从乘法几何到加法几何：变形理论与二维拓扑量子场论

MOHAMED MOUSSADEK MAIZA

arXiv:2601.13455v1 [math.SG] 19 Jan 2026

摘要。本文提出了一种将哈密顿拟泊松流形进行泊松变形，使其成为哈密顿泊松流形的理论，其中包括退化情形。更重要的是，该理论可推广至辛内爆产生的奇异情形：我们引入广义哈密顿变形理论，并证明双 $D(G)^{\mathrm{imp}}$ 的内爆横截面会变形为余切丛 T^*G_{imp} 的内爆，并将其应用于 G-平坦联络的主模空间。

与此同时，我们构造了一个拓扑量子场论 $\mathcal{N}:\ \mathsf{Cob}_2 \to \mathbf{QHam}$，其中 $\mathbf{QHam}$是拟哈密顿流形范畴。对于每个配边 Σ，我们关联一个拟哈密顿空间$\mathcal{N}(\Sigma)$，它由若干个双 $D(G)$的融合积构成。我们证明，这些空间在箭图同伦 下保持不变，并且配边的复合对应于拟哈密顿约化。这为 Maiza-Mayrand 的二维哈密顿拓扑量子场论提供了一个乘法版本。

1. 引言

本文汇集了若干几何理论——拟泊松几何、泊松几何、辛内爆和拓扑量子场论——并指出它们自然地融入统一的变形理论图景。Alekseev、Kosmann-Schwarzbach 和 Meinrenken 提出的拟泊松几何 [8], 为泊松几何提供了一种乘法类比：其中动量映射取值于李群 G，而非其对偶 $\mathfrak{g}^*$；标准的雅可比恒等式则被一个由典范三向量 $\phi \in \bigwedge^3 \mathfrak{g}$控制的扭曲版本所取代。Guillemin、Jeffrey 和 Sjamaar 开创的辛内爆 [12], 提供了一种机制：将动量映射限制在韦尔室内，并沿稳定子群的交换子子群压缩纤维，从而将哈密顿 G空间替换为分层哈密顿 T空间；所得的内爆空间通常带有奇点，但可分解为辛分层，且具备适用于几何表示论和量子化的良好性质。与此同时，Witten 的洞见 [15] 指出，某些量子场论只依赖于底层流形的拓扑；Atiyah [16] 将这一思想形式化为从配边范畴到代数目标的对称幺半函子概念，为粘合操作和拓扑不变量提供了强有力的组织原则。一个自然的问题是，能否将这些乘法结构系统地变形为其加法对应物。我们在先前的工作 [25], 中探讨了这一问题，并为光滑拟哈密顿流形建立了变形理论；本文沿两个方向拓展了这一图景。首先，我们为哈密顿拟泊松流形引入泊松变形理论，从而涵盖退化情形。其次，我们转向奇点问题：许多具有几何意义的空间，例如内爆截面以及带边界条件的平坦联络模空间，并非光滑空间，而是分层空间。为此，我们为分层拟哈密顿空间发展了一套变形理论。最后，我们构造了一个取值于拟哈密顿流形的二维拓扑量子场论。本文的主要新贡献包括定理 3.1、5.3、6.4、7.3，以及定义 2.1 和 4.6。

1.1. 主要结果。 设 G 是一个紧李群。我们为哈密顿 G-拟泊松流形（M，P，ϕ_M，μ）引入一种泊松变形理论，在乘法结构与加法结构之间进行插值；参见定义 2.1。我们的首个结果建立了群层面上的基本变形：

定理 1.1。 设 G 是一个配备 Ad-不变对称双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ 的紧李群。那么 G 存在一个到其对偶 $\mathfrak{g}^*$ 的光滑泊松变形。

非退化哈密顿拟泊松流形与拟哈密顿流形之间的等价性 [8, 定理 9。3] 意味着双 $D(G)$和共轭类分别形变为 T^*G 和余伴随

日期：2026年1月21日。

轨道。更确切地说，这些族

$$G \times \mathcal{G}, \qquad \mathcal{C} = \Big(\bigcup_{t \neq 0} C_{e^{tx}} \times \{t\} \Big) \cup \big(\mathcal{O}_x \times \{0\} \big)$$

实现这些变形。

关于内爆，我们采用 [12, 26] 的构造。给定一个哈密顿 G-流形（M，ν）和一个极大环面 $T \subset G$，内爆截面通过将 ν 限制到韦尔室 $\mathfrak{t}_+^*$，并沿稳定子群的交换子子群压缩各点而得到。明确地，对于 m_1，$m_2 \in \nu^{-1}(\mathfrak{t}_+^*)$，我们定义

$$m_1 \sim m_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in [G_{\nu(m_1)}, G_{\nu(m_1)}] \text{ such that } m_2 = k m_1.$$

定义 1.2。 [12,定义 2。1] M 的内爆截面是商空间 t

$$M_{\mathrm{imp}} := \nu^{-1}(\mathfrak{t}_+^*)/\sim,$$

带有投影 π 和诱导动量映射 ν_{imp}： $M_{\mathrm{imp}} \to \mathfrak{t}^*$。

¯对于拟哈密顿空间，类似的构造使用阿尔科夫 $A \subset \mathfrak{t}$ 和指数映射:

定义 1.3. [26 ，定义 3.2] 对于拟哈密顿 G-空间 (M, μ)，内爆截面 i s

$$M_{\mathrm{imp}} := \mu^{-1}(\exp(\bar{A}))/\sim,$$

其中 $m_1 \sim m_2$ 若 $m_2 = g m_1$ 对于某个 $g \in [G_{\mu(m_1)}\ G_{\mu(m_1)}]$。诱导的动量映射取值于 T。

我们提出广义哈密顿变形的概念（见定义 4.1），适用于内爆截面等分层空间。即使存在奇点，这一理论也使我们能够比较乘法结构与加法结构。沿此方向的首个主要结果如下。

定理 1.4. 设 G是一个单连通紧李群。那么:

(1) 塌缩双 $D(G)^{\mathrm{imp}}$ 存在一种广义哈密顿变形，可变形为余切丛 $(T^*G)^{\mathrm{imp}}$的内爆。*(2)* 若 Σ 是一个亏格为 g、具有 $r+1$ 个边界分支的紧致连通曲面，则平坦 G–联络的塌缩模空间，

$$\mathcal{M}(\Sigma)_{\mathrm{imp}} := \underbrace{D(G)_{\mathrm{imp}} \circledast \cdots \circledast D(G)_{\mathrm{imp}}}_{r \ factors} \circledast \underbrace{\mathbf{D}(G) \circledast \cdots \circledast \mathbf{D}(G)}_{g \ factors},$$

存在一个广义哈密顿变形，使其变为

$$\mathcal{N}(\Sigma)_{\mathrm{imp}} := \underbrace{(T^*G)_{\mathrm{imp}} \circledast \cdots \circledast (T^*G)_{\mathrm{imp}}}_{r \ factors} \circledast \underbrace{\mathbf{T}^*G \circledast \cdots \circledast \mathbf{T}^*G}_{g \ factors}.$$

(3) 若在 Σ 上固定共轭类边界条件 C，则相应的平坦G联络模空间 $\mathcal{M}(\Sigma, C)$ 是由 $\mathcal{N}(\Sigma)^{\mathrm{imp}}$经过辛约化得到的。

现在转向箭图理论视角。对于连通有向箭图 $\Gamma = (E, V, s, t)$，文献 [30, 定理 3.1、定理 5.2] 中构造的 Lax–Kirchhoff 模空间 $\mathcal{M}(\Gamma)$ 是一个哈密顿 $G^{\partial\Gamma}$流形，可规范地识别为约化 $T^*G^E /\!\!/ G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}$。鉴于双 $D(G)$ 变形为余切丛 T^*G，且变形理论与融合及约化相容 [25,定理 3.3、推论 3.2]，，我们引入 $\mathcal{N}(\Gamma)$ 的乘法类比，它可光滑地变形为 $\mathcal{M}(\Gamma)$，其定义如下:

$$\mathcal{N}_G(\Gamma) = \bigotimes^E D(G) /\!\!/ G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}, \qquad \bigotimes^E D(G) = \underbrace{D(G) \circledast \cdots \circledast D(G)}_{E \text{ factors}}.$$

空间 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 是一个光滑的拟哈密顿 $G^{\partial\Gamma}$–流形（参见第 6.2 节）。这一构造的一个关键特征是，它与 [30, 第 6] 节中引入的箭图粘合操作相容。设 Γ_1 和 Γ_2 是连通有向箭图，其出边界分支与入边界分支相匹配，即 $\partial\Gamma_1^+ = \partial\Gamma_2^- = D$。那么，与粘合后箭图 $\Gamma_1 \star \Gamma_2$ 相关联的乘法模空间可由拟哈密顿约化得到:

定理 1.5. 若 $\partial\Gamma_1^+ = \partial\Gamma_2^- = D$，则存在一个典范同构

$$\mathcal{N}_G(\Gamma_1 \star \Gamma_2) \cong \big(\mathcal{N}_G(\Gamma_1) \circledast \mathcal{N}_G(\Gamma_2)\big) /\!\!/ G^D,$$

作为拟哈密顿 $G^{\partial\Gamma_1^-} \times G^{\partial\Gamma_2^+}$–空间。

每个箭图 Γ都通过将边替换为圆柱并沿带 puncture 的球面粘合，确定一个定向曲面 Σ_Γ 。尽管这一构造并不唯一，但其歧义由箭图同伦[30,定义 6.1，命题 6.2]控制。

定理 1.6。若 Γ_1 与 Γ_2 同伦，则

$$\mathcal{N}_G(\Gamma_1) \cong \mathcal{N}_G(\Gamma_2)$$

作为拟哈密顿空间。因此，$\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 的同构类仅取决于相应的配边 Σ_Γ。

对于任意连通二维配边 Σ，存在唯一的连通有向箭图 Γ，使得$\Sigma = \Sigma_\Gamma$。因此，我们将 $\mathcal{N}(\Sigma)$ 定义为 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 的同伦类。利用上述结果，我们得到一个以拟哈密顿流形为值的二维拓扑量子场论。我们引入范畴 **QHam**，其对象为紧李群，态射 $G \to H$ 为拟哈密顿 $G \times H$–空间。复合由融合积的拟哈密顿约化给出。赋予 $S^1 \mapsto G$ 和 $\Sigma_\Gamma \mapsto \mathcal{N}_G(\Gamma)$，即可得到一个对称幺半函子

$$\mathcal{N} : \mathbf{Cob}_2 \longrightarrow \mathbf{QHam},$$

从而定义所需的拓扑量子场论。

论文结构。第 2 节介绍哈密顿拟泊松流形的泊松变形（定义 2.2），并证明其与融合的兼容性（第 2.2 小节）。第 3 节给出若干例子，包括 G 到 $\mathfrak{g}^*$ 的变形（定理 3.1），以及 $D(G)$、共轭类和模空间的变形（推论 3.6）。第 4 节为分层空间建立广义变形理论（定义 4.6），并确立其与部分融合（定理 4.7）及约化（定理 4.9 ）的兼容性。第 5 节将其应用于 $D(G)^{\mathrm{imp}}$（定理 5.3 ）以及主模空间（推论 5.4–5.5 ）。第 6 节构造空间 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$，证明其粘合公式（定理 6.2），并确立同伦不变性（命题 6.3）。第 7 节将这些要素整合为拓扑量子场论 $\mathcal{N}$： $\mathbf{Cob}_2 \to \mathbf{QHam}$（定理 7.3）。

致谢。我们感谢 Jean-Philippe Burelle、Maxence Mayrand 和 Yassine Ait Mohamed 的有益讨论。我们也感谢数学科学研究所 ISM 和 Ernest-Monga 奖学金提供的资助。

1.2. **记号与约定**。在第 2 节和第 3 节中，我们采用 [8] 的记号与约定。G 表示一个配备非退化 Ad-不变对称双线性形式$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ 的紧李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $\|\cdot\|$ 为诱导范数。在第 5 节中，我们进一步假设 G 是单连通的。

设 M 是一个光滑的 G-流形。对于 $x \in \mathfrak{g}$，我们用 $x_M \in \mathcal{X}(M)$ 表示由无穷小作用生成的基本向量场：

$$x_M(m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(-tx)\cdot m.$$

这扩展为一个光滑映射 $\bigwedge\mathfrak{g} \to \mathcal{X}(\bigwedge TM)$，并且与楔积和 Schouten 括号[8, 第 1] 节相容。对于 $\alpha \in \bigwedge\mathfrak{g}$，我们用 α^L 和 α^R 表示G 上相应的左、右多向量场。

