arXiv:2601.13324v1 [math.CO] 19 Jan 2026

0-Hecke代数的带状复形

AYAH ALMOUSA 和 BRYAN LU

Abstract. 我们构造了型 A 0-Hecke 代数的不可分解射影模之间显式的杨氏表级映射，并将其组织成典范的分裂短正合列，通过连接和近连接提升 **NSym** 中的基本带状乘积法则。迭代这些映射可得到由广义带状图索引的上链复形；我们证明这些复形在正次数上无环，且其零次上同调是由完整连接索引的射影模。我们将这些复形与 VandeBogert的带状Schur模判据结合起来，证明一个由 0-Hecke 塔构造的自然内部带分次代数对象具有 Koszul 性。最后，我们定义斜射影模，其非交换 Frobenius 特征实现了在**NSym**上由基本拟对称函数给出的斜化。

1. Introduction

型 A 0-Hecke 代数 $\mathcal{H}_n(0)$ 是群代数 $\mathbf{k}[\mathfrak{S}_n]$ 的一个广为研究的退化形式，具有丰富的组合表示论：其单模和不可分解射影模都自然地由组合索引（见 [Nor79, Car85]）。塔 $\{\mathcal{H}_n(0)\}_{n\geq 0}$ 的格罗滕迪克群构成对偶分次Hopf代数，可分别认作 QSym 和 NSym（[KT97, BL09]）；其中，非交换 Frobenius 特征将不可分解射影模 $\mathbf{P}_\alpha$ 映至 NSym 中的带状基 $R_\alpha \in$，而单模 $\mathbf{C}_\alpha$ 对应于 QSym 中的基本基 L_α。Huang [Hua16] 构建了射影模和单模的杨表模型，拓展了 $\mathfrak{S}_n$ 的经典杨氏表方法。本文旨在通过构造显式、典范、函子性的正合列和无环的 0-Hecke 射影模复形，并借助具体的杨氏表级映射将 NSym 中的基本带状恒等式范畴化，从而使这一对应关系具有完整的同调意义。

1.1. 提升带状图恒等式的无环复形。

我们的首要目标是为基本的带状图乘积恒等式提供一个表示论和同调提升

$$R_\alpha R_\beta \;=\; R_{\alpha\cdot\beta} \;+\; R_{\alpha\odot\beta}, \qquad \alpha \vDash n,\ \beta \vDash m,$$

以及其迭代。我们不局限于格罗滕迪克群层面，而是构造投射0-Hecke模之间的显式函子映射，其同调行为反映了这一恒等式。

定理A (命题 5.3 和定理 5.6)。 对于任意 $\alpha \vDash n$ 和 $\beta \vDash m$，存在一个分裂短正合列

$$0 \to \mathbf{P}_{\alpha\cdot\beta} \xrightarrow{\partial_{\alpha,\beta}} \mathbf{P}_{(\alpha,\beta)} \xrightarrow{\mu_{\alpha,\beta}} \mathbf{P}_{\alpha\odot\beta} \to 0.$$

更一般地，给定一个组合序列 $\vec{\alpha} = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\ell)})$，我们构造一个显式的上链复形 $\mathcal{C}(\vec{\alpha})$，其各项均为射影模，指标由通过下述方式得到的广义带状图给出

日期：2026年1月21日。关键词和短语。 0-Hecke代数、非交换对称函数、Koszul 代数。

混合连接与近连接（构造5.5）。该复形 $\mathcal{C}(\vec{\alpha})$ 在正次数上无环，且其零次上同调为

$$H^0(\mathcal{C}(\vec{\alpha})) \cong \mathbf{P}_{\alpha^{(1)}\cdot\alpha^{(2)}\cdots\alpha^{(\ell)}}.$$

具有相同带状组合结构的复形已出现在多种情境中。Vande- Bogert [Van25] 刻画了典范带状复形正合性与 Koszul 性之间的关系。在 [APP+24]中，作者利用相关的舒尔模复形构造 Veronese 环上的 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$-等变自由消解；而在 [PP05] 中，类似的形状则作为二次（及 Koszul）代数同调理论中 bar复形的齐次条带出现。

我们在此的贡献是对这些思想给出一种尤为直观的 0-Hecke 实现，其中复形的项和微分都能用杨表层面的描述明确呈现。我们的复形各项是由广义带状图标记的显式不可分解投射 0-Hecke 模，而微分则由简单的杨表层面的粘合映射给出。因此，所得复形是典范的，对带状数据具有函子性，并且有直接的组合描述，使得验证其无环性十分简单。

1.2. **Koszul 性。** 这些带状图复形的存在性与函子性带来的第二个结果，是关于一个自然定义的内部带分次 代数的 Koszul 性结论。该代数由塔 $\{\mathcal{H}_n(0)\}_{n\geq 0}$构造而成。具体而言，在第 6 节中，我们定义了一个代数

$$A \coloneqq \bigoplus_{n\geq 0} \bigoplus_{\alpha\vDash n} \mathbf{P}_\alpha,$$

其乘法由近拼接映射 $\mu_{\alpha,\beta} : \mathbf{P}_{(\alpha,\beta)} \to \mathbf{P}_{\alpha\odot\beta}$ 诱导得到，而其内部分次由带状图 $\mathrm{Diag}(\alpha)$ 的列数给出。接着，我们运用 VandeBogert [Van25] 提出的、以带状舒尔模表述的判据，证明这个内部带分次代数是 Koszul 的。

定理 B (定理6.4)。 构造 A *6.1 中定义的内部带分次代数是 Koszul 的。*

虽然 Koszul 性是分次二次代数的一种经典同调有限性性质，但在当前情形下验证它颇为微妙：代数 A 是非交换的、内部带分次的，并且是通过沿 0-Hecke 塔进行诱导来定义的，而非由生成元与关系定义。我们的证明关键地利用了此前构造的显式带状图指标复形；这些复形帮助我们识别相关的带状舒尔模，从而能够直接应用 VandeBogert 判据。

1.3. **斜射影模与分支。** 最后，我们引入不可分解投射 0-Hecke 模的斜类比。对于 $\alpha \vDash n$ 和 $\beta \vDash k \leq n$，我们构造一个投射 $\mathcal{H}_{n-k}(0)$-模 $\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$ （见定义 7.1），其非交换 Frobenius 特征恢复了$\mathbf{NSym}$上的斜化算子：

$$\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}(\mathbf{P}_{\alpha/\beta}) = L_\beta^\perp R_\alpha.$$

因此，$\mathbf{NSym}$ 中的斜化恒等式可以从格罗滕迪克群一致地提升到投射模层面。

情形 $\beta = (1)$ 尤为具体： $\mathbf{P}^{\alpha/(1)}$ 刻画了从 $\mathcal{H}_n(0)$ 到抛物子代数 $\mathcal{H}_{1,\ n-1}(0)$ 的限制，并纳入函子性分裂短正合列。这给出了 $\mathbf{NSym}$ 中的显式分支规则（命题 7.12 和推论 7.13），因此分支是通过短正合列实现的，而不仅仅是通过特征标恒等式。

定理 C（第 7 节）。对于组合 $\alpha \vDash n$ 和 $\beta \vDash k \leq n$，存在一个射影$\mathcal{H}_{n-k}(0)$-模 $\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$，其在同构意义下唯一确定，使得

$$\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}(\mathbf{P}_{\alpha/\beta}) \;=\; L_\beta^{\perp} R_\alpha \qquad in\ \mathbf{NSym}\,.$$

在特殊情形 $\beta =(1)$下，模 $\mathbf{P}^{\alpha/(1)}$ 刻画了从 $\mathcal{H}_n(0)$ 到 $\mathcal{H}_{1,n-1}(0)$的限制，并构成投射模的函子性分裂短正合列。

1.4. **组织结构**。本文结构安排如下。在第2 节中，我们固定组合、带状图和标准带状杨表的记号。在第 3 节中，我们回顾 Hopf 代数 **NSym** 和 **QSym** 以及带状基和基本基。在第 4 节中，我们回顾 $\mathcal{H}_n(0)$ 的表示论，以及将格罗滕迪克群与 **NSym** 和 **QSym**联系起来的 Frobenius 特征映射。在第5 节中，我们构造并分析由连接和近连接得到的无环复形；在第6 节中，我们将这些构造应用于 Koszul 性。最后，在第 7 节中，我们定义斜射影模，并推导出上述分支公式和斜化公式。

2. Combinatorics of compositions and ribbons

本节固定组合和（广义）带状图的记号。我们还记录了组合、下降集与带状杨表之间的约定，这些约定将在全文中使用。

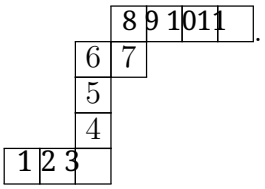
2.1. 组合与弱组合。 $\alpha =(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$是 n的一个**组合**，记作 $\alpha \vDash n$，它是一个和为 n的正整数组成的有序列表。我们称 α_i **部件**为 α。如果允许 α 的某些部件为零，则称 α 为一个**弱组合**。用 $\ell(\alpha) := k$ 表示 α 的**长度**，用 $|\alpha| := n$ 表示 α的**大小**。如果 β 可由 α 反复合并相邻部件求和得到，则称组合β **粗于** α。等价地，α **细化** β。

用 Comp 表示所有组合的集合，并令 Comp(n) 表示所有 n的组合构成的集合。类似地，用 weakComp 表示所有弱组合的集合，用 weakComp(n, ℓ) 表示长度为 ℓ的所有 n 的弱组合构成的集合。

2.2. 带状图、广义带状图与下降。 **带状图**（= **斜／边钩** =**边条**）是 N × N 中不含 2×2 方格的连通图形。

广义带状图是一个（可能不连通的）图形，其连通分支均为带状图，并按以下约定排列：每个连通分支都沿主对角线方向比前一个分支严格向东北偏移一个单位。广义带状图的行和列是相对于环境网格 N ×N 全局定义的。

带状图由其各行中的方格数唯一确定。给定一个由 α_1、……、α_k 组成的 n 的组合 $\alpha =$，我们用 Diag(α) 表示有 k 行的带状图，其中从底部数起第 i 行有 α_i 个方格。对于 $\alpha \in$ Comp(n)，从西南单元格开始，沿相邻单元格前进，直到东北单元格为止，将数字 1 到 n 标记在 Diag(α) 的单元格上。例如，我们可以将带状图 Diag((3、1、1、2、4)) 标记为



如果标记为 $i+1$ 的单元格严格位于标记为 i 的单元格上方，我们就说该带状图在 i 处有**下降**。由此得到的 $[n-1]$ 子集称为该带状图的**下降集**。在上面的例子中，下降集为 Des(3、1、1、2、4) $=\{3,4,5,7\}$。

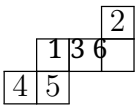
对于每个子集 $R \subseteq [n-1]$，恰有一个带状图包含 n 个单元格，且下降集为 R。若 $R \subseteq [n-1]$，则用 Diag(R) 表示下降集为 R 的唯一带状图。我们常常滥用记号，只写与 Diag(R) 对应的组合。例如，我们可能写作 Diag($\{3,4,5,7\}$) =(3，1，1，2，4)。

2.3. 标准带状杨表与读词。 图表是将数字 $\{1,\dots,n\}$ 双射地填入一个图形中。在（广义）带状形状上的图表称为**标准**图表，若其条目沿行从左向右严格递增，并沿列从上向下严格递增，其中仅考虑水平或垂直相邻的两个单元格。注意，非连通分支不施加额外条件。

用 SRT(α) 表示形状为 Diag(α) 的标准带状杨表集合。SRT(α) 中的每个元素都自然地与 $\mathfrak{S}_n$ 中的一个排列一一对应，且该排列的下降集与形状的下降集 Des(α) 相同。

给定一个标准（广义）带状杨表 T，按如下方式定义其**读词**word(T)：沿着相邻单元格从西南向东北读取每个连通分支中的条目，再按分支从西南到东北的顺序将所得单词连接起来。

对于用一行记号写出的排列 $w \in \mathfrak{S}_n$，记 SRT(w) 为形状 Diag(Des(w)) 的标准带状杨表集合。例如，若 $w = 451362 \in \mathfrak{S}_6$，相应的带状杨表为



相应的带状形状为 Diag(w) =(2，3，1)。我们称 w 为图表 T 的读词，并记 word(T) $= w$。按照这一约定，映射 $T \mapsto$ word(T) 是 SRT(α) 与满足 Des(w) =Des(α) 的排列 $w \in \mathfrak{S}_n$ 集合之间的双射：沿带状图遍历，水平相邻关系强制出现上升，垂直相邻关系强制出现下降。

