测空间（X，$\mathfrak{M}$），其满足：对于每个 $M \in \mathfrak{M}$，都存在一个划分 $M = D \cup O$，使得对于每个 $x \in D$都有 $|D| \leq \lambda$，且 $O \in \tau$ 是开集。

A 个**极小 λ^+-测度空间** 是一个弱 λ^+-测度空间（X，$\mathfrak{M}$，μ），其中（X，$\mathfrak{M}$）是一个极小的 λ^+-可测空间。

术语极小 源于以下事实：每个弱 λ^+-测度空间都包含唯一的极小 λ^+-测度空间，该空间测量完全相同的点。这可以看作该空间的核心或核。

注意，给定一个弱 λ^+-可测空间（X，$\mathfrak{M}$），如果 D 和 O 是 X 的子集，满足对于每个 $x \in D$都有 $|D| \leq \lambda$、 $x \in \mathfrak{M}$，且 $O \in \tau$，那么根据弱 λ^+-可测性的定义，我们得到 $D \in \mathfrak{M}$和 $O \in \mathfrak{M}$，从而有 $D \cup O \in \mathfrak{M}$。因此，在一个极小 λ^+-可测空间（X，$\mathfrak{M}$）中，当且仅当存在一个划分 $M = D \cup O$，满足对于每个 $x \in D$都有 $|D| \leq \lambda$、 $x \in \mathfrak{M}$，且 $O \in \tau$ 是开集时，才有 $M \in \mathfrak{M}$。

给定 $A \subseteq X$，令 $\mathfrak{M}_p^\lambda(A)$ 为 X 的子集构成的极小族，其中包含所有开集和 A 的所有点，并且对至多 λ 个集合的并封闭。容易验证，$(X, \mathfrak{M}_p^\lambda(A))$ 是一个极小的 λ^+-可测空间；并且，如果 $(X, \mathfrak{M})$ 是任何满足 $A \subseteq \{x \in X \mid x \in \mathfrak{M}\}$ 的其他弱 λ^+-可测空间，那么必有 $\mathfrak{M}_p^\lambda(A) \subseteq \mathfrak{M}$。因此， $\mathfrak{M}_p^\lambda(A)$ 也可以等价地描述为

$$\mathfrak{M}_p^\lambda(A) := \bigcap \{\mathfrak{M} : (X, \mathfrak{M}) \text{ 是一个弱 } \lambda^+\text{-可测空间 } \wedge x \in \mathfrak{M} \text{ 对于所有 } x \in A\}.$$

特别地，每个极小的 λ^+-可测空间 $(X, \mathfrak{M})$ 都具有形式 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p^\lambda(A)$，其中 $A = \{x \in X \mid x \in \mathfrak{M}\}$；而每个弱 λ^+-可测空间 $(X, \mathfrak{M})$ 都包含一个唯一的极小 λ^+-可测子空间 $(X, \mathfrak{M}_p^\lambda(A))$，它测量 $\mathfrak{M}$ 中相同的点 $A = \{x \in X \mid x \in \mathfrak{M}\}$。

此外，如果 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是弱 λ^+-测度空间，并且 $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ 使得 $(X, \mathfrak{M}')$ 弱 λ^+-可测，那么 $(X, \mathfrak{M}', \mu)$ 也是弱 λ^+-测度空间。这个观察使我们能够引入以下定义。

定义 4.13。 弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 的**核** 是极小λ^+-测度空间 $\ker(X, \mathfrak{M}, \mu) = (X, \ker(\mathfrak{M}) \mu)$，其中

$$\ker(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_p^\lambda(\{x \in X \mid x \in \mathfrak{M}\}) \subseteq \mathfrak{M}$$

是唯一的极小 λ^+-可测结构，它测量 $\mathfrak{M}$中的相同点。

因此，不失一般性，我们可以将研究范围限制在极小 λ^+-可测空间：如果我们证明不可能找到这样的极小结构，那么就能自动得出，任何其他结构也不可能找到。

极小 λ^+-可测空间的性质比大多数弱 λ^+-可测空间更好，因此是理想的研究对象。

命题 4.14. 对于每个极小的 λ^+-可测空间$(X, \mathfrak{M})$，我们有$\mathfrak{M}$ 对小于 κ 的交集封闭。

证明。回忆一下， $X \subseteq {}^\kappa\lambda$。设 $(X, \mathfrak{M})$ 是一个极小的 λ^+-可测空间，并设 $(M_i)_{i<\gamma}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中一个长度为 $\gamma < \kappa$ 的元素序列。对于每个 $i < \gamma$，令

D_i，$O_i \in \mathfrak{M}$ 满足：对于每个 $x \in D_i$，$M_i = D_i \cup O_i$、$|D_i| \leq \lambda$、$x \in \mathfrak{M}$，且$O_i \in \tau$。设 $M = \bigcap_{i<\gamma} M_i$。那么，如果 $O = \bigcap_{i<\gamma} O_i$，根据 $^{\kappa}\lambda$ 的κ-可加性，我们有 O 是开集。此外，

$$D = M \setminus O \subseteq \bigcup_{i<\gamma} D_i$$

大小为 $\leq \lambda$，因为 $\gamma < \kappa \leq \lambda$，并且对于每个 $x \in D$ 都有 $x \in \mathfrak{M}$。因此 $M = D \cup O \in \mathfrak{M}$ 也成立，正如所需。□

在极小 λ^+-测度空间中，所有可测集族本质上都由开集构成，至多相差一个大小很小的集合。根据事实2.1，由此可得它们是 λ^+-可划分的。

命题 4.15。 在 X 上的每个极小 λ^+-测度空间都是 λ^+-可划分的。

证明。 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个极小的 λ^+-测度空间。考虑大小为 $\leq \lambda$ 的 $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{M}$。那么，对于每个 $M \in \mathcal{V}$，我们都可以找到两个互不相交的集合 $O(M) \in \tau$ 和 $D(M) \in \mathfrak{M}$，使得 $M = O(M) \cup D(M)$，$|D(M)| \leq \lambda$，并且对每个 $x \in D(M)$，都有 $x \in \mathfrak{M}$。

根据事实 2.1，我们可以找到 $O = \bigcup_{M\in\mathcal{V}} O(M)$ 的一个细化 $\{O(M)$ 的既开又闭划分 $\mathcal{P}_1$。$\mid M \in \mathcal{V}\}$ (因此 $\mathcal{V}$)。注意，$\mathcal{P}_1 \subseteq \mathfrak{M}$，因为 $\mathfrak{M}$ 包含 X的所有开子集。此外，$|\mathcal{P}_1| \leq \lambda$，因为我们假设 X 的权为 $\leq \lambda$。

再设 $D = \bigcup \mathcal{V} \setminus O$，且 $D' = \bigcup_{M\in\mathcal{V}} D(M)$。注意，$D \subseteq D'$：这意味着 $|D| \leq \lambda$，并且对每个 $x \in D$ 都有 $x \in \mathfrak{M}$。因此，$\mathcal{P}_2 = \{\{x\} \mid x \in D\}$ 是 D 的一个细化 $\mathcal{V}$ 的划分。

因此，$\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ 是 $\bigcup\mathcal{V}$的一个划分，且细化了 $\mathcal{V}$，正如所需。 □

由推论 4.6，可得如下结论。

推论 4.16。 X 上的每个极小 λ^+-测度空间都是 λ^+-次可加的。

4.3. **测度的扩张与限制**。 给定一个弱 λ^+-测度空间（Y，$\mathfrak{M}$，μ），我们首先定义一种在超空间 $X \supseteq Y$上导出结构的方法。

定义 4.17。 给定两个空间 $Y \subseteq X$ 以及一个弱 λ^+-测度空间（Y，$\mathfrak{M}$，μ），定义集合

$$\mathfrak{M} \uparrow X = \{A \subseteq X \mid A \cap Y \in \mathfrak{M}\},$$

并令

$$\mu \uparrow X : \mathfrak{M} \uparrow X \to \mathbb{S}$$

为如下给出的函数

$$(\mu \uparrow X)(B) = \mu(B \cap Y) \text{ for all } B \in \mathfrak{M} \uparrow X.$$

反过来，给定一个弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$，我们定义一种在子空间 $Y \subseteq X$ 上诱导结构的方式。

定义 4.18。 给定两个空间 $Y \subseteq X$ 以及一个弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$，定义

$$\mathfrak{M} \downarrow Y = \{M \cap Y \mid M \in \mathfrak{M}\}$$

并令 $\mu \downarrow Y$为如下给出的偏函数

$$(\mu \downarrow Y)(A) = \inf\{\mu(M) \mid M \in \mathfrak{M}, M \cap Y = A\}$$

对于所有使上述下确界存在的 $A \in \mathfrak{M} \downarrow Y$。

当我们使用 $\uparrow$将测度从 Y 扩展到 X 时，集合 $X \setminus Y$ 始终是本质零的。对于这些集合，运算 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 互为逆运算。

引理 4.19. 设 $Z \subseteq Y \subseteq X$ 是一些集合，且 $(Y, \mathfrak{M}, \mu\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{S})$ 是一个弱λ^+-测度空间，其中 Z 在该空间中是本质零。那么，我们有

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{M} \uparrow X) \downarrow Y, \qquad \mu = (\mu \uparrow X) \downarrow Y,$$

and

$$\mathfrak{M} \subseteq (\mathfrak{M} \downarrow Z) \uparrow Y, \qquad \mu \subseteq (\mu \downarrow Z) \uparrow Y.$$

证明。 关系 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M} \uparrow X) \downarrow Y$和 $\mathfrak{M} \subseteq (\mathfrak{M} \downarrow Z) \uparrow Y$直接由定义得出。要证明等式 $\mu = (\mu \uparrow X) \downarrow Y$，只需注意到

$$\begin{aligned}((\mu \uparrow X) \downarrow Y)(A) = \inf\{(\mu \uparrow X)(M) \mid M \in \mathfrak{M} \uparrow X, M \cap Y = A\} = \\ = \inf\{\mu(A) \mid M \in \mathfrak{M} \uparrow X, M \cap Y = A\} = \mu(A)\end{aligned}$$

对每个 $A \in \mathfrak{M}$都成立（特别地，对每个 $A \in \mathfrak{M}$，下确界都存在）。类似地，对于包含关系 $\mu \subseteq (\mu \downarrow Z) \uparrow Y$， Z 是本质零这一事实意味着，对于每个 $A, M \in \mathfrak{M}$，只要 $M \cap Z = A \cap Z$，就有 $\mu(M) = \mu(A)$，因此

$$\begin{aligned}((\mu \downarrow Z) \uparrow Y)(A) = (\mu \downarrow Z)(A \cap Z) = \inf\{\mu(M) \mid M \in \mathfrak{M}, M \cap Z = A \cap Z\} = \\ = \inf\{\mu(A) \mid M \in \mathfrak{M}, M \cap Z = A \cap Z\} = \mu(A)\end{aligned}$$

对每个 $A \in \mathfrak{M}$都成立，特别地，对每个 $A \in \mathfrak{M}$，下确界都存在。 □

下面的引理给出了使 $(X, \mathfrak{M} \uparrow X, \mu \uparrow X)$ 或 $(Y, \mathfrak{M} \downarrow Y, \mu \downarrow Y)$ 成为弱 λ^+-测度空间的充分条件。

引理 4.20。 对于每个拓扑空间 X 以及每个弱 λ^+-测度空间$(Y, \mathfrak{M}, \mu)$ 满足 $Y \subseteq X$，有 $(X, \mathfrak{M} \uparrow X)$ 是弱 λ^+-可测空间，且 $\mu \uparrow X$ 满足公理 (M1)-(M4)。

此外，如果 Y 在 X 中是闭的，那么 $(X, \mathfrak{M} \uparrow X, \mu \uparrow X)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。

证明。 由于 $\mathfrak{M}$ 对大小为 $\leq \lambda$ 的并封闭， $\mathfrak{M} \uparrow X$也如此。此外， $\mathfrak{M} \uparrow X$包含 X 的所有开集，因为 X 中开集在 Y 中的限制仍是 Y 中的开集，而 $\mathfrak{M}$ 包含 Y的所有开集。显然也可以验证$\mu \uparrow X$ 满足公理 (M1)-(M4)，因为 μ 满足这些公理。

现在，如果 Y在 X中是闭的，那么对于每个 $x \in X$，要么 $x \in Y$，此时结论成立，因为 μ 满足公理(M5)；要么 $x \notin Y$，因此

$$(\mu \uparrow X)(x) = 0 = (\mu \uparrow X)(X \setminus Y),$$

这再次表明 $\mu \uparrow X$ 对(M5) 满足公理 x。 □

引理 4.21。 设$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间，且 $\mathfrak{M}$ 对有限交封闭。设 $Y \in \mathfrak{M}$ 是一个具有正测度的集合 $\mu(Y) > 0$。那么，$(Y, \mathfrak{M} \downarrow Y, \mu \downarrow Y)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。

证明。由于 $Y \in \mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}$ 对交封闭，对于每个 $M \in \mathfrak{M}$，我们得到 $M \cap Y \in \mathfrak{M}$，因此 $\mathfrak{M} \downarrow Y = \{A \in \mathfrak{M} \mid A \subseteq Y\} \subseteq \mathfrak{M}$。此外，根据公理（M3），对于每个 $M \in \mathfrak{M}$， $\mu(M \cap Y) \leq \mu(M)$，因此对于每个 $A \in \mathfrak{M} \downarrow Y$， $\inf\{\mu(M) \mid M \in \mathfrak{M}, M \cap Y = A\} = \mu(A)$ 存在，从而 $\mu \downarrow Y = \mu \restriction (\mathfrak{M} \downarrow Y)$。因此，很容易验证 $(Y, \mathfrak{M} \downarrow Y)$ 是一个弱 λ^+-可测空间，因为 $(X, \mathfrak{M})$ 是；而且 $\mu \downarrow Y$ 是其上的一个 λ^+-测度，因为 μ 是。□

引理 4.22. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个 λ^+-可划分的弱 λ^+-测度空间，并设 $Y \subseteq X$ 满足 $X \setminus Y$ 是本质零的。那么， $\mathfrak{M} \downarrow Y \subseteq \mathrm{dom}(\mu \downarrow Y)$ 且 $(Y, \mathfrak{M} \downarrow Y, \mu \downarrow Y)$ 满足公理(M1)-(M4)。

证明。根据本质零集的定义，我们得到 $\mu(M) = \mu(M')$ 对所有 M， $M' \in \mathfrak{M}$ 满足 $M \cap Y = M' \cap Y$ 的情形，因此 $\mu \downarrow Y$ 定义在整个 $\mathfrak{M} \downarrow Y$ 上。显然可以验证，$(Y, \mathfrak{M} \downarrow Y)$ 是一个弱 λ^+-可测空间，因为 $(X, \mathfrak{M})$ 是。也容易验证 $\mu \downarrow Y$ 满足公理 (M1) 和(M2)，因为 μ 满足。