给定 M 上的双向量 P，映射 $P^\sharp$： $T^*M \to TM$ 定义为 $\alpha \mapsto P(\alpha,\ \cdot)$。类似地，对于二形式$\omega$，我们定义 $\omega^\flat$： $TM \to T^*M$ 为 $v \mapsto \omega(v,\ \cdot)$。对于 $x \in \mathfrak{g}$，我们将由左乘（$g,\ m$）生成的向量场记为 $-x^R$（分别将由右作用（$g,\ m$）生成的向量场记为 x^L）。

固定一个正交规范基（e_i），其关于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$的基为 $\mathfrak{g}$。Cartan 三向量 *Cartan* 三向量 $\phi \in \bigwedge^3\mathfrak{g}$ 定义为 by

$$\phi = \frac{1}{12} f_{ijk}\, e_i \wedge e_j \wedge e_k, \quad \text{where} \quad f_{ijk} = \langle e_i, [e_j, e_k]\rangle_{\mathfrak{g}}.$$

对于线性映射 $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，我们记作 $Le_i = L_{ji}e_j$，使得 $(\mathrm{ad}_x)_{jk} = -f_{jki}x_i$。最后，由 $\psi = \frac{1}{2}e_i^1 \wedge e_i^2$ 给出的双向量$\psi \in \bigwedge^2(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})$ 在拟泊松空间的**内部融合** 中发挥着核心作用。

2. 哈密顿拟泊松 G-空间的变形

本节中，我们将为哈密顿 G–拟泊松流形建立一种变形理论，扩展我们在早期工作 [25] 中引入的拟哈密顿变形理论。关于拟泊松几何及其基础构造的背景知识，请参阅 Alekseev、Kosmann-Schwarzbach 和 Meinrenken [8] 的论述。

2.1. 拟泊松流形的变形。 设 G是一个紧李群。变形空间

$$\mathcal{G} \coloneqq \mathcal{D}(G,\{1\}) = (G\times\mathbb{R}^*) \bigsqcup (\mathfrak{g}\times\{0\}),$$

在 [25], 中引入，在我们的泊松变形概念中起着核心作用。对于任意李群 K，我们记 $\mathcal{K} = \mathcal{D}(K,\{1\})$，并记 $\pi_{\mathcal{K}}$：$\mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为投影。

[25] 的变形理论涉及非退化拟哈密顿结构。本节旨在将其推广到更广泛的一类哈密顿 G–拟泊松流形（M, P,ϕ_M,μ），其定义见 [8, 定义 2.2], ，其中包括退化的例子。我们旨在在这类结构及其加法对应物——哈密顿 G–泊松流形（N,P_0,ν） [8, 第 2] 节——之间实现光滑插值。

定义 2.1。 从哈密顿拟泊松 G–流形（M,P,ϕ_M,μ）到哈密顿泊松 G–流形（N,P_0,ν）的泊松变形 由一个附带以下结构的光滑流形 $\mathcal{QD}$ 构成：

(1) 一个 G–不变的光滑浸没 $\pi:\ \mathcal{QD}\to[0,1]\subset\mathbb{R}$；(2) 在 $\mathcal{QD}$ 上的光滑 G–作用；(3) 一个满足 $\pi_{\mathcal{G}}\circ\tilde{\mu}=\pi$ 的光滑 G–等变映射 $\tilde{\mu}:\ \mathcal{QD}\to\mathcal{G}$；(4) $\bigwedge^2(\ker d\pi)\ \to\mathcal{D}$ 的一个光滑截面 $\tilde{P}$；(5) $\bigwedge^3(\ker d\pi)\ \to\mathcal{D}$ 的一个光滑截面 $\phi_{\mathcal{QD}}$。

记 $t\in(0,1],$ 上的纤维为 $\mathcal{QD}_t=\pi^{-1}(t$ $\tilde{P}_t$、ϕ_t、$\tilde{\mu}_t$ 表示受限数据，我们要求：

- $(\mathcal{QD}_t,\ \tilde{P}_t,\ \phi_t,\ \tilde{\mu}_t)\cong(M,\ tP,\ t^2\phi_M,\ \mu)$ 作为哈密顿空间范畴拟泊松 G–流形，~
- $(\mathcal{QD}_0,\ P_0,\ \nu)\cong(N,\ P_0,\ \mu_0)$ 是哈密顿泊松 G–流形，其中 $\phi_0=0$。

特别地，$\mathcal{QD}_1\cong M$ 和 $\mathcal{QD}_0\cong N$。

注 2.2. 当拟泊松结构非退化时，定义 2.1 通过等价定理 3.4 恢复了 [25] 的拟哈密顿变形理论。本表述还适用于例 3.1 这类退化结构。

2.2. 与融合的相容性。 [25] 中的变形理论的一个关键结果是它与融合积相容。现在我们在拟泊松框架下建立相应的结果。回顾 [8, 第 3]节中的双向量 $\psi=\frac{1}{2}e_i^1\wedge e_i^2\in\bigwedge^2(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})$，它满足

$$[\psi,\psi]=\mathrm{diag}(\phi)-\phi^1-\phi^2,$$

其中 ϕ是嘉当三向量。给定一个哈密顿（$G\times G\times H$）拟泊松流形（$M,\ P_M,\ \phi_M,\ (\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3)$），内部融合得到哈密顿拟泊松流形 $G\times H$

$$(M,P_M-\psi_M,\mathrm{diag}(\phi)_M,(\mu_1\mu_2,\mu_3),G\times H);$$

参见 [8, 命题 5.1]。哈密顿泊松类比以加法替代乘法：$(N,\ P_0,\ (,\ \nu_2,\ \nu_3))\mapsto(N,\ P_0,\ (,\ \nu_3))$。

乘法映射 m 在 $\mathcal{G}$ 上的光滑性（由 [25, 命题 2.3], 证明）确保融合与变形相容：

命题 2.3。 [25,命题 2.3] 映射

$$m:\mathcal{G}\times_{\mathbb{R}}\mathcal{G}\to\mathcal{G},\qquad((a,t),(b,t))\mapsto\begin{cases}(ab,t), & t\neq0,\\ (a+b,0), & t=0,\end{cases}$$

是光滑的。

引理 2.4。 设$(\mathcal{QD}, P, \phi_{\mathcal{QD}}, \tilde{\mu}, G\times G\times H)$是$(M, P_M, \phi_M, \mu)$到$(N, P_0, \nu)$的泊松变形。那么，双向量 ψ_M 和三向量$\mathrm{diag}(\phi)_M$ 可延拓为光滑截面

$$\psi_{\mathcal{QD}} \in \Gamma\left(\bigwedge^2 \ker d\pi\right), \qquad \mathrm{diag}(\phi)_{\mathcal{QD}} \in \Gamma\left(\bigwedge^3 \ker d\pi\right),$$

对于 $t\neq 0$，有 $\psi_t = t\,\psi_{\mathcal{QD}_t}$ $\psi_0 = 0$，对于 $\mathrm{diag}(\phi)_{\mathcal{QD}}$ 也同样如此。

证明。 无穷小的 $G\times G$ 作用给出 $\mathcal{QD}$ 上的光滑向量场 $(e_i^1)_{\mathcal{QD}}$ 和 $(e_i^2)_{\mathcal{QD}}$。令$\psi_{\mathcal{QD}} = \frac{t}{2}\sum_i (e_i^1)_{\mathcal{QD}}\wedge(e_i^2)_{\mathcal{QD}}$，则得到一个在 $t=0$ 处消失的光滑截面。对于 $\mathrm{diag}(\phi)_{\mathcal{QD}}$，论证完全相同。□

定理 2.5。 设 $(\mathcal{QD}, P, \phi_{\mathcal{QD}}, \tilde{\mu})$ 是 (M, P_M, ϕ_M, μ) 到 (N, P_0, ν) 的一个关于群$G\times G\times H$的泊松变形。那么，内部融合给出 $(M, P_M - \psi_M, \widehat{\mu}, G\times H)$ 到 $(N, P_0, \widehat{\nu}, G\times H)$的一个泊松变形。

证明。 定义 $\widehat{P} = P - \psi_{\mathcal{QD}}$ 和 $\widehat{\mu} = (m\circ(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)\ \tilde{\mu}_3)$，其中 m 是命题 2.3 的光滑乘法。由引理 2.4，$\widehat{P}$是光滑的，且对于 $t\neq 0$，有 $\widehat{P}_t = t(P_M - \psi_M)$。

拟雅可比恒等式由 $\widehat{P}_t$ 的 $G\times G$–不变性得出，这意味着 $[\widehat{P}_t, (\psi_{\mathcal{QD}})_t] = 0$。结合 $[\psi,\psi] = \mathrm{diag}(\phi) - \phi^1 - \phi^2$，我们得到 $[\widehat{P}_t, \widehat{P}_t] = \mathrm{diag}(\phi)_t$。在 $t=0$ 处，有 $\widehat{P}_0 = P_0$、$\mathrm{diag}(\phi)_0 = 0$ 和 $\widehat{\mu}_0 = (\nu_1+\nu_2, \nu_3)$。□

推论 2.6. 若$(M_i, P_{M_i}, \phi_i, \mu_i)$对 $i=1$、2存在到$(N_i, P_{0,i}, \nu_i)$ 的泊松变形，则融合积 $M_1\circledast M_2$ 存在到乘积 $N_1\times N_2$ 的泊松变形。

3. 基本示例

现在，我们将一般理论应用于基本示例：群 G 本身、双 $D(G)$、共轭类，以及平坦联络模空间。

3.1. 群 G。 群 G配备共轭作用、双向量 $P_G = \frac{1}{2}e_i^R\wedge e_i^L$和动量映射 $\mu = \mathrm{Id}$，是一个哈密顿拟泊松 G-流形。其加法对应物是对偶 $\mathfrak{g}^*$，配备余伴随作用、线性泊松双向量

$$P_0 = -\frac{1}{2}(\mathrm{ad}_x)_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\wedge\frac{\partial}{\partial x_k},$$

以及动量映射 $\mu_0 = \mathrm{Id}$。

定理 3.1. 空间 $\mathcal{G} = \mathcal{D}(G, \{1\})$ 承载从$(G, P_G, \phi_G, \mathrm{Id})$ 到$(\mathfrak{g}^*, P_0, \mathrm{Id})$的泊松变形。

证明。 $\mathcal{G}$ 上的光滑流形结构以及投影 $\pi_{\mathcal{G}}:\mathcal{G}\to\mathbb{R}$ 的 G-等变性已在 [25, 定理 4.1]中确立。还需验证 $\tilde{P}_t = tP_G$ 和 $\phi_t = t^2\phi_G$ 能够在$t=0$ 处光滑延拓，并具有正确的极限。

利用 [25, 引理 2.1] 中的坐标图 φ 和公式 $e_i^L = \eta(\mathrm{ad}_x)_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$，其中 $\eta(s) = \frac{s}{1-e^{-s}}$（见 [8]），对于 $(x, t)\in U$，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\varphi^*(tP_G)(x,t) &= tP_G(\exp(tx))\\
&= -\frac{t}{2}\big(\eta(\mathrm{ad}_{tx})\big)^2_{ij}\frac{\partial}{\partial(tx_i)}\wedge\frac{\partial}{\partial(tx_j)}\\
&= -\frac{1}{2t}\big(\eta(t\,\mathrm{ad}_x)\big)^2_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}\\
&= -\frac{1}{2t}\big(1 + t\,\mathrm{ad}_x + t^2O(\|x\|^2)\big)_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}\\
&= -\frac{1}{2t}\big(t\,\mathrm{ad}_x + t^2O(\|x\|^2)\big)_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}\\
&= -\frac{1}{2}(\mathrm{ad}_x)_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j} + tO(\|x\|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j},
\end{aligned}$$

它可光滑地延拓至 P_0 当 $t\longrightarrow 0$. ϕ_t 的延拓与此类似。 □

3.2. **非退化哈密顿拟泊松流形**。对于哈密顿 G-拟泊松流形（M， P， μ），广义分布 $\mathfrak{D}_m \coloneqq \mathrm{Im}(P_m^\sharp) + T_m(G.m)$ 发挥着核心作用。

定义 3.2. 若哈密顿拟泊松流形 (M, P, μ) 满足 $\mathfrak{D}_m = T_m M$ for all$m \in M$，则称其为**非退化的** 。