给定下降集 $I \subseteq [n-1]$ 或组合 α，定义 $w_0(I) = w_0(\alpha)$ 为与图表 $\tau_0(I) = \tau_0(\alpha)$ 对应的单词，其中带状图中对应于 α 的每一列 从上到下、从左到右依次填入数字 1 到 n。类似地，定义 $w_1(I) = w_1(\alpha)$，使用图表 $\tau_1(I) = \tau_1(\alpha)$，从顶行开始向下，每一行 均从左到右填入数字。

对于标准（广义）带状杨表 T，定义其**下降集** b y

$$\mathrm{Des}(T) := \{\, i \in [n-1] : i+1 \text{ lies strictly above } i \text{ in } T \,\}.$$

2.4. 组合上的运算。 给定一个组合 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$，我们将 α 的**逆序** 记为 rev(α) $:= (\alpha_\ell, \dots, \alpha_1)$。 α 的**补** 记为 α^c，它是满足下降集为 $[n-1] \setminus$ Des(α) 的 n 的唯一组合。 α 的**转置** 或**共轭**为 $\alpha^\top :=$ rev(α^c) =(rev(α))^c，或者等价地说，是 α的带状图的转置。注意，我们总有 $w_1(\alpha)^{-1} = w_1$(rev(α))。

例2.1。 设 $\alpha = (2,3,1)$。那么有：

$$\tau_0(\alpha) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{3}{c}{} & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 \\ \cline{1-2}\end{array},\ \tau_1(\alpha) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{3}{c}{} & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array}, \tau_0(\mathrm{rev}(\alpha)) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{3}{c}{} & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \cline{1-3} 2 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \tau_1(\mathrm{rev}(\alpha)) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \multicolumn{3}{c}{} & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \cline{1-3} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\tau_0(\alpha^c) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{1}{c}{} & 5 & 6 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 3 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \tau_1(\alpha^c) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{1}{c}{} & 1 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & 3 \\ \cline{2-2} 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \tau_0(\alpha^\top) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{c}{} & 5 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{} & 2 & 6 \\ \cline{3-4} \multicolumn{2}{c}{} & 3 \\ \cline{3-3} 1 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array},\ \tau_1(\alpha^\top) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{c}{} & 1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{} & 2 & 3 \\ \cline{3-4} \multicolumn{2}{c}{} & 4 \\ \cline{3-3} 5 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

In 特别地，注意 $w_1(\alpha) = 562341$ 和 $w_1(\mathrm{rev}(\alpha)) = 634512 = w_1(\alpha)^{-1}$.

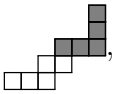
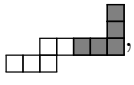
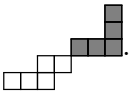
定义 2.2. 对于两个组合 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ 和 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$，定义它们的**连接** $\alpha \cdot \beta$ 和**近连接** $\alpha \odot \beta$ 如下：

$$\alpha \cdot \beta := (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_m),$$
$$\alpha \odot \beta := (\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell + \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$$

约定。 本文中，我们将采用以下约定。令 $\mathrm{Diag}(\alpha \cdot \beta)$ 表示大小为 $n+m$ 的连通带状图。在 $\mathrm{Diag}(\alpha \cdot \beta)$ 内部，有一个规范分解，将其分为两个子带状图：下部 子带状图由沿西南至东北带状图遍历的前 n 个单元格组成（同构于 $\mathrm{Diag}(\alpha)$）；上部 子带状图由最后 m 个单元格组成（同构于 $\mathrm{Diag}(\beta)$）。

我们为非连通图形 $\mathrm{Diag}(\alpha,\ \beta)$ 固定如下放置约定：它由 $\mathrm{Diag}(\alpha \cdot \beta)$ 将上方的 β-子带状图向右平移一个单位得到。因此，$\mathrm{Diag}(\alpha,\ \beta)$ 有两个连通分支，其 α-分支和 β-分支之间隔着一个单位间隙。类似地，$\mathrm{Diag}(\alpha \odot \beta)$ 由 $\mathrm{Diag}(\alpha,\ \beta)$ 将 β-分支向下平移一个单位得到。按照这一约定，在 $\mathrm{Diag}(\alpha \odot \beta)$ 中，α-分支最东北的单元格与 β-分支最西南的单元格水平相邻（且紧靠其左侧）。

例2.3。 令 $\alpha = (3,\ 2)$ 和 $\beta = (3,\ 1,\ 1)$。那么

$\mathrm{Diag}(\alpha \cdot \beta) =$ , $\mathrm{Diag}(\alpha \odot \beta) =$ , $\mathrm{Diag}(\alpha, \beta) =$ .

定义 2.4 （洗牌积）。 令 $A = \mathbf{k}\langle x_1,\ \dots\dots,\ x_n\rangle$ 为以 n 个字母为生成元的自由结合代数，其基由字母表 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 中的单词构成。对于两个单词

$$u = u_1 u_2 \cdots u_p \quad \text{and} \quad v = v_1 v_2 \cdots v_q,$$

u 与 v 的洗牌积定义为

$$u \sqcup\!\sqcup v := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(p,q)} w_{\sigma^{-1}(1)}\, w_{\sigma^{-1}(2)} \cdots w_{\sigma^{-1}(p+q)},$$

其中

$$(w_1, \dots, w_{p+q}) = (u_1, \dots, u_p,\ v_1, \dots, v_q),$$

并且，$\mathrm{Sh}(p,q)$表示(p,q)-交错的集合，即满足以下条件的置换 $\sigma \in S_{p+q}$

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{and} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q).$$

洗牌积以$\mathbf{k}$-双线性方式扩张到所有 A。

例 2.5. 设 $A = \mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$。我们希望计算 $(x_1x_2) \sqcup\!\sqcup x_3$。这里 $p = 2$ 和 $q = 1$，因此 Sh(2,1) 由三种交错组成：将单个字母 x_3 放入 x_1, x_2 之间的三个位置之一，同时保持 x_1, x_2 的相对顺序不变。因此

$$(x_1x_2) \sqcup\!\sqcup x_3 = x_1x_2x_3 \ + \ x_1x_3x_2 \ + \ x_3x_1x_2.$$

3. Symmetric, noncommutative symmetric, and quasisymmetric functions

本节回顾 Hopf 代数**Sym**、**NSym**和**QSym**的相关知识。本节的一个有用参考文献是 [GR14]。

3.1. 对称函数。对称函数代数Sym 是交换多项式代数 $\mathbf{Q}[h_1, h_2, \ldots]$，其中 $\deg(h_n) = n$。h_n 是**完全齐次**生成元。给定整数 $n \geq 0$ 和分拆 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k)$，其中 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k)$ 是 n 的分拆，**完全齐次对称函数**是 **Sym** 中的如下元素

$$h_\lambda := h_{\lambda_1} \ldots h_{\lambda_k},$$

这里我们采用约定 $h_\emptyset = 1$。**Sym** 的其他重要基包括初等对称函数 e_λ、单项式对称函数 m_λ以及舒尔函数 s_λ。

代数 **Sym** 是一个自对偶霍普夫代数，其配对如下，称为**霍尔内积**:

$$\langle h_\lambda, m_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}$$

对所有分拆 λ 和 μ。元素 $f \in \mathbf{Sym}$ 根据以下关系导出一个算子 $f^\perp : \mathbf{Sym} \to \mathbf{Sym}$

$$\langle fg, h\rangle = \langle g, f^\perp h\rangle \quad \text{for all } g, h \in \mathbf{Sym}.$$

3.2. 非交换对称函数。非交换对称函数代数 NSym 是**Sym**的非交换类比：它是由生成元 $\{H_1, H_2, \ldots\}$生成的自由结合代数。给定一个组合 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$，与之对应的**完全齐次函数** α 定义为

$$H_\alpha := H_{\alpha_1}H_{\alpha_2} \ldots H_{\alpha_k}.$$

NSym 的另一个基是**非交换带状函数** $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{Comp}}$。**NSym** 的这两个基满足以下关系:

$$H_\alpha = \sum_{\beta \text{ coarsens } \alpha} R_\beta, \tag{1}$$

$$R_\alpha = \sum_{\beta \text{ coarsens } \alpha} (-1)^{\ell(\beta)-\ell(\alpha)} H_\beta. \tag{2}$$

带状基还满足以下乘积恒等式:

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha\cdot\beta} + R_{\alpha\odot\beta}. \tag{3}$$

遗忘映射 $\chi : \mathbf{NSym} \to \mathbf{Sym}$ 定义为将元素 H_α 映射为完全齐次对称函数

$$\chi(H_\alpha) := h_{\alpha_1}h_{\alpha_2} \cdots h_{\alpha_k} \in \mathbf{Sym}$$

并线性延拓。注意，根据雅可比–特鲁迪恒等式，此映射将 R_α 映射为与带状图 Diag(α)对应的斜舒尔函数 $r_\alpha := s_{\mathrm{Diag}(\alpha)}$。

3.3. **拟对称函数。 拟对称函数代数 QSym** 是与**NSym** 对偶的分次霍普夫代数，其中包含 **Sym** 作为子代数。令 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{Comp}}$为单项式拟对称基，它与**NSym**的 $\{H_\alpha\}$ 基对偶。**基本拟对称函数** L_α 与**NSym**的带状函数 R_α 对偶。这两个基之间的关系为

$$L_\alpha = \sum_{\beta \text{ refines } \alpha} M_\beta.$$

Hopf代数QSym 在基本拟对称函数的基 $\{L_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{Comp}}$ 下的结构映射如下:

- 余乘:
$$\Delta L_\alpha = \sum_{\substack{(\beta,\gamma):\\ \beta\cdot\gamma=\alpha \text{ or } \beta\odot\gamma=\alpha}} L_\beta \otimes L_\gamma,$$
- 乘积: 令 $n=|\alpha|$ 和 $m=|\beta|$。任取下降合成为 Diag(u) $=\alpha$ 和 Diag(v) $=\beta$ 的置换 $u\in\mathfrak{S}_n$ 和 $v\in\mathfrak{S}_m$。令 v^{+n} 为由 v得到的单词，其中每个字母都加上 n，因此 v^{+n}是 $\{n+1,\dots,n+m\}$ 的一个排列。于是
$$L_\alpha L_\beta = \sum_{w\in u\sqcup\!\sqcup v^{+n}} L_{\mathrm{Diag}(w)}.$$

这里使用以下记号:

- w_α 是 SRT(α) 中任意标准杨表的任意读词;
- w_β 是 SRT(β) 中某个标准杨表的读词;
- $u\sqcup\!\sqcup v^{+n}$ 表示单词 u 和 v^{+n} 的交错集合;
- Diag(w) 是排列 w 的下降合成，或者等价地，是与 Des(w) 对应的组合。

例3.1. 要计算 $L_{(2)}L_{(1,1)}$ 的乘积，令 $w_{(2)}=12$ 对应于图形 1 2，$w_{(1,1)}=43$ 对应于图形 3 4。于是 

$$\begin{aligned} L_{(2)}L_{(1,1)} &= \sum_{w\in 12\sqcup\!\sqcup 43} L_{\mathrm{Diag}(w)} \\ &= L_{\mathrm{Diag}(1243)} + L_{\mathrm{Diag}(1423)} + L_{\mathrm{Diag}(1432)} + L_{\mathrm{Diag}(4123)} + L_{\mathrm{Diag}(4132)} + L_{\mathrm{Diag}(4312)} \\ &= L_{\square\square} + L_{\square\!\!\square} + L_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} + L_{\square\!\!\square} + L_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} + L_{\square\!\!\square}. \end{aligned}$$

3.4. **NSym 与 QSym 之间的配对。** 代数 **NSym** 和 **QSym** 之间存在一个配对$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$: **NSym** $\times$ **QSym** $\to$ Q，在此对偶关系下定义为

$$\langle R_\alpha, L_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}.$$

关于 **Sym** 上标量积的乘法伴随运算，可通过此配对推广至 **NSym** 和 **QSym**： 对于 $F\in$ **QSym**，记 $F^\perp$ 为作用于元素 $H\in$**NSym** 上的算子，其作用满足关系

$$\langle H, FG\rangle = \langle F^\perp H, G\rangle \quad \text{for all } G\in \mathbf{QSym}\,. \tag{4}$$

因此，给定 $H\in$ **NSym**，我们可以通过公式计算 $F^\perp$**(**H**)**

$$F^\perp(H) = \sum_{\alpha\in\mathrm{Comp}} \langle H, FL_\alpha\rangle R_\alpha. \tag{5}$$