设 A， $B \in \mathfrak{M} \downarrow Y$ 满足 $A \subseteq B$，并设 M_A， $M_B \in \mathfrak{M}$ 满足 $A = M_A \cap Y$ 且 $B = M_B \cap Y$。注意到 $Y \cap (M_A \cup M_B) = B$，且 $M_A \cup M_B \in \mathfrak{M}$ 因为 $\mathfrak{M}$ 对并运算封闭。因此，我们可以假设 $M_A \subseteq M_B$。然后，由公理(M3) 应用于 μ ，可得

$$(\mu \downarrow Y)(A) = \mu(M_A) \leq \mu(M_B) = (\mu \downarrow Y)(B)$$

且公理 (M3) 也适用于 $\mu \downarrow Y$。

现在令 $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M} \downarrow Y$ 为一个由 $|\mathcal{A}| < \lambda^+$ 个集合组成的互不相交可测集族。令 $\mathcal{A}' = \{M_A \mid A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathfrak{M}$ 为一个可测集族，使得对每个 $A \in \mathcal{A}$，都有 $M_A \cap Y = A$。由于 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是可 λ^+- 划分的，因此存在一个细化 $\mathcal{A}'$ 的互不相交集族 $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{M}$，并且满足 $\bigcup \mathcal{P} = \bigcup \mathcal{A}'$。由于 $\mathcal{P}$ 细化 $\mathcal{A}'$，利用选择公理，我们可以将 $\mathcal{P}$ 划分为若干族 $\{\mathcal{P}_A \mid A \in \mathcal{A}\}$，使得 $P \in \mathcal{P}_A$ 蕴含 $P \subseteq M_A$。注意，由于 $\mathcal{A}$ 由互不相交的集合构成，因此对于每个 $P \in \mathcal{P}$， $P \cap A \neq \emptyset$ 蕴含 $P \in \mathcal{P}_A$。由于 $Y \cap \bigcup \mathcal{P} = \bigcup \mathcal{A}$，于是得到 $Y \cap \bigcup \mathcal{P}_A = A$。因此，

$$(\mu \downarrow Y)(\bigcup \mathcal{A}) = \mu(\bigcup \mathcal{A}') = \mu(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bigcup \mathcal{P}_A) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(\bigcup \mathcal{P}_A) =$$
$$= \sum_{A \in \mathcal{A}} (\mu \downarrow Y)(\bigcup \mathcal{P}_A \cap Y) = \sum_{A \in \mathcal{A}} (\mu \downarrow Y)(A)$$

且公理(M4)成立。 □

在没有附加假设的情况下，公理(M5) 在（Y， $\mathfrak{M} \downarrow Y$， $\mu \downarrow Y$）中可能不成立。然而，在实际应用中，对于所有相关的配对，公理(M5) 都成立， $Y \subseteq X$。例如，若在 $\mathfrak{M} \downarrow Y$ 中可测的每个点在 $\mathfrak{M}$ 中也可测，则根据 $\mu \downarrow Y$ 的定义，该公理直接成立。同样，若 $\mathfrak{M}$ 是极小的，那么在 $\mathfrak{M} \downarrow Y$ 中可测但不在 $\mathfrak{M}$ 中可测的任何点都必定是孤立点，因此显然满足公理(M5) 。综上，我们得到如下结论。

注释4.23。 设（X， $\mathfrak{M}$， μ）是一个弱 λ^+-测度空间，且设 $Y \subseteq X$。假设 $\mathfrak{M}$ 是极小的，或者 $\mathfrak{M}$ 测量了 Y 中的所有点。那么， （Y， $\mathfrak{M} \downarrow Y$， $\mu \downarrow Y$）满足公理(M5)。

根据推论4.6和引理4.11，可测空间中每个零测集 λ^+可划分空间本质零。因此，由引理4.22 和注释4.23，我们得到如下结论。

推论 4.24. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个可 λ^+-划分的弱 λ^+-测度空间，并设 $Y \subseteq X$ 满足 $X \setminus Y \in \mathfrak{M}$，且 $\mu(X \setminus Y) = 0$。假设以下条件之一成立：

- $\mathfrak{M}$是极小的；
- $\mathfrak{M}$ 测度 Y 的所有点。

那么，$(Y, \mathfrak{M}\downarrow Y, \mu\downarrow Y)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。

回顾一下，极小 λ^+-测度空间在有限交下封闭，由命题 4.14，并且是 λ^+-可划分的，由命题4.15。因此，根据引理 4.21 和推论4.24，我们得到如下结论。

推论 4.25. 设$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个极小的 λ^+-测度空间，并设 $Y \subseteq X$ 满足以下条件之一：

- $Y \in \mathfrak{M}$ 和 $\mu(Y) > 0$,
- $X \setminus Y \in \mathfrak{M}$ 和 $\mu(X \setminus Y) = 0$。

那么，$(Y, \mathfrak{M}\downarrow Y, \mu\downarrow Y)$ 是一个极小的 λ^+-测度空间。

5. On the existence of (trivial) λ^+-measures

本节中，我们给出 λ^+-测度在${}^\kappa\lambda$（的子空间上）的具体示例。这些示例以某种方式而言，对于广义描述集合论的研究目的并不真正令人满意。这将表明定理1.3中的假设是最优的。

5.1. 狄拉克型测度与可数情形的特殊性。

本小节中，我们研究支撑“较小”的测度。

回顾一下，（经典）测度的支撑是所有不具有测度为零的开邻域的点所组成的集合。**狄拉克测度**是支撑大小为 1 的测度。

尽管狄拉克测度在许多应用中很有用，但仅凭狄拉克测度无法构建出一种可与例如实数上的勒贝格测度相媲美的理论。因此，在研究波兰空间的结构性质时，人们通常将所有具有有限支撑的测度视为平凡测度。

类比地，在广义情形中，我们应将支撑的权严格小于 λ 的那些 λ^+-测度视为平凡的。下面将其形式化。

定义 5.1。 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。 μ 的**支撑** 是集合

$$\operatorname{supp}(\mu) = X \setminus \bigcup\{O \mid O \text{ open}, \mu(O) = 0\}.$$

定义 5.2。 设 γ 是一个基数，且 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。若 $\operatorname{supp}(\mu)$ 的权严格小于 γ，则称 μ 是 γ-**狄拉克** 的。

由于对于有限的（豪斯多夫）空间，空间的权与其大小相同，因此按照上述术语，狄拉克测度恰好是 2-狄拉克测度，而 ω-狄拉克测度恰好是狄拉克测度的有限和。另一方面， ω_1-狄拉克测度已经包含了（可分）波兰空间上的所有经典测度；特别是，它们可以是连续的，并且不一定是狄拉克测度的可数和。

当然，我们无法排除（2-）Dirac 或 ω-Dirac λ^+-测度存在于 $X \subseteq {}^\kappa\lambda$；但任何 ω-Dirac（λ^+-）测度必然不是连续的，因此它们的存在并不与定理 1.3相矛盾。

然而，与经典情形不同， ω-狄拉克测度未必是 ${}^\kappa\lambda$上的唯一“平凡”（即 λ-狄拉克）测度。在下面的结果中，我们证明，若 $\omega < \lambda < \mathfrak{c}$，则还存在连续 λ-狄拉克测度 ${}^\kappa\lambda$，因此定理1.3中的假设“$\lambda \geq \mathfrak{c}$”是必要的。

命题 5.3。假设 $\lambda^{<\kappa} = \lambda < \mathfrak{c}$。那么，存在一个定义在 ${}^{\kappa}\lambda$ 上的连续 ω_1-狄拉克弱 λ^+-测度空间$({}^{\kappa}\lambda, \mathfrak{M}, \mu)$。

证明。注意，如果 $\lambda < \mathfrak{c}$，那么 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ 等价于 $\kappa = \omega$。设 μ' 是 ${}^{\omega}\omega$上的经典连续测度。设 $\mathfrak{M}$ 是 ${}^{\omega}\omega$上测量其所有点的极小 λ^+-可测结构；对于每个 $A \in \mathfrak{M}$，记 $\mathrm{int}(A)$ 为 A 在 ${}^{\omega}\omega$中的内部，即包含于 A中的所有开子集 $U \subseteq {}^{\omega}\omega$的并集。

断言 5.3.1。函数 $\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}_\infty$由 $\mu(M) = \mu'(\mathrm{int}(M))$ 定义，对每个$M \in \mathfrak{M}$ 而言，都是 $({}^{\omega}\omega, \mathfrak{M})$ 上的连续 λ^+-测度。

证明。事实上，$\mu(\emptyset) = 0$ 且 $\mu({}^{\omega}\omega) = \mu'({}^{\omega}\omega) > 0$，并且 μ 是递减的，因为 μ' 也是如此。因此，μ 满足公理（M1）–（M3）。此外，对于每个点 $x \in {}^{\omega}\omega$，根据 μ 的定义以及 μ'的连续性，我们有 $\mu(x) = \mu'(\emptyset) = 0 = \mu'(x)$。由此可知，$\mu$是连续的，并且满足公理（M5），因为对于每个开集 $U \subseteq {}^{\omega}\omega$，都有 $\mu(U) = \mu'(U)$。

现在只需证明公理 (M4)。设 $(A_i)_{i<\alpha} \subseteq \mathfrak{M}$ 是一个序型为 $\alpha < \lambda^+$ 的互不相交集族。注意，要么 $\mathrm{int}(A_i) = \emptyset$，要么 $|\mathrm{int}(A_i)| \geq \mathfrak{c} > \lambda$，因为 ${}^{\omega}\omega$ 的每个非空开集的基数都是 $\mathfrak{c}$，而 $\mathrm{int}(A_i) \neq \emptyset$ 至多对可数多个指标 $I \subseteq \alpha$ 成立，因为 ${}^{\omega}\omega$ 是第二可数的。

我们断言 $\mu'(\mathrm{int}(\bigcup_{i<\alpha} A_i)) = \mu'(\bigcup_{i<\alpha} \mathrm{int}(A_i))$。注意，对每个 $i < \alpha$，都有 $|A_i \setminus \mathrm{int}(A_i)| \leq \lambda$，因为 $\mathfrak{M}$ 是极小的。由于

$$\bigcup_{i<\alpha}(\mathrm{int}(A_i)) \subseteq \mathrm{int}(\bigcup_{i<\alpha} A_i) \subseteq \bigcup_{i<\alpha} A_i,$$

我们得到

$$|\mathrm{int}(\bigcup_{i<\alpha} A_i) \setminus \bigcup_{i<\alpha} \mathrm{int}(A_i)| \leq |\bigcup_{i<\alpha}(A_i \setminus \mathrm{int}(A_i))| \leq \sum_{i<\alpha} |A_i \setminus \mathrm{int}(A_i)| \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda.$$

由于 $\mathrm{int}(\bigcup_{i<\alpha} A_i)$和 $\bigcup_{i<\alpha}\mathrm{int}(A_i)$都是 ${}^{\omega}\omega$ 中的开集，$\lambda < \mathfrak{c}$，且 ${}^{\omega}\omega$ 的博雷尔子集具有完美集性质，因此我们有

$$|\mathrm{int}(\bigcup_{i<\alpha} A_i) \setminus \bigcup_{i<\alpha} \mathrm{int}(A_i)| \leq \omega,$$

因此 $\mu'(\mathrm{int}(\bigcup_{i<\alpha} A_i) \setminus \bigcup_{i<\alpha} \mathrm{int}(A_i)) = 0$以及 $\mu'(\mathrm{int}(\bigcup_{i<\alpha} A_i)) = \mu'(\bigcup_{i<\alpha} \mathrm{int}(A_i))$。因此，

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{i<\alpha} A_i) &= \mu'(\mathrm{int}(\bigcup_{i<\alpha} A_i)) = \\
&= \mu'(\bigcup_{i<\alpha} \mathrm{int}(A_i)) = \\
&= \mu'(\bigcup_{i\in I} \mathrm{int}(A_i)) = \\
&= \sum_{i\in I} \mu'(\mathrm{int}(A_i)) = \sum_{i<\alpha} \mu(A_i),
\end{aligned}$$

如所需。 □

这证明，若 $\lambda < \mathfrak{c}$ 且 $\kappa = \omega$，则存在一个连续的极小λ^+-测度结构（${}^{\omega}\omega$，$\mathfrak{M}$，μ）。注意，${}^{\omega}\omega$在 ${}^{\kappa}\lambda$中是闭的。这意味着（${}^{\kappa}\lambda$，$\mathfrak{M} \upharpoonright {}^{\kappa}\lambda$，$\mu \upharpoonright {}^{\kappa}\lambda$）是一个弱 λ^+-测度空间，由引理 4.20可知，且 $\mathrm{supp}(\mu \upharpoonright {}^{\kappa}\lambda) = {}^{\omega}\omega$，因此 μ 是 ω_1-狄拉克测度，因为 ${}^{\omega}\omega$是第二可数的。它也

很容易验证（ ${}^{\kappa}\lambda$， $\mathfrak{M}\uparrow{}^{\kappa}\lambda$， $\mu\uparrow{}^{\kappa}\lambda$）也是连续的，因为（ ${}^{\omega}\omega$， $\mathfrak{M}$， μ）是连续的。证明完毕。□

值得注意的是，命题5.3 中得到的测度源自波兰空间上的经典测度，并通过运算延拓到整个空间 ${}^{\kappa}\lambda\uparrow$，定义见4.17。显然，同样的构造也可以从任意一个取值于不同于 ω^+ 的幺半群中的 $\mathbb{R}_\infty$-测度出发。由此自然引出一个问题：是否还有其他可能性？这个问题可以分解为两个独立的问题：每个 λ-狄拉克 λ^+-测度是否必然是ω_1-狄拉克测度？每个 ω_1-狄拉克弱 λ^+-测度空间是否都由某个“小”子空间上的测度诱导？

我们预计，接下来几节的结果将对第一个问题给出肯定的回答： ω_1-狄拉克测度基本上是唯一存在的连续 λ-狄拉克测度，而且只有在 $\omega<\lambda<\mathfrak{c}$时才存在。事实上，一方面，若 $\lambda\geq\mathfrak{c}$，则根据定理 λ，连连续的 λ^+-狄拉克1.3-测度也不存在。另一方面，若 $\lambda<\mathfrak{c}$，则每个连续 λ^+-测度都是其核上互不相交的ω_1-狄拉克 λ^+-测度之和，见推论6.11。

在下文中，我们也将对第二个问题给出肯定的回答，即我们将证明，每个 ω_1-Dirac 弱 λ^+-测度空间都“实质上”由某个“较小”子空间上的测度诱导而来。不过，为了陈述这一点，我们首先需要明确每个概念：必须说明我们所针对的较小空间属于哪一类（可分、第二可数或波兰空间），说明我们在这个较小子空间上考虑哪一类测度（ ω^+-测度或 λ^+-测度），以及说明“实质上”的含义。

我们首先给出一个形式化定义，并将其与其他可能性进行比较。

定义 5.4。给定一个子空间 $Y\subseteq X$，如果存在一个弱 λ^+-测度空间 $(Y,\ \mathfrak{N},\ \nu)$，使得$\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}\uparrow X$ 且 $\mu\subseteq\nu\uparrow X$，则称弱 λ^+-测度空间 $(X,\ \mathfrak{M},\ \mu)$ 是 Y**-诱导的**。

我们称 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 为**可数诱导**的，如果它对某个可分子空间 $Y\subseteq X$ 是 Y-诱导的。