Alekseev–Kosmann-Schwarzbach–Meinrenken 的以下结果确立了 $\mathfrak{D}$ 的可积性，并证明其与拟哈密顿几何等价：

定理 3.3. [8,定理 9.2] 分布 $\mathfrak{D}$ 可积：每个叶 N_m 都是一个 G-不变子流形，在其上 (P, μ) 限制为非退化哈密顿拟泊松结构。

定理 3.4. [8, 定理 9.3] 非退化哈密顿拟泊松流形 (M, P_M, ϕ_M, μ) 与拟哈密顿流形 (M, ω, μ) 通过以下关系一一对应

$$P_M^\sharp \circ \omega^\flat = \mathrm{Id}_{TM} - \tfrac{1}{4} e_i \otimes \mu^*(\theta_i^L - \theta_i^R). \tag{1}$$

定理 3.4 使我们能够将 [25] 的变形结果推广至拟泊松框架。双$D(G) = G \times G$、共轭类 $C \subset G$以及平坦 G-联络的模空间都是非退化的 [8]。应用 [25, 定理 4.1、4.2 和推论 4.3], ，我们得到：

推论 3.5。 存在以下泊松变形：

(1) 双 $D(G)$ 变形为余切丛 T^*G，其实现为空间 $G \times \mathcal{G}$。*(2)* 共轭类 C_{e^x} 变形为余伴随轨道 $\mathcal{O}_x$，其实现为 $\mathcal{C} := \left(\bigcup_{t\neq 0} C_{e^{tx}} \times \{t\}\right) \cup (\mathcal{O}_x \times \{0\})$。*(3)* 对于亏格为 g 且有 $r+1$ 个边界分支的紧致定向曲面 Σ，其平坦 G-联络的模空间 $\mathcal{M}(\Sigma)$变形为 T^*G^{g+r}。

注 3.6. G 到 $\mathfrak{g}^*$ 的泊松变形不能直接由 [25] 中确立的哈密顿变形理论推出，因为 G 是一个退化的哈密顿拟泊松流形，它叶分解为非退化的共轭类，因而这些共轭类是拟哈密顿的。

4. 塌缩拟哈密顿流形的变形理论

本节将介绍内爆拟哈密顿流形的变形理论。有关拟哈密顿流形的辛内爆和内爆横截面的更多详情，请参阅 [12],[26]。

4.1. **背景**。 第 3 节中哈密顿 G空间的广义定义，源于内爆截面本身具有的奇异性。如 [26, 定理 2.10]所述，M_{imp} 并非光滑流形，而是一个分解为局部闭辛流形的分层空间。要严格描述这一奇异对象上的剩余哈密顿 T作用，并表述基本的阿贝尔化定理——该定理断言，对于 $\lambda \in \mathfrak{t}_+^*$ 作为哈密顿空间，有 $M/\!\!/\lambda K \cong M_{\mathrm{impl}}/\!\!/\lambda T$， ——需要借助超越光滑流形范畴的工具。这个广义定义捕捉了分层情形下哈密顿几何的基本特征：动量映射存在且在每个层上光滑，在整个空间上连续衔接，并且群作用保持分层结构。此外，这一框架自然涵盖仿射和射影哈密顿簇（[26, 例 3.1 和 3.3]），它们本身也是分层空间；这也预示了通过与 G^N的识别而在 [26, 第 6] 节中浮现的、与代数几何之间更深层的联系。此外，目前尚不清楚内爆 M_{imp} 是否是 Sjamaar-Lerman 意义下的分层辛空间 [29]„ 即是否存在一个带有泊松括号的自然函数代数；这也是定义 4.1 的动机之一。

因此，辛内爆本质上会产生分层哈密顿空间。关键的观察是，拟哈密顿流形 M 的内爆截面 M_{imp} 是由称为层的光滑拟哈密顿空间不交并组成的，并且所有感兴趣的几何结构（动量映射、群作用、双向量和二形式）在每个层上分别都是光滑的。

因此，内爆空间的变形是逐层构造的：对于每个光滑的拟哈密顿层 $M_i \subset M_{\mathrm{imp}}$，我们构造一个变形空间

$$\pi_i : D_i \longrightarrow [0, 1]$$

在其乘法拟哈密顿结构与极限层 N_i上相应的加法哈密顿结构之间进行插值。各层之间无需整体光滑；只需动量映射连续，且群作用在各层之间相容即可。

定义 4.1.（[12, 节 3]）广义 G-哈密顿空间是一个拓扑空间 $\left(M = \bigsqcup_{i\in I}(M_i, \sigma_i)\ \mu\right)$，连同李群 G 的连续作用（该作用保持上述分解）以及连续动量映射 $\mu\colon M \longrightarrow G$，满足对于所有 i 属于 $I.$，$(M_i, \mu_{|M_i}, \sigma_i, G)$ 按通常意义是一个 G-哈密顿光滑连通流形。从 M 到另一个 G-哈密顿空间$\left(L = \bigsqcup_{j\in J}(L_j, \eta_j)\ \phi\right)$的同构是一个二元组 (F, f)，其中 $F\colon M \longrightarrow L$ 是一个同胚，且 $f\colon I \longrightarrow J$是一个双射，并满足以下条件： F 是 G-等变的， $\mu = \phi\circ F$，且对于所有 $i \in I.$，F 将 M_i 辛同构地映到 $L_{f(i)}$。

注记 4.2. 广义拟哈密顿空间(N, ν, G) 的概念以类似方式定义。这里，每个 $(N_j, \nu_{|N_j}, G)$ 都是通常意义下的光滑连通拟哈密顿流形 G。

例 4.3. 对于任意 $G \times H$-拟哈密顿流形 M 以及一个极大环面 $T \subset H$，相对于右作用的 M 的内爆横截面记为 M_{imp}，它是一个广义哈密顿流形 $G \times T$（定义 3.2、补遗 3.18、注记 3.5]）。类似地， $G \times$$H$-哈密顿流形的交叉内爆截面给出一个广义 $G \times T$-哈密顿流形（[12, 第 4] 节）。

4.2. **部分融合积**。设 $M_i = \bigsqcup_{j_i\in J_i} M_{i,j_i}$ 是关于 $i \in \{1, 2\}$ 的广义 $G\times G\times H$-拟哈密顿流形，并假设存在一个单射 $f\colon J_1 \to J_2$。

定义 4.4. 设 $M = \bigsqcup_{i\in I} M_i$ 是一个 $G \times G \times H$-拟哈密顿流形。 M 的内部融合是一个 $G \times H$-拟哈密顿流形

$$\widetilde{M} = \bigsqcup_{i\in I}\big(M_i, ((\mu_1 \cdot \mu_2)_{|M_i}, \mu_3|_{M_i}), \tilde{\omega}_i, G \times H\big),$$

其中 $\tilde{\omega}_i = \omega_i + \frac{1}{2}\langle(\mu_1)^*_{|M_i}\theta^L \wedge (\mu_2)^*_{|M_i}\theta^R\rangle$；参见 [8, 第 3] 节。

定义 4.5. 部分融合积 $M_1 \otimes M_2$ 是一个 $G \times H$-拟哈密顿流形

$$M_1 \otimes M_2 = \bigsqcup_{j_1\in J_1} M_{1,j_1} \circledast M_{2,f(j_1)},$$

其中 $M_{1,\ j_1} \circledast M_{2,\ f(j_1)}$ 表示通常的融合积 [7, 第 3] 节。

类似地，对于广义 G-哈密顿流形 $N_i = \bigsqcup_{l_i\in L_i} N_{i,\ l_i}$，满足 $i \in \{1, 2\}$，且有一个单射$h : L_1 \to L_2$，我们定义部分融合积

$$N_1 \times N_2 \coloneqq \bigsqcup_{l_1\in L_1} N_{1,l_1} \times N_{2,h(l_1)}.$$

在本节中，除非另有说明，我们均按照以下含义考虑拟哈密顿流形和哈密顿流形：定义 4.1。

当 M 和 N 是光滑的 $G \times H$-流形时，从 N 到 M 的哈密顿变形由一个光滑的 $G \times H$-不变流形 $\mathcal{D}$、一个光滑浸没 $\pi\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$、一个 $\bigwedge^2(\ker d\pi)^*$的光滑截面 $\hat{}\omega$，以及一个满足 [25,定理 2.5]条件的 $G \times H$-等变光滑映射 $\hat{}\mu\colon \mathcal{D} \to \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ 组成。然而，对于内爆流形， $\mathcal{D}$ 并非光滑流形，而是一个带有连续动量映射 $\hat{}\mu\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}(G \times T,\ \{1\})$的拓扑空间。更准确地说，

定义 4.6。一个 $G \times H$-拟哈密顿流形 M 到一个$G \times H$-哈密顿流形 N 的广义哈密顿变形 是一个配备了以下结构的拓扑空间 $\mathcal{D}$：

- ¯(i) 在 $\mathcal{D}$ 上的连续 $G \times H$-作用，¯(ii) 一个 $G \times H$-不变的连续投影 $\bar{\pi}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$，其像为 $[0, 1] \subset \operatorname{im}\bar{\pi}$，¯(iii) 一个 $G\times H$-等变连续映射 $\bar{\mu}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{G}\times\mathcal{H}$，满足 $\pi_{\mathcal{G}\times\mathcal{H}}\circ\bar{\mu} = \bar{\pi}$，其中 $\pi_{\mathcal{G}\times\mathcal{H}}\colon \mathcal{G}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 是典范投影。

这些数据必须满足以下条件。对于每个 $t \in \mathbb{R}$，令 $\bar{\mathcal{D}}_t \coloneqq \bar{\pi}^{-1}(t)$ 表示 ¯在 t 上的纤维，令 $\bar{\mu}_t \coloneqq \bar{\mu}|_{\bar{\mathcal{D}}_t}$，并令 $G \times H$ 在 $\mathcal{D}_t$ 上的作用为由 (i) 诱导的作用。则：

- $(\bar{\mathcal{D}_t}, \bar{\mu}_t, G \times H)$ 是 $t \neq 0$ 的拟哈密顿空间，也是 $t = 0$ 的哈密顿空间；
- $\mathcal{D}_1 \cong M$ 作为 $G \times H$-拟哈密顿空间；
- $\mathcal{D}_0 \cong N$ 作为 $G \times H$-哈密顿空间；
- 每个光滑的 $G \times H$-拟哈密顿层 X_i 都可以变形为 M 中相应的 $G \times H$-哈密顿层 Y_{j_i}，此处采用 N [25, 定义 2.5] 的意义。

4.3. 部分融合积的变形。 设 $M_i = \bigsqcup_{j_i \in J_i} M_{i,j_i}$ 是一个 $G \times H_i$-拟哈密顿流形，$N_i = \bigsqcup_{l_i \in L_i} N_{i,l_i}$ 是一个 $G \times H_i$-哈密顿流形，其中 $i \in \{1, 2\}$。假设存在单射 $f : J_1 \to J_2$ 和 $h: L_1 \to L_2$。

定理 4.7。 假设存在一个从 M_i 到 N_i 的 $G \times H_i$-广义哈密顿变形，其中 $i \in \{1, 2\}$。那么存在一个从部分融合积 $M_1 \otimes M_2$ 到 $N_1 \times N_2$ 的 $G \times H_1 \times H_2$-广义哈密顿变形。

证明。只需处理内部融合的情形。设 $(\mathcal{D}, \bar{\mu}, \bar{\pi}, G \times G \times H)$ 是从 $(M, \mu, G \times G \times H)$ 到 $(N, \nu, G \times G \times H)$ 的一个变形。保持空间 $\mathcal{D}$ 不变，通过考虑映射 $(m \circ (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)\ \bar{\mu}_3) : \mathcal{D} \to G \times H$，并将 [25, 定理 3.1] 应用于每个 $G \times G \times H$-拟哈密顿光滑层 M_i，即可得到所需结果。□

以下引理在研究广义变形的例子时很有用。

引理 4.8。 设 $\mathfrak{t}$ 是极大环面 T 的李代数。映射

$$\phi_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t} \times \mathbb{R} \to \mathcal{T}, \quad (x, t) \mapsto \begin{cases} (\exp(tx), t) & t \neq 0, \\ (x, 0) & t = 0, \end{cases}$$

是光滑的。此外，$\phi_{\mathfrak{t}}$ 在包含 $\mathfrak{t} \times \{0\}$ 和 $\{0\} \times \mathbb{R}$. 的开集 $U_{\mathfrak{t}}$ 上限制为一个微分同胚