4. Representation theory of the type A 0-Hecke algebra

本节回顾 0-Hecke 代数表示论的基础，以及该表示论与 Hopf 代数 **NSym** 和 **QSym**之间的联系。回顾一下， $\mathfrak{S}_n$ 个元素上的对称群由 $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ 生成，其中 s_i 表示对换 $(i,\ i+1)$，其中 $1 \le i < n$。这些对换满足关系 $s_i^2 = 1$、$(s_i s_{i+1})^3 = 1$ （当 $1 \le i < n-1$ 时），以及其他情况下的 $(s_i s_j)^2 = 1$，这些关系等价于以下关系：

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1 && 1 \le i < n, \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} && 1 \le i < n-1, \\ s_i s_j &= s_j s_i && |i-j| > 1,\ 1 \le i, j < n. \end{aligned}$$

A型 0-Hecke代数由 n 个元素构成，是 $\mathfrak{S}_n$ 群代数的一种变形，其生成元满足与底层 Coxeter 群相似的关系。

定义 4.1. 考虑满足以下关系的生成元 $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$：

$$\begin{aligned} \pi_i^2 &= \pi_i && 1 \le i < n, \\ \pi_i \pi_{i+1} \pi_i &= \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1} && 1 \le i < n-1, \\ \pi_i \pi_j &= \pi_j \pi_i && |i-j| > 1,\ 1 \le i, j < n. \end{aligned}$$

设 **k** 为任意域。由 n 个元素构成的**0-Hecke代数** $\mathcal{H}_n(0)$ 是由 $\{\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}\}$ 生成的**k**-代数。令 $\overline{\pi}_i = \pi_i - 1$；则有 $\overline{\pi}_i \overline{\pi}_i = 0$，并且可以验证 $\mathcal{H}_n(0)$ 由 $\{\overline{\pi}_1, \ldots, \overline{\pi}_{n-1}\}$ 生成，其满足与上述 π_i 相同的关系，只是 $\overline{\pi}_i^2 = -\overline{\pi}_i$。

关于 $\mathcal{H}_n(0)$ 的表示论已得到广泛研究，参见 [Nor79], [Car85], [KT97], ，近期的研究还有 [Hua16]。特别是， $\mathcal{H}_n(0)$ 的表示论与 **NSym** 和**QSym**密切相关。下一小节将概述这一关系。

根据 [Nor79], ，组合 $\alpha \vDash n$ 同时为简单 $\mathcal{H}_n(0)$-模（记作 $\mathbf{C}_\alpha$）以及 $\mathcal{H}_n(0)$ 的不可分解射影表示（记作 $\mathbf{P}_\alpha$）标引。回顾一下，模 M 的根基 $\operatorname{rad}(M)$ 是 M 的所有极大子模的交，而 M 的顶是 $\operatorname{top}(M) := M/\operatorname{rad}(M)$，它总是半单的。在我们的情形中，$\operatorname{top}(\mathbf{P}_\alpha) = \mathbf{C}_\alpha$。

简单模和不可分解射影模的显式构造 $\mathcal{H}_n(0)$-模可见 [Nor79]。我们将考察一种用杨表描述的另一种构造，见[Hua16]。

定义 4.2 ([Hua16])。 对于组合 $\alpha \vDash n$，向量空间$\mathbf{P}_\alpha$ 的基由形状为 $\operatorname{Diag}(\alpha)$ 的标准带状杨表构成。对于 $i \in [n-1]$以及 T形状为 $\operatorname{Diag}(\alpha)$ 的标准带状杨表，我们定义 $\mathcal{H}_n(0)$ 在 $\mathbf{P}_\alpha$ 上的作用如下：

$$\overline{\pi}_i(T) := \begin{cases} -T & \text{if } i \text{ is in a higher row of } T \text{ than } i+1, \\ 0 & \text{if } i \text{ is in the same row of } T \text{ as } i+1, \\ s_i(T) & \text{if } i \text{ is in a lower row of } T \text{ than } i+1, \end{cases}$$

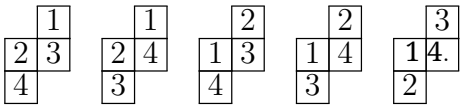
其中 $s_i(T)$ 表示将 T 中的 i 和 $i+1$ 互换后得到的图表。

一个 广义带状图 对应于一个组合序列 $\vec{\beta} = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(\ell)})$，其中每个 $\beta_i \vDash n_i$，而 β 对应于一个斜图 Diag(β)，其分离的带状图分支 Diag($\beta^{(i)}$) 从底部到顶部排列。这类广义带状图对应于 $\mathcal{H}_n(0)$ 的射影表示，其中 $n = \sum_{i=1}^{\ell} n_i$，由下式给出

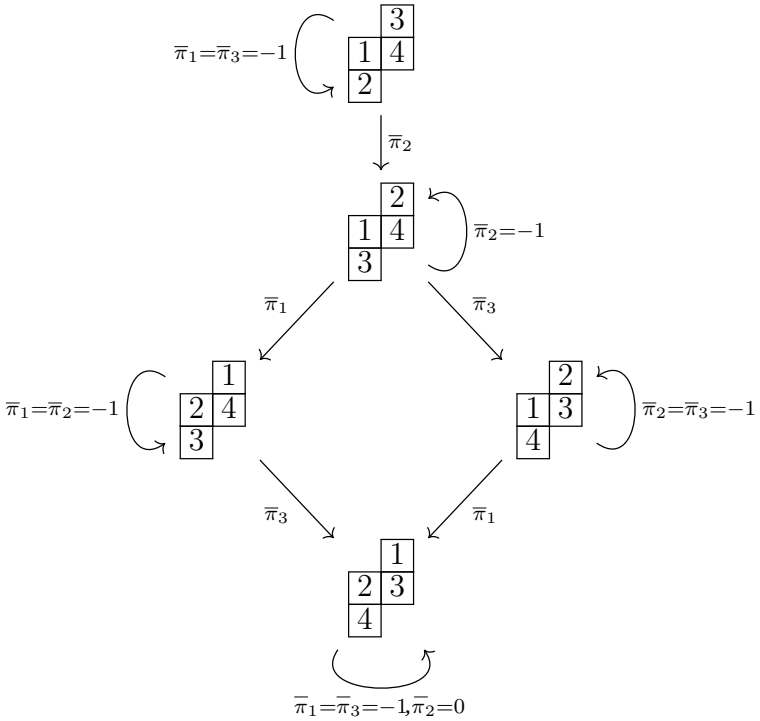
$$\mathbf{P}_{\vec{\beta}} \cong \left[\bigotimes_{i=1}^{\ell} \mathbf{P}_{\beta^{(i)}}\right] \uparrow_{\mathcal{H}_{n_1,\ldots,n_\ell}(0)}^{\mathcal{H}_n(0)},$$

$\mathcal{H}_{n_1,\ldots,n_\ell}(0) \cong \mathcal{H}_{n_1}(0) \otimes_{\mathbf{k}} \cdots \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{n_\ell}(0)$。射影模 $\mathbf{P}^{\vec{\beta}}$的基元素由形状为 Diag($\vec{\beta}$) 的标准杨表构成，其作用方式与上文相同。

例 4.3. 若 $\alpha = (1,2,1)$，考虑形状为 Diag(α) =  的标准杨表：



我们可以画出展示 $\mathcal{H}_4(0)$ 在 $\mathbf{P}^{(1,2,1)}$ 上作用的图形：



这里，箭头上的 $\pi_i = -1$ 表示 π_i 通过乘以 -1 作用于该基元素；类似地，箭头上的 $\pi_i = 0$ 表示 π_i 将该基元素映为 0。

定理 4.4 ([Hua16])。对于 $\alpha \vDash n$，相应的 $\mathcal{H}_n(0)$-模 $\mathbf{P}_\alpha$，其作用如上所述，同构于由 *Norton* 定义的 $\mathcal{H}_n(0)$ 对应于 α 的射影不可分解表示 [Nor79]。

由 [KT97], 可知，非交换 Frobenius 特征 **ch** 将 $\mathbf{P}_\alpha$ 映射为R_α，即非交换带状函数。这些 $\mathbf{P}_\alpha$ 因此是表示论中与带状图形相对应的 Specht 模的自然类比，其中表示论所涉及的代数为 $\mathfrak{S}_n$，因为

它们的特征 R_α 在 **NSym** 中满射映射到**Sym**中的对称带状舒尔函数r_α 。

我们也可以使用杨表方法来定义 $\mathcal{H}_n(0)$ 的简单模。

定义 4.5 ([Hua16, § 3.2])。 令 $\alpha \in \mathrm{Comp}(n)$，并令 $\tau_1(\alpha) \in \mathrm{SRT}(\alpha)$ 为标准带状杨表，填表顺序为每行从左到右，从顶行开始向下（如第 2 节所示）。定义一维 $\mathcal{H}_n(0)$-模

$$\mathbf{C}_\alpha := \mathbf{k} \cdot \tau_1(\alpha),$$

其中 $\overline{\pi}_i$ 按定义4.2规定的标量作用。则 $\mathbf{C}_\alpha \cong \mathrm{top}(\mathbf{P}_\alpha)$，且生成元的读词为 $w_1(\alpha)$。

注 4.6. 对于 0-Hecke代数，一维模 $M = \mathbf{k}v$ 由其下降集确定

$$D(M) := \{\, i \in [n-1] : \overline{\pi}_i v = -v \,\}.$$

根据 Norton [Nor79], ，简单模 $\mathbf{C}_\alpha$ 是具有$D(\mathbf{C}_\alpha) = \mathrm{Des}(\alpha)$的一维 $\mathcal{H}_n(0)$-模。在定义 4.2 的杨表模型中，若且唯若 $\pi_i(T)$ 总是 T 的标量倍数，即没有生成元通过非平凡交换 $T \mapsto s_i(T)$ 作用时，张成空间 $\mathbf{k}\cdot T$ 才是 $\mathcal{H}_n(0)$-子模。杨表 $\tau_1(\alpha)$ 具有此性质，因此 $\mathbf{k} \cdot \tau_1(\alpha)$ 实现了 $\mathbf{C}_\alpha$。

4.1. **将 0-Hecke 代数的格罗滕迪克群与 NSym 和 QSym 联系起来**。对于每个 $n \geq 0$, 令 $G_0(\mathcal{H}_n(0))$ 表示$\mathcal{H}_n(0)$-模有限维范畴的格罗滕迪克群，也就是说，它是由 $[M]$ 的同构类生成的自由阿贝尔群，并对每个短正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ 取商，关系为 $[M] = [L] + [N]$。令 $K_0(\mathcal{H}_n(0))$ 表示有限维 射影$\mathcal{H}_n(0)$-模的正合范畴对应的格罗滕迪克群。于是我们定义

$$G_0(\mathcal{H}_\bullet(0)) := \bigoplus_{n\geq 0} G_0(\mathcal{H}_n(0)), \qquad K_0(\mathcal{H}_\bullet(0)) := \bigoplus_{n\geq 0} K_0(\mathcal{H}_n(0)).$$

Krob 和 Thibon [KT97] 证明了 $G_0(\mathcal{H}_\bullet(0))$ 和 $K_0(\mathcal{H}_\bullet(0))$ 分别与**QSym**和 **NSym**作为分次代数同构。他们通过引入以下映射证明了这一点。

定义 4.7。 设 M 是一个有限维 $\mathcal{H}_n(0)$-模，并考虑 M 的一个合成列，即一个递减序列

$$M = M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_k \supset M_{k+1} = 0$$

其中各个相邻商 M_i/M_{i+1} 都是单的。于是每个 M_i/M_{i+1} 都同构于某个 $\mathbf{C}_{\alpha_i}$，而 Jordan–H¨older 定理保证拟对称函数

$$\mathrm{ch}^{\mathbf{QSym}}(M) = \sum_{i=1}^{k} L_{\alpha_i} \tag{6}$$

与合成列的选择无关。我们称 $\mathrm{ch}^{\mathbf{QSym}}$ 为 M的**拟对称弗罗贝尼乌斯特征** 。

现在，设 M 是一个有限维射影 $\mathcal{H}_n(0)$-模。那么， M 同构于不可分解射影模的直和

$$M = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbf{P}_{\alpha_i}.$$

M 的 **非交换 Frobenius 特征** 是由下式定义的非交换对称函数 $\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}$

$$\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}(M) := \sum_{i=1}^{m} R_{\alpha_i}. \tag{7}$$