根据引理 4.19，结构 $(Y,\mathfrak{N},\nu)$ 总可以恰好取为 $(Y,\mathfrak{M}\downarrow Y,\mu\downarrow Y)$。确实，假设 $Y\subseteq X$，并且 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 和 $(Y,\mathfrak{N},\nu)$ 是满足 $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}\uparrow X$ 和 $\mu\subseteq\nu\uparrow X$ 的弱 λ^+-测度空间。那么 Y 在 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 中是本质零的。因此 $\mathfrak{M}\downarrow Y\subseteq(\mathfrak{N}\uparrow X)\downarrow Y=\mathfrak{N}$ 且 $\mu\downarrow Y\subseteq(\nu\uparrow X)\downarrow Y=\nu$，这表明 $(Y,\mathfrak{M}\downarrow Y,\mu\downarrow Y)$ 本身是一个弱 λ^+-测度空间，而且 $\mathfrak{M}\subseteq(\mathfrak{M}\downarrow Y)\uparrow X$ 和 $\mu\subseteq(\mu\downarrow Y)\uparrow X$。

注 5.5。设 $Y\subseteq X$，令 $(X,\ \mathfrak{M},\ \mu)$ 为弱 λ^+-测度空间。则当且仅当 $(Y,\ \mathfrak{M}\downarrow Y,\ \mu\downarrow Y)$ 是弱 λ^+-测度空间时，$(X,\ \mathfrak{M},\ \mu)$ 是 Y-诱导的。

特别地，来自 Y 上的经典测度的可数诱导弱 λ^+-测度空间 $(X,\ \mathfrak{M},\ \mu)$，是指其中 μ 取值于 $\mathbb{S}=\mathbb{R}_\infty$，且 $\mu\downarrow Y$ 可以扩展为包含 $\mathfrak{M}\downarrow Y$ 的 σ-代数的那些空间。

在定义5.4中，我们使用稠密度（可分）来衡量“小”的程度。不过，我们也可以等价地使用权（第二可数），甚至使用胞腔度，依据是命题2.3。此外， ${}^{\kappa}\lambda$的每个第二可数子空间都同胚于 Baire 空间 ${}^{\omega}\omega$的一个子空间。当 $\kappa>\omega$时，这是因为 ${}^{\kappa}\lambda$是 ω_1-可加的，因此它的所有第二可数子空间必然都是可数且离散的；当 $\kappa=\omega$ 时，则 ${}^{\kappa}\lambda$及其所有子空间

都是可度量且零维的，因此结论可由例如[Kec95，定理 78]推出。总之，我们得到如下结果。

注 5.6。 对于 $Y \subseteq {}^{\kappa}\lambda$，以下各项等价：

- Y 是可分的，
- Y 是第二可数的，
- Y 与 ${}^{\omega}\omega$的一个子空间同胚。

特别地，弱 λ^{+}-测度空间（X，$\mathfrak{M}$，μ）是可数诱导的，当且仅当它是由某个第二可数子空间 $Y \subseteq X$诱导的 Y，也当且仅当它是由某个子空间 $Y \subseteq {}^{\omega}\omega$及嵌入 $f\colon\ Y \to X$诱导的$f[Y]$。

关于 X中 Y 的复杂度选择，我们有如下结果。

命题 5.7. 设（X，$\mathfrak{M}$，μ）是连续的弱 λ^{+}-测度空间。那么，（X，$\mathfrak{M}$，μ）是可数诱导的，当且仅当它是由某个可分闭 $Y \subseteq X$诱导的 Y。

特别地，若 X 在 ${}^{\kappa}\lambda$中是 G_{δ}，那么（X，$\mathfrak{M}$，μ）是可数诱导的，当且仅当它是由一个波兰空间 子空间 $Y \subseteq X$诱导的 Y。

证明。 设 $Y \subseteq X$是一个可分子空间，使得 $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ 是一个弱 λ^{+}-测度空间，并且 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \uparrow X$ 且 $\mu \subseteq \nu \uparrow X$。那么，cl($Y$) 也是可分的。此外，根据 4.17 中关于 $\uparrow$ 的定义，我们得到 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \uparrow X = (\mathfrak{N} \uparrow \mathrm{cl}(Y)) \uparrow X$ 且$\mu \subseteq \nu \uparrow X = (\nu \uparrow \mathrm{cl}(Y)) \uparrow X$。

因此，要证明命题的第一部分，只需验证 $(\mathrm{cl}(Y)\ \mathfrak{N} \uparrow \mathrm{cl}(Y)\ \nu \uparrow \mathrm{cl}(Y))$ 是一个弱 λ^{+}-测度空间。由引理 4.20，可得公理 (M1)-(M4) 均成立。现在，对于每个 $x \in \mathrm{cl}(Y)$，由于 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是连续的，我们有 $x \in \mathfrak{M}$ 且 $\mu(x) = 0$，因此

$$\mu(x) = \inf_{i<\gamma} \mu(A_i) = \inf_{i<\gamma} (\nu \uparrow \mathrm{cl}(Y))(A_i)$$

对于每个序型为 $\{A_i \mid i < \gamma\}$ 的 x 处的（开）局部基 $\gamma < \lambda^{+}$，且公理 (M5)如期成立。

对于该陈述的第二部分，注意每个可数离散空间都是波兰空间。因此，当 $\kappa > \omega$ 时，$X \subseteq {}^{\kappa}\lambda$的任何可分子空间都是波兰空间。若$\kappa = \omega$ 且 X 在 G_{δ} 中是 ${}^{\omega}\lambda$，那么 X 的每个闭子空间在 G_{δ} 中也 ${}^{\omega}\lambda$，因而也是波兰空间（例如参见 [Eng89，定理 4.3。23]）。□

我们注意到，对于 γ-狄拉克测度，我们也可以放宽对小权子集复杂度的假设。

命题 5.8。 设$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^{+}-测度空间，且 γ是一个基数。那么， μ 是 γ-狄拉克测度，当且仅当存在一个子空间 $Y \subseteq X$ （不一定是闭的），其权为 $w(Y) < \gamma$，使得 $X \setminus Y$可测且 $\mu(X \setminus Y) = 0$。

证明。 若 μ 是 γ-Dirac，则 supp(μ) $\subseteq X$ 的权为 $w(\mathrm{supp}(\mu)) < \gamma$，根据定义，并且 $X \setminus \mathrm{supp}(\mu)$ 是可测的，因为它是开集，因此 $\mu(X \setminus Y) = 0$ 由推论 4.8。

另一方面，给定权为 w（Y）$< \gamma$ 的子空间 $Y \subseteq X$，使得 $X \setminus Y$ 可测且 μ（$X \setminus Y$）$= 0$，我们有 $X \setminus$cl(Y) 也是可测的，因为它是开集，并且根据公理（M3），μ（$X \setminus$cl(Y)）$\leq \mu$（$X \setminus Y$）$= 0$。由于 ${}^{\kappa}\lambda$ 的任意子空间的权与稠密度相同（由命题 2.3 可知），且任意集合与其闭包的稠密度相同，因此我们得到 w(cl(Y)) $= d$(cl(Y)) $= d$（Y）$= w$（Y）$< \gamma$。 $X \setminus$ cl(Y) 是一个零测度开集，这一事实意味着 supp(μ) $\subseteq$ cl(Y)，因此 w(supp(μ)) $\leq w$(cl(Y)) $< \gamma$，正如所需。□

最后，关于在 ω^+-测度与 λ^+-测度之间如何选择，见定义 5.4，请注意我们采用了限制更严格的概念，因为每个 λ^+-测度自动也是一个 ω^+-测度。因此，证明每个 ω_1-狄拉克测度都由某个可分 Y-弱 λ^+-测度空间诱导 $Y \subseteq X$，比证明每个 ω_1-狄拉克测度都“Y-由某个ω^+-弱测度空间诱导”，其中该空间对应某个可分子空间 $Y \subseteq X$，更具信息量。

不过，我们注意到，对于 λ^+-可划分弱 λ^+-测度空间，这两种选择是等价的。

命题 5.9. 设$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个 λ^+-可划分弱 λ^+-测度空间。那么$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是可数诱导的，当且仅当存在某个 $Y \subseteq X$ 对应的弱 ω^+-测度空间$(Y, \mathfrak{N}, \nu)$，使得 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \uparrow X$ 且 $\mu \subseteq \nu \uparrow X$。

证明。一个方向显然成立，因为每个弱 λ^+-测度也自动是弱ω^+-测度。因此，假设存在某个 $Y \subseteq X$ 对应的弱 ω^+-测度空间$(Y, \mathfrak{N}, \nu)$，使得 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \uparrow X$ 且 $\mu \subseteq \nu \uparrow X$。令 $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M} \downarrow X$，根据假设可得 $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$和 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}' \uparrow X$。因此，只需证明$(Y, \mathfrak{N}', \nu)$是一个弱 λ^+-测度空间。

由于 $\mathfrak{M}$ 在大小为 λ的并运算下封闭，因此 $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M} \downarrow Y$也如此，故 $(Y, \mathfrak{N}')$ 是一个弱 λ^+-可测空间。此外，ν 满足公理 (M1)-(M3) 和公理（M5），因为它是一个 ω^+-测度。因此，我们只需验证公理（M4）。设 $(A_i)_{i<\gamma}$ 是 $\mathfrak{N}'$ 中一个长度为 $\gamma < \lambda^+$的互不相交集族。于是，存在 $\mathfrak{M}$中的集合族 $(A'_i)_{i<\gamma}$，使得对每个 $i < \gamma$，都有 $A'_i \cap Y = A_i$。由于 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 可 λ^+- 划分，且 $\gamma < \lambda^+$，因此存在一个由 $\mathfrak{M}$ 中大小为$|\mathcal{P}| < \lambda^+$ 的互不相交集合组成的族 $\mathcal{P}$，它细化 $\{A'_i \mid i < \gamma\}$。令 $\mathcal{P}_0 = \{P \in \mathcal{P} \mid P \cap Y \subseteq A_0\}$，并且对于 $0 < i < \gamma$，令 $\mathcal{P}_i = \{P \in \mathcal{P} \mid P \cap Y \subseteq A_i, P \cap Y \neq \emptyset\}$。由于 $\mathcal{P}$和 $\{A_i = A'_i \cap Y \mid i < \gamma\}$均由互不相交的集合组成，且 $\mathcal{P}$ 细化 $\{A'_i \mid i < \gamma\}$，因此 $\{\mathcal{P}_i \mid i < \gamma\}$ 是 $\mathcal{P}$和 $\bigcup \mathcal{P}_i \cap Y = A_i$的一个划分。因此，

$$\nu(\bigcup_{i<\gamma} A_i) = \nu(\bigcup \mathcal{P} \cap Y) = \mu(\bigcup \mathcal{P}) = \sum_{i<\gamma} \mu(\bigcup \mathcal{P}_i) = \sum_{i<\gamma} \nu(\bigcup \mathcal{P}_i \cap Y) = \sum_{i<\gamma} \nu(A_i)$$

正如所需。 □

不对 $\mathfrak{M}$ 作任何假设，我们就不能指望一个（ω_1-Dirac）弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$是可数诱导的，原因很简单：弱 λ^+-可测空间在添加集合方面有太大的自由度：我们总能通过向可测结构 $\mathfrak{M}$ 中添加集合来“弄脏”它，使其无法限制到任何可分子集上。

命题 5.10。假设 $\omega < \lambda < \mathfrak{c}$。那么，存在一个定义在 ${}^{\omega}\lambda$上的 ω_1-*Dirac*、连续弱 λ^+-测度空间$({}^{\omega}\lambda, \mathfrak{M}, \mu)$，它不是可数诱导的。

证明。由命题 5.3 及其证明可知，存在一个定义在 $X = {}^{\omega}\lambda$上的 ω_1-Dirac 弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$，使得 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{\lambda}_p({}^{\omega}\omega) \uparrow X$是定义在 X上的极小 λ^+-可测结构 $\mathfrak{M}^{\lambda}_p({}^{\omega}\omega)$在 ${}^{\omega}\omega$上的扩张，它测量了 ${}^{\omega}\omega$中的所有点；并且对于每个 $M \in \mathfrak{M}$，都有 $\mu(M) = \mu_c(\text{int}_{{}^{\omega}\omega}(M \cap {}^{\omega}\omega))$，其中 μ_c 是 ${}^{\omega}\omega$上的经典测度。

令 $D_0 \subseteq {}^{\omega}\omega$为一个（伯恩斯坦）集合，使得对每个不可数闭 $C \subseteq {}^{\omega}\omega$，都有 $|D_0 \cap C| = |C \setminus D_0| = \mathfrak{c}$。其构造方式与经典伯恩斯坦集相同（例如参见 [Kec95, 例 8。24]）：令 $\{C_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ 为一个枚举，$\mathfrak{c}$次列出每个不可数闭子集 ${}^{\omega}\omega$。选取

递归地选取元素 a_ξ，$b_\xi \in C_\xi$ 使得这些点两两不同。于是$D_0 = \{a_\xi \mid \xi < \mathfrak{c}\}$ 满足要求。

设 $D_1 = {}^\omega\omega \setminus D_0$，则对每个不可数闭 $C \subseteq {}^\omega\omega$，我们也有 $|D_1 \cap C| = |C \setminus D_1| = \mathfrak{c}$。设 $D_2 = {}^\omega\omega$，并定义

$$\mathcal{D} = \{({}^\omega\lambda \setminus Y) \cup D_i \mid i \in \{0,1,2\}, {}^\omega\omega \subseteq Y \subseteq {}^\omega\lambda, Y \text{ separable}\}.$$

于是 $\mathcal{D}$ 对任意并封闭，因此

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cup \{D \cup M \mid M \in \mathfrak{M}, D \in \mathcal{D}\}$$

是 λ^+ 上的弱 λ^+-可测结构。

对每个 $M \in \mathfrak{M}'$，定义 $\mu'(M) = \mu(\text{int}_{{}^\omega\omega}(M \cap {}^\omega\omega))$。注意，这样一来，对每个 $M \in \mathfrak{M}$，我们都有 $\mu'(M) = \mu(M)$。容易验证，μ' 满足公理 (M1)-(M2) 和公理（M5），因为 μ 满足这些公理。此外，对于所有满足$A \subseteq B$的 A、$B \in \mathfrak{M}$，我们也有 $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$，因此 $\mu'(A) = \mu(\text{int } A) \leq \mu(\text{int } B) = \mu'(B)$，公理（M3）成立。

为证明公理（M4），首先我们声称，对于每个 $M \in \mathfrak{M}$ 和 $i \in \{0,1\}$，都有 $\mu'(M \cup D_i) = \mu(M)$。根据 μ' 的定义，这相当于验证：对于 $A = \text{int}_{{}^\omega\omega}((M \cup D_i) \cap {}^\omega\omega)$ 和 $B = \text{int}_{{}^\omega\omega}(M \cap {}^\omega\omega)$，有 $\mu(A) = \mu(B)$。令 F 为满足以下条件的点 $x \in {}^\omega\omega \setminus B$ 的集合：存在 x 在 ${}^\omega\omega$ 中的开邻域 V，使得 $|V \setminus B| \leq \omega$。由于 ${}^\omega\omega$ 是第二可数的，F 可数。根据构造，若 $x \in {}^\omega\omega \setminus (F \cup B)$，则 x 在 ${}^\omega\omega$ 中的每个既开又闭邻域 V 都满足 $|V \setminus B| \geq \mathfrak{c}$。由于 $V \setminus B$ 在${}^\omega\omega$ 中是闭集，我们得到 $|(V \setminus B) \setminus D_i| \geq \mathfrak{c}$。由于对每个$M \in \mathfrak{M}$，都有 $|(M \cap {}^\omega\omega) \setminus \text{int}_{{}^\omega\omega}(M \cap {}^\omega\omega)| \leq \lambda < \mathfrak{c}$，根据极小 λ^+-测度空间的定义，我们得到 $|(V \setminus M) \setminus D_i| \geq \mathfrak{c}$。因此，$V$ 不包含于 $M \cup D_i$。由于这对 x 的任意既开又闭邻域都成立，且 ${}^\omega\omega$ 是零维的，我们得到 $x \notin A$。这表明$A \subseteq F \cup B$，因此 $|A \setminus B| \leq \omega$。于是，$\mu(A) = \mu(B)$，证毕。