证明。参见 [25, 引理 2.1]。□

4.4. 约化的变形。 设 $(M, (\mu_G, \mu_H)\ \omega, G \times H)$ 是一个 $G \times H$-拟哈密顿光滑流形，且 H 非阿贝尔。设 $f \in H$ 是正则值，H_f 是其稳定子群，它在 $\mu_H^{-1}(f)$ 上局部自由地作用。对于子群 $K \subseteq H_f$，M 中类型为 K 的层是 H_f-不变子流形

$$M_K = \{a \in M : H_f \cap H_a \text{ is conjugate to } K\}.$$

令 $Z = \mu_H^{-1}(f)$ 且 $Z_{(K)} = Z \cap M_K$。设 $\{Z_i : i \in I\}$ 为所有 $Z_{(K)}$ 的连通分支，其中 (K) 遍历 H_f 的子群的共轭类。于是约化空间 $M//_f H_f := \mu_H^{-1}(f)/H_f$ 分解为

$$M//_f H_f = \bigsqcup_{i \in I} Z_i/H_f. \tag{2}$$

根据 [26, 定理 2.9], ，将 ω 限制到每个 Z_i 上可下降为 Z_i/H_f 上的二形式 ω_i，从而使其成为一个 G-拟哈密顿光滑流形，其动量映射由限制 $\tilde{\mu}_G : M//_f H_f \to G$ 给出。因此 $M//_f H_f$ 是定义 4.1 意义下的 G-拟哈密顿流形。

现在假设 $(M = \bigsqcup_{i \in I} M_i, (\mu_G, \mu_H)\ G \times H)$ 是一个 $G \times H$-拟哈密顿流形。设 $f \in H$ 是 $(\mu_H)|_{M_i}$ 对每个 i 的正则值，其稳定子群为 H_f。定义

$$M_f := \mu_H^{-1}(f)/H_f = \bigsqcup_{i \in I} (\mu_H)|_{M_i}^{-1}(f)/H_f.$$

μ_G 在 $\mu_H^{-1}(f)$ 上的限制下降为连续映射 $\tilde{\mu}_G : M_f \to G$。由于 H_f 在每个 $(\mu_H)|_{M_i}^{-1}(f)$ 上都局部自由地作用，每个商空间 $M_{i,f} = (\mu_H)|_{M_i}^{-1}(f)/H_f$ 都是分层的 G-拟哈密顿流形。利用轨道类型分解 $M_{i,f} = \bigsqcup_{j_i \in J_i} X_{j_i}^f/H_f$，其中每一层都是一个 G-拟哈密顿光滑流形，我们得到

$$M_f = \bigsqcup_{i \in I,\, j_i \in J_i} X_{j_i}^f/H_f.$$

因此，$(M_f, \tilde{\mu}_G, G)$ 按照定义 4.1 的意义是一个 G-拟哈密顿流形 .

类似地，若 $(N, \nu_G, \nu_H, G \times H)$ 是哈密顿流形，且 $y \in \mathfrak{h}$ 的稳定子群为 H_y，则 $N_y := \nu_H^{-1}(y)/H_y$ 是符合定义 4.1 意义下的 G-哈密顿流形。

定理 4.9。 设 $(\mathcal{D}, \bar{\pi}, \bar{\mu}, G\times H)$ 是从 $(M=\bigsqcup_{i\in I} M_i, (\mu_G, \mu_H)\ G\times H)$ 到 $(N=\bigsqcup_{l\in L} N_l, (\nu_G, \nu_H)\ G\times H)$的广义哈密顿变形。设 $y\in \mathfrak{h}$，且 $I\subset\mathbb{R}$ 是 $[0,1]$ 的一个邻域。假设：

(i) d指数映射t_y 对所有 $t\in I$ 都可逆；(ii) H_y在$(\nu_H)|_{N_l}^{-1}(y)$和$(\mu_H)|_{M_i}^{-1}(e^{ty})$上对所有 $t\in I\setminus\{0\}$ 都局部自由地作用；(iii) 曲线 $\phi_y\colon I\to\mathcal{H},\ t\mapsto\phi$ (y,t) 可提升为曲线 $\phi_y\colon I\to\mathcal{D}$，使得 $\bar{\mu}_2\circ\phi_y=\phi_y$。

令 $\mathcal{X}:=\phi(\{y\}\times I)=\{(e^{ty},t)\colon t\in I\setminus\{0\}\}\sqcup\{(y,0)\}$。那么 $\bar{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})/H_y$具有从 M_{e^y} 到 N_y 的广义哈密顿变形结构。

证明。 令 $\mathcal{Z}=\bar{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})$ 和 $\bar{\mathcal{D}}_{\mathrm{red}}=\mathcal{Z}/H_y$。根据纤维分解，

$$\mathcal{Z}=\bigcup_{t\in I\setminus\{0\}}(\bar{\mu}_{2,t})^{-1}(e^{ty})\sqcup(\bar{\mu}_{2,0})^{-1}(y),$$

其中 $\bar{\mu}_{2,t}:=\bar{\mu}_2|_{\bar{\mathcal{D}}_t}$。集合 $\mathcal{Z}$ 是 H_y-不变的。仿照引理 5.2 的证明，投影 $p\colon\mathcal{Z}\to\bar{\mathcal{D}}_{\mathrm{red}}$ 是真映射，且 $\mathcal{D}_{\mathrm{red}}$ 是豪斯多夫、局部紧且第二可数的。

对于 $t\neq 0$，群 H_y 在 $(\mu_H)|_{M_i}^{-1}(e^{ty})$ 上局部自由地作用。由于 $\bar{\mathcal{D}}_t\cong M$，可知 H_y 在 $\bar{\mu}_{2\,t,}^{-1}(e^{ty})$ 上局部自由地作用。根据 [26, 定理 2.9]，商空间 $\bar{\mu}_2^{-1}{}_{,t}(e^{ty})/H_y$ 继承了分层结构，其中每一层都是一个 G-准哈密顿光滑流形。令 $\{Z_i^t\colon i\in I_t\}$ 为 $\bar{\mu}_2^{-1}{}_{t,}(e^{ty})$ 的轨道类型分层的连通分支。那么

$$(\bar{\mu}_{2,t})^{-1}(e^{ty})/H_y=\bigsqcup_{i\in I_t}Z_i^t/H_y.$$

对于 $t=0$，令 $\{W_j\colon j\in J\}$ 是 $(\bar{\mu}_{2,\ 0})^{-1}(y)$ 的轨道类型分层的连通分支。其中 n

$$(\bar{\mu}_{2,0})^{-1}(y)/H_y=\bigsqcup_{j\in J}W_j/H_y.$$

通过交换图定义 $\bar{\pi}^{\mathrm{red}}\colon\ \bar{\mathcal{D}}_{\mathrm{red}}\to\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{Z} & \xrightarrow{\bar{\pi}|_{\mathcal{Z}}} & \mathbb{R}\\ & {\scriptstyle p}\searrow\quad\nearrow{\scriptstyle \bar{\pi}^{\mathrm{red}}} & \\ & \bar{\mathcal{D}}_{\mathrm{red}} & \end{array}$$

映射 $\bar{\pi}^{\mathrm{red}}$ 定义良好且具有 G不变性。由于 p 是一个商映射，并且 $\bar{\pi}^{\mathrm{red}}\circ p=\bar{\pi}|_{\mathcal{Z}}$，根据商空间的泛性质，映射 $\bar{\pi}^{\mathrm{red}}$ 是连续的。类似地，通过交换图定义的动量映射 $\bar{\mu}^{\mathrm{red}}\colon\ \bar{\mathcal{D}}_{\mathrm{red}}\to\mathcal{G}$

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{Z} & \xrightarrow{(\bar{\mu}_1)|_{\mathcal{Z}}} & \mathcal{G}\\ & {\scriptstyle p}\searrow\quad\nearrow{\scriptstyle \bar{\mu}^{\mathrm{red}}} & \\ & \bar{\mathcal{D}}_{\mathrm{red}} & \end{array}$$

定义良好、连续且具有 G等变性。

剩下要证明的是，M_{e^y} 的每个 G-拟哈密顿层 $X_{\alpha,\ i}$ 都光滑地变形为 N_y中相应的层 $Y_{\beta,\ l_i}$。根据假设，M_i 光滑地变形为 N_{l_i}。设 $\tilde{X}_{\alpha,\ i}\subset\ (\mu_H)^{-1}_{|M_i}\ (e^y)$ 是投影到 $X_{\alpha,\ i}$的一个层，并设 $\tilde{Y}_{\beta,\ l_i}\subset\ (\nu_H)^{-1}_{|N_{l_i}}$ (y) 投影到 $Y_{\beta,\ l_i}$。根据 [25, 定理 3.3]，层 $X_{\alpha,\ i}$ 光滑地变形为 $Y_{\beta,\ l_i}$。□

5. 广义变形的例子

5.1. 双的内爆截面 $D(G)$。回顾一下，对于单连通紧李群 G，内爆截面 $D(G)^{\mathrm{impl}}$ 是一个按照定义 4.1 所定义的 $G\times T$-拟哈密顿流形。对于阿尔科夫 A的每个面 σ，层 $X_\sigma=G/[G_\sigma,G_\sigma]\times\exp(\sigma)$ 是一个光滑的 $G\times T$-拟哈密顿流形，其动量映射由将 $\nu_{\mathrm{impl}}\colon D(G)_{\mathrm{impl}}\to G\times T$限制到 X_σ而给出；参见引理 4.5]。每个层上的 $G\times T$-作用是

$$(g,t)\cdot(h,\exp(x))=(ght^{-1},\mathrm{Ad}_t\exp(x))=(ght^{-1},\exp(x)).\tag{3}$$

拟哈密顿二形式 λ_σ 由 [27, 第 1.6]小节给出：对于 $p=(g,\ \exp(x))\in X_\sigma$ 以及形如 $(gu_i,\ \exp(x)\eta_i)$ 的切向量，其中 $u_i\in\mathfrak{g}$ 和 $\eta_i\in\xi_i+\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_\sigma)$,

$$\lambda^\sigma_{(g,x)}\big((gu_1,\exp(x)\eta_1),(gu_2,\exp(x)\eta_2)\big)=\frac{1}{2}\langle(\mathrm{Ad}_{\exp(x)}-\mathrm{Ad}_{\exp(-x)})u_1,u_2\rangle_{\mathfrak{g}}\\ +\langle u_1,\eta_2\rangle_{\mathfrak{g}}-\langle u_2,\eta_1\rangle_{\mathfrak{g}}.$$

类似地，余切丛的内爆截面（T^*G）^{impl}是一个 $G\times T$-哈密顿流形，其动量映射为 $\mu_L\times$（μ_R）^{impl}。对于韦尔室 $\mathfrak{t}^*_+$的每个面 τ，层 $Y_\tau=G/[G_\tau,G_\tau]\times\tau$是一个光滑的 $G\times T$-哈密顿流形，其作用为

$$(g,t)\cdot(h,x)=(ght^{-1},\mathrm{Ad}_t x)=(ght^{-1},x),\tag{4}$$

且二形式为

$$\omega^\tau_{(g,x)}\big((u_1,v_1),(u_2,v_2)\big)=\langle u_1,v_2\rangle_{\mathfrak{g}}-\langle u_2,v_1\rangle_{\mathfrak{g}}+\langle x,[u_1,u_2]\rangle_{\mathfrak{g}}.\tag{5}$$

根据 [25, 定理 4.1], , 空间 $\mathcal{D}=G\times\mathcal{G}$ 具有光滑哈密顿变形的结构，从 D（G）变形到 T^*G。现在，我们逐层将这一变形扩展到塌缩情形。

对于阿尔科夫中闭包不包含原点的任意面$\hat{\sigma}$ ，相应的层$G/[G_{\hat{\sigma}},G_{\hat{\sigma}}]\times\exp(\hat{\sigma})$没有加法对应物；我们令

$$\mathcal{G}_{\hat{\sigma}}:=\bigcup_{t\neq0}\big(G/[G_{\hat{\sigma}},G_{\hat{\sigma}}]\times\exp(t\hat{\sigma})\big)\cup(\emptyset\times\{0\}),$$