类比于 $\mathfrak{S}_n$表示理论，Krob 和 Thibon [KT97]证明，$\mathrm{ch}^{\mathbf{QSym}}: G_0(\mathcal{H}_\bullet(0)) \to$ QSym 和 $\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}: K_0(\mathcal{H}_\bullet(0)) \to$ NSym 给出了分次代数的同构。Bergeron 和 Li [BL09] 证明，事实上 $K_0(\mathcal{H}_\bullet(0))$ 和 $G_0(\mathcal{H}_\bullet(0))$ 具有 Hopf 代数的结构，并且映射 $\mathrm{ch}^{\mathbf{QSym}}$ 和 $\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}$ 保持这一结构。关于该证明的更多细节，感兴趣的读者可参阅 [BL09，例 4.3]。

对于任意模 M在域 $\mathbf{k}$ 上，我们有 $\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_n(0)}(\mathbf{P}_\alpha, M)$ 是 $\mathbf{C}_\alpha$ 作为 M [Ben91 引理 1.7 中的合成因子的重数。6]。因此，对于任意 $\mathbf{k}$，存在一个自然配对

$$K_0(\mathcal{H}_\bullet(0)) \times G_0(\mathcal{H}_\bullet(0)) \to \mathbf{k}$$

由下式给出

$$\langle \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{C}_\beta \rangle = \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_n(0)}(\mathbf{P}_\alpha, \mathbf{C}_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}. \tag{8}$$

这一配对以人们所预期的方式对应于**NSym** 与**QSym** 之间的配对，如方程（4）所述。

5. Acyclic complexes from concatenation and near-concatenation

在本节中，我们引入投射0-Hecke模的无环复形，这些复形将带状恒等式 $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha\cdot\beta} + R_{\alpha\odot\beta}$ 在**NSym**中范畴化。我们将利用这些复形的存在性以及VandeBogert的一项结果 [Van25]，从而在下一节中得出结论：内部带分次代数 A （来自构造6.1，其乘法由近连接诱导）是Koszul的。非常相似的复形也出现在 [PP05，§8.2] 中，作为bar复形的齐次条带，以及 [APP+24]中关于带状 Schur 函子的情形，尽管这里的映射要简单得多。

在本节中，若 $\alpha \vDash n$ 与 $\beta \vDash m$，我们将$\mathbf{P}_{\alpha\cdot\beta}$、$\mathbf{P}^{(\alpha,\beta)}$与$\mathbf{P}^{\alpha\odot\beta}$ 视为投射0-Hecke模，其基分别为带状形状Diag($\alpha\cdot\beta$)、Diag(α, β)与Diag($\alpha\odot\beta$)的标准杨表，所用图示约定见第2.4节。

定义5.1。首先，我们定义映射 $\partial_{\alpha,\beta}: \mathbf{P}_{\alpha\cdot\beta} \to \mathbf{P}^{(\alpha,\beta)}$。设 U 为形状 Diag($\alpha\cdot\beta$) 的标准带状杨表。将 $\partial_{\alpha,\beta}(U)$ 定义为形状 Diag(α,β) 的图表：将 β-子带状图向右平移一个单位，并在相应的单元格中保留相同的条目。由于该平移不会改变任一分支内部的行列关系，因此得到的是 Diag(α,β) 的标准杨表。由于 $\partial_{\alpha,\beta}$ 在图表基上是单射，它是一个单射线性映射。

现在定义映射$\mu_{\alpha,\beta}: \mathbf{P}_{(\alpha,\beta)} \to \mathbf{P}^{\alpha\odot\beta}$。设 T 为形状 Diag(α, β) 的标准杨表。令 $T^{\downarrow}$ 表示通过将 T 的整个 β-分支向下平移一个单位，并保留所有对应平移后的单元格中的元素，得到的 Diag($\alpha\odot\beta$) 的填表。定义

$$\mu_{\alpha,\beta}(T) := \begin{cases} T^{\downarrow} & \text{if } T^{\downarrow} \text{ is a standard ribbon tableau of shape Diag}(\alpha\odot\beta), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{9}$$

$\mu_{\alpha,\ \beta}$ 的满射性显然成立：给定任意形状为 Diag($\alpha \odot \beta$) 的标准杨表 S，将 S 的 β-部分向上平移一个单位，得到形状为 Diag($\alpha,\ \beta$) 的标准杨表 S，然后 $\mu_{\alpha,\ \beta}(S) = S$。

引理 5.2。 映射 $\partial_{\alpha,\ \beta}$ 和 $\mu_{\alpha,\ \beta}$ 都是 $\mathcal{H}_{n+m}(0)$-等变映射。

证明。 只需验证这两个映射与 π_i 在定义 4.2中的作用下的每个生成元都可交换。

对于 $\partial_{\alpha,\ \beta}$，我们只将 β-子带状图向右平移一个单位。这不会改变任何元素所在的行，因此 i和 $i+1$ 的相对行位置保持不变，且交换i 和 $i+1$ 与平移可交换。因此

$$\partial_{\alpha,\beta}(\overline{\pi}_i U) = \overline{\pi}_i(\partial_{\alpha,\beta} U) \qquad \text{for all } U \in \mathbf{P}_{\alpha\cdot\beta}.$$

对于 $\mu_{\alpha,\ \beta}$，固定 $T \in \mathbf{P}^{(\alpha,\beta)}$ 并令 $S := \mu_{\alpha,\ \beta}(T)$。若 i 和 $i+1$ 位于 Diag($\alpha,\ \beta$)的同一分支中，则将 β-分支向下平移不会改变它们的相对行位置，且交换与平移可交换，因此 $\mu_{\alpha,\ \beta}(\pi_i T) = \pi_i S$。

现在假设 i和 $i+1$ 位于不同的分支中。如果将 β-分支向下平移后，i和 $i+1$ 仍位于不同行，那么它们的相对行序仍未改变，因此 π_i 与平移可交换，同样的等式依然成立。

接下来只需处理唯一的例外情形：平移后，i和 $i+1$ 位于 Diag($\alpha \odot \beta$) 的同一行。在这种情况下，$\pi_i(S) = 0$（要么 $S = 0$，要么 S是标准的，且 $i, i+1$位于同一行）。在源侧，如果 i 位于 β-分支中，那么 $\pi_i T = -T$；而如果i 位于 α-分支中，那么 $\pi_i T = s_i(T)$。在这两种子情形中，将 β-分支向下平移都会使 β-分支在该行中严格位于 α-分支的右侧，因此平移后的填充会使 i 位于 $i+1$ 右侧，从而成为非标准。因此$\mu_{\alpha,\beta}(T) = 0$，并且 $\mu_{\alpha,\beta}(\pi_i T) = 0$，这就证明了在所有情况下，$\mu_{\alpha,\beta}(\pi_i T) = \pi_i(\mu_{\alpha,\beta} T)$。□

命题 5.3。 对于 $\alpha \in \mathrm{Comp}(n)$ 和 $\beta \in \mathrm{Comp}(m)$，存在映射 $\partial := \partial_{\alpha,\beta}$ 以及$\mu := \mu_{\alpha,\ \beta}$，由此得到如下关于任意域上的$\mathcal{H}_{n+m}(0)$-模的 $\mathcal{H}_{n+m}(0)$-等变分裂短正合列：

$$0 \to \mathbf{P}_{\alpha\cdot\beta} \xrightarrow{\partial} \mathbf{P}_{(\alpha,\beta)} \xrightarrow{\mu} \mathbf{P}_{\alpha\odot\beta} \to 0. \tag{10}$$

证明。 在引理 5.2 中已验证 $\partial_{\alpha,\beta}$ 和 $\mu_{\alpha,\beta}$ 的等变性。根据构造，$\partial_{\alpha,\beta}$ 是单射，而 $\mu_{\alpha,\beta}$ 是满射。

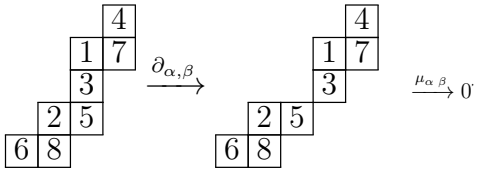
令 c_α 为 Diag(α, β) 中 α-分支的最东北单元格，并令 c_β 为 β-分支的最西南单元格。将 β-分支向下平移会引入一个新的邻接，即与紧邻 c_β 左侧的 c_α 之间的水平邻接。因此，对于形状为 Diag(α, β) 的标准杨表 T，平移填充 $T^{\downarrow}$ 是标准的，当且仅当 $T(c_\alpha) < T(c_\beta)$。

如果 U 是 Diag($\alpha\cdot\beta$) 的标准杨表，那么相应的单元格垂直相邻，c_β位于 c_α上方，因此 $U(c_\beta) < U(c_\alpha)$。由于 $\partial_{\alpha,\ \beta}$不会改变条目，$\partial_{\alpha,\ \beta}(U)$ 满足$T(c_\beta) < T(c_\alpha)$，因此属于 ker($\mu_{\alpha,\ \beta}$)。于是 im($\partial_{\alpha,\ \beta}$) $\subseteq$ker($\mu_{\alpha,\ \beta}$)。

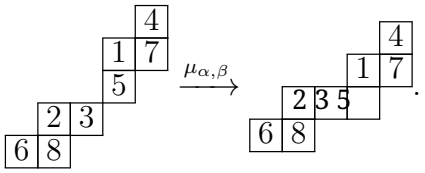
反过来，若 $T \in \mathbf{P}^{(\alpha,\beta)}$ 满足 $\mu_{\alpha,\ \beta}(T) = 0$，则 $T(c_\beta) < T(c_\alpha)$。将β-分支向左平移一个单位，得到连通带状图 Diag($\alpha \cdot \beta$) 的一个填充；唯一新增的比较是 c_β 位于 c_α上方的垂直邻接，根据同一不等式，该邻接满足标准性。因此，这个填充是一个标准杨表 U，且满足 $\partial_{\alpha,\ \beta}(U) = T$，所以 ker($\mu_{\alpha,\ \beta}$) $\subseteq$im($\partial_{\alpha,\ \beta}$)。

因此 $\ker(\mu_{\alpha,\ \beta}) = \mathrm{im}(\partial_{\alpha,\ \beta})$，故 (10) 是正合的。最后，$\mathbf{P}_{\alpha\odot\beta}$ 是射影的，因此 $\mu_{\alpha,\ \beta}$ 分裂，且该序列是分裂的。□

例 5.4。令 $\alpha = (2,\ 2)$ 和 $\beta = (1,\ 2,\ 1)$。则 $\alpha\cdot\beta = (2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1)$ 和 $\alpha\odot\beta = (2,\ 3,\ 2,\ 1)$。下面给出映射 $\partial_{\alpha,\ \beta}$ 和 $\mu_{\alpha,\ \beta}$ 的一些示例：



(11)



(12)

在推广上述复形之前，我们先介绍一些记号。

构造 5.5。令 $\vec{\alpha} = (\alpha^{(1)},\ \ldots\ldots,\ \alpha^{(\ell)})$ 为一个组合序列，其中 $|\vec{\alpha}| = n$。给定指标集 $I \subseteq [\ell-1]$，将 $\vec{\alpha}(I)$ 记为长度为 $\ell - |I|$ 的组合序列，该序列通过对每个 $i \in I$，将 $\vec{\alpha}$ 的第 i 个逗号替换为 $\odot$ 而得到。

定义由 $\mathcal{H}_n(0)$-模组成的上链复形 $(\mathcal{C}(\vec{\alpha}),\ \partial)$ 如下：

$$\mathcal{C}_i(\vec{\alpha}) := \bigoplus_{\substack{I\subseteq[\ell-1]\\ |I|=i}} \mathbf{P}_{\vec{\alpha}(I)}$$

并按如下方式定义 $\partial_i\colon \mathcal{C}_i(\vec{\alpha}) \to \mathcal{C}_{i+1}(\vec{\alpha})$。若 $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$ 且 $j \in [\ell-1]\setminus I$，则令

$$\mathrm{sgn}(j, I) := (-1)^{\#\{t : i_t < j\}}.$$

对于任意 $T \in \mathbf{P}^{\vec{\alpha}(I)}$，定义

$$\partial_i(T) := \sum_{j\in[\ell-1]\setminus I} \mathrm{sgn}(j, I)\,\phi_j(T),$$

其中 $\phi_j(T)$ 是通过对相邻的分支对 $(j, j+1)$ 应用命题 5.3 中的粘合操作得到的，同时保持所有其他分支不变。

定理 5.6。对于任意组合序列 $\vec{\alpha} = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(\ell)})$，有序对 $(\mathcal{C}(\vec{\alpha}),\ \partial)$ 是一个上链复形，在严格为正的上同调次数上无环，并且

$$H^0(\mathcal{C}(\vec{\alpha})) \cong \mathbf{P}_{\alpha^{(1)}\cdot\alpha^{(2)}\cdot\cdots\cdot\alpha^{(\ell)}}.$$