现在令 $(A_i)_{i<\gamma}$ 为一个由长度为 $\gamma < \lambda^+$的不相交可测集构成的序列。注意，$\lambda > \omega$ 意味着 ${}^\omega\lambda$不可分，因此不存在来自 $\mathcal{D}$的两两不相交集合。因此，$(A_i)_{i<\gamma}$ 中至多有一个集合属于 $\mathfrak{M}' \setminus \mathfrak{M}$：不失一般性，假设 $A_0 \in \mathfrak{M}' \setminus \mathfrak{M}$。由于 $A_0 \notin \mathfrak{M}$，根据 $\mathfrak{M}$和 $\mathfrak{M}'$的定义，我们得到，对于某个 $i \in \{0,1\}$ 和 $A_0 \in \mathfrak{M}$，有 $A_0 = A_0' \cup D_i$。于是，$\bigcup_{i<\alpha} A_i = A_0' \cup \bigcup_{0<i<\alpha} A_i \cup D_i$，从而

$$\mu'(\bigcup_{i<\alpha} A_i) = \mu'(A_0' \cup \bigcup_{0<i<\alpha} A_i \cup D_i) = \mu(A_0' \cup \bigcup_{0<i<\alpha} A_i)$$

根据前面的论证，并且由于 $A_0' \cup \bigcup_{0<i<\alpha} A_i \in \mathfrak{M}$。由于 μ 是一个λ^+-测度，且 $\{A_0'\} \cup \{A_i \mid 0 < i < \gamma\}$ 仍然是 $\mathfrak{M}$中的一族不交开集，因此公理(M4) 成立。

最后，注意到 $\text{supp}(\mu') = \text{supp}(\mu) = {}^\omega\omega$，因此 μ' 仍然是 ω_1-Dirac。然而，对于任意可分子空间 $Y \subseteq {}^\omega\lambda$（尤其是对于 $Y = \text{supp}(\mu')$），我们有 $(Y, \mathfrak{M} \downarrow Y, \mu \downarrow Y)$ 不可能是弱 λ^+-测度空间。这是因为$A_0 = ({}^\omega\lambda \setminus ({}^\omega\omega \cup Y)) \cup D_0$ 和 $A_1 = ({}^\omega\lambda \setminus ({}^\omega\omega \cup Y)) \cup D_1$ 满足 $A_0 \downarrow Y = D_0$和 $A_1 \downarrow Y = D_1$ 互不相交，但同时有 $\mu(A_0) = \mu(A_1) = 0$以及 $\mu(A_0 \cup A_1) = \mu({}^\omega\omega) > 0$（并且对于每个满足$M \cap Y = (A_0 \cup A_1) \cap Y = {}^\omega\omega$ 的 $M \in \mathfrak{M}$，都有 $\mu(M) = \mu({}^\omega\omega) > 0$）。因此 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 不是可数诱导的。□

不过，这并非真正的障碍，因为显然，即使是命题 λ^+5.10 中的弱 X-测度空间（$\mathfrak{M}$, μ, ）也“本质上”是可数诱导的，因为其核是可数诱导的。更一般地，我们将证明，如果（X，$\mathfrak{M}$，μ）是λ-可划分的，那么它是 ω_1-狄拉克的，当且仅当它是可数诱导的。

命题 5.11。设（X， $\mathfrak{M}$， μ）是一个连续的 λ^+-可划分弱 λ^+-测度空间。那么，以下条件等价：

(a) $(X$、 $\mathfrak{M}$、 $\mu)$ 是可数诱导的。(

b) $(X$、 $\mathfrak{M}$、 $\mu)$ 是 ω_1-*Dirac* 测度。

证明。首先，假设 $(X$、 $\mathfrak{M}$、 $\mu)$ 是可数诱导的。根据命题 5.7，存在一个闭、可分的 $Y \subseteq X$ 以及一个弱 λ^+-测度空间 $(Y$、 $\mathfrak{N}$、 $\nu)$，使得 $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \uparrow X$，并且 $\mu \subseteq \nu \uparrow X$。于是， $X \setminus Y$是开集，因而可测，并且 $\mu(X \setminus Y) = 0$，因此 $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq Y$。根据注 5.6，我们得到 $\mathrm{supp}(\mu)$ 是第二可数的，正如所要求的。

反之，假设 $Y = \mathrm{supp}(\mu)$ 是第二可数的，因而是可分的。由于 $(X$、 $\mathfrak{M}$、 $\mu)$ 是连续的，特别地， $\mathfrak{M}$ 测度 X 中的所有点。根据推论 4.8，我们得到 $X \setminus Y$的测度为 0，因此根据推论 4.24，$(Y$、 $\mathfrak{M} \downarrow Y$、 $\mu \downarrow Y)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。根据推论 4.6 和引理 4.11，我们有 $X \setminus Y$ 是本质零的。于是，根据引理 4.19，包含关系 $\mathfrak{M} \subseteq (\mathfrak{M} \downarrow Y) \uparrow X$ 和 $\mu \subseteq (\mu \downarrow Y) \uparrow X$ 成立。□

由于连续 ω_1-Dirac 弱 λ^+-测度空间的核是一个连续的ω_1-Dirac 极小 λ^+-测度空间，且根据命题 4.15，每个极小 λ^+-测度空间都是 λ^+-可划分的，因此得到以下结论。

推论 5.12。 每个连续 ω_1-*Dirac* 弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$都具有一个可数诱导核 $\ker(X, \mathfrak{M}, \mu)$。

5.2. **非连续和幺半群的可能性定理**。 在定理 1.3中，我们使用满足公理 (S1)和 (S2) 的无穷和。显然，公理 (S1)不可省略。下面我们将证明公理(S2) 也不可省略。

仅在本小节中，为了方便并稍微滥用一下记号，我们将弱 λ^+-测度空间也用于称呼三元组 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$，即使它满足弱 λ^+-测度空间的所有公理和要求，唯独 $\mu : \mathscr{P}(X) \to (\mathbb{S}, \mathsf{Sum})$ 的取值属于一个正全序幺半群 $\mathbb{S}$，其上的函数 Sum 不一定满足公理 (S2)。请注意，对于这样的测度，我们无法应用在第 4 节中建立的工具。

首先，在没有公理 (S2)的情况下，存在具有 $^{\kappa}\lambda$且拥有 λ^+-测度的子空间。

命题 5.13。 存在一个正全序幺半群 $\mathbb{S}$，其具有无穷元函数 Sum ，满足公理(S1) 但不满足公理 (S2)；还存在一个子空间 $X \subseteq {}^{\kappa}\lambda$，其上存在连续弱 λ^+-测度结构 $(X$， $\mathfrak{M}$， $\mu)$。

证明。令 $X \subseteq {}^{\kappa}\lambda$为 $^{\kappa}\lambda$的一个无限离散子空间。考虑 $\mathbb{R}_\infty$的子幺半群$\mathbb{S} = \{0, \infty\}$。给定 $\bar{b} \in {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S}$，当 $\bar{b}$ 为有限集且恒等于 0 时，定义 $\mathrm{Sum}(\bar{b}) = 0$；否则定义 $\mathrm{Sum}(b) = \infty$。定义 $\mu : \mathscr{P}(X) \to \mathbb{S}$：当 M为有限集时，令 $\mu(M) = 0$；否则令 $\mu(M) = \infty$。于是，很明显， μ 满足公理（M1）-（M3）；由于每个点都是开集，它也显然满足公理（M5）。此外，按照 Sum 的定义， μ满足公理（M4）。因此，$(X, \mathscr{P}(X)$ $\mu)$ 是一个（弱）λ^+-测度空间。□

命题中构造的测度5.13 在多个方面都具有病态性质，其中之一是它属于 1-狄拉克：每个 X 的点都有一个测度为 0 的开邻域，因此 $\mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$。仅凭这一观察，或许就足以说明应排除具有非连续函数 Sum 的幺半群。

尽管如此，为求完整，我们也会分析在将注意力限制于非狄拉克测度，或限制于 $X = {}^{\kappa}\lambda$ 上的测度时会发生什么。

首先，命题 5.13 中的论证无法推广到整个空间${}^{\kappa}\lambda$，因为这个空间上不存在 1-狄拉克测度。

命题 5.14。假设 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$。设 $\mathbb{S}$ 是一个带有无穷元函数 Sum 的正全序幺半群，且满足公理(S1)（但不一定满足公理(S2)）。那么，不存在定义在1-狄拉克连续弱 λ^+ 测度结构 ${}^{\kappa}\lambda$。

证明。反设 $({}^{\kappa}\lambda, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个连续的 1-狄拉克弱 λ^+-测度结构。特别地，族 $\mathcal{V} = \{V \in \tau \mid \mu(V) = 0\}$ 是 ${}^{\kappa}\lambda$ 的一个覆盖。根据事实 2.1，设 $\mathcal{P}$ 是 ${}^{\kappa}\lambda$ 的一个细化 $\mathcal{V}$ 的划分。于是，对每个 $P \in \mathcal{P}$，由公理（M3）可得 $\mu(P) = 0$，并且 $|\mathcal{P}| \leq \lambda$，因为我们假设 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$。不失一般性，不妨设 $|\mathcal{P}| = \lambda$，例如，可以将 $\mathcal{P}$ 中的一个既开又闭锥拆分为其后继。

由公理 (M2)和 (M4)，我们得到

$$0 < \mu({}^{\kappa}\lambda) = \mu\Big(\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P\Big) = \mathsf{Sum}((0)_{i<\lambda}),$$

因此 $\mathsf{Sum}((0)_{i<\lambda}) > 0$。另一方面，若 $s \in {}^{<\kappa}\lambda$满足 $\mathbf{N}_s \in \mathcal{P}$，则由公理 (M3) 可得 $\mu(\mathbf{N}_s{}^\frown\alpha) = 0$ 对每个 $\alpha < \lambda$ 都成立。由公理 (M4)，可得

$$0 = \mu(\mathbf{N}_s) = \mu\Big(\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbf{N}_{s^\frown\alpha}\Big) = \mathsf{Sum}((0)_{i<\lambda}),$$

矛盾。 □

注意，命题 5.13 与 5.14 之间的对比也表明，我们在第 4 节中得到的结果——如引理 4.20 ——一般不能应用于不满足公理 Sum 的函数 (S2)。

将讨论范围限定为非狄拉克测度，接下来的结果表明，当$\lambda = \lambda^{\kappa}$时，即使不假设 Sum 连续，也不存在非狄拉克连续弱 λ^+-测度空间。

命题 5.15。假设 $\lambda = \lambda^{\kappa}$。令 $X \subseteq {}^{\kappa}\lambda$，并令 $\mathbb{S}$ 为一个带有无穷元函数 Sum 的正全序幺半群，该函数满足公理(S1)(但不一定满足公理(S2))。那么，在1上不存在非 λ^+-狄拉克连续弱测度结构 X。

证明。反设 μ 是 X 上一个连续的非 1-狄拉克测度，即 X 的所有点都是可测的，且测度为零，并且 $\mathsf{supp}(\mu) \neq \emptyset$。令 $x \in \mathsf{supp}(\mu)$。令 $\delta =$ 为 $x\}$ 的最小开邻域 $\{|A| \mid A$。注意，对于 x 的每个开邻域 A，都有 $|A| \leq |{}^{\kappa}\lambda| = \lambda$，由 $\lambda = \lambda^{\kappa}$ 可知。此外，由 $x \in \mathsf{supp}(\mu)$ 可知，$\mu(A) > 0$。因此，

$$\mu(A) = \mathsf{Sum}((0)_{i<|A|}) > 0$$

由公理 (M4)。特别是，这表明 $\mathsf{Sum}((0)_{i<\delta}) > 0$。根据 δ的极小性，对于每个 B 关于 x 的开邻域，我们可以找到一个开集 $B' \subseteq B$ 使得$|B'| = \delta$，从而

$$\mu(B) \geq \mu(B') = \mathsf{Sum}((0)_{i<\delta}) > 0$$

由公理 (M3)。令 $(A_i)_{i<\kappa}$ 为 x 的一个长度为 κ 的局部基（例如 $A_i = \mathbf{N}^{x\restriction i}$对每个 $i<\kappa$）。根据前面的论证，我们得到

$$\inf_{i<\kappa} \mu(A_i) = \mathsf{Sum}((0)_{i<\delta}) > 0 = \mu(x).$$

由于假设 $\lambda = \lambda^\kappa$ 蕴含 $\kappa < \lambda$，这表明 μ 不满足公理(M5)，矛盾。□

特别是，命题 5.14 和5.15 共同表明，当 $\lambda = \lambda^\kappa$时， λ^+-测度结构在 ${}^\kappa\lambda$上根本不存在连续弱

推论 5.16. 假设 $\lambda = \lambda^\kappa$。令 $\mathbb{S}$ 为一个正全序幺半群，带有满足公理Sum 的无穷元函数 (S1) （但不一定满足公理 (S2)）。那么， λ^+-测度结构在 ${}^\kappa\lambda$上不存在连续弱测度结构。

在附加假设 $\lambda < \lambda^\kappa$ 下（当 $\kappa = \mathsf{cof}(\lambda$ 时这一假设总是成立，这是我们主要关注的情形），改用非连续函数 Sum 就可以在整个空间 ${}^\kappa\lambda$ 上获得测度。

定理 5.17. 假设 $\lambda^{<\kappa} = \lambda < \lambda^\kappa$。存在一个非$\lambda$-狄拉克、连续的弱$\lambda^+$-测度结构定义在 ${}^\kappa\lambda$上，其中某个正全序幺半群 $\mathbb{S}$带有一个无穷元函数Sum ，满足公理 (S1)，但不满足公理 (S2)。

证明。令 $X = {}^\kappa\lambda$。令 $\mathbb{L} = \kappa^* = \{\frac{1}{\alpha} \mid \alpha \in \kappa\}$ 为 κ 上的反序，即由以下规则给出的全序：若 $\alpha \geq \beta$，则 $-\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}$。于是， $\mathbb{L} = (\mathbb{L}, \max \leq)$ 是一个全序半群。

令 $\{s_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ 为 ${}^{<\kappa}\lambda$的一个良序。考虑带字典序和逐点求和的 $\mathbb{S}' = \mathbb{L} \times \mathbb{N}^\lambda$ （其中 $\mathbb{N} = (\omega, 0, +, \leq)$ 按照惯例表示自然数构成的正全序幺半群），并令 $\mathbb{S} = \mathbb{S}' \cup \{e\}$ 为通过向半群 $\mathbb{S}'$添加单位元 e（同时也是序中的最小元）得到的幺半群。于是

$$\mathbb{S} = (\{\frac{1}{\alpha} \mid \alpha \in \kappa\}, e, *, \leq)$$

是一个正全序幺半群。运算 $*$ 可以明确定义为

$$\left(\frac{1}{\alpha}, (n_\epsilon)_{\epsilon<\lambda}\right) * \left(\frac{1}{\beta}, (m_\epsilon)_{\epsilon<\lambda}\right) = \left(\frac{1}{\min(\alpha,\beta)}, (n_\epsilon + m_\epsilon)_{\epsilon<\lambda}\right)$$