使得这一层变形为空集。我们用 $\mathcal{B}$ 表示这类面的集合。

对于阿尔科夫中任意满足 $0\in\bar{\sigma}$ 的开面 σ ，令 τ_σ 为包含 σ 的 $\mathfrak{t}^*_+$ 的唯一开面。于是，根据 [26, , 有 $G_\sigma=G_{\tau_\sigma}$（见附录 A.3]）。令 $I\subset\mathbb{R}$ 为包含 $[0,1]$ 的一个开区间，使得对每个 $x\in\sigma$ 和 $t\in I$， d_{tx} 指数映射可逆。定义

$$\mathcal{G}_\sigma=\bigcup_{t\in I\setminus\{0\}}\big(H_\sigma\times\exp(t\sigma)\times\{t\}\big)\cup\big(H_{\tau_\sigma}\times\tau_\sigma\times\{0\}\big),$$

其中 $H_\sigma:=G_\sigma/[G\sigma,\ G_\sigma]$。 A 中满足 $0\in\bar{\sigma}$ 的面 σ 与 $\mathfrak{t}^*_+$ 中的开面 τ_σ 之间的双射给出 th e 分解

$$(T^*G)_{\mathrm{impl}}=\bigsqcup_{\tau_\sigma\in\Sigma}G_\sigma/[G_\sigma,G_\sigma]\times\tau_\sigma.$$

命题 5.1。 集合 $\mathcal{G}_\sigma$ 带有从 X_σ 到 Y_{τ_σ} 的光滑哈密顿变形结构。

证明。映射

$$\psi_\sigma:=\mathrm{Id}\times\phi_{\mathfrak{t}}:H_\sigma\times\mathfrak{t}\times\mathbb{R}\longrightarrow H_\sigma\times\mathcal{T}$$

限制为微分同胚 ψ_σ: $H_\sigma\times U_\tau\to H_\sigma\times V_\tau$，满足 $\pi_{\mathcal{G}_\sigma}\circ\psi_\sigma=\mathrm{pr}_{\mathbb{R}}$。由于 $\psi_\sigma^{-1}(\mathcal{G}_\sigma)=Y_{\tau_\sigma}\times I$，空间 $\mathcal{G}_\sigma$ 是 $H_\sigma\times\mathcal{T}$的光滑嵌入子流形，且投影 $\pi_{\mathcal{G}_\sigma}$ 是光滑满射浸没。 ψ_σ 的 $G\times T$-等变性确保其在 $\mathcal{G}_\sigma$ 上的诱导作用是光滑的。

剩下要证明的是，重标度后的 2-形式 $\hat{\omega}_\sigma:=\frac{1}{t}\lambda^\sigma$ 在 $\pi^{-1}_{\mathcal{G}_\sigma}(\mathbb{R}^\times)$上的定义能够光滑延拓至 $t=0$，且极限为ω^{τ_σ}。论证将 [25, 定理 4.1] 中的重标度技术调整应用于当前的分层情形。对于 $(g,\ x,\ t)\in H_\sigma\times\mathfrak{t}\times\mathbb{R}^\times$ 以及切向量 $(y_i,\ z_i)\in T_gH_\sigma\times\mathfrak{t}$，我们计算

$$\begin{aligned}(\psi_\sigma^*\hat{\omega}_\sigma)_{(g,x,t)}\big((y_1,z_1),(y_2,z_2)\big)&=\frac{1}{t}\,\lambda^\sigma_{(g,e^{tx})}\Big((y_1,\,d\exp_{tx}(tz_1)),(y_2,\,d\exp_{tx}(tz_2))\Big)\\&=\frac{1}{2t}\Big(\langle\mathrm{Ad}_{e^{tx}}y_1,y_2\rangle-\langle\mathrm{Ad}_{e^{tx}}y_2,y_1\rangle\Big)\\&\quad+\frac{1}{2t}\Big(\langle y_1,\,d\exp_{tx}(tz_2)+\mathrm{Ad}_{e^{tx}}d\exp_{tx}(tz_2)\rangle\\&\qquad-\langle y_2,\,d\exp_{tx}(tz_1)+\mathrm{Ad}_{e^{tx}}d\exp_{tx}(tz_1)\rangle\Big).\end{aligned}$$

利用内积的对称性重写第一项，并约去 $d\exp_{tx}(tz_i)$内部的因子 t 后，我们得到

$$\begin{aligned}(\psi_\sigma^*\hat{\omega}_\sigma)_{(g,x,t)}\big((y_1,z_1),(y_2,z_2)\big)&=\Big\langle y_1,\,\frac{\mathrm{Ad}_{e^{-tx}}-\mathrm{Ad}_{e^{tx}}}{2t}\,y_2\Big\rangle\\&\quad+\frac{1}{2}\Big(\langle y_1,\,d\exp_{tx}(z_2)+\mathrm{Ad}_{e^{tx}}d\exp_{tx}(z_2)\rangle\end{aligned}$$

$$-\langle y_2,\, d\exp_{tx}(z_1) + \mathrm{Ad}_{e^{tx}} d\exp_{tx}(z_1)\rangle\Big).$$

通过泰勒展开，当 $t \to 0$ 时，每一项都有确定的极限：$\mathrm{Ad}^{e^{-tx}-}\mathrm{Ad}_{2t}$ $e^{tx} \longrightarrow -\mathrm{ad}_x$ 以及 $d\exp_{tx} \to \mathrm{Id}$。所得极限为 ω^{τ_σ}。□

令 $\mathcal{X} := (\exp(A) \times \mathbb{R}^\times) \sqcup (\mathfrak{t}_+^* \times \{0\}) \subset \mathcal{D}(T,\ \{1\})$，其中 $\mathfrak{t}_+^*$ 表示基本韦尔室的闭包。原像 $\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})$ 是 $\mathcal{D} = G \times \mathcal{G}$ 的一个拓扑子空间，并带有连续的 $G \times T$- 作用，该作用由 [25, 命题 2.2] 以及方程 (3) 和 (4) 给出。在 $\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})$ 上定义等价关系 $\mathcal{R}$ 如下：

- $(a,b,t)\ \mathcal{R}\ (a_1,b_1,s)$ if there exists $g \in [G_{\widehat{\mu}_2(a,b,t)}, G_{\widehat{\mu}_2(a,b,t)}]$ such that $(a_1,b_1,s) = (ag^{-1}, b, t)$;
- $(a,x,0)\ \mathcal{R}\ (a_1,x_1,0)$ if there exists $l \in [G_{\widehat{\mu}_2(a,x,0)}, G_{\widehat{\mu}_2(a,x,0)}]$ such that $(a_1,x_1,0) = (al^{-1}, x, 0)$.

我们用 $\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})^{\mathrm{impl}} := \widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})/\mathcal{R}$ 表示商空间，用 $p\colon \widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X}) \to \widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})^{\mathrm{impl}}$ 表示典范投影。

引理 5.2. 投影 p 是真映射，且 $\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})^{\mathrm{impl}}$ 是豪斯多夫、局部紧且第二可数的。

证明. 我们改写 [12, 引理 2.3] 的证明。首先证明 p 是闭的。设 C 是 $\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})$ 的一个闭子集。我们断言

$$p^{-1}(p(C)) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \Big(\bigsqcup_{\sigma_t \in \Sigma_t} \widehat{\mu}_{2,t}^{-1}(\sigma_t) \cap [G_{\sigma_t}, G_{\sigma_t}] \cdot (C \cap \pi^{-1}(t)) \Big),$$

其中 Σ_t 表示 $t \neq 0$ 对应的阿尔科夫 A 的各个面，以及 $t = 0$对应的 $\mathfrak{t}_+^*$ 的各个面；$\widehat{\mu}_{2,\ t} = (\widehat{\mu}_2)|_{\pi^{-1}(t)}$。设 $(a_i,\ b_i,\ t_i) \in p^{-1}(p(C))$ 是一个收敛到 $(a,\ b,\ t) \in \widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})$ 的序列。

(1) 情形 $t \neq 0$: 当 i 足够大时，有 $t_i \to t$。设 σ 是 A 中满足 $b \in$指数映射(σ) 的面。取一个子列，假设所有 b_i 都属于 A 的某个面 τ。由于 $b_i \to b$ 且 $b \in$指数映射(σ)，我们在面偏序中有 $\sigma \leq \tau$，因此 $[G_\tau, G_\tau] \subseteq [G_\sigma, G_\sigma]$。根据饱和的定义，存在 $c_i = (\tilde{a}_i, b_i, t_i) \in C$ 和 $g_i \in [G_\tau, G_\tau]$，使得 $a_i = \tilde{a}_i g_i^{-1}$。由于 $[G_\tau, G_\tau]$ 是紧致的，取子列后，$g_i \to g \in [G_\tau, G_\tau] \subseteq [G_\sigma, G_\sigma]$。由于 C是闭的，且 $c_i = (a_i g_i, b_i, t_i) \to (ag, b, t) \in C$，我们有$m = (a,b,t) = g^{-1} \cdot (ag,b,t) \in [G_\sigma, G_\sigma] \cdot (C \cap \pi^{-1}(t))$，因此 $m \in p^{-1}(p(C))$。

情形 $t = 0$: 这里采用类似的方法，使用 $\mathfrak{t}_+^*$ 的面来代替 A。

(3) 情形 $t_i \neq 0$ 和 $t = 0$: 变形空间 $\mathcal{D}(T,\{1\})$ 具有光滑结构，使得收敛 $(h_i,t_i) \to (y,0)$ 意味着，对于某个 $y_i \to y \in \mathfrak{t}$，$h_i = \exp(t_i y_i)$。由于 $b_i \in \exp(A)$，且在 $\mathcal{X} \subset \mathcal{D}(T,\{1\})$ 中，$(b_i,t_i) \to (x,0)$，我们可以写成 $b_i = \exp(t_i \xi_i)$，其中 $\xi_i \to x$。这里，$\xi_i \in \frac{1}{t_i}\bar{A}$和$x$ 位于 $\mathfrak{t}_+^*$的某个面 τ 中。令 σ_i 为满足 $t_i\xi_i \in \sigma_i$的 A 的面。根据附录 A.3], 中关于具有 $0 \in \bar{\sigma}$的 A 的面 σ，存在 $\mathfrak{t}_+^*$ 的相应面 τ_σ，使得 $G_{\exp(\sigma)} = G_\sigma = G_{\tau_\sigma}$。当 i足够大时，由于 $\xi_i \to x$且 ξ_i接近 τ，面结构意味着 $\tau_{\sigma_i} \geq \tau$，因此 $G_{\tau_{\sigma_i}} \subseteq G_\tau$和 $[G_{\sigma_i}, G_{\sigma_i}] \subseteq [G_\tau, G_\tau]$。

由于 $(a_i,b_i,t_i) \in p^{-1}(p(C))$，存在 $c_i = (\tilde{a}_i, b_i, t_i) \in C$和 $g_i \in [G_{b_i}, G_{b_i}]$，使得 $a_i = \tilde{a}_i g_i^{-1}$。当 i足够大时，我们有 $g_i \in [G_{b_i}, G_{b_i}] \subseteq [G_{\sigma_i}, G_{\sigma_i}] \subseteq [G_\tau, G_\tau]$。由于 $[G_\tau, G_\tau]$是紧致的，取一个子列可得 $g_i \to g \in [G_\tau, G_\tau]$。因此，$c_i = (a_i g_i, b_i, t_i) \to (ag, x, 0)$。由于 C是闭的，$(ag, x, 0) \in C$。由于 $g \in [G_\tau, G_\tau] = [G_x, G_x]$且 $(a, x, 0)$ 等价于 $(ag, x, 0)$，我们得到

$$m = (a,x,0) \in \widehat{\mu}_2^{-1}(x) \cap [G_x, G_x] \cdot C \subseteq p^{-1}(p(C)).$$

因此 p 是闭的。由于 p 具有紧纤维，它是真映射，并且 $\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})^{\mathrm{impl}}$的上述性质随之成立。

□

定理 5.3。 空间 $\bar{\mathcal{D}} := \widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})^{\mathrm{impl}}$ 具有从 $D(G)^{\mathrm{impl}}$ 到 $(T^*G)^{\mathrm{impl}}$的广义哈密顿变形结构。

证明。 根据引理 5.2， $\bar{\mathcal{D}}$ 是豪斯多夫、局部紧且第二可数的。令 $p : \widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X}) \to \bar{\mathcal{D}}$ 为典范投影，并通过交换图定义 $\bar{\pi} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\pi|_{\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})}} & \mathbb{R} \\ & \searrow^{p} \quad \nearrow_{\bar{\pi}} & \\ & \bar{\mathcal{D}} & \end{array}$$