可以将定理 5.6 视为对 NSym 中一个恒等式的“范畴化”；该恒等式**NSym** 源自递归地应用公式 (3)。

例 5.7。当 $\ell = 4$时，定理5.6 中的正合复形如下：

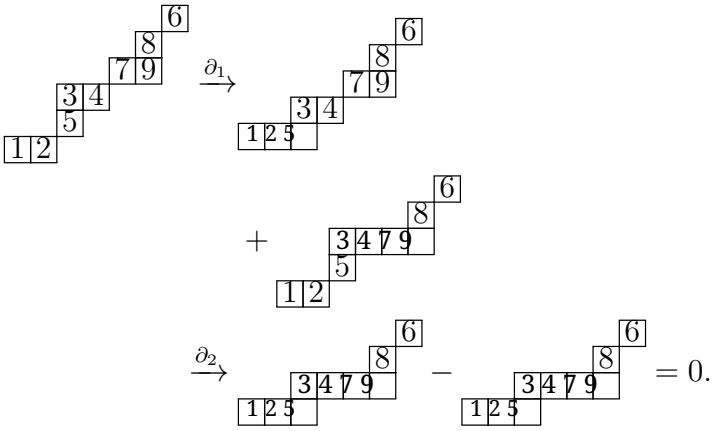
$$0 \to \mathbf{P}_{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta} \to \mathbf{P}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} \xrightarrow{\partial_1} \begin{matrix}\mathbf{P}_{(\alpha\odot\beta,\gamma,\delta)}\\ \oplus\\ \mathbf{P}_{(\alpha,\beta\odot\gamma,\delta)}\\ \oplus\\ \mathbf{P}_{(\alpha,\beta,\gamma\odot\delta)}\end{matrix} \xrightarrow{\partial_2} \begin{matrix}\mathbf{P}_{(\alpha\odot\beta\odot\gamma,\delta)}\\ \oplus\\ \mathbf{P}_{(\alpha\odot\beta,\gamma\odot\delta)}\\ \oplus\\ \mathbf{P}_{(\alpha,\beta\odot\gamma\odot\delta)}\end{matrix} \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{P}_{(\alpha\odot\beta\odot\gamma\odot\delta)} \to 0. \tag{13}$$

NSym中推广公式（3）的相应恒等式如下 :

$$R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta = R_{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta} + \big(R_{\alpha\odot\beta}R_\gamma R_\delta + R_\alpha R_{\beta\odot\gamma}R_\delta + R_\alpha R_\beta R_{\gamma\odot\delta}\big) - \big(R_{\alpha\odot\beta\odot\gamma}R_\delta + R_{\alpha\odot\beta}R_{\gamma\odot\delta} + R_\alpha R_{\beta\odot\gamma\odot\delta}\big) + R_{\alpha\odot\beta\odot\gamma\odot\delta}.$$

当每个 $\alpha^{(i)}$ 的长度都为一时，注意，取该复形的特征标可以还原方程（2）。

举例说明这些映射，设 $\alpha = (2)$、 $\beta = (1,\ 2)$、 $\gamma = (2,\ 1)$ 和 $\delta = (1)$。那么我们有:



证明。 这个证明与 [APP+24，定理 3 的证明类似，14], 但实际上更简单。

首先我们验证 $\partial = 0$。固定 $I \subseteq [\ell-1]$ 以及 $[\ell-1]\setminus I$ 中互不相同的 $j < j'$。映射 ϕ_j通过对东北子图进行可交换平移来定义（约定：若平移产生非标准填充，则输出为 0）。因此，对所有 $T \in \mathbf{P}^{\vec{\alpha}(I)}$,

$$\phi_{j'}(\phi_j(T)) = \phi_j(\phi_{j'}(T)),$$

其中，如果任一中间步骤是非标准的，则两边都视为 0。在$\partial_{i+1}\partial_i(T)$ 中，数对 $(j,\ j')$ 因而出现两次：一次是先 j 再 j'，另一次是先 j' 再 j，且两者符号相反，因为

$$\operatorname{sgn}(j, I)\operatorname{sgn}(j', I\cup\{j\}) \;=\; -\operatorname{sgn}(j', I)\operatorname{sgn}(j, I\cup\{j'\}).$$

因此，各项贡献相互抵消，并且对所有 i， $\partial_{i+1}\circ\partial_i = 0$，所以 $\mathcal{C}(\vec{\alpha})$ 是一个上链复形。

现在我们通过对 ℓ 作归纳，利用映射锥证明正合性。对于 $\ell = 2$ 这是命题 5.3。假设 $\ell \geq 3$ 并记

$$\vec{\alpha} = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\ell)}), \qquad \vec{\alpha}' = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\ell-1)}), \qquad \vec{\alpha}'' = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\ell-1)} \odot \alpha^{(\ell)}).$$

根据 $\ell - 1 \in I$ 是否成立，将 $\mathcal{C}_i(\vec{\alpha})$ 的直和项分解：若 $\ell - 1 \notin I$，则得到直和项 $\mathbf{P}_{(\vec{\alpha}'(I)}$ $_{\alpha^{(\ell)})}$；若 $I = I' \cup \{\ell - 1\}$，则得到 $\mathbf{P}_{\vec{\alpha}''(I')}$。等价地，对于每个$i$，都有一个同构

$$\mathcal{C}_i(\vec{\alpha}) \;\cong\; \Big(\mathcal{C}_i(\vec{\alpha}') \otimes \mathbf{P}_{\alpha^{(\ell)}}\Big)\uparrow \;\oplus\; \mathcal{C}_{i-1}(\vec{\alpha}'').$$

在这一识别下， $\mathcal{C}(\vec{\alpha})$上的微分具有标准的映射锥形式：含有 $j \leq \ell - 2$ 的项分别限制为 $\big(\mathcal{C}(\vec{\alpha}') \otimes \mathbf{P}_{\alpha^{(\ell)}}\big)\uparrow$和 $\mathcal{C}(\vec{\alpha}'')$上的微分，而含有 $j = \ell - 1$ 的项给出一个复形的态射

$$\Phi : \Big(\mathcal{C}(\vec{\alpha}') \otimes \mathbf{P}_{\alpha^{(\ell)}}\Big)\uparrow \longrightarrow \mathcal{C}(\vec{\alpha}'')$$

其分量为粘合映射 $\phi_{\ell-1}$ （带有通常的符号 $(-1)^i$，位于次数 i）。因此$\mathcal{C}(\vec{\alpha}) \cong \mathrm{cone}(\Phi)$，并且我们有一个复形的短正合列

$$0 \to \mathcal{C}(\vec{\alpha}'')[-1] \to \mathcal{C}(\vec{\alpha}) \to \Big(\mathcal{C}(\vec{\alpha}') \otimes \mathbf{P}_{\alpha^{(\ell)}}\Big)\uparrow \to 0. \tag{14}$$

根据归纳假设，$\mathcal{C}(\vec{\alpha}')$ 和 $\mathcal{C}(\vec{\alpha}'')$ 在正次数上无环。由于 $(-)\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{P}_{\alpha^{(\ell)}}$ 以及诱导都是正合的，复形 $\big(\mathcal{C}(\vec{\alpha}')\otimes\mathbf{P}_{\alpha^{(\ell)}}\big)\uparrow$在正次数上也无环。由 (14) 导出的上同调长正合列随后表明，$\mathcal{C}(\vec{\alpha})$ 在正次数上无环。

最后，长正合列的低次数部分将 $H^0(\mathcal{C}(\vec{\alpha}))$ 与连接映射的核对应起来

$$\Big(\mathbf{P}_{\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(\ell-1)}} \otimes \mathbf{P}_{\alpha^{(\ell)}}\Big)\uparrow \longrightarrow \mathbf{P}_{\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(\ell-1)}\odot\alpha^{(\ell)}},$$

它是命题 $\mu_{\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(\ell-1)},\,\alpha^{(\ell)}}$ 5.3 中的近拼接映射。其核为$\mathbf{P}_{\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(\ell)}}$，从而完成归纳。□

6. Koszulness of $\mathcal{H}_\bullet(0)$

本节说明 VandeBogert的带状Schur模判据 [Van25]如何应用于由塔构造的自然内部分次代数结构 $\{\mathcal{H}_n(0)\}_{n\geq 0}$。本节中，我们必须同时跟踪两种分次：一种是按外部分次的 n (来自 $\mathcal{H}_n(0)$)，另一种是内部分次（即“列次数”）。令

$$\mathcal{H}_{n_1,\dots,n_r}(0) \coloneqq \mathcal{H}_{n_1}(0)\otimes_{\mathbf{k}}\cdots\otimes_{\mathbf{k}}\mathcal{H}_{n_r}(0) \subseteq \mathcal{H}_{n_1+\cdots+n_r}(0)$$

表示通常的抛物子代数。对于 $\mathcal{H}_n(0)$-模 M 和 $\mathcal{H}_m(0)$-模 N，定义它们的**诱导乘积**

$$M \mathbin{\widehat{\otimes}} N \;\coloneqq\; (M\otimes_{\mathbf{k}} N)\uparrow_{\mathcal{H}_{n,m}(0)}^{\mathcal{H}_{n+m}(0)}. \tag{15}$$

更一般地，对于 M_i 个 $\mathcal{H}_{n_i}(0)$-模，记作

$$M_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}\cdots\mathbin{\widehat{\otimes}} M_r \;\coloneqq\; (M_1\otimes_{\mathbf{k}}\cdots\otimes_{\mathbf{k}} M_r)\uparrow_{\mathcal{H}_{n_1,\dots,n_r}(0)}^{\mathcal{H}_{n_1+\cdots+n_r}(0)}.$$

构造 6.1。固定一个域$\mathbf{k}$。定义一个对象

$$A \;\coloneqq\; \bigoplus_{n\geq 0}\ \bigoplus_{\alpha\vDash n} \mathbf{P}_\alpha$$

其中直和项$\mathbf{P}_\alpha$ 视为一个射影 $\mathcal{H}_{|\alpha|}(0)$-模。

我们赋予 A 两种分次：

- 外部次数 n （ $\mathcal{H}_n(0)$-模分支），以及
- 在不可分解投射模上定义的内部次数为

$$\deg_{\mathrm{int}}(\mathbf{P}_\alpha) \coloneqq \ell(\alpha^\top),$$

带状图 Diag(α) 的**列**数。

相应地，记

$$A \;=\; \bigoplus_{d\geq 0} A_d, \qquad A_d \;=\; \bigoplus_{n\geq 0} A_{d,n}, \qquad A_{d,n} \coloneqq \bigoplus_{\substack{\alpha\vDash n\\ \ell(\alpha^\top)=d}} \mathbf{P}_\alpha.$$

因此 $A_0 = \mathbf{P}_\emptyset \cong \mathbf{k}$ （外部次数为 0）。在引理6.2 中，我们证明 A 由A_1生成。

现在我们定义一种乘法

$$m:\ A\widehat{\otimes}A \longrightarrow A$$

它关于内部分次是齐次的，关于外部分次是可加的。只需在直和项 $\mathbf{P}_\alpha\widehat{\otimes}\mathbf{P}_\beta$ 上定义 m。根据广义带状射影模的定义，

$$\mathbf{P}_\alpha\widehat{\otimes}\mathbf{P}_\beta \ \cong\ (\mathbf{P}_\alpha \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{P}_\beta)\uparrow_{\mathcal{H}_{|\alpha|,|\beta|}(0)}^{\mathcal{H}_{|\alpha|+|\beta|}(0)} \cong\ \mathbf{P}_{(\alpha,\beta)}.$$

定义 m 在此直和项上为 $\mathcal{H}_{|\alpha|+|\beta|}(0)$-等变近拼接映射

$$m|_{\mathbf{P}_\alpha\widehat{\otimes}\mathbf{P}_\beta} := \mu_{\alpha,\beta}:\ \mathbf{P}_{(\alpha,\beta)} \longrightarrow \mathbf{P}_{\alpha\odot\beta}\subseteq A.$$

在所有直和项上作 $\mathbf{k}$-线性延拓，即定义了 m。

关于内部分次，m 是齐次的，因为

$$\ell((\alpha\odot\beta)^\top) = \ell(\alpha^\top)+\ell(\beta^\top),$$

因为近连接将带状图沿水平方向粘合，因此列数相加。映射 m 的结合性源于映射 $\mu_{\alpha,\ \beta}$ 在迭代近连接下的相容性，这一点可由定理 5.6的证明验证。