且该序是字典序。注意，$\mathsf{Deg}(\mathbb{S}) = \kappa$，因为 $(\frac{1}{\alpha}, (0)_{\epsilon<\lambda})_{\alpha<\kappa}$在 $\mathbb{S}$中是严格递减且共初的。

对于每个开集 O，定义

$$\mathcal{EX}(O) = \mathcal{EX}_{\aleph_0}(O) = \bigcup\{\mathbf{N}_s \mid s \in {}^{<\kappa}\lambda, |\{\alpha < \lambda \mid \mathbf{N}_{s^\frown\alpha} \cap O \neq \emptyset\}| \geq \aleph_0\}$$

为 O 的 ($\aleph_0$-)展开[3] 。注意， $\mathcal{EX}(\mathcal{EX}(O)) = \mathcal{EX}(O) \supseteq O$，并且对于每个 $s \in {}^{<\kappa}\lambda$，$\mathcal{EX}(\mathbf{N}_s) = \mathbf{N}_s$。注意，

$$\mathcal{EX}(O_0 \cup \ldots \cup O_n) = \mathcal{EX}(O_0) \cup \ldots \cup \mathcal{EX}(O_n) \tag{5.1}$$

对于每个有限开集族 $\{O_0, \ldots, O_n\}$。令

$$h(O) = \min\{\beta \mid \mathbf{N}_s \subseteq O \text{ for some } s \in {}^\beta\lambda\}$$

[3] $\aleph_0$ 的选择是任意的：对于任意无限正则基数 $\delta \leq \lambda$，使用 $\mathcal{EX}_\delta(O)$也可以采用同样的论证。

为 O 的高度。令

$$\mathcal{A}(O)=\{s\in {}^{<\kappa}\lambda \mid \mathbf{N}_s\subseteq O\};$$

由此，$O=\bigcup_{s\in\mathcal{A}(O)}\mathbf{N}_s$。定义

$$\chi_O(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{if } s_\alpha\notin\mathcal{A}(O),\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

为 特征函数 $\mathcal{A}(O)$。注意，对于任意有限开集族 $\{O_1,...,O_n\}$ 以及任意 $\mathbf{N}_s\subseteq\bigcup_{i\le n}O_i$，存在 $i\le n$ 使得 $\mathbf{N}_s\subseteq\mathcal{EX}(O_i$。这与等式（5.1）共同推出

$$\chi_{O_1\cup...\cup O_n}=\chi_{O_1}+...+\chi_{O_n} \tag{5.2}$$

对于任意有限族不交开集 $\{O_1,...,O_n\}$，使得 $\mathcal{EX}(O_i)=O_i$ 对每个 $i\le n$ 均成立。

对于每个 $b=(\frac{1}{\alpha},(n_\epsilon)_{\epsilon<\lambda})\in\mathbb{S}$，令 $O(b)=\bigcup\{\mathbf{N}_{s_\epsilon}\mid n_\epsilon>0\}$（其中我们设为 $\bigcup\emptyset=\emptyset$）。于是显然

$$O\left(\frac{1}{\alpha},\chi_U\right)=U \tag{5.3}$$

对于每个开集 $U\in\tau$ 以及每个 $\alpha<\kappa$。

给定 $\bar{b}=(b_\epsilon)_{\epsilon<\nu}\in {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S}$，定义

$$\mathsf{Sum}(\bar{b})=\begin{cases}b_0*...*b_\nu & \text{if } \nu \text{ is finite},\\ \left(\frac{1}{h(\mathcal{EX}(\bigcup_{\epsilon<\nu}O(b_\epsilon)))},\chi_{\mathcal{EX}(\bigcup_{\epsilon<\nu}O(b_\epsilon))}\right) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

如果 $b=(\frac{1}{\alpha},(n_i)_{i<\lambda})\in\mathbb{S}$ 具有形式 $(h^{-1}(o),\chi_O)$，其中存在某个 $O\in\tau$ 使得 $O=\mathcal{EX}(O)$（必然有 $O=\mathcal{EX}(O(b))$），则称其为适当的。给定 $b=(b_\epsilon)_{\epsilon<\nu}\in {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S}$，对于每个 $\epsilon<\nu$，令 $b_\epsilon=(\frac{1}{\alpha_\epsilon},(n_i^\epsilon)_{i<\lambda})\in\mathbb{S}$ 表示 b 的 ϵ-坐标。如果每个 b_ϵ 都是适当的，并且对于每个 $\epsilon\neq\epsilon'$ 都有 $O(b_\epsilon)\cap O(b_{\epsilon'})=\emptyset$，则称 b 是良好的。

那么，由方程（5.1）和（5.2），我们得到

$$b_0*...*b_\nu=\left(\frac{1}{h(\mathcal{EX}(\bigcup_{\epsilon<\nu}O(b_\epsilon)))},\chi_{\mathcal{EX}(\bigcup_{\epsilon<\nu}O(b_\epsilon))}\right) \tag{5.4}$$

对每个有限的、良好的 $\bar{b}=(b_\epsilon)_{\epsilon<\nu}\in {}^{<\mathsf{On}}\mathbb{S}$。

注意，Sum 并不连续。例如，不失一般性地假设 $s_i=\langle i\rangle$ 对每个 $i<\omega$，并令 $A_\alpha=\bigcup_{i<\alpha}\mathbf{N}^{\langle i\rangle}$ 对每个 $\alpha\le\omega$。那么，我们有 $\mathcal{EX}(A_n)=A_n$ 对每个 $i\le n$（由方程（5.1）可得），而 $\mathcal{EX}(A_\omega)=X$。因此，我们得到

$$\mathsf{Sum}_{i<\omega}\,s_i=\left(\frac{1}{h(X)},\chi_X\right)=\left(\frac{1}{0},(1)_{i<\lambda}\right),$$

$$\sup_{n<\omega}\mathsf{Sum}_{i<n}\,s_i=\sup_{n<\omega}\left(\frac{1}{h\left(A_n\right)},\chi_{A_n}\right)=\left(\frac{1}{h\left(A_\omega\right)},\chi_{A_\omega}\right)=\left(\frac{1}{1},\chi_{A_\omega}\right).$$

现在我们证明，存在一个连续的弱 λ^+-测度结构（X，$\mathfrak{M}$，μ），其中测度取值于 $\mathbb{S}$，并使用我们定义的（非连续！）求和 Sum。

令 $\mathfrak{M}$ 为 X 上的极小 λ^+-可测结构，它测量 X的所有点和开集。我们定义测度 $\mu:\mathfrak{M}\to\mathbb{S}$，规定对于每个满足 $\mathsf{int}(M)=\emptyset$的$M\in\mathfrak{M}$，$\mu(M)=e$，并且

$$\mu(M)=\left(\frac{1}{h\left(\mathcal{EX}\left(\mathrm{int}(M)\right)\right)},\chi_{\mathcal{EX}(\mathrm{int}(M))}\right)$$

对于其他每个 $M\in\mathfrak{M}$。根据定义可知，对于每个满足 $\mathsf{int}(M)\neq\emptyset$ 的 $M\in\mathfrak{M}$，$\mu(M)$ 都是适当的。

我们声称 μ 正如所需。

事实上，公理 (M1)-(M2) 根据定义成立。

公理 (M3) 源于以下事实：$\mathcal{EX}(U)\subseteq\mathcal{EX}(V)$, $\chi_U\leq\chi_V$，以及 $h(U)\geq h(V)$ 在 $U\subseteq V$ 时成立。

为了证明公理 (M4)，首先注意，给定两个开集 O，U，我们有 $O\cap U=\emptyset$ 或 $|O\cap U|=\lambda^\kappa>\lambda$。因此，若 O 和 U 与一个大小为 $\leq\lambda$ 的集合不同，则有 $\mathcal{EX}(O)=\mathcal{EX}(U)$。特别地，这表明

$$\mu(O\cup D)=\mu(O)=\mu(O)*e=\mu(O)*\mu(D) \tag{5.5}$$

对于每个开集 O 以及每个与 O 不相交、大小为 $\leq\lambda$ 的集合 D。

其次，注意到

$$\mathcal{EX}(\bigcup_{\alpha<\gamma}O_\alpha)=\mathcal{EX}(\bigcup_{\alpha<\gamma}\mathcal{EX}(O_\alpha)) \tag{5.6}$$

对于每个开集族 $\{O_\alpha\mid\alpha<\gamma\}$。包含关系 $\subseteq$ 显然成立。对于另一个包含关系 $\supseteq$，注意到 $\mathcal{EX}(\bigcup_{\alpha<\gamma}O_\alpha)\supseteq\bigcup_{\alpha<\gamma}\mathcal{EX}(O_\alpha)$，因此

$$\mathcal{EX}(\bigcup_{\alpha<\gamma}O_\alpha)=\mathcal{EX}(\mathcal{EX}(\bigcup_{\alpha<\gamma}O_\alpha))\supseteq\mathcal{EX}(\bigcup_{\alpha<\gamma}\mathcal{EX}\left(O_\alpha\right)),$$

如所需。

现在，给定一个长度为 $\gamma<\lambda^+$ 的互不相交可测集族 $(A_\alpha)_{\alpha<\gamma}$，令$O_\alpha=\mathsf{int}(A_\alpha)$，令 $O=\bigcup_{\alpha<\gamma}O_\alpha$ 和 $M=\bigcup_{\alpha<\gamma}A_\alpha$。根据 $\mathfrak{M}$ 的定义，我们有$|M\setminus O|\leq\lambda$，因此由方程（5.5）可得 $\mu(M)=\mu(O)$。由于这些 A_α 互不相交，且$\mu(A_\alpha)$ 对每个 $\alpha<\gamma$ 都是适当的，由方程（5.3）可知 $(\mu(A_\alpha))_{\alpha<\gamma}$是良好的。因此，若 γ 是无限的，则应用 Sum 的定义；若 γ 是有限的，则应用方程（5.4），并利用方程（5.6）和（5.3），得到

$$\begin{aligned}
\mu(M)=\mu(O)=&\\
&=\left(\frac{1}{h(\mathcal{EX}(O))},\chi_{\mathcal{EX}(O)}\right)=\\
&=\left(\frac{1}{h(\mathcal{EX}(\bigcup_{\alpha<\gamma}O_\alpha))},\chi_{\mathcal{EX}(\bigcup_{\alpha<\gamma}O_\alpha)}\right)=\\
&=\left(\frac{1}{h(\mathcal{EX}(\bigcup_{\alpha<\gamma}\mathcal{EX}(O_\alpha)))},\chi_{\mathcal{EX}(\bigcup_{\alpha<\gamma}\mathcal{EX}(O_\alpha))}\right)=\\
&=\mathsf{Sum}_{\alpha<\gamma}\left(\frac{1}{h(\mathcal{EX}(O_\alpha))},\chi_{\mathcal{EX}(O_\alpha)}\right)=\\
&=\mathsf{Sum}_{\alpha<\gamma}\,\mu(A_\alpha)
\end{aligned}$$

这证明了公理 (M4)。

对于公理 (M5)，只需注意到，对每个 $x \in X$，我们都有 $(\mu(\mathbf{N}^{x\restriction\alpha}))_{\alpha<\kappa} = (\frac{1}{\alpha}, \chi_{\mathbf{N}_{x\restriction\alpha}})_{\alpha<\kappa}$ 在 $\mathbb{S}^+$中共初。

最后，注意到对于每个非空开集，$\mu(O) \neq e$，因此 $\mathrm{supp}(\mu) = {}^{\kappa}\lambda$。由于 ${}^{\kappa}\lambda$的权为 λ，我们得到 μ 不是 λ-Dirac，正如所需。□

从某种意义上说，这一结果指向了与定理 1.3相反的方向，似乎表明在这种情形下可以定义某些类似测度的对象。然而，定理 5.17 与其说应当与定理1.3相比较，不如说应当与命题 1.3相比较。定理 5.17 与命题 7.1 的证明相似，这表明定理 5.17 中得到的测度本质上是一个 δ-测度[4]，其中 $\delta < \lambda^+$，而它被迫表现得像一个 λ^+-测度：通过Sum的不连续性，在必要时使其发生“跳跃”。因此，不应将其视为经典测度的自然推广。

更一般地，我们注意到，若没有 Sum 的连续性，就很难指望测度满足任何合理形式的正则性。

6. On the non-existence of continuous λ^+-measures

在下一节中，我们将证明不可能性定理（定理 1.3），这是我们论文的主要结果。

我们将多次用到推论 4.8的以下简单推论，因此特此明确陈述，以免重复。

推论 6.1。设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间，并设 $U \subseteq X$ 是 X 中的一个开集，满足 $\mu(U) > 0$。那么，对于 X 中任意一个由零测度开集组成的族 $\mathcal{V}$，存在 $x \in U \setminus \bigcup \mathcal{V}$。

证明。根据推论 4.8 可知 $\mu(\bigcup \mathcal{V}) = 0$，因此 $U \not\subseteq \bigcup \mathcal{V}$ 由公理 (M3)。□

我们根据 $\mathbb{S}$ 的代数结构以及 κ 的值，将证明分成多个情形。

6.1. 错误次数幺半群中的测度。

引理 6.2. 假设 $\mathrm{Deg}(\mathbb{S}) \neq \kappa$。那么，对于每个弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$以及每个正测度为 μ 的开集 U $(U) > 0$，存在 $x \in U$，使得 x 不可测，或者 $\mu(x) > 0$。

证明。令 $\mathcal{V} = \{V \in \tau \mid \mu(V) = 0\}$ 为 X 中测度为 0 的开集族。由推论 6.1，存在 $x \in U \setminus \bigcup \mathcal{V}$。根据 $\mathcal{V}$ 的定义，对每个满足 $x \in A$ 的 $A \in \tau$，都有 $\mu(A) > 0$。特别地，对每个 $\alpha < \beta < \kappa$，根据公理（M3），我们有 $0 < \mu(\mathbf{N}^{x\restriction\beta}(X)) \leq \mu(\mathbf{N}^{x\restriction\alpha}(X))$，因此序列 $\langle \mu(\mathbf{N}^{x\restriction\alpha}(X)) \restriction \alpha < \kappa \rangle$ 在 $\mathbb{S}^+$ 中递减。现在，若 x 是测度为 0 的可测集合，则这也意味着，根据公理（M5），$\langle \mu(\mathbf{N}^{x\restriction\alpha}(X)) \mid \alpha < \kappa \rangle$ 在 $\mathbb{S}^+$ 中共初，因此 $\mathrm{Deg}(\mathbb{S}) = \kappa$。□

6.2. 非0-连续幺半群中的测度。

回顾一下，正全序幺半群 $\mathbb{S}$ 不是 0-连续的，当且仅当它包含一个元素 c，使得 $b + b \geq c$ 对所有 $b \in \mathbb{S}^+$都成立。