映射 $\bar{\pi}$定义良好且具有 $G \times T$-不变性。由于 $\pi|_{\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})}$连续，且 p是商映射，根据商空间的泛性质， $\bar{\pi}$连续。$\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})$上的 $G \times T$-作用是连续的，并且由于 p 尊重等价关系， $\mathcal{D}$ 上的诱导作用是连续的。

注意，对于 $t \neq 0$，有 $\mathcal{D}_t \cong D(G)_{\mathrm{impl}}$，且 $\mathcal{D}_0 \cong (T^*G)_{\mathrm{impl}}$。定义 $\bar{\mu} : \mathcal{D} \to \mathcal{G} \times \mathcal{T}$，使其在 $t \neq 0$ 时等于 μ_{impl}，在 $t = 0$ 时等于 ν_{impl}。 $\bar{\mu}$ 的连续性由 $\widehat{\mu}|_{\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})}$ 的连续性以及下列交换图得出

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\widehat{\mu}|_{\widehat{\mu}_2^{-1}(\mathcal{X})}} & \mathcal{G} \times \mathcal{T} \\ & \searrow^{p} \quad \nearrow_{\bar{\mu}} & \\ & \bar{\mathcal{D}} & \end{array}$$

τ 中任意一个面的闭包都包含原点。根据命题 5.1， $D(G)_{\mathrm{impl}}$的每个层 X_σ 在 $0 \in \bar{\sigma}$ 时都会变形为相应的层 Y_{τ_σ} （属于 $(T^*G)_{\mathrm{impl}}$）。对于 $\sigma \in \mathcal{B}$，层 X_σ 变形为空集。□

5.2. **平坦联络模空间**。 设 M 是一个 G-拟哈密顿流形， N 是一个 G-哈密顿流形，且 $T \subset G$ 为一个极大环面。对于任意 $\lambda \in \mathfrak{t}_+^*$，我们有一个 G-拟哈密顿流形的同构 $N_{\mathrm{impl}}/\!/_\lambda T \cong N/\!/_\lambda G$，由 [12, 定理 3.4]给出。类似地，对于任意 $g \in \mu(M) \cap$指数映射(A)，存在一个同胚 $M_{\mathrm{impl}}/\!/_g T \cong M/\!/_g G$ ，由 [26, 附录 3.18]给出。因此，拟哈密顿约化空间 $M_{\mathrm{impl}}/\!/_g T$ 的变形等价于将 $M_{\mathrm{impl}}/\!/_g G$变形为一个哈密顿约化空间。

我们将此应用于主模空间 $\mathfrak{M}$；参见 [26, 第 6] 节。对于一个亏格为 g、有 $r+1$ 个边界分支的紧致连通定向光滑曲面 Σ，平凡主丛 $\Sigma \times G$ 上的 G-平坦联络的模空间 $\mathfrak{M}(\Sigma)$ 是一个 G^{r+1}-拟哈密顿流形，同构于

$$\mathfrak{M}(\Sigma) = \underbrace{D(G) \circledast \cdots \circledast D(G)}_{r \text{ times}} \circledast \underbrace{\mathbf{D}(G) \circledast \cdots \circledast \mathbf{D}(G)}_{g \text{ times}},$$

它变形为其加法对应物

$$\mathfrak{N}(\Sigma) = \underbrace{T^*G \circledast \cdots \circledast T^*G}_{r \text{ times}} \circledast \underbrace{\mathbf{T}^*G \circledast \cdots \circledast \mathbf{T}^*G}_{g \text{ times}}.$$

主模空间 $\mathfrak{M}$ 是相对于 G^{r+1} 对 $\mathfrak{M}(\Sigma)$ 进行内爆所得的空间：

$$\mathfrak{M} = \underbrace{D(G)_{\mathrm{impl}} \circledast \cdots \circledast D(G)_{\mathrm{impl}}}_{r \text{ times}} \circledast \underbrace{\mathbf{D}(G) \circledast \cdots \circledast \mathbf{D}(G)}_{g \text{ times}}.$$

我们将其加法版本定义为

$$\mathfrak{N}(\Sigma)_{\mathrm{impl}} = \underbrace{(T^*G)_{\mathrm{impl}} \circledast \cdots \circledast (T^*G)_{\mathrm{impl}}}_{r \text{ times}} \circledast \underbrace{\mathbf{T}^*G \circledast \cdots \circledast \mathbf{T}^*G}_{g \text{ times}}.$$

由定理 4.7 和 5.3 可得：

推论 5.4。 存在一个广义哈密顿变形，从 $\mathfrak{M}(\Sigma)_{\mathrm{impl}}$ 到 $\mathfrak{N}(\Sigma)_{\mathrm{impl}}$。

设 x_1、.....、$x_r \in \mathfrak{t}$满足定理 4.9 的条件，并设 $C = (C_{e^{x_i}})$ 为 e^{x_i} 的共轭类集。根据 [26, 定理 6.3]，，边界分支上的整体单值化属于 C 的 G-平坦联络的模空间 $\mathfrak{M}(\Sigma, C)$ 是 $\mathfrak{M}$ 关于 C 的拟哈密顿约化，其约化群为 T^{r+1} 。由于$D(G)_{\mathrm{impl}}$ 变形为 $(T^*G)_{\mathrm{impl}}$ ，且$\mathbf{D}(G)$ 变形为$\mathbf{T}^*G$，定理 4.9 和定理 4.7 得出：

推论 5.5. 存在一个广义哈密顿变形，将 $\mathfrak{M}(\Sigma, C)$ 变形到 $\mathfrak{N}(\Sigma)_{\mathrm{impl}}$ 的辛约化。

6. 拟哈密顿空间 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$

与定向箭图 $\Gamma=(E,V,s,t)$ 相关联的 Lax-Kirchhoff模空间 $\mathcal{M}_G(\Gamma)=T^*G^E/\!/G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}$ 是一个 $G^{\partial\Gamma}$-哈密顿流形 [30, （定理 3.1、定理 5.2]）。本节中，我们通过用双 $D(G)$ 替换余切丛 T^*G 的副本，构造其自然的拟哈密顿对应物 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$。主要结果表明， $\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 仅取决于箭图的同伦类（命题 6.5），并满足箭图复合下的粘合公式（定理 6.4）。这些性质对于第 7 节中的拓扑量子场论构造至关重要。我们简要回顾 [30] 中的相关定义。熟悉那篇论文的读者可以跳到第 7 节。

6.1. 箭图及其边界。

定义 6.1. 一个箭图是一个元组 $\Gamma=(V,\ E,\ s,\ t)$，其中：

- V 是一个有限的顶点集；
- E 是一个有限的边集；
- $s,\ t:\ E\to V$ 分别称为源映射和目标映射。

我们假设 Γ 没有孤立顶点，即 $\mathrm{im}(s)\cup\mathrm{im}(t)=V$。顶点的度 $v\in V$ 是以下各项之和

$$\deg(v):=\deg_{\mathrm{in}}(v)+\deg_{\mathrm{out}}(v),$$

其中，$\deg_{\mathrm{in}}(v)=|t^{-1}(v)|$ 是入边的数量，而 $\deg_{\mathrm{out}}(v)=|s^{-1}(v)|$ 是出边的数量。 Γ的边界记为 $\partial\Gamma$，是度为 1 的顶点集合。它分解为不交并

$$\partial\Gamma=\partial\Gamma^-\sqcup\partial\Gamma^+,$$

其中

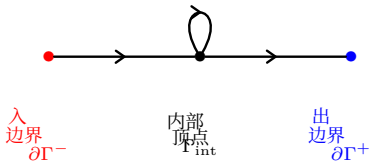
$$\partial\Gamma^-:=\{v\in\partial\Gamma:\deg_{\mathrm{out}}(v)=1\}\quad\text{and}\quad\partial\Gamma^+:=\{v\in\partial\Gamma:\deg_{\mathrm{in}}(v)=1\}$$

分别是入边界和出射边界。其补集

$$\Gamma_{\mathrm{int}}:=V\setminus\partial\Gamma$$

是内部顶点的集合。

下图示意了这些概念:



(6)

6.2. 构造 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$。 设 G为一个紧李群。回顾一下，双 $D(G)=G\times G$带有一种拟哈密顿结构 $G\times G$，其对应于如下作用

$$(g,h)\cdot(a,b)=(gah^{-1},\mathrm{Ad}_h\,b),\tag{7}$$

动量映射 μ: $D(G)\to G\times G$ 由 $(a,b)\mapsto(\mathrm{Ad}_a\,b,b^{-1})$ 给出，而这两个..... m

$$\omega_{(a,b)}=\frac{1}{2}\Big\{\langle\mathrm{Ad}_b\,a^*\theta^L\wedge a^*\theta^L\rangle+\langle a^*\theta^L\wedge(b^*\theta^L+b^*\theta^R)\rangle\Big\}.$$

若表示由一条单边构成的箭图，我们定义 $\mathcal{N}_G(\,)\coloneqq D(G)$。对于一般拟阵$\Gamma=(V,E,s,t)$，我们将 $D(G)$ 的一个副本与每条边 $e\in E$ 相关联，并考虑拟哈密顿空间的融合积

$$\bigotimes^E D(G)=\underbrace{D(G)\circledast D(G)\cdots\circledast D(G)}_{|E|\text{ times}}.$$

群 G^V 通过嵌入作用于这个融合积上

$$G^V\to(G\times G)^E,\quad(g_v)_{v\in V}\mapsto(g_{t(e)},g_{s(e)})_{e\in E},$$

明确给出为

$$g\cdot(a,b)=(g_{t(e)}a_eg_{s(e)}^{-1},\mathrm{Ad}_{g_{s(e)}}b_e)_{e\in E}\quad\text{for }g\in G^V,\,(a,b)\in\bigotimes^E D(G).\tag{8}$$

限制到子群 $G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}$ （条件是对于所有 $v \in \partial\Gamma$, $b_v = 1$ ），我们得到一个带有动量映射的拟哈密顿作用

$$\mu : \bigotimes^{E} D(G) \to G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}, \quad (a,b) \mapsto \Big(\prod_{e\in t^{-1}(v)} \mathrm{Ad}_{a_e}\, b_e \prod_{e\in s^{-1}(v)} b_e^{-1} \Big)_{v\in\Gamma_{\mathrm{int}}},$$

以及二形式

$$\eta = \sum_{e\in E} \mathrm{pr}_e^*\omega + \frac{1}{2}\langle \Big(\prod_{e\in t^{-1}(v)} \mathrm{Ad}_{a_e}\, b_e \Big)^* \theta^L \wedge \Big(\prod_{e\in s^{-1}(v)} b_e^{-1} \Big)^* \theta^R \rangle.$$

(参见 [7, 定理 6.1])。这里，$\mathrm{pr}_e : \prod_{e\in E} D(G) \longrightarrow D(G)$ 是到 e-因子的典范投影 r.

以下引理表明， $G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}$ 在 $\mu^{-1}(1)$。上自由作用。

引理 6.2. 若 Γ连通且具有非空边界，则 $G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}$ 在 $\mu^{-1}(1)$ 上的作用是自由的 .