引理 6.2。内部带分次代数 $A=\bigoplus_{d\geq 0}A_d$ 由 A_1在 m下生成。

证明。设 α是一个组合，并记 $\alpha^\top=(c_1,\dots,c_d)$，其中 $d=\ell(\alpha^\top)$ 是 Diag(α) 的列数。对每个 j，令 $\nu^{(j)}=(1^{c_j})$ 为大小为 c_j 的单列带状图。将这些列从左到右粘合，得到

$$\nu^{(1)}\odot\nu^{(2)}\odot\cdots\odot\nu^{(d)}=\alpha.$$

由于每个 $\mathbf{P}_{\nu^{(j)}}$ 都属于 A_1，在 A 中反复进行乘法即可得到 $\mathbf{P}_\alpha$。 □

6.1。 **带状舒尔模**。沿用 VandeBogert [Van25]，令 $B=\bigoplus_{d\geq 0}B_d$ 为一个标准的内部带分次 $\mathbf{k}$-代数，其乘法映射为 $m:\ B_a\widehat{\otimes}B_b\to B_{a+b}$。对于任意正整数序列 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$，定义带状舒尔模 缎带 *Schur* 模 $\mathbb{S}_B^\alpha$为映射的核

$$B_{\alpha_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}B_{\alpha_r}\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{r-1}B_{\alpha_1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}B_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}B_{\alpha_r},\tag{16}$$

其第 i 个分支由乘法 m 诱导：$B_{\alpha_i}\widehat{\otimes}B_{\alpha_{i+1}}\to B_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}$（其他因子上张量乘以恒等映射）。

我们将这一构造应用于内部带分次代数 A，见构造 6.1。由于 A 也具有外部分次（按 n），每个带状图 Schur 模 $\mathbb{S}_A^\alpha$ 都继承了外部分次；对于其外部次数 $\mathbb{S}_A^\alpha$，我们记作$(\bullet,N)$ 的直和项，该直和项是一个 $\mathcal{H}_N$(0)-模。

命题 6.3. 令 A 为构造 *6.1*中的内部带分次代数，并固定一个组合 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$。对于每个外部次数 N，存在一个射影 $\mathcal{H}_N(0)$-模的同构

$$(\mathbb{S}_A^\alpha)_{(\bullet,N)}\ \cong\ \bigoplus_{\substack{\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(r)}\\ \ell((\gamma^{(j)})^\top)=\alpha_j\\ \sum_j|\gamma^{(j)}|=N}}\mathbf{P}_{\gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}\dots\gamma^{(r)}}.$$

此外，在构造 $\mathcal{C}_0(\vec{\gamma}) = \mathbf{P}_{(\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(r)})}$ *5.5*中给出的识别下，由 $\vec{\gamma}$ 索引的直和项是子模 $H^0(\mathcal{C}(\vec{\gamma})) \subseteq \mathbf{P}_{(\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(r)})}$。

证明。 固定 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 和一个外部次数 N。根据构造 6.1,

$$A_{\alpha_j} = \bigoplus_{n\geq 0} \bigoplus_{\substack{\gamma \vDash n \\ \ell(\gamma^\top)=\alpha_j}} \mathbf{P}_\gamma \qquad (1 \leq j \leq r).$$

取诱导乘积 $A_{\alpha_1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} A_{\alpha_r}$，再提取外部次数 N，相当于选择组合 $\vec{\gamma} = (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(r)})$，使得 $\ell((\gamma^{(j)})^\top) = \alpha_j$ 且 $\sum_j |\gamma^{(j)}| = N$，然后沿着塔进行诱导。具体而言，每一种这样的选择都会得到广义带状投射模

$$\mathbf{P}_{(\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(r)})} \cong \left(\mathbf{P}_{\gamma^{(1)}} \otimes_{\mathbf{k}} \cdots \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{P}_{\gamma^{(r)}}\right) \uparrow_{\mathcal{H}_{|\gamma^{(1)}|,\dots,|\gamma^{(r)}|}(0)}^{\mathcal{H}_N(0)}.$$

因此

$$\left(A_{\alpha_1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} A_{\alpha_r}\right)_{(\bullet,N)} \cong \bigoplus_{\substack{\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(r)} \\ \ell((\gamma^{(j)})^\top)=\alpha_j \\ \sum_j |\gamma^{(j)}|=N}} \mathbf{P}_{(\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(r)})}. \tag{17}$$

根据定义（16）（其中 $B = A$），S_A^α 是映射的核，该映射的第 i 个分支由乘法 $A_{\alpha_i} \widehat{\otimes} A_{\alpha_{i+1}} \to A_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}$ 诱导。对于我们的代数 A，在直和项$\mathbf{P}_{\gamma^{(i)}} \widehat{\otimes} \mathbf{P}_{\gamma^{(i+1)}} \cong \mathbf{P}_{(\gamma^{(i)},\gamma^{(i+1)})}$ 上，此乘法恰好就是近连接映射

$$\mu_{\gamma^{(i)},\gamma^{(i+1)}} : \mathbf{P}_{(\gamma^{(i)},\gamma^{(i+1)})} \to \mathbf{P}_{\gamma^{(i)} \odot \gamma^{(i+1)}} \qquad \text{(Proposition 5.3)}.$$

由于 A 中的乘法按直和项定义并通过直和扩张，因此 S_A^α 的定义映射保持指标 $\vec{\gamma}$：根据源的分解（17）（以及外部次数为 N 时目标的类似分解），直和项$\mathbf{P}_{(\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(r)})}$ 的像属于 $\bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathbf{P}_{\vec{\gamma}(\{i\})}$。在这个直和项上，定义映射与次数为 0 的微分一致

$$d_0^{\vec{\gamma}} : \mathbf{P}_{(\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(r)})} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathbf{P}_{\vec{\gamma}(\{i\})}$$

复形 $\mathcal{C}(\vec{\gamma})$ 中的微分，见构造 5.5。因此，核分解为 $\vec{\gamma}$:

$$(\mathbb{S}_A^\alpha)_{(\bullet,N)} = \ker\Big(\bigoplus_{\vec{\gamma}} d_0^{\vec{\gamma}}\Big) \cong \bigoplus_{\vec{\gamma}} \ker(d_0^{\vec{\gamma}}) = \bigoplus_{\vec{\gamma}} H^0(\mathcal{C}(\vec{\gamma})).$$

根据定 理 5.6， $H^0(\mathcal{C}(\vec{\gamma})) \cong \mathbf{P}_{\gamma^{(1)}\cdot\gamma^{(2)}\cdots\gamma^{(r)}}$，从而得到所述分解 . □

定 理 6.4。 构造 A *6.1* 中的内部带分次代数 A 是 *Koszul* 代数 .

证明。 根据 [Van25，定理 1。3], 只需证明对于所有组合 α， β 典范序列

$$0 \to \mathbb{S}_A^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{S}_A^\alpha \widehat{\otimes} \mathbb{S}_A^\beta \to \mathbb{S}_A^{\alpha\odot\beta} \to 0$$

是正合的。

由于 A 具有外部分次，且乘法 m 保持外部次数，因此每个缎带 Schur 模 S_A^γ 都具有外部分次，并且上述序列中的映射关于外部分次是齐次的。因此，只需逐个外部次数 N 检验正合性。

固定一个外部次数 N。根据命题 6.3，外部次数为 N 的每一项都分解为由广义带状图指标化的不可分解射影 $\mathcal{H}_N(0)$-模的直和。此外，VandeBogert 的典范序列由 A的乘法函子性地定义，并且在每个直和项上

$$\mathbf{P}_{(\eta,\theta)} \subseteq (\mathbb{S}_A^{\alpha} \widehat{\otimes} \mathbb{S}_A^{\beta})_{(\bullet,N)}$$

诱导映射与近拼接映射一致$\partial_{\eta,\ \theta}$ 以及$\mu_{\eta,\ \theta}$ 它们来自命题 5.3。因此，VandeBogert 序列的外部次数 N 分支是分裂短正合列的直和

$$0 \to \mathbf{P}_{\eta\cdot\theta} \xrightarrow{\partial_{\eta,\theta}} \mathbf{P}_{(\eta,\theta)} \xrightarrow{\mu_{\eta,\theta}} \mathbf{P}_{\eta\odot\theta} \to 0,$$

因此是正合的。

由于 N 是任意的，典范序列是正合的，因此 A 根据 [Van25，定理 1，是 Koszul 的。□

7. Exact complexes for skew projective modules

本节通过射影–单模配对定义斜射影模，将它们的非交换特征与 NSym 上的斜算子联系起来，并推导出斜化单行或单列时的具体描述。随后，我们专门讨论单格斜化，并得到刻画分支的短正合列。

7.1. 斜射影模及其特征。 模$\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$ 的设计使得取非交换 Frobenius 特征后，它们会变成 **NSym**上的标准斜化算子 $L_{\beta}^{\perp}$。

定义 7.1。 固定 $\alpha \vDash n$ 和 $\beta \vDash k \leq n$。令$\mathbf{C}^{\beta}$ 表示由 β标记的一维简单$\mathcal{H}_k(0)$-模$\mathcal{H}_k$，并令

$$\mathbf{C}_{\beta}^{*} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C}_{\beta}, \mathbf{k})$$

它的$\mathbf{k}$-线性对偶。通过下式将$\mathbf{C}_{\beta}^{*}$ 视为一个右 $\mathcal{H}_k(0)$-模：

$$(\varphi \cdot a)(v) \coloneqq \varphi(a \cdot v) \qquad (\varphi \in \mathbf{C}_{\beta}^{*},\ a \in \mathcal{H}_k(0),\ v \in \mathbf{C}_{\beta}).$$

将 $\mathcal{H}_n(0)$-模$\mathbf{P}_{\alpha}$ 限制到抛物子代数 $\mathcal{H}_{k,\ n-k}(0) \cong \mathcal{H}_k(0) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{n-k}(0)$，并将该限制模记为 $\mathbf{P}_{\alpha} \downarrow^{\mathcal{H}_n(0)}_{\mathcal{H}_{k,\ n-k}(0)}$ · 定义**斜射影模** 为左 $\mathcal{H}_{n-k}(0)$-模

$$\mathbf{P}_{\alpha/\beta} \ \coloneqq\ \mathbf{C}_{\beta}^{*} \otimes_{\mathcal{H}_k(0)} \left(\mathbf{P}_{\alpha} \downarrow^{\mathcal{H}_n(0)}_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)} \right).$$

这里， $\mathcal{H}_{n-k}(0)$通过$\mathbf{P}_{\alpha} \downarrow^{\mathcal{H}_n(0)}_{\mathcal{H}_{k,\ n-k}(0)}$上的$\mathcal{H}_{k,\ n-k}(0)$的 $\mathcal{H}_{n-k}(0)$因子作用，而且该作用与张量积中使用的右 $\mathcal{H}_k(0)$作用相交换。

命题 7.2. 设 $\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$ 如定义 7.1所述。则对于每个有限维左$\mathcal{H}_{n-k}(0)$-模 M，存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{n-k}(0)}(\mathbf{P}_{\alpha/\beta}, M) \ \cong\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_n(0)}\Big(\mathbf{P}_{\alpha},\ (\mathbf{C}_{\beta} \otimes M) \uparrow^{\mathcal{H}_n(0)}_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)} \Big).$$

特别地，$\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$ 是射影的。

证明。 固定一个有限维左 $\mathcal{H}_{n-k}(0)$-模 M。通过 $\mathbf{C}_\beta$ 上的 $\mathcal{H}_k(0)$ 作用以及 M上的 $\mathcal{H}_{n-k}(0)$ 作用，将 $\mathbf{C}_\beta \otimes M$ 视为左 $\mathcal{H}_{k,\,n-k}(0)$-模。于是，Frobenius 互反律给出一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_n(0)}\Big(\mathbf{P}_\alpha,\ (\mathbf{C}_\beta \otimes M)\uparrow_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}^{\mathcal{H}_n(0)}\Big) \ \cong\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}\Big(\mathbf{P}_\alpha \downarrow_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}^{\mathcal{H}_n(0)},\ \mathbf{C}_\beta \otimes M\Big). \tag{18}$$

现在令 $\mathcal{H}_{k,n-k}(0) \cong \mathcal{H}_k(0) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{n-k}(0)$。令 $\mathbf{C}_\beta^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C}_\beta,\mathbf{k})$，视为右$\mathcal{H}_k(0)$-模，其作用为

$$(\varphi \cdot a)(v) := \varphi(a \cdot v) \qquad (\varphi \in \mathbf{C}_\beta^*,\ a \in \mathcal{H}_k(0),\ v \in \mathbf{C}_\beta).$$

由于 $\mathbf{C}_\beta$ 是有限维的，存在一个自然的 $\mathcal{H}_{k,n-k}(0)$-模同构

$$\mathbf{C}_\beta \otimes M \ \cong\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C}_\beta^*, M),$$