引理 6.3. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+测度空间。设 $U \subseteq X$ 是 X 的一个正测度开子集 $\mu(U) > 0$，其值满足 $b + b \geq \mu(U)$ 对每个 $b \in \mathbb{S}^+$ 均成立。那么，以下情形之一成立：

[4]在定理 μ 5.17 的证明中构造的测度，一个 ω-测度。

- U 包含一个不可测点 $x \in U$，
- U 包含一个测度为 $\mu(x) = \mu(U)$ 的可测点 $x \in U$，
- U 包含两个可测点 $x, y \in U$，使得 $\mu(x) + \mu(y) = \mu(U)$。

证明。若 U 包含一个不可测点，结论便成立，因此不妨设 U 的所有点都是可测的。此外，若存在 $x \in U$，使得对于包含于 U且包含 x的每个开邻域 O，都有 $\mu(U) = \mu(O)$，则由公理（M5）可得 $\mu(x) = \mu(U)$，结论便成立。因此，令 $c = \mu(U)$，并假设每个 $x \in U$ 都有一个测度为 $\mu(O) < c$的开邻域 O。

令 $\mathcal{V} = \{V \in \tau \mid \mu(V) = 0\}$ 为 X 的测度 0 开集族。于是，$U \setminus \bigcup \mathcal{V}$非空，由推论 6.1可知。令 $x_1 \in U \setminus \bigcup \mathcal{V}$。于是，$\mu(x_1) < c$，由公理 (M3)，且由于 $\mu(O) < c$ 对某个邻域 O 成立，该邻域属于 x_1。这也意味着 $\mu(U \setminus \{x_1\}) > 0$，否则

$$\mu(U) = \mu(x_1) + \mu(U \setminus \{x_1\}) = \mu(x_1) + 0 = \mu(x_1) < c = \mu(U),$$

矛盾。因此，存在 $x_2 \in (U \setminus \{x_1\}) \setminus \bigcup \mathcal{V}$，由推论 6.1。令 $N_1, N_2 \subseteq U$为不相交锥，使得 $x_i \in N_i$ 且 $0 < \mu(N_i) < c$ 对每个 $i \in \{1, 2\}$。

固定 $i \in \{1, 2\}$。注意，对于每个既开又闭的 $V \subseteq N_i \setminus \{x_i\}$，都有 $\mu(V) = 0$；否则，$\mu(V) \in \mathbb{S}^+$ 和 $\mu(N_i \setminus V) \in \mathbb{S}^+$ 都成立，因此根据关于 c 的假设，$\mu(N_i) = \mu(V) + \mu(N_i \setminus V) \geq c > \mu(N_i)$，矛盾。接着，对于包含于 N_i 且以 x_i 为中心的每个既开又闭邻域 O，都有 $\mu(N_i) = \mu(O) + \mu(N_i \setminus O) = \mu(O)$，因此与前面一样，$\mu(x_i) = \mu(N_i)$。

于是，根据公理 (M3) 以及关于 c的假设，我们得到

$$\mu(U) = c \leq \mu(N_1) + \mu(N_2) = \mu(N_1 \cup N_2) \leq \mu(U).$$

因此，如所需，$\mu(U) = \mu(N_1) + \mu(N_2) = \mu(x_1) + \mu(x_2)$。 □

推论 6.4。假设 $\mathbb{S}$ 不是0-连续的。那么，对于每个弱 λ^+-测度空间$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 以及每个正测度开集 U，其测度为 $\mu(U) > 0$，存在$x \in U$ 使得 x 不可测，或 $\mu(x) > 0$。

证明。取 c 使得 $b + b \geq c$ 对每个 $b \in \mathbb{S}^+$都成立，也就是说，它是 $\mathbb{S}$不具备 0-连续性的见证。反设 U 中的每个点都是可测的，且测度为 0。于是，$\mathcal{V} = \{V \in \tau \mid V \subseteq U, \mu(V) \leq c\}$是 U的一个覆盖，根据公理 (M5)。再令 $\mathcal{V}' = \{V \in \tau \mid \mu(V) = 0\}$ 为 X 中测度为 0 的开集族，那么根据推论 6.1，可找到 $U' \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}'$。然后将引理 6.3应用于 U'，即可得到结论。 □

6.3. **非阿基米德幺半群中的测度**。

引理 6.5。设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。假设 $U \in \tau$和a、$b \in \mathbb{S}$ 满足 $a \ll b < \mu(U)$。那么，存在 $x \in U$，使得 x 要么不可测，要么其测度为 $\mu(x) \geq a$。

证明。假设 $x \in \mathfrak{M}$ 对每个 $x \in U$均成立，否则结论显然成立。定义 $\mathcal{V} = \{V \in \tau \mid \mu(V) \leq a\}$。反设 $\mathcal{V}$覆盖 U。由事实 2.1可找到一个既开又闭划分 $\mathcal{P}$，它属于 U 的细化 $\mathcal{V}$。由公理 (M3) 和 (M4) 以及命题 3.4(b)，可得

$$\mu(U) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \leq \sum_{i < \lambda} a \leq b < \mu(U),$$

矛盾。因此 $\mathcal{V}$不能覆盖 U。令 $x \in U \setminus \bigcup \mathcal{V}$。这意味着 $\mu(A) > a$对每个 $A \in \tau$ 满足 $x \in A$的情形均成立。因此，我们有 $\mu(x) =$ 下确界$\{A \in \tau \mid x \in A\} \geq a$由公理(M5)得证。 □

注意，若 $\bar{a} = \langle a_i \mid i < \delta \rangle$ 是一个共初于 $\mathbb{S}^+$ 的极限长度处处非阿基米德递减序列，那么对于每个 $c > 0$，都有 $i, j \in \mathbb{S}^+$ 使得 $0 < a_i \ll a_j < c$。因此，我们得到如下结论。

推论 6.6. 假设 $\mathbb{S}^+$ 具有无限度，且包含一个共初的处处非阿基米德递减序列。那么，对于每个弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 以及每个具有正测度 $\mu(U) > 0$ 的开集 U，都存在 $x \in U$，使得x 不可测，或者 $\mu(x) > 0$。

6.4. **连续统以上的狄拉克型测度**。

引理 6.7. 假设 $\lambda \geq \mathfrak{c}$。设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个 ω_1-*Dirac* 弱 λ^+-测度空间。那么，对每个正测度开集 U $\mu(U) > 0$，都存在 $x \in U$，使得 x 不可测，或者 $\mu(x) > 0$。

证明。假设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是 ω_1-Dirac，因此 supp(μ) 是第二可数的。回想一下，supp(μ) 是闭集，因此 $U \setminus$supp(μ) 可测。由推论 4.8 可得 $\mu(X \setminus \text{supp}(\mu)) = 0$，因此根据公理（M3），$\mu(U \setminus \text{supp}(\mu)) = 0$ 也成立。由注 5.6 可得 $|\text{supp}(\mu)| \leq |{}^{\omega}\omega| \leq \mathfrak{c} \leq \lambda$。如果 U 的所有点都是测度 0 的可测点，那么我们有 $\mathcal{A} = \{U \setminus \text{supp}(\mu)\} \cup \{\{x\} \mid x \in U \cap \text{supp}(\mu)\}$ 是 U 的一个覆盖，该覆盖由 $|\mathcal{A}| \leq \lambda$ 个互不相交的测度 0 集合组成。根据公理（M4），我们将得到

$$\mu(U) = \mu(U \setminus \text{supp}(\mu)) + \sum_{x \in U \cap \text{supp}(\mu)} \mu(x) = 0,$$

矛盾。 □

6.5. **不可能性定理的证明**。 我们将以一种更强但技术性更高的形式证明不可能性定理 1.3 。

首先，迄今得到的结果已经足以让我们得出结论：当 κ不可数时，在任何权为 λ的子空间 $X \subseteq {}^{\kappa}\lambda$上，都不存在连续的弱 λ^+-测度空间（X， $\mathfrak{M}$， μ）。

命题 6.8。 假设 $\kappa > \omega$。那么，不存在连续的弱 λ^+-测度空间（X、 $\mathfrak{M}$、 μ）。

证明。 如果 $\mathbb{S}$不是 0-连续的，或具有有限的度，则结论由推论 6.4 得出。如果 Deg($\mathbb{S}$) $\neq \kappa$，则结论由引理 6.2 得出。因此，我们可以假设 Deg($\mathbb{S}$) $= \kappa > \omega$，且 $\mathbb{S}$ 是 0-连续的。于是，根据引理 2.12$\mathbb{S}$ 包含一个共初处处阿基米德序列，因此由推论 6.6即可完成证明。 □

当 $\kappa = \omega$时，连续弱 λ^+-测度空间可能存在。然而，以下结果表明，在这种情况下，测度总是平凡的，也就是说，它是 ω_1-狄拉克测度之和。

引理 6.9。 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个连续的弱 λ^+-测度空间。那么，存在一个既开又闭划分 $\mathcal{P}$，将 X 划分为若干部分，使得对每个$P \in \mathcal{P}$，$\text{supp}(\mu) \cap P$ 都是第二可数的。

证明。由推论 6.4，可知 $\mathbb{S}$ 是 0-连续的且具有无限度。由推论 6.6，$\mathbb{S}$ 不包含共初处处阿基米德序列。因此，由引理2.12，可得 $\mathrm{Deg}(\mathbb{S}) = \omega$ 且 $\mathbb{S}$ 是初始阿基米德的。由引理 6.2，可得 $\kappa = \mathrm{Deg}(\mathbb{S}) = \omega$。

称 μ 在 V 上本质可数，若对于 V 的每个不交开子集族 $\mathcal{A}$，其中正测度的元素至多可数。

断言 6.9.1. 设 $\kappa = \omega$。设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间，且 $V \subseteq X$ 是开集。假设 μ 在 V 上本质可数。那么，$\mathrm{supp}(\mu) \cap V$ 是第二可数的。

证明。设 $T = \{s \in {}^{<\omega}\lambda \mid \mu(\mathbf{N}_s) > 0, \mathbf{N}_s \subseteq V\}$。根据假设，每一层 $\mathrm{Lev}_n(T) = \{s \in {}^{n}\lambda \mid \mu(\mathbf{N}_s) > 0, \mathbf{N}_s \cap X \subseteq V\}$ 都必须是可数的，因为 $\{\mathbf{N}_s \mid s \in {}^{n}\lambda\}$ 是一个不交开集族。这表明 $T = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Lev}_n(T)$ 也是可数的。由于 $\{\mathbf{N}_s \mid s \in {}^{<\omega}\lambda\}$ 是 X 拓扑的一个基，且 V 是开集，因此 $\mathrm{supp}(\mu)\cap V = [T]$，并且 $\{\mathbf{N}_s \mid s \in T\}$ 是 $\mathrm{supp}(\mu)$ 的一个基。因此，$\mathrm{supp}(\mu)$ 如所需是第二可数的。□

设 $\mathcal{V} = \{V \in \tau \mid \mu \text{ 在 } V\}$上本质可数。首先假设 $\mathcal{V}$ 不覆盖 X。设 $a, b \in \mathbb{S}^+$ 满足区间 $[0, b]$ 是阿基米德的，且 $0 < a < b$。设 $\mathcal{A} = \{A \in \tau \mid \mu(A) < a\}$，则由公理（M5）以及对每个 $x \in X$都有 $\mu(x) = 0$，可知 $\mathcal{A}$ 是 X的覆盖。因此，存在 $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{V}$。由于 μ 在 A 上并非本质可数，因此存在 $\mathcal{P}$ 这一由 A 的互不相交的既开又闭子集组成的不可数族，使得对每个 $P \in \mathcal{P}$都有 $0 < \mu(P)$。由公理（M3），对每个 $P \in \mathcal{P}$，我们还有 $\mu(P) \leq \mu(A) < a$。由鸽巢原理，由于 $\mathrm{Deg}(\mathbb{S}) = \omega$，存在 $c \in (0, a)$，使得对不可数多个 $P \in \mathcal{P}$，都有 $\mu(P) > c$。由于 $[0, b]$ 是阿基米德的，且 $c \in [0, b]$，我们可以找到 $n \in \omega$ 使得 $n \cdot c \geq b$。然而，

$$\mu(A) \geq \mu(\bigcup \mathcal{P}) = \sum_{P\in\mathcal{P}} \mu(P) \geq n \cdot c \geq b > a,$$

根据公理 (M3) 和 (M4)，与 $A \in \mathcal{A}$ 矛盾。

因此 $\mathcal{V}$ 确实覆盖 X。根据事实 2.1，我们可以找到一个 $\mathcal{P}$ 的 X 细化$\mathcal{V}$既开又闭划分。容易验证，μ 在每个 $P \in \mathcal{P}$上仍然是本质可数的，因为$\mathcal{P}$ 细化了 $\mathcal{V}$。根据断言 6.9.1，对于每个 $P \in \mathcal{P}$，我们都有 $\mathrm{supp}(\mu) \cap P$ 是第二可数的，正如所需。□

命题 6.10. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个连续弱 λ^+-测度空间，且 $\mathfrak{M}$ 对有限交封闭。

那么，存在一个既开又闭划分 $\mathcal{P}$，使得对于每个 $P \in \mathcal{P}$，$(P, \mathfrak{M} \downarrow P, \mu \downarrow P)$ 都是一个ω_1-*Dirac* 连续弱 λ^+-测度空间，并且 μ 是$(\mu \downarrow P)_{P\in\mathcal{P}}$的 *Sum*，即对于每个 $M \in \mathfrak{M}$，我们有

$$\mu(M) = \sum_{P\in\mathcal{P}} (\mu \downarrow P)(M \cap P).$$

证明。根据引理 6.9，存在一个既开又闭划分 $\mathcal{P}'$，它是 X 的划分，满足 $\mathrm{supp}(\mu) \cap P$对每个 $P \in \mathcal{P}'$都是第二可数的。由于我们假设 X 的权至多为λ，因此可得 $|\mathcal{P}'| \leq \lambda$。所以，由于 $\mathcal{P}'$ 覆盖了 X 且由互不相交的集合组成，存在 $A \in \mathcal{P}'$ 使得 $\mu(A) > 0$，根据公理 (M2) 和 (M4)。令

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{P}' \setminus \{A\} \mid \mu(P) > 0\} \cup \{A \cup \bigcup\{P \in \mathcal{P}' \mid \mu(P) = 0\}\}.$$

这样，$\mu(P) > 0$ 对每个 $P \in P$都成立。由于 $|\mathcal{P}'| \leq \lambda$，根据公理 (M4) 可得$\mu(\bigcup\{P \in \mathcal{P}' \mid \mu(P) = 0\}) = 0$，因此根据公理 (M3) 可得

$$\mathrm{supp}(\mu) \cap (A \cup \bigcup\{P \in \mathcal{P}' \mid \mu(P) = 0\}) = \mathrm{supp}(\mu) \cap A.$$

这表明，对于任意 μ，$\cap P$ 仍然是第二可数的。根据引理 4.21，我们有 $(P, \mathfrak{M} \downarrow P, \mu \downarrow P)$ 是一个（连续）弱 λ^+-测度空间。由于 $P \in \mathcal{P}$ 是开集，我们得到 $\mathrm{supp}(\mu \downarrow P) = \mathrm{supp}(\mu) \cap P$，因此 $(P, \mathfrak{M} \downarrow P, \mu \downarrow P)$ 也是 ω_1-Dirac。