证明。 设 $(a,b) \in \mu^{-1}(1)$，并设 $g \in G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}$ 满足 $g\cdot(a,b) = (a,b)$。我们必须证明，对所有 $v \in \Gamma_{\mathrm{int}}$，都有 $g_v = 1$。稳定子条件意味着，对于每条边 $e \in E$,

$$g_{t(e)} a_e g_{s(e)}^{-1} = a_e \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Ad}_{b_{s(e)}}\, b_e = b_e. \tag{9}$$

第一个方程等价于

$$g_{t(e)} = a_e g_{s(e)} a_e^{-1}. \tag{10}$$

由于 $\partial\Gamma \neq \varnothing$，存在一条与边界顶点相邻的边 $e \in E$。首先假设 $s(e) \in \partial\Gamma^-$。按照我们的约定，$b_{s(e)} = 1$，因此由 (10) 得到

$$g_{t(e)} = a_e \cdot 1 \cdot a_e^{-1} = 1.$$

同样地，如果 $t(e) \in \partial\Gamma^+$，则 $g_{t(e)} = 1$，而 (10) 蕴含 $g_{s(e)} = 1$。无论哪种情况，如果 e的另一个端点是内部顶点，我们都可以得出结论： g 在该处是平凡的。

现在，假设我们已证明某个顶点 v 满足 $g_v = 1$，并令 f 为与 v 相邻的任意一条边。若 $v = s(f)$，则由 (10) 得到 $g_{t(f)} = a_f \cdot 1 \cdot a_f^{-1} = 1$。若 $v = t(f)$，则 $1 = a_f g_{s(f)} a_f^{-1}$，因此 $g_{s(f)} = 1$。

由于 Γ 连通，每个内部顶点都可以通过一条边路径从边界到达。沿这样的路径重复上述论证，我们得出对所有 $v \in \Gamma_{\mathrm{int}}$，都有 $g_v = 1$。因此， $g = 1$，且该作用是自由的。□

G^{int} 在 $\mu^{-1}(1)$ 上的自由性使得商空间

$$\mathcal{N}_G(\Gamma) \coloneqq \mu^{-1}(1)/G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}$$

是一个光滑的 $G^{\partial\Gamma}$-拟哈密顿流形。剩余矩映射为

$$\nu : \mathcal{N}_G(\Gamma) \to G^{\partial\Gamma}, \quad (a,b) \mapsto \begin{cases} \mathrm{Ad}_{a_e}\, b_e & \text{if } v = s(e) \in \partial\Gamma^-, \\ b_e^{-1} & \text{if } v = t(e) \in \partial\Gamma^+, \end{cases}$$

wh此处， e 是与边界顶点 v 相邻的唯一一条边。 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 的维数为 i s

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}_G(\Gamma) &= \dim(\mu^{-1}(1)/G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}) \\ &= \dim\Big(\bigotimes^{E} D(G)\Big) - 2\dim(G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}) \\ &= 2|E|\dim G - 2|\Gamma_{\mathrm{int}}|\dim G = 2(|E| - |\Gamma_{\mathrm{int}}|)\dim G. \end{aligned}$$

注 6.3。 正如我们在引言中所提到的，空间 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 的构造源于哈密顿变形理论： $D(G)$ 的每一个副本都光滑地变形为一个副本 T^*G。由于变形理论与融合和约化相容， [25, 定理 3.3，推论 3.2]， $\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 光滑地变形为 Lax-Kirchhoff 模空间 $\mathcal{M}(\Gamma)$。

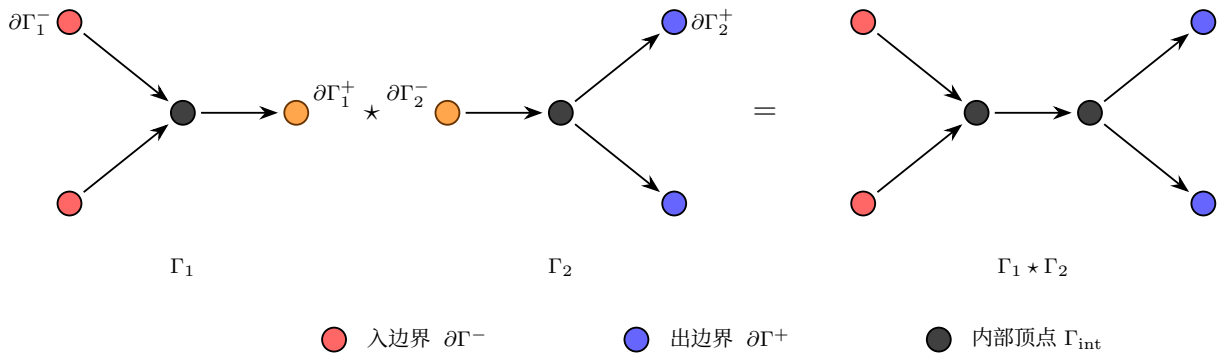


图 1. 有向箭图上的粘合操作 $\star$： $\partial\Gamma_1^+ = \partial\Gamma_2^-$ 在 $\Gamma_1 \star \Gamma_2$中成为一个内部顶点。

6.3. **粘合与同伦不变性**。 空间 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 满足一个类似于 Lax-Kirchhoff 模空间所满足的粘合公式。给定两个定向的连通箭图 Γ_1 和 Γ_2，其中 $\partial\Gamma_1^+ = \partial\Gamma_2^- =: D$，我们通过在 D 中识别顶点来构造复合箭图 $\Gamma_1 \star \Gamma_2$：

定理 6.4. 设 Γ_1、Γ_2 是两个带边界的有向箭图，使得 $\partial\Gamma_1^+ = \partial\Gamma_2^- = D$. 那么，

$$\mathcal{N}_G(\Gamma_1 * \Gamma_2) \cong (\mathcal{N}_G(\Gamma_1) \circledast \mathcal{N}_G(\Gamma_2)) /\!\!/ G^D$$

作为 $G^{\partial\Gamma_1^-} \times G^{\partial\Gamma_2^+}$ 拟哈密顿流形。

证明。 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 的构造关于箭图的粘合具有函子性，并且定义中的每一步都与拟哈密顿约化相容。为解释这一点，回顾一下，对于任意带边界的定向箭图 Γ，空间 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 是通过取以 Γ 的边为指标的若干个 $D(G)$ 的融合积，然后再对顶点群 $G^{\Gamma_{\text{int}}}$ 的乘积进行约化而得到的。

现在设 Γ_1 和 Γ_2 具有匹配的边界分支 $\partial\Gamma_1^+ = \partial\Gamma_2^- = D$。构造粘合后的箭图 $\Gamma_1 * \Gamma_2$，相当于先标识相应的边界顶点，然后执行相同的融合与约化过程。如果先分别构造 $\mathcal{N}_G(\Gamma_1)$ 和 $\mathcal{N}_G(\Gamma_2)$，它们的融合积 $\mathcal{N}_G(\Gamma_1) \circledast \mathcal{N}_G(\Gamma_2)$ 会带有一个源自所标识边界的剩余 G^D–作用。对该作用进行约化，恰好实现了 $\mathcal{N}_G(\Gamma_1 * \Gamma_2)$ 的构造中出现的同一标识。

由于拟哈密顿约化与迭代约化（分步约化）相容，因此约化的先后顺序不会影响最终结果。将这一原理应用于两步过程——先构造融合积，再按 G^D 约化——可得

$$\mathcal{N}_G(\Gamma_1 * \Gamma_2) \;\cong\; \big(\mathcal{N}_G(\Gamma_1) \circledast \mathcal{N}_G(\Gamma_2)\big) /\!\!/ G^D,$$

并且该同构保持剩余的 $G^{\partial\Gamma_1^-} \times G^{\partial\Gamma_2^+}$–作用。这就证明了该断言。 □

若一个箭图 Γ_1 可以通过以下一系列有限步操作得到另一个箭图 Γ_2，则称二者同伦的

两侧的边数可以任意，但必须为正数。从几何角度看，这一操作将连接两个内部顶点的边收缩为一个顶点。这里重要的是，同伦的箭图所产生的拟哈密顿空间在同构意义下相同。

定理 6.5. 设 Γ_1, Γ_1 是两个满足 $\partial\Gamma_1 = \partial\Gamma_2$ 的同伦连通有向箭图。那么，同伦关系诱导出一个同构 $\mathcal{N}_G(\Gamma_1) \cong \mathcal{N}_G(\Gamma_2)$，它是 $G^{\partial\Gamma}$-拟哈密顿流形之间的同构。

证明。 关键要素是标准恒等式

$$(M \circledast D(G)) /\!\!/ G \cong M, \tag{11}$$

对于任意 $H \times G$ 拟哈密顿流形 M；参见 [7, 例9.1]。这一关系表明，沿一个 G边界分支附加一个 $D(G)$的单个副本，并不会改变所得拟哈密顿空间。

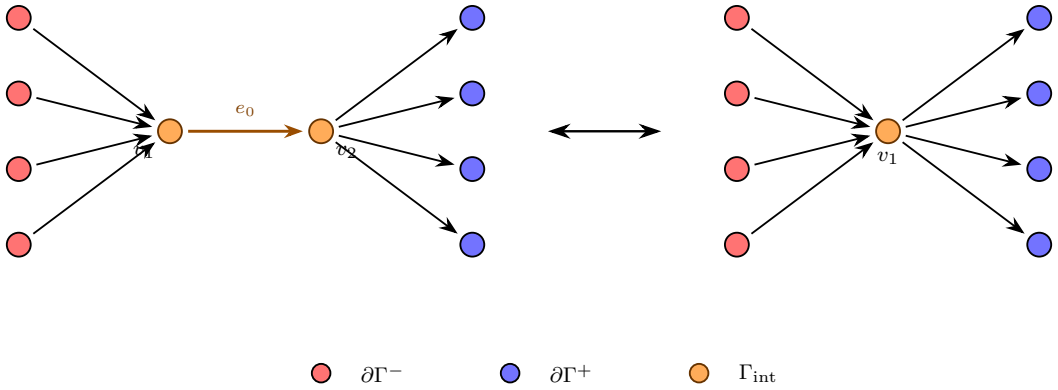


图2. 箭图上的同伦变换：收缩连接两个内部顶点 e_0 的边 v_1， $v_2 \in \Gamma_{\mathrm{int}}$ 得到一个同伦等价箭图。

设 Γ 是一个具有边界且至少有两个顶点的连通有向箭图。考虑变换6.3中描述的初等修改：移除一条内部边 e_0 ，其端点为 $v_1 = s(e_0)$和 $v_2 = t(e_0)$，并将 v_2 收缩至 v_1。将所得箭图记为 Γ'。具体而言，

$$E' = E \setminus \{e_0\}, \qquad V' = V \setminus \{v_2\}, \qquad t' = t|_{E'}, \qquad s'(e) = \begin{cases} v_1, & s(e) = v_2, \\ s(e), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为比较相关的拟哈密顿空间，先从定义开始

$$\mathcal{N}_G(\Gamma) \;\cong\; \Big(\bigotimes^{e\in E} D(G)\Big) /\!\!/ G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}.$$

分离出与 e_0 对应的因子：

$$\mathcal{N}_G(\Gamma) \cong \Big(\bigotimes^{e\neq e_0} D(G) \times D(G)\Big) /\!\!/ \big(G^{\Gamma_{\mathrm{int}}\setminus\{v_1,v_2\}} \times G^{v_1} \times G^{v_2}\big).$$

对 G^{v_2} 的约化仅作用于与 e_0 相关的 $D(G)$–因子。应用恒等式 (11) 可移除此因子，而不改变剩余的拟哈密顿结构。完成这一步约化后，合并顶点处唯一剩余的顶点群是 G^{v_1}，因此我们得到

$$\mathcal{N}_G(\Gamma) \;\cong\; \Big(\bigotimes^{e\neq e_0} D(G)\Big) /\!\!/ \big(G^{\Gamma_{\mathrm{int}}\setminus\{v_1,v_2\}} \times G^{v_1}\big) \;\cong\; \mathcal{N}_G(\Gamma').$$

由于箭图的任意同伦都可由连续应用变换6.3及其逆变换生成，反复应用上述论证可知，只要 Γ_1 和 Γ_2 同伦， $\mathcal{N}_G(\Gamma_1)$ 和 $\mathcal{N}_G(\Gamma_2)$ 就是 $G^{\partial\Gamma}$–拟哈密顿流形的同构。□

6.4. 从箭图到配边。上述结果使我们能够为任意连通定向的二维配边关联一个定义良好的拟哈密顿空间。每个这样的配边 Σ 都可以由一个连通有向箭图 Γ“加厚”得到，而定理 6.5 保证， $\mathcal{N}_G(\Gamma)$ 的同构类仅取决于 Σ。因此我们定义

$$\mathcal{N}(\Sigma) := [\mathcal{N}_G(\Gamma)],$$

其中方括号表示同构类。若 Σ的亏格为 g，且有 m 个入边界分支和 n 个出边界分支，则

$$\dim \mathcal{N}(\Sigma) = 2(g + m + n - 1) \dim G.$$

对于连通分支 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$均具有非空边界的非连通箭图，我们令

$$\mathcal{N}_G(\Gamma) = \mathcal{N}_G(\Gamma_1) \times \cdots \times \mathcal{N}_G(\Gamma_k),$$

这再次是一个光滑的拟哈密顿 $G^{\partial\Gamma}$ 空间。

注记 6.6。 定理 6.4–6.5 与其在 [30] 中的对应结果在结构上的相似性并非偶然，而是反映了 [25] 中建立的变形理论尊重两侧的范畴性质。这表明，拓扑量子场论函子 $\mathcal{N}:\mathbf{Cob}_2 \longrightarrow \mathbf{QHam}$ （见下文第 7 节）将以适当的方式变形为（留待未来研究）拓扑量子场论 $\mathcal{M}:\mathbf{Cob}_2 \longrightarrow$**哈密顿空间范畴**。