其中， $\mathcal{H}_k(0)$ 通过在 $\mathbf{C}_\beta^*$上进行前复合，作用于 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C}_\beta^*, M)$；而 $\mathcal{H}_{n-k}(0)$ 则通过其在 M上的作用发挥作用。因此

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}\Big(\mathbf{P}_\alpha \downarrow_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}^{\mathcal{H}_n(0)},\ \mathbf{C}_\beta \otimes M\Big) \ \cong\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}\Big(\mathbf{P}_\alpha \downarrow_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}^{\mathcal{H}_n(0)},\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C}_\beta^*, M)\Big). \tag{19}$$

在 $\mathcal{H}_k(0)$ 上应用通常的 Hom–张量伴随（并保持 $\mathcal{H}_{n-k}(0)$-等变性），得到一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}\Big(\mathbf{P}_\alpha \downarrow_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}^{\mathcal{H}_n(0)},\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C}_\beta^*, M)\Big) \ \cong\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{n-k}(0)}\Big(\mathbf{C}_\beta^* \otimes_{\mathcal{H}_k(0)} \big(\mathbf{P}_\alpha \downarrow_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}^{\mathcal{H}_n(0)}\big),\ M\Big). \tag{20}$$

根据定义 7.1， $\mathcal{H}_{n-k}(0)$-模 $\mathbf{C}_\beta^* \otimes_{\mathcal{H}_k(0)} \big(\mathbf{P}_\alpha \downarrow^{\mathcal{H}_n(0)}_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}\big)$ 恰好是 $\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$。结合式（18）、（19）和（20），得到所需的自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{n-k}(0)}(\mathbf{P}_{\alpha/\beta}, M) \ \cong\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_n(0)}\Big(\mathbf{P}_\alpha,\ (\mathbf{C}_\beta \otimes M)\uparrow_{\mathcal{H}_{k,n-k}(0)}^{\mathcal{H}_n(0)}\Big).$$

最后，右侧作为 M 的函子是正合的：诱导 $(-)\uparrow^{\mathcal{H}_n(0)}_{\mathcal{H}_{k,\,n-k}(0)}$ 之所以正合，是因为 $\mathcal{H}_n(0)$ 作为右 $\mathcal{H}_{k,\,n-k}(0)$-模是自由的；而 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_n(0)}(\mathbf{P}_\alpha,\ -)$ 之所以正合，是因为$\mathbf{P}_\alpha$ 是射影的。因此，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{n-k}(0)}(\mathbf{P}_{\alpha/\beta},\ -)$ 是正合的，所以 $\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$ 是射影的。 □

命题 7.3。 对于 $\alpha \vDash n$ 和 $\beta \vDash k$ 且满足 $k \le n$，非交换 *Frobenius* 特征满足

$$\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}(\mathbf{P}_{\alpha/\beta}) \ =\ L_\beta^{\perp} R_\alpha \qquad in\ \mathbf{NSym}\,.$$

证明。设

$$\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}(\mathbf{P}_{\alpha/\beta}) = \sum_{\gamma \vDash n-k} c_\gamma\, R_\gamma.$$

根据 ch 的定义$^{\mathbf{NSym}}$，我们有： c_γ 是 $\mathbf{P}^\gamma$ 作为 $\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$ 的直和项的重数。由于 $\mathrm{top}(\mathbf{P}^\gamma) = \mathbf{C}^\gamma$ 且 $\mathrm{End}(\mathbf{C}^\gamma) = \mathbf{k}$，该重数为（见 [Ben91，引理 1.7。6]）

$$c_\gamma = \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{n-k}(0)}(\mathbf{P}_{\alpha/\beta}, \mathbf{C}_\gamma). \tag{21}$$

应用命题 7.2 ，令 $M = \mathbf{C}^\gamma$ 即可得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{n-k}(0)}(\mathbf{P}_{\alpha/\beta}, \mathbf{C}_\gamma) \ \cong\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_n(0)}\Big(\mathbf{P}_\alpha,\ (\mathbf{C}_\beta \otimes \mathbf{C}_\gamma)\uparrow\Big),$$

因此，根据射影–单模配对，

$$c_\gamma = \big\langle \mathbf{P}_\alpha,\ (\mathbf{C}_\beta \otimes \mathbf{C}_\gamma)\uparrow \big\rangle.$$

将这一恒等式通过 Frobenius 特征映射，并利用诱导对应于 **QSym** [KT97 中的乘法，BL09] 可得

$$c_\gamma = \langle R_\alpha,\ L_\beta L_\gamma \rangle.$$

最后，关于 $L_\beta^\perp$ 的 **NSym–QSym** 配对的伴随性给出

$$c_\gamma = \langle L_\beta^\perp R_\alpha,\ L_\gamma \rangle,$$

因此，c_γ 是 $L_\beta^\perp R_\alpha$中 R_γ 的系数。由于这对所有 γ都成立，我们得出 $\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}(\mathbf{P}^{\alpha/\beta}) = L_\beta^\perp R_\alpha$。□

注记 7.4. 等价地，$\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$ 中$\mathbf{P}^\gamma$ 的重数，就是通过 **NSym** 与 **QSym**之间的配对，在 **QSym** 中乘积 $L_\beta L_\gamma$ 里 L_α 的系数。利用基本拟对称函数乘积的洗牌规则，可以将这一重数解释为洗牌计数。

7.2. 情形 $\beta = (1)$ 与分支。 在 $\beta = (1)$ 的情形下，算子 $L_{(1)}^\perp$ 刻画了从 $\mathcal{H}_n(0)$ 到抛物子代数 $\mathcal{H}_{1,n-1}(0)$ 的限制。

引理 7.5. 固定 $\downarrow := \downarrow^{\mathcal{H}_n(0)}_{\mathcal{H}_{1,n-1}(0)}$。则下图交换 :

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{H}_\bullet(0)) & \xrightarrow{\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}} & \mathbf{NSym} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (-)\downarrow} & & \Big\downarrow{\scriptstyle L_{(1)}^\perp \cdot} \\ K_0(\mathcal{H}_\bullet(0)) & \xrightarrow{\mathrm{ch}^{\mathbf{NSym}}} & \mathbf{NSym} \end{array}$$

证明。 根据 Norton 的工作 [Nor79], ，0-Hecke 代数 $\mathcal{H}_n(0)$ 作为任意抛物子代数 $\mathcal{H}_{k,\ n-k}(0)$ 上的右模是自由的（因而是射影的）。因此，沿着 $\mathcal{H}_{1,\ n-1}(0) \subset \mathcal{H}_n(0)$ 的限制将射影模映到射影模，所以左侧竖直映射在 K_0 上定义良好。

对于 $\alpha \vDash n$ 和 $\gamma \vDash n-1$，Frobenius 互反律给出

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_n(0)}\big(\mathbf{P}_\alpha,\ (\mathbf{C}_{(1)} \otimes \mathbf{C}_\gamma)\uparrow\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{n-1}(0)}(\mathbf{P}_\alpha\downarrow,\ \mathbf{C}_\gamma)\,.$$

通过 Frobenius 特征映射和配对（4）转换这一恒等式，即得所述的交换性。□

7.3. 行与列的斜化。 现在我们给出$\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$ 的显式分解，其中 β 为单行或单列。

记号 7.6。 设 $\alpha \in \mathrm{weakComp}(n)$，并设 $\beta \in \mathrm{weakComp}(k,\ \ell(\alpha))$，其中对所有$i$均有 $\beta_i \le \alpha_i$。将 $\mathrm{rowDelete}(\alpha,\ \beta)$ 定义为从 $\mathrm{Diag}(\alpha)$ 中按从左到右的顺序移除第 i 行的 β_i 个方格（行从底部开始计数）后得到的广义带状图。

命题 7.7. 设 $\alpha \in \mathrm{Comp}(n)$ 且 $0 < k < n$。那么，在 $K_0(\mathcal{H}_{n-k}(0))$ 中（等价地，忽略射影 $\mathcal{H}_{n-k}(0)$-模的同构），

$$\mathbf{P}_{\alpha/(k)} \cong \bigoplus_{\substack{\beta \in \mathrm{weakComp}(k,\ell(\alpha)) \\ (\alpha-\beta)_i > 0 \ \text{for}\ i < \ell(\alpha)}} \mathbf{P}_{\mathrm{rowDelete}(\alpha,\beta)}. \tag{22}$$

类似地，

$$\mathbf{P}_{\alpha/(1^k)} \cong \bigoplus_{\substack{\beta\in\mathrm{weakComp}(k,\ell(\alpha^\top))\\ (\alpha^\top-\beta)_i>0 \text{ for } i<\ell(\alpha^\top)}} \mathbf{P}_{\mathrm{rowDelete}(\alpha^\top,\beta)^\top}. \tag{23}$$

注记7.8. 在 (22) 中，条件 $(\alpha-\beta)_i>0$ 对于 $i<\ell(\alpha)$ 表示，只有当某一整行是 α 的顶行时，才可以将其删除。在 (23) 中，相应的条件表示，只有当某一整行是 $\alpha^\top$ 的顶行时，才可以将其删除；也就是说，只有当某一整列是 α 的 最左侧列时，才可以将其删除。

证明. 我们证明 (22)；列的情形可通过转置带状图得到，并利用这一点：对应于唯一排列 (1^k) $k\cdots 2\,1$。

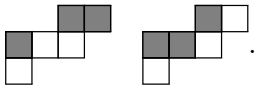
根据命题 7.3，$\mathbf{P}^{\alpha/(k)}$ 由 K_0 中 $L_{(k)}^{\perp}R_\alpha$的系数确定。等价地，对于每个 $\gamma\vDash n-k$，$\mathbf{P}^\gamma$ 在 $\mathbf{P}^{\alpha/(k)}$ 中的重数等于 L_α 在 $L_{(k)}L_\gamma$ 中的系数（见注记 7.4）。

选择具有下降合成（k）的唯一单词 $w_{(k)}=12\cdots k$。根据第3节中的洗牌乘积法则，$L_{(k)}L_\gamma$ 中 L_α 的系数统计了$w_{(k)}$ 与一个下降合成为 γ 的单词进行交错后，得到一个下降合成为 α的单词的所有交错方式。在形状为 α的带状杨表上解释这些交错，指定递增子词$12\cdots k$的一次出现，相当于在Diag(α)的每一行 i 中选择若干个方格 β_i（从左起），使其由来自 $\{1,\dots,k\}$的字母占据。在形状为 α的标准带状杨表上解释交错，指定递增单词 $12\cdots k$的一次出现，就相当于选择Diag(α)中由字母 $\{1,\dots,k\}$填入的那些单元格 k。由于该杨表是行列严格的， $\{1,\dots,k\}$ 所占据的单元格在每一行中都是左对齐的。此外，在非顶行中选取所有单元格会使剩余的带状图断开，因此我们对 $i<\ell$（α）施加条件（$\alpha-\beta$）$_i>0$。

移除这些 β_i 方格后，得到广义带状图 rowDelete(α,β)，由剩余字母 $\{k+1,\dots,n\}$ 填入。对剩余字母进行不同的洗牌，恰好得到射影模 $\mathbf{P}_{\mathrm{rowDelete}(\alpha,\beta)}$。对所有可容许的 β 求和，即得 22 中的分解式（ K_0（$\mathcal{H}_{n-k}$（0））。由于 K_0 投射模构成的群由不可分解投射模自由生成， K_0 中的等式便升级为射影模的同构。□

我们可以结合命题 7.7 与定理5.6中的复形，以更好地理解在 $\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$ 的结构，其中 $\beta=$（k）或（1^k）。以下示例说明了如何进行。

例 7.9。 设 $\alpha=(1,3,2)$ 和 $\beta=(3)$。根据命题 7.7，为了理解$\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$的结构，我们应考察以下图形，它们由从 β 中移除灰色方格（对应于 α）得到：



注意，左侧的图形是允许的，因为只有在删除最顶行时，才允许删除整行。因此，我们有

$$\mathbf{P}_{\alpha/\beta}\cong\mathbf{P}_{((1),(2))}\oplus\mathbf{P}_{((1),(1),(1))}.$$