最后，由于 $\mathfrak{M}$ 对有限交封闭，我们得到$M \cap P \in \mathfrak{M}$对于每个 $M \in \mathfrak{M}$ 以及 $(\mu \downarrow P)(M \cap P) = \mu(M \cap P)$，因此根据公理 (M4) 可得

$$\mu(M) = \sum_{P \in \mathcal{P}} (\mu \downarrow P)(M \cap P),$$

对于每个 $M \in \mathfrak{M}$，即 μ是 $(\mu \downarrow P)_{P \in \mathcal{P}}$ 的和，正如所需。 □

特别地，命题6.10 适用于每个连续的极小 λ^+-测度空间，这归功于命题 4.14。

推论 6.11。 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个连续的、极小的 λ^+-测度空间。那么，存在 X 的一个既开又闭划分 $\mathcal{P}$，使得对于每个 $P \in \mathcal{P}$，$(P, \mathfrak{M} \downarrow P, \mu \downarrow P)$ 都是一个 ω_1-*Dirac* 连续弱 λ^+-测度空间，并且 μ是测度 $(\mu \downarrow P)_{P \in \mathcal{P}}$的和。

特别地，这对任意连续弱 λ^+-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$的核 $\ker(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 也成立。

推论 2.5 和 6.11 以及引理 6.7 共同立即推出定理 1.3，正如所要求的。

由定理 1.3，我们还可以得到以下表述。

推论 6.12。 假设 $\lambda \geq \mathfrak{c}$。设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个弱 λ^+-测度空间。那么，存在一个划分 $X = C \cup O$，使得 O 是开集，$\mu(O) = 0$，并且对于每个$x \in O$都有 $x \in \mathfrak{M}$；同时，C 是闭的，并包含一个稠密子集 $D \subseteq C$，使得对于每个$x \in D$，x 要么不可测，要么 $\mu(x) > 0$。

证明。设

$$\mathcal{V} = \{V \in \tau \mid \text{ There exists } x \in V, x \notin \mathfrak{M} \vee \mu(x) > 0\},$$

$$\mathcal{U} = \{U \in \tau \setminus \mathcal{V} \mid \mu(U) = 0\}.$$

反设存在 $Y \in \tau \setminus (\mathcal{U} \cup \mathcal{V})$：那么，$\mu(Y) > 0$ 且对每个$x \in Y$，都有 $x \in \mathfrak{M}$ 且 $\mu(x) = 0$。不失一般性，经过取其核后，我们可以假设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是极小的。根据推论 4.25，$(Y, \mathfrak{M} \downarrow Y, \mu \downarrow Y)$ 是一个弱 λ^+-测度空间，并且 $\mu \downarrow Y$是连续的，因为 $Y \notin \mathcal{V}$，这与定理 1.3 矛盾。

因此，我们必须有 $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ 是 X 的覆盖。令 $O = \bigcup \mathcal{U}$：则根据推论 4.8，$\mu(O) = 0$；此外，对于每个 $x \in O$，都有 $x \in \mathfrak{M}$ 和 $\mu(x) = 0$，因为根据定义，对于每个 $U \in \mathcal{U}$，都有 $U \notin \mathcal{V}$。令 $C = X \setminus O$。现在，对于每个满足 $V \cap C \neq \emptyset$ 的 $V \in \tau$，我们有 $V \in \mathcal{V}$，因为 $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ 覆盖了 X，因此我们可以选择 $x_V \in V$，使得 $x \notin \mathfrak{M}$ 或 $\mu(x) > 0$。于是，$D = \{x_V \mid V \in \tau, V \cap C \neq \emptyset\}$ 正是所需的。□

7. On the existence of λ-measures and measurable cardinals

本节中，我们简要探讨 ${}^{\kappa}\lambda$ 上的 λ-测度，以及它们与 λ 可测性的关系。

下一个结果表明，当 λ 是正则的时， λ-测度确实存在于 ${}^{\kappa}\lambda$上。这将使我们能够在第 ${}^{\kappa}\lambda$8 节（见推论 8.5）中，完整呈现 ${}^{\kappa}\lambda$上测度存在与否的问题。

λ 的正则性在某种意义上是必要条件：如果 λ 是奇异的，那么每个弱 λ-测度空间也是弱 λ^{+}-测度空间。特别是，在这种情况下， λ-测度的存在与 λ^{+}-测度的存在相关，而后者我们此前已经讨论过。对于奇异基数 λ，我们仍可证明，对于每个正则基数 $\delta \leq \lambda$， δ-测度都存在于 ${}^{\kappa}\lambda$上。

命题 7.1. 设 δ 是满足 $\delta \leq \lambda$的正则基数。那么存在一个连续弱 δ-测度空间$({}^{\kappa}\lambda, \mathfrak{M}, \mu)$，其定义在 ${}^{\kappa}\lambda$上，并且$\operatorname{supp}(\mu) = {}^{\kappa}\lambda$。

证明与定理5.17 的证明非常相似，可以看作是其更直接的版本。

证明。 令 $\mathbb{L} = (\kappa+1)^{*} = \{\frac{1}{\alpha} \mid \alpha \in \kappa+1\}$为带反序的 $\kappa+1$，即由$\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}$给出的全序，其中 $\alpha \geq \beta$。于是， $\mathbb{L} = (\mathbb{L}, \frac{1}{\kappa}, \max, \preceq)$ 是一个单位元为$\frac{1}{\kappa}$ 的正全序幺半群。我们考虑其上的无穷元运算 $\sum = \sup(=\max)$，该运算是全定义的，因为 $\mathbb{L}$ 是戴德金完备的。

对于每个开集 O，定义

$$\mathcal{EX}_{\delta}(O) = \bigcup \{\mathbf{N}_s \mid s \in {}^{<\kappa}\lambda, |\{\alpha < \lambda \mid \mathbf{N}_{s^\frown\alpha} \cap O \neq \emptyset\}| \geq \delta\}$$

为 O的 δ-扩张。于是，我们得到 $\mathcal{EX}_{\delta}(\mathcal{EX}_{\delta}(O)) = \mathcal{EX}_{\delta}(O) \supseteq O$，并且$\mathcal{EX}_{\delta}(\mathbf{N}_s) = \mathbf{N}_s$，对每个 $s \in {}^{<\kappa}\lambda$ 都成立。此外，根据构造可知

$$\mathcal{EX}_{\delta}(\bigcup_{i<\gamma} O_i) = \bigcup_{i<\gamma} \mathcal{EX}_{\delta}(O_i) \tag{7.1}$$

对于大小为 $\gamma < \delta$ 的每族开集 $\{O_i \mid i < \gamma\}$。

定义

$$h(O) = \min\{\beta < \kappa \mid \mathbf{N}_s \subseteq O \text{ for some } s \in {}^{\beta}\lambda\}.$$

为 O 的高度。我们声称

$$h(\bigcup_{i<\gamma} O_i) = \min_{i<\gamma} h(O_i) \tag{7.2}$$

对于每个开集族 $\{O_i \mid i < \gamma\}$，使得 $\gamma < \delta$ 且对每个 $i < \gamma$ 都有 $O_i = \mathcal{EX}_{\delta}(O_i)$。事实上，令 $s \in {}^{<\kappa}\lambda$ 满足 $\mathbf{N}_s \subseteq \bigcup_{i<\gamma} O_i$。那么，

$$|\{\alpha < \lambda \mid \mathbf{N}_{s^\frown\alpha} \cap \bigcup_{i<\gamma} O_i \neq \emptyset\}| \geq \delta,$$

并且由于 $\delta = \operatorname{cof}(\delta) > \gamma$，存在 $i < \gamma$ 使得

$$|\{\alpha < \lambda \mid \mathbf{N}_{s^\frown\alpha} \cap O_i \neq \emptyset\}| \geq \delta.$$

因此，$\mathbf{N}_s \subseteq \mathcal{EX}_{\delta}(O_i) = O_i$，如所需。

令 $\mathfrak{M}$ 为 ${}^{\kappa}\lambda$上测量所有 ${}^{\kappa}\lambda$点的极小 δ-可测结构。对于每个内部为空的 $M \in \mathfrak{M}$，定义$\mu(M) = \frac{1}{\kappa}$；而对于其他所有$M \in \mathfrak{M}$，我们定义

$$\mu(M) = \frac{1}{h(\mathcal{EX}_{\delta}(\operatorname{int}(M)))}.$$

于是，公理 (M1)-(M2) 依定义成立。

公理 (M3) 由以下事实可得： $\mathcal{EX}_\delta(U) \subseteq \mathcal{EX}_\delta(V)$ 和 $h(U) \geq h(V)$ 当 $U \subseteq V$。

为证明公理（M4），首先注意，给定两个开集 O、U，我们有 either$O \cap U = \emptyset$ or $|O \cap U| \geq \lambda \geq \delta$。因此，若 O 与 U 的对称差大小为 $|O \triangle U| < \delta$，则对每个 $s \in {}^{<\kappa}\lambda$， $O \cap \mathbf{N}_s \neq \emptyset$ 当且仅当 $U \cap \mathbf{N}_s \neq \emptyset$。这表明 $|O \triangle U| < \delta$蕴含 $\mathcal{EX}_\delta(O) = \mathcal{EX}_\delta(U)$。由于对于任意由可测集组成且大小为 $\gamma < \delta$ 的族 $\{M_i \mid i < \gamma\}$，我们有

$$|\mathrm{int}(\bigcup_{\alpha<\gamma} M_i) \setminus \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathrm{int}(M_i)| \leq |\bigcup_{\alpha<\gamma} M_i \setminus \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathrm{int}(M_i)| \leq |\bigcup_{\alpha<\gamma} (M_i \setminus \mathrm{int}(M_i))| < \delta,$$

根据极小 δ-可测结构的定义以及 δ 的正则性，于是

$$\mathcal{EX}_\delta(\mathrm{int}(\bigcup_{\alpha<\gamma} M_i)) = \mathcal{EX}_\delta(\bigcup_{\alpha<\gamma} \mathrm{int}(M_i)). \tag{7.3}$$

现在，给定一个长度为A_α的$\alpha<\gamma$ 互不相交可测集族 $\gamma < \delta$，结合公式（7.1）、（7.2）和（7.3），可得

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} A_i) &= \frac{1}{h(\mathcal{EX}_\delta(\mathrm{int}(\bigcup_{\alpha<\gamma} A_i)))} = \\
&= \frac{1}{h(\mathcal{EX}_\delta(\bigcup_{\alpha<\gamma} \mathrm{int}(A_i)))} = \\
&= \frac{1}{h(\bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{EX}_\delta(\mathrm{int}(A_i)))} = \\
&= \sup_{\alpha<\gamma} \frac{1}{h(\mathcal{EX}_\delta(\mathrm{int}(A_i)))} = \\
&= \sum_{\alpha<\gamma} \mu(A_i).
\end{aligned}$$

最后，对于公理(M5) 只需注意，对每个 $x \in X$，我们都有$\mu(\mathbf{N}_{x\restriction\alpha}))_{\alpha<\kappa} = (\frac{1}{\alpha})_{\alpha<\kappa}$ 在 $\mathbb{S}^+$中共初。□

值得注意的是，命题7.1 中得到的测度取值于一个非阿基米德幺半群。若改为要求测度取值于 $[0,1]$, ，则可刻画（实值）可测基数。

命题 7.2。以下各项等价：

(1) 存在一个非可数诱导的连续弱 λ测度空间$(X, \mathfrak{M}, \mu)$，其中某个 $X \subseteq {}^{\kappa}\lambda$的权为 λ，且 μ 取值于 $[0,1]$。(2) 对于每个权为 λ 的非λ-*Lindel*¨空间 $X \subseteq {}^{\kappa}\lambda$，都存在 μ： $\mathscr{P}(Y) \to [0,1]$，使得$(X, \mathscr{P}(X)\ \mu)$ 是一个非可数诱导的连续弱 λ测度空间。(3) λ 是实值可测的。

证明。 (1)⇒(3)。首先假设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个非可数诱导、连续的弱 λ-测度空间，且 μ 取值于 $[0,1]$。不失一般性，我们可以假设 $\mathfrak{M}$ 是测量 λ中所有点的极小 X-可测结构。

事实是，$\mu(X) = 1$ 和 $[0,1]$ 为阿基米德，两者共同推出每个由正测度不交开集构成的族都是可数的。结合命题 2.3，或者采用命题 6.9.1的相同论证，可得 supp(μ) 是第二可数的。

设 $Y = X \setminus \text{supp}(\mu)$，我们断言 $\mu(Y) > 0$。反设不然：那么，由推论 4.25 可知，$(\text{supp}(\mu)\ \mathfrak{M}\downarrow\text{supp}(\mu)\ \mu\downarrow\text{supp}(\mu))$ 是一个弱 λ-测度空间；由命题 4.15、推论 4.6 以及引理 4.11 和 4.19，可得$\mathfrak{M} \subseteq (\mathfrak{M}\downarrow\text{supp}(\mu))\uparrow X$ 且 $\mu \subseteq (\mu\downarrow\text{supp}(\mu))\uparrow X$。这表明 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 是可数诱导的，矛盾。

因此，$\mu(Y) > 0$。由于 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 是极小且连续的，由命题 4.14 和引理 4.21 可知，$(Y,\mathfrak{M}\downarrow Y,\mu\downarrow Y)$ 是 λ 上取值于 $[0,1]$ 的一个 Y-测度。由于 $Y = X\setminus\text{supp}(\mu)$，测度为零的开集覆盖 Y；由事实 2.1，存在 Y 的一个既开又闭划分 $\mathcal{P}$，使得对于每个 $P\in\mathcal{P}$，$\mu(P) = 0$。注意，$|\mathcal{P}| \le \lambda$，因为 $Y \subseteq X$ 的权为 λ；并且 $|\mathcal{P}| = \lambda$，因为 μ 是一个 λ-测度，且 $\mu(Y) = \mu(\bigcup\mathcal{P}) > 0$。令 $\{P_i \mid i<\lambda\}$ 为$\mathcal{P}$ 的一个枚举。那么，$\mu'\colon \mathscr{P}(\lambda)\to[0,1]$ 定义为 $\mu'(A) = \mu(\bigcup_{i\in A} P)$，是 λ 上的实值测度。不失一般性，我们可以假设 $\mu'(\lambda) = 1$，只需对 μ' 重新缩放即可。因此，λ 是实值可测的，证毕。

(3)⇒(2)。假设 $\mu'\colon \mathscr{P}(\lambda)\to[0,1]$ 是 λ上的连续实值概率测度。令 $Z = \{x_\alpha \mid \alpha<\lambda\}$ 为 X 的一个闭离散子集，其大小为 λ，如推论 2.2所给出。定义 $\mu\colon \mathscr{P}(Z)\to[0,1]$ 如下：

$$\mu(M) = \mu'(\{\alpha<\lambda \mid x_\alpha\in M\}).$$

于是，显然（Z，$\mathscr{P}(Z)$ μ）是一个连续 λ-测度空间，因此根据引理 4.20，（X，$\mathscr{P}(X)$ $\mu\uparrow X$）也是如此。最后，由于（x_α）$_{\alpha<\lambda}$是一个离散族，我们有：对于每个第二可数 $Y\subseteq X$，$\{x_\alpha \mid \alpha<\lambda\}\cap Y$都是可数的，因此$\mu(Y) = 0$ 对于每个第二可数 $Y\subseteq X$都成立，从而证明 μ 不可能是可数诱导的。