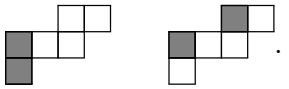
令 $\vec{\gamma} = ((1), (2))$ 和 $\vec{\delta} = ((1), (1), (1))$。我们可以取构造 5.5 中的复形的直和 $\mathcal{C}(\vec{\gamma}) \oplus \mathcal{C}(\vec{\delta})$，从而得到复形

$$0 \to \begin{matrix}\mathbf{P}_{(1,2)} \\ \oplus \\ \mathbf{P}_{(1,1,1)}\end{matrix} \to \begin{matrix}\mathbf{P}_{\alpha/\beta} \\ \| \\ \mathbf{P}_{((1),(2))} \\ \oplus \\ \mathbf{P}_{((1),(1),(1))}\end{matrix} \to \begin{matrix}\mathbf{P}_{(3)} \\ \oplus \\ \mathbf{P}_{((1),(2))} \\ \oplus \\ \mathbf{P}_{((2),(1))}\end{matrix} \to \mathbf{P}_{(3)} \to 0,$$

由于它是两个正合复形的直和，因此它是正合的。因此，我们有$\mathbf{P}_{\alpha/\beta} \cong \mathbf{P}_{(2,1)} \oplus \mathbf{P}_{(1,1,1)} \oplus \mathbf{P}_{((1),(2))} \oplus \mathbf{P}^{((2),(1))}$。再应用一次拼接/近拼接恒等式，我们得到$\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$ 分解为不可分解投射模的完整分解：

$$\mathbf{P}_{(1,3,2)/(3)} \cong \mathbf{P}_{(1,2)}^2 \oplus \mathbf{P}_{(1,1,1)} \oplus \mathbf{P}_{(3)}^2 \oplus \mathbf{P}_{(2,1)}.$$

例 7.10。设 $\alpha = (1, 3, 2)$ 且 $\beta = (1, 1)$。则 $\alpha^\top = \mathrm{rev}(\alpha^c) = (1, 2, 1, 2)$。根据命题 7.7，我们应考虑以下图形，其中移除了灰色方格（对应于 β），以便理解 α 中的 $\mathbf{P}^{\alpha/\beta}$:



注意，最左侧的图形是允许的，因为只有当被移除的整行是顶行时，才能从 $\alpha^\top$ 中移除整行，而这对应于原始图形中 α的最左侧一列。因此，我们有 $\mathbf{P}^{\alpha/(1,1)} = \mathbf{P}_{(2,2)} \oplus \mathbf{P}^{((1),(2),(1))}$。将定理 5.6迭代应用于图形 $\vec{\gamma} = ((1), (2), (1))$，我们得到图形

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & \mathbf{P}_{(1,3)} \oplus \mathbf{P}_{(3,1)} & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{P}_{(1,2,1)} & \longrightarrow & \mathbf{P}_{((1),(2),(1))} & \longrightarrow & \mathbf{P}_{((1),(3))} \oplus \mathbf{P}_{((3),(1))} & \longrightarrow & \mathbf{P}_{(4)} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & \mathbf{P}_{(4)}^2 & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & \end{array}$$

综合以上各点，我们得到

$$\mathbf{P}_{(1,3,2)/(1,1)} \cong \mathbf{P}_{(2,2)} \oplus \mathbf{P}_{(1,2,1)} \oplus \mathbf{P}_{(1,3)} \oplus \mathbf{P}_{(3,1)} \oplus \mathbf{P}_{(4)}.$$

7.4. 单格斜化与分支短正合列。 现在我们将特例化到 $\beta = (1)$。从带状图中删去一个格子，最多会将其分成两个连通分量；我们将对此作出明确说明。

定义 7.11. 对于广义带状图 ρ，令 components(ρ) 表示其连通分支按从西南到东北的顺序排列的列表。

命题7.12. 设 $\alpha \vDash n$，并令 ϵ_i 表示 $\mathbb{Z}^{\ell(\alpha)}$ 中第 i 个标准基向量。对于每个满足 $\alpha_i > 1$ 的 $i \in [\ell(\alpha)]$，广义带状图 $\mathrm{rowDelete}(\alpha, \epsilon_i)$ 至多有两个连通分支。将其分量列表（按顺序）记为

$$\mathrm{components}(\mathrm{rowDelete}(\alpha, \epsilon_i)) \;=\; \begin{cases} (\alpha_i', \alpha_i'') & \textit{if it is disconnected,} \\ (\alpha - \epsilon_i) & \textit{if it is connected.} \end{cases}$$

于是有一个 $\mathcal{H}_{1,n-1}(0)$-模的分裂短正合列

$$0 \to \bigoplus_{\alpha_i > 1} \mathbf{P}_{(1)} \otimes \mathbf{P}_{\alpha - \epsilon_i} \xrightarrow{\partial} \mathbf{P}_{\alpha}{\downarrow}^{\mathcal{H}_n(0)}_{\mathcal{H}_{1,n-1}(0)} \xrightarrow{\mu} \bigoplus_{\alpha_j^\top > 1} \mathbf{P}_{(1)} \otimes \mathbf{P}_{(\alpha^\top - \epsilon_j)^\top} \to 0,$$

其中，在每个非连通直和项 $\mathbf{P}_{(1)} \otimes \mathbf{P}_{(\alpha_i', \alpha_i'')}$ 上，映射由 $1 \otimes \partial_{\alpha_i', \alpha_i''}$ 和 $1 \otimes \mu_{\alpha_i', \alpha_i''}$ 给出，如定义 *5.1*所示；而在连通直和项 $\mathbf{P}_{(1)} \otimes \mathbf{P}_{\alpha - \epsilon_i}$ 上，映射 ∂ 是 $\mathbf{P}_{\alpha}\downarrow$的分解中该直和项的自然包含。

证明。由引理 7.5 和命题 7.7（其中 $k = 1$），

$$\mathbf{P}_{\alpha}{\downarrow}^{\mathcal{H}_n(0)}_{\mathcal{H}_{1,n-1}(0)} \;\cong\; \mathbf{P}_{(1)} \otimes \mathbf{P}_{\alpha/(1)} \;\cong\; \mathbf{P}_{(1)} \otimes \bigoplus_{\alpha_i > 1} \mathbf{P}_{\mathrm{rowDelete}(\alpha, \epsilon_i)}.$$

现在固定 i，其中 $\alpha_i > 1$。若 $i = 1$，则 $\mathbf{rowDelete}(\alpha, \epsilon_1) = \mathbf{Diag}(\alpha - \epsilon_1)$ 是连通的。若$i > 1$，则删除第 i 行最左侧的单元格会移除第 $i-1$ 行与第 i 行之间唯一的垂直邻接，因此 $\mathbf{rowDelete}(\alpha, \epsilon_i)$ 恰有两个连通分支；记

$$\mathrm{components}(\mathrm{rowDelete}(\alpha, \epsilon_i)) = (\alpha_i', \alpha_i'').$$

根据命题 5.3，每个这样的双分支广义带状投射模都包含在一个分裂短正合列中

$$0 \to \mathbf{P}_{\alpha_i' \cdot \alpha_i''} \xrightarrow{\partial} \mathbf{P}_{(\alpha_i', \alpha_i'')} \xrightarrow{\mu} \mathbf{P}_{\alpha_i' \odot \alpha_i''} \to 0.$$

在我们的情形中，$\alpha_i' \cdot \alpha_i'' = \alpha - \epsilon_i$，而近连接 $\alpha_i' \odot \alpha_i''$ 对应于从 α 的一列中移除一个方格，即它具有形式 $(\alpha^\top - \epsilon_j)^\top$，其中列指标为 j。对所有 i 取直和并与$\mathbf{P}^{(1)}$ 张量，便得到所述短正合列；由于所有项都是射影的，该列分裂。□

推论 7.13。 对于任意满足 $n > 1$ 的 $\alpha \in \mathrm{Comp}(n)$，有

$$L_{(1)}^{\perp} R_{\alpha} = \sum_{\alpha_i > 1} R_{\alpha - \epsilon_i} + \sum_{\alpha_j^\top > 1} R_{(\alpha^\top - \epsilon_j)^\top}, \tag{24}$$

其中 ϵ_i 表示$\mathbb{Z}^{\ell(\alpha)}$ 中第 i 个标准基向量。

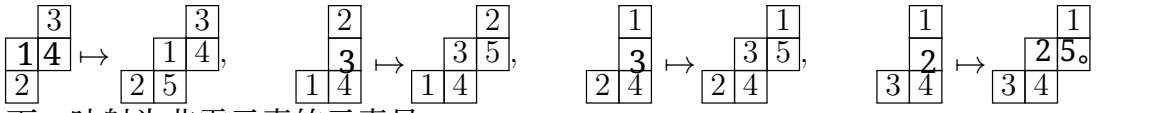
备注 7。 14。 参见 Miller [Mil21]，以及其中引用的关于 **Sym** 的相关恒等式 .

例7.15。 由命题 7.12，以下是一个射影$\mathcal{H}_{1,\ 4}$**(0)**-模的短正合列：

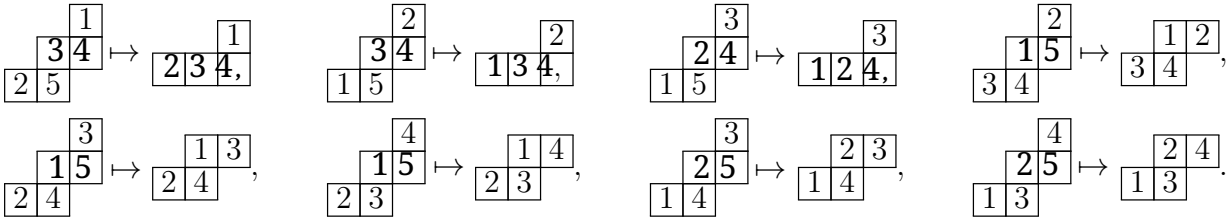
$$0 \to \mathbf{P}_{(1)} \otimes \left(\mathbf{P}_{(1,2,1)} \oplus \mathbf{P}_{(2,1,1)}\right) \xrightarrow{\partial} \mathbf{P}_{(2,2,1)}{\downarrow}^{\mathcal{H}_5(0)}_{\mathcal{H}_{1,4}(0)} \xrightarrow{\mu} \mathbf{P}_{(1)} \otimes \left(\mathbf{P}_{(3,1)} \oplus \mathbf{P}_{(2,2)}\right) \to 0.$$

在基元素层面，我们看到在 ∂ 下：

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|}\hline 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|}\hline 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|}\hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|}\hline 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array},$$



在 μ 下，映射为非零元素的元素是：



所有其他形状为 Diag(2、2、1) 的标准杨表均归零。

Acknowledgements

作者感谢 Marcelo Aguiar、Erin Delargy、Anastasia Nathanson、Vic Reiner、RamanujaCharyulu TelekicherlaKanadalam 和 KellerVandeBogert 提供的有益讨论。本项目始于 2023 Twin Cities REU in Combinatorics and Algebra，该项目由美国国家科学基金会资助，资助编号为 DMS-1745638。

References

[APP+24] Ayah Almousa、Michael Perlman、Alexandra Pevzner、Victor Reiner 和 Keller VandeBogert，Veronese 环上的等变自由消解，《伦敦数学会杂志》109（2024），第 1 期，e12848。↑2, 11, 14[Ben91] D. J. Benson，《表示与上同调》，剑桥高等数学研究丛书，剑桥大学出版社，1991。↑11, 19[BL09] Nantel Bergeron 和 HuilanLi，代数塔的格罗滕迪克群上的代数结构，《代数杂志》321（2009），第 8 期，2068–2084。↑1, 11, 20[Car85] R. W. Carter，0-Hecke代数的表示论（1985）。↑1, 8[GR14] Darij Grinberg 和 Victor Reiner，组合学中的 Hopf 代数，arXiv 预印本 arXiv:1409.8356（2014）。↑6[Hua16] Jia Huang，0-Hecke 代数表示论的杨 tableau 方法，《组合年刊》20（2016），831–868。↑1, 8, 9, 10[KT97] Daniel Krob 和 Jean-Yves Thibon，非交换对称函数 IV：量子线性群与 q 处的 Hecke 代数，《代数组合学杂志》6（1997），339–376。↑1, 8, 9, 10, 11, 20[Mil21] Alexander R. Miller，关于 Foulkes 特征，《数学年刊》381（2021），1589–1614。↑23[Nor79] PN Norton，0-Hecke 代数，《澳大利亚数学会杂志》27（1979），第 3 期，337–357。↑1, 8, 9, 10, 20[PP05] Alexander Polishchuk 和 Leonid Positselski，《二次代数》，第 37 卷，美国数学学会，2005。↑2, 11[Van25] Keller VandeBogert，带状 Schur 函子，《代数与数论》19（2025），第 4 期，771–834。↑2, 11, 15, 16, 17, 18

University of Kentucky电子邮箱：
aalmousa@uky.edu网址：
https://sites.google.com/view/ayah-almousa

University of Washington电子邮箱：
blu17@uw.edu 网址：
https://blu-bird.github.io