(2)⇒(1)。只需注意，对于每个 $\kappa\le\lambda$，存在一个非λ-Lind¨的 $^\kappa\lambda$子空间，其权为 λ（例如离散空间 $X = \{\alpha^\frown 0^{(\kappa)} \mid \alpha<\lambda\}$）。□

推论 7.3. 假设 $\lambda > \mathfrak{c}$。以下条件等价：

(1) 存在一个连续弱 λ-测度空间$(X,\mathfrak{M},\mu)$，其某个 $X\subseteq{}^\kappa\lambda$的权为 λ，且 μ 取值于 $[0,1]$。(2) 对于每个权为 λ 的非-λ-*Lindel*¨空间 $X\subseteq{}^\kappa\lambda$，都存在 $\mu\colon\mathscr{P}(Y)\to[0,1]$，使得$(X,\mathscr{P}(X)\ \mu)$ 是一个连续弱 λ-测度空间。(3) λ 是可测的。

证明。(1)⇒(3). 设 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 是一个连续弱 λ-测度空间，且 μ取值于 $[0,1]$。注意到，每个第二可数子集 $Y\subseteq X\subseteq{}^\kappa\lambda$的大小为 $|Y|\le\mathfrak{c}<\lambda$，因此 Y是测度为零的可测集合。这表明 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 不可能是可数诱导的。因此，结论由命题7.2以及经典结果推出：若 $\lambda>\mathfrak{c}$ 是实值可测的，则它是可测的（例如，参见 [Jec03，推论 10。10]）。

(3)⇒(2)。由命题7.2 以及每个可测基数 λ也是实值可测的这一事实，立即可得。

(2)⇒(1)。显然。 □

8. Final remarks

我们以几点最后评论和一些可由迄今建立的理论轻易推出的推论结束这篇论文。

首先，考虑空间 ${}^{\kappa}\lambda$。该空间的权恰好为 $\lambda^{<\kappa}$。因此，若$\lambda^{<\kappa} = \lambda \geq \mathfrak{c}$，定理 1.3 立即推出不存在弱 λ^{+}-测度结构于 ${}^{\kappa}\lambda$。

推论 8.1。假设 $\lambda^{<\kappa} = \lambda \geq \mathfrak{c}$。那么，在 ${}^{\kappa}\lambda$ 上不存在连续弱 λ^{+}-测度空间$({}^{\kappa}\lambda, \mathfrak{M}, \mu)$。

如果改为 $\lambda^{<\kappa} > \lambda$，那么必然有 $\kappa > \omega$，从而 $\lambda^{<\kappa} \geq \mathfrak{c}$。因此，根据前面的推论以及命题 2.6，我们得到以下结论。

推论 8.2。设 $\delta = \lambda^{<\kappa}$ 为 ${}^{\kappa}\lambda$的权，并假设 $\delta > \lambda$。那么，在 ${}^{\kappa}\lambda$上不存在连续的弱 δ^{+}-测度空间 $({}^{\kappa}\lambda, \mathfrak{M}, \mu)$。

对于广义康托空间 ${}^{\lambda}2$，也有类似的结果。该空间的权为 $2^{<\lambda}$。因此，如果 $2^{<\lambda} = \lambda > \omega$ （这特别意味着 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \lambda \geq \mathfrak{c}$），那么根据定理 1.3 和事实 2.7，我们得到以下结论。

推论 8.3。假设 $2^{<\lambda} = \lambda > \omega$。设 $Y \subseteq {}^{\lambda}2$。那么，不存在连续的弱 λ^{+}-测度空间 $(Y, \mathfrak{M}, \mu)$。

反之，若 $2^{<\lambda} > \lambda$ （因此 $2^{<\lambda} \geq \mathfrak{c}$），根据命题 2.8 和定理 1.3，我们得到如下结论。

推论 8.4。设 $\delta = 2^{<\lambda}$ 是 ${}^{\lambda}2$的权，并假设 $\delta > \lambda$。那么，在 ${}^{\kappa}\lambda$上不存在连续弱 δ^{+}- 测度空间（ ${}^{\lambda}2, \mathfrak{M}, \mu$ ）。

尽管我们认为， ${}^{\kappa}\lambda$上的恰当测度概念是 δ^{+}<style id='7'}-测度，其中 $\delta = \lambda^{<\kappa}$ 是 ${}^{\kappa}\lambda$的权，但我们仍注意到，如果出于某种原因，人们特别关注 ${}^{\kappa}\lambda$上连续弱 λ^{+}-测度空间，即使该空间的权大于 λ，那么根据命题2.6和7.1（应用于 $\delta = \lambda^{+} \leq \lambda^{<\kappa}$），我们得到如下结论。

推论 8.5。假设 $\lambda^{<\kappa} > \lambda$。那么，在 ${}^{\kappa}\lambda$上存在连续弱 λ^{+}-测度空间（${}^{\kappa}\lambda, \mathfrak{M}, \mu$）。

类似地，如果 $2^{<\lambda} > \lambda$，那么根据命题2.8、命题7.1和引理 4.20，我们可以得到广义康托空间的类似结果。

推论 8.6。假设 $2^{<\lambda} > \lambda$。那么在 ${}^{\lambda}2$ 上存在一个连续的弱 λ^{+} 测度空间$({}^{\lambda}2, \mathfrak{M}, \mu)$。

在前面的章节中，我们选择研究可测空间的弱化形式，而不是完整的 λ^{+}代数。不过，我们得到的结果显然也适用于 λ^{+}代数的情形。回顾一下， λ^{+}可测空间是一个二元组 $(X, \mathfrak{M})$，其中 X 是一个拓扑空间，而 $\mathfrak{M}$ 是一个 λ^{+}代数，包含 X的所有开子集。

与经典情形一样，对于定义在 λ^{+}-代数上的测度，可以由其他公理推出单调性。事实上，若 $\mathfrak{M}$ 是一个可测空间，且 $\mu : \mathscr{P}(X) \to \mathbb{S}$ 是任意一个满足 $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{dom}(\mu)$ 和公理 (M4) 的偏函数，那么对于任意 $A \subseteq B$，都有 $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$，因此 μ 满足公理（M3）。

注记 8.7. 设 $(X, \mathfrak{M})$ 是一个可测空间，且 $\mathbb{S}$ 是一个配备了无穷和 Sum 的正全序幺半群。设 $\mu : \mathscr{P}(X) \to \mathbb{S}$ 是满足 $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{dom}(\mu)$ 以及公理 (M1)、(M2)、(M4) 和 (M5) 的偏函数。那么， μ 也满足公理（M3），因此它是 $(X, \mathfrak{M})$ 上的一个 λ^+-测度。

显然，每个 λ^+-代数都对有限交封闭，而且每个 λ^+-测度空间都是 λ^+-可划分的。因此，在这种情况下，可以将命题 6.10 和 5.11 应用于任意一个（X， $\mathfrak{M}$， μ），并得到如下结果。

命题 8.8。 假设 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$。设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 是一个连续的 λ^+-测度空间。那么，存在 X 的一个既开又闭划分 $\mathcal{P}$，使得对于每个 $P \in \mathcal{P}$， μ， $(P, \mathfrak{M} \downarrow P, \mu \downarrow P)$ 都是一个可数诱导的（ω_1-狄拉克）连续 λ^+-测度空间，且为 $(\mu \downarrow P)_{P \in \mathcal{P}}$之和。

特别是，由此以及引理 6.7，或者直接由定理 1.3，我们得到如下结果。

推论 8.9。 假设 $\lambda^{<\kappa} = \lambda \geq \mathfrak{c}$。令 $X \subseteq {}^{\kappa}\lambda$。那么，不存在连续$\lambda^+$-测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$。

对于（非弱） λ^+-测度空间，这一结果可推广到所有拓扑空间。假设 $2^{<\lambda} = \lambda$（这意味着 $\lambda^{<\mathrm{cof}(\lambda)} = \lambda$）。那么，每个 T_0 权至多为 λ的空间都 λ^+与 ${}^{\lambda}2$的某个子空间 ${}^{\mathrm{cof}(\lambda)}\lambda$-Borel 同构（参见，例如，[ACMRP25，命题 3。23]）。因此，若 $\lambda > \omega$ （这与 $2^{<\lambda} = \lambda$一起意味着 $\lambda \geq \mathfrak{c}$），便得到以下结果。

推论 8.10。 假设 $2^{<\lambda} = \lambda > \omega$。令 Y 为一个权至多为 λ 的 T_0 拓扑空间。那么，不存在连续 λ^+-测度空间 $(Y, \mathfrak{M}, \mu)$。

与经典情形一样， λ^+-代数 $\mathfrak{M}$ 在 X 上由一个 T_0 拓扑生成，该拓扑定义在 X上且权至多为 λ 当且仅当 $\mathfrak{M}$ 分离 X 的点，并且 $\mathfrak{M}$ 由一个大小至多为 λ 的子族生成（例如，参见 [ACMRP25，命题 324]）。具有此性质的偶对（X， $\mathfrak{M}$）称为 λ^+-**Borel 空间**。因此，我们得到以下结果。

推论8.11。 假设 $2^{<\lambda} = \lambda > \omega$。令 $(Y, \mathfrak{M})$ 为一个 λ^+-*Borel* 空间。那么其上不存在连续的 λ^+-测度。

References

[ACMRP25] Claudio Agostini、Nick Chapman、Luca Motto Ros 和 Beatrice Pitton。《广义Borel集》，2025年11月。arXiv 预印本：https://arxiv.org/abs/2511.15663。[Ago22] Claudio Agostini。《*Generalized Descriptive Set Theory at uncountable cardinals & Actions of monoids in combinatorics*》。博士论文，都灵大学，2022。https://tesidottorato.depositolegale.it/handle/20.500.14242/199405。可在此处获取。[AMR22] Alessandro Andretta 和 Luca Motto Ros。不可数结构的 Souslin 拟序与双可嵌入性。《*Memoirs of the American Mathematical Society*》，277 1365 +189 2022 ():vii , 。[AMRS23] Claudio Agostini、Luca Motto Ros 和 Philipp Schlicht。正则不可数基数上的广义波兰空间。《*Journal of the London Mathematical Society. SecondSeries*》，108(5):1886–1929，2023年。[CS16] Samuel Coskey 和 Philipp Schlicht。广义Choquet空间。《*Fund. Math.*》，232 3 227 248，2016 ( ): – 。[CS19] Shani Cohen 和 Saharon Shelah。面向不可达基数的随机实数强迫推广。《*Israel Journal of Mathematics*》，234(2):547–580，2019年。

[DMR25] Vincenzo Dimonte 和 Luca Motto Ros。可数共尾性奇异基数上的广义描述集合论，
2025 http://arxiv.org/abs/ 。arXiv 预印本：。
2511.16188
[DW96] H. Garth Dales 和 W. Hugh Woodin。《
Super-real fields 14 *London Math-* 》，[卷。克拉伦登
ematical Society Monographs. New Series
出版社、牛津大学出版社、纽约，1996年。具有附加结构的全序域，牛津科学出版物。89] Eng
General topology 6 *Sigma Series in Pure Mathemat-* Ryszard
ics
Engelking。《》，14] 卷。Heldermann出版社，柏林，第二版， *Mem. Amer. Math. Soc.*。作者由波兰
1989
语译出。+80FHK[Sy-David Friedman、Tapani Hyttinen 和 Vadim Kulikov。广义描述集合论与分类理论。
《17] 》，230(1081):vi
Archive for
Mathematical Logic 56 5 691 697, 2017 ，2014年。[FL08]

Sy-David Friedman 和 Giorgio Laguzzi。不可达基数上的零理想。《 *Annals of Pure and Applied Logic*》，
( ): – 。[FM63] Antongiulio Fornasiero 和 Marcello Mamino。有序阿贝尔群戴德金分割的算术。《 》，
156(2-3):210–244，2008年。 Tuc *Partially ordered algebraic systems*L[aszl19] o Fuchs。《
The theory of generalised real numbers and other topics in logic》。培格曼出版社，牛津；
Addison-Wesley Publishing Co., Inc.，雷丁、马萨诸塞州；帕洛阿尔托、加利福尼亚州；伦敦，1963年。¨
Gal[Lorenzo Galeotti。《74] 》。博士论文，汉堡大学，2019年。
2^a $_a$ *Trans. Amer.* HN[H. H. Hung 和
Math. Soc. 188 1 30, 1974
S. Negrepontis。与 (03]) 同胚的空间。II。《 *Set Theory*》，： – 。[Jec95] Thomas J. Jech。《
Classical descriptive set theory 156 *Graduate Texts* 》。施普林格数学
in Mathematics
1995
专著丛书。施普林格，柏林；纽约，第3千年版，修订扩充版，2003年。[Kec20] Alexander S. Kechris。
《-》， *Mathematical Logic Quarterly*卷。施普林格-施普林格出版社，纽约，[。16] KW¨Micha
*Israel J. Math.*l Korch 和 Tomasz Weiss。广义康托空间和广义 Baire 空间的特殊子集。《[》，
66(4):418–437，2020年12月。37] LMRS
Transactions of the American
Mathematical Society 42 3 416 460, 1937 Philipp L[ucke、

Luca Motto Ros 和 Philipp Schlicht。广义 Baire 空间上的 Hurewicz二分定理。《93] 》，216(2):973–
1022，2016年。¨Mac¨Holbrook Mann MacNeille。偏序集。《¨》，( ): – 。 Π^1_1MV ω_1 ω_1Alan Mekler 和
Jouko V *J. Symbolic Logic*a[an99] anen。树与 *Topology Appl.* 的子集。《[》， 58 3 1052( ): –1070，
1993年。79] Nyi*Topological structures*Peter J. Nyikos。论 Alexandroff 和 Urysohn 的若干非阿基米德空
间。《 *II (Proc. Sympos. Topology and Geom., Amsterdam, 1978)*》，91(1):1–23，1999年。
Part 2 116 209 241 Rei
*Math. Centre Tracts*Hans-Christian Reichel。迈向半度量空间与度量空间的统一理论。载于[,87] ，
Real and complex analysis，[卷，第 – 页。数学中心，阿姆斯特丹，1979年。17] *The*
Journal of Symbolic Logic 82 4 1317 1355, 2017 Walter Rudin。

《[》。麦格劳-希尔图书公司，纽约，第3版，1987年。62] Sch
General Topology and its Relations
to Modern Analysis and Algebra 341 342, 1962 Philipp Schlicht。

广义 Baire 空间的完美子集与长博弈。《[》，( ): – , 23] Sto
Views from a Peak: Generalisations and Descriptive Set The-
ory
Arthur Harold

Stone。不可分博雷尔集。《》，第 – 页。WonNed J. H. Wontner。《》。博士论文，逻辑、语言与计算研
究所，阿姆斯特丹大学，2023年。

(Claudio Agostini) HUN-REN Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Reáltanodautca 13-15, H-1053, Budapest*Email address*, Claudio Agostini: agostini.claudio@renyi.hu(Fernando Barrera)
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, Technische Uni-versität Wien, Wiedner Hauptstrasse 8-10/104, 1040 Vienna, Austria*Email address*, Fernando Barrera: f.barrera.esteban@gmail.com(VincenzoDimonte)
Università degli Studi di Udine Vie delle Scienze 206, 33100 Udine,Italy*Email address*, Vincenzo Dimonte: vincenzo.dimonte@uniud.it