7. $2D$ 拟哈密顿拓扑量子场论

现在，我们从拓扑量子场论的视角重新诠释第 6 节中的构造。粘合命题（定理 6.4）与同伦不变性（定理 6.5）强烈表明，赋值 $\Sigma \mapsto \mathcal{N}(\Sigma)$ 应当能够组装成一个对称幺半函子，其定义域为某个配边范畴，值域为一个由拟哈密顿空间构成的范畴。然而，必须谨慎处理，因为拟哈密顿约化并不适用于任意群作用。

7.1. 配边范畴。 我们回顾标准的二维配边范畴$\mathbf{Cob}_2$。它的对象是紧致一维流形，也就是有限个圆的不交并。从 M 到N的态射是一个定向曲面 Σ，其边界分解为 $\partial\Sigma = M^- \sqcup N$，其中 M^- 表示取相反定向的 M。我们用 $\partial\Sigma^- = M$ 和 $\partial\Sigma^+ = N$ 分别表示入射边界和出射边界。

若 Σ_1 和 Σ_2 是可复合的配边，且满足 $\partial\Sigma_1^+ = \partial\Sigma_2^-$，则它们的复合 $\Sigma_2 \circ \Sigma_1$ 可通过沿着这一公共边界粘合而得到。定理 6.4 将这种几何粘合与拟哈密顿约化联系起来：

$$\mathcal{N}(\Sigma_2 \circ \Sigma_1) \;=\; \big(\mathcal{N}(\Sigma_1) \circledast \mathcal{N}(\Sigma_2)\big) /\!\!/ G^n, \tag{12}$$

其中 n 是 $\partial\Sigma_1^+ = \partial\Sigma_2^-$的连通分支数。

7.2. 准哈密顿范畴。遵循 [31], 的框架，我们现在来描述一个将作为函子的目标范畴的范畴。主要的微妙之处在于，拟哈密顿约化要求作用群的作用是自由的，因此态射的复合并非总能进行。因此，我们从一个偏范畴开始。对象是紧李群。一个态射 $G \to H$ 是准哈密顿 $G \times H$-空间的一个同构类。若 H在 $M \times N$ 上的作用是自由的，则称两个态射 $M\colon G \to H$ 和 $N\colon H \to I$ 为可复合的；此时，它们的复合定义为

$$N \circ M \;=\; (M \circledast N) /\!\!/ H : G \to I.$$

G 处的恒等态射是双 $D(G)$，配备其典范的 $G \times G$-拟哈密顿结构，这由恒等式（11）得以证明。

为构造一个范畴，我们应用 Wehrheim–Woodward 完备化过程 [28]。在所得范畴 **QHam** 中，态射是由原始态射构成的有限序列，并模去由相邻可复合态射对的复合所生成的等价关系。更多细节见 [35, 36]。**QHam** 上的幺半结构继承自李群与拟哈密顿流形的笛卡尔积。

7.3. 拓扑量子场论的构造。 现在我们构造一个对称幺半函子

$$\mathcal{N} : \mathbf{Cob}_2 \to \mathbf{QHam}$$

它将圆 S^1 映到 G，并将连通箭图 Γ的加厚箭图 Σ_Γ 映到拟哈密顿空间 $\mathcal{N}_G(\Gamma)$。这样的函子恰好是一个取值于**QHam**的二维拓扑量子场论；参见 [34]。

根据 [34, §1.4], ，只需在有限个配边生成元上指定该函子，并验证它们之间的关系。令 $\Sigma_{m,n}$ 表示从 m 个圆到 n 个圆的零亏格配边。标准生成元如下：

- 杯 $C_{1,\,0}$ = 和帽 $C_{0,\,1}$ = ，
- 两个裤子曲面 $C_{2,\,1}$ = 和 $C_{1,\,2}$ ；
- 圆柱 $C_{1,\,1}$ = 和交换

除杯和帽外，所有生成元都来自箭图。对于杯和帽，我们令

$$\mathcal{N}(\bigcirc) = \mathcal{N}(\bigcirc) = \{*\},$$

该空间为带平凡 G-作用的单点空间。正如我们将看到的，这一选择由函子性所强制。

仅涉及由箭图诱导的配边的关系可直接由定理 6.4、6.5 得出。剩下需要检验的是与杯和帽的相容性。由于将 $\mathcal{N}(\Sigma_\Gamma)$ 与 $\mathcal{N}(\bigcirc)$ 复合相当于

在相应的边界分支处按 G 作用取商，下面的命题给出了所需的相容性。

命题 7.1. 设 Γ 是一个具有非空边界的连通箭图，并令 $v_0 \in \partial\Gamma$。记 G^{v_0} 为 $G^{\partial\Gamma}$ 中对应的因子，它通过拟哈密顿结构作用于 $\mathcal{N}(\Gamma)$ 。则

$$\mathcal{N}_G(\Gamma)/\!/G^{v_0} \;\cong\; \mathcal{N}_G(\Gamma \setminus \{v_0\}),$$

其中 $\Gamma \setminus \{v_0\}$ 是通过移除 v_0 及与其相连的唯一一条边得到的。

证明。 不妨设 v_0 位于 $\partial\Gamma^+$ 中；另一种情况同理。设 e_0 是满足 $t(e_0) = v_0$ 的唯一一条边。则

$$\mathcal{N}_G(\Gamma) = \Big(\bigotimes_{e\in E} D(G)\Big)/\!/G^{\Gamma_{\mathrm{int}}} = \Big(\bigotimes_{e\neq e_0} D(G) \circledast D(G^{e_0})\Big)/\!/G^{\Gamma_{\mathrm{int}}}.$$

因子 G^{v_0} 通过左作用作用于 $D(G^{e_0})$。由于 $D(G)$ 关于左 G-作用的拟哈密顿约化是平凡的，我们得到

$$\mathcal{N}_G(\Gamma)/\!/G^{v_0} = \Big(\bigotimes_{e\neq e_0} D(G) \circledast \{*\}\Big)/\!/G^{\Gamma_{\mathrm{int}}} = \mathcal{N}_G(\Gamma \setminus \{v_0\}),$$

如所需。 □

由 [34, 定理 3.6.19], 可知，上述赋值可扩展为一个对称幺半函子 $\mathbf{Cob}_2 \to \mathbf{QHam}$。

注 7.2. 只有闭曲面（即没有边界的曲面）才会在完备范畴$\mathbf{QHam}$中产生非平凡的复合（即由长度大于一的序列表示的态射），其实现为奇异拟哈密顿空间。所有其他配边都对应长度为一的光滑态射。

最后请注意，拓扑量子场论由箭图加厚唯一确定。事实上，若 Γ 是一个连通箭图且 $v_0 \in \partial\Gamma^+$，则函子性要求

$$(\mathcal{N}_G(\Gamma) \times \mathcal{N}(\bigcirc))/\!/G \;\cong\; \mathcal{N}_G(\Gamma \setminus \{v_0\}).$$

维数论证表明 $\mathcal{N}(\bigcirc)$ 必须是零维的，而 $\bigcirc$ 相关空间的连通性意味着它必须是单元素集。

定理 7.3（取值于拟哈密顿空间的拓扑量子场论）。 设 G 是一个紧致连通李群。存在唯一的二维拓扑量子场论

$$\mathcal{N} : \mathbf{Cob}_2 \to \mathbf{QHam}$$

将圆映射到 G ，并将任意具有非空边界的连通箭图 Γ 的加厚 Σ_Γ 映射到拟哈密顿空间 $\mathcal{N}$（Γ）。□

参考文献

[1] Poisson, S.D.（1809年）。论定积分。科学院回忆录。[2] Lichnerowicz, A.（1977年）。泊松流形及其相关李代数。微分几何杂志，**12**（2），253–300。[3] Weinstein, A.（1983年）。泊松流形的局部结构。微分几何杂志，**18**（3），523–557。[4] Xu, P.（1995年）。论泊松群胚。国际数学杂志，**6**（1），101–124。[5] Kosmann-Schwarzbach, Y.（2004年）。泊松几何。施普林格出版社，柏林。[6] Mackenzie, K.C.H.（2005年）。李群胚与李代数丛的一般理论。剑桥大学出版社，剑桥。[7] Alekseev, A.、Malkin, A. 和 Meinrenken, E.（1998年）。李群值矩映射。微分几何杂志，**48**（3），445–495。[8] A. Alekseev、Y. Kosmann-Schwarzbach 和 E. Meinrenken，拟泊松流形，《加拿大数学杂志》**54**（2002年），第1期，3–29。[9] Alekseev, A. 和 Meinrenken, E.（2000年）。非交换魏尔代数。《数学新进展》，**139**（1），135–172。[10] Etingof, P. 和 Varchenko, A.（1998年）。经典动力杨–巴克斯特方程解的几何与分类。《数学物理通讯》，**192**（1），77–120。[11] Mehta, R.A.（2006年）。拟泊松流形的微分几何。博士论文，加利福尼亚大学伯克利分校。[12] Guillemin, V.、Jeffrey, L. 和 Sjamaar, R.（2002年）。辛内爆。《变换群》，**7**（2），155–184。[13] Guillemin, V. 和 Sternberg, S.（1982年）。群表示的几何量子化与重数。《数学新进展》，**67**（3），515–538。[14] Sjamaar, R.（1998年）。重新审视动量映射的凸性。《数学进展》，**138**（1），46–91。

[15] Witten, E.（1988年）。拓扑量子场论。《数学物理通讯》，117（3），353–386。[16] Atiyah, M.（1988年）。拓扑量子场论。《高等科学研究所数学出版物》，68，175–186。[17] Jones, V.F.R.（1985年）。通过冯·诺依曼代数得到的纽结多项式不变量。《美国数学会通报》，12（1），103–111。[18] Witten, E.（1989年）。量子场论与琼斯多项式。《数学物理通讯》，121（3），351–399。[19] Reshetikhin, N. 和 Turaev, V.（1991年）。通过链环多项式与量子群得到的三维流形不变量。《数学新进展》，103（1），547–597。[20] Fock, V. 和 Rosly, A.（1999年）。黎曼曲面上平坦联络模空间的泊松结构与 r-矩阵。《美国数学会译丛》，第2辑，191，67–86。[21] Meinrenken, E.（2002年）。辛手术与自旋^c-狄拉克算子。《数学进展》，134（2），240–277。[22] Pantev, T.、Toën, B.、Vaquié, M. 和 Vezzosi, G.（2013年）。移位辛结构。《高等科学研究所数学出版物》，117（1），271–328。[23] Safronov, P.（2017年）。通过经典陈-西蒙斯理论进行拟哈密顿约化。《数学进展》，287，733–773。[24] Fock, V. 和 Goncharov, A.（2006年）。局部系统模空间与高阶泰希米勒理论。《高等科学研究所数学出版物》，103（1），1–211。[25] Burelle, J.-P.、Maiza, M.M. 和 Mayrand, M.。拟哈密顿空间的变形。arXiv预印本 arXiv:2505.16689，2025年。[26] Hurtubise, J.、Jeffrey, L. 和 Sjamaar, R.（2006年）。群值内爆与抛物结构。《美国数学杂志》，128（1），167–214。[27] Eshmatov, A.（2009年）。群值内爆与共轭空间。arXiv预印本 arXiv:0911.1233。[28] Wehrheim, K. 和 Woodward, C.T.（2010年）。弗洛尔理论中拉格朗日对应的函子性。《量子拓扑》，1（2），129–170。[29] Sjamaar, R. 和 Lerman, E.（1991年）。分层辛空间与约化。《数学年刊》，134（2），375–422。[30] Maiza, M.M. 和 Mayrand, M.（2025年）。Lax-Kirchhoff 模空间与哈密顿二维拓扑量子场论。arXiv预印本 arXiv:2510.23567。[31] Moore, G.W. 和 Tachikawa, Y.（2012年）。其取值为全纯辛簇的二维拓扑量子场论。载于《String-Math 2011》，《纯粹数学论文集》85卷，第191–207页。美国数学学会。[32] Weinstein, A.（1971年）。辛流形及其拉格朗日子流形。《数学进展》，6（3），329–346。[33] Weinstein, A.（2010年）。辛范畴。《葡萄牙数学》，67（2），261–278。[34] Kock, J.（2004年）。弗罗贝尼乌斯代数与二维拓扑量子场论。伦敦数学会学生教材，第59卷。剑桥大学出版社。[35] P. Crooks 和 M. Mayrand。通过移位辛几何得到 Moore-Tachikawa猜想。arXiv预印本 arXiv:2409.03532，2024年。[36] G. Cazassus。哈密顿流形的二范畴，以及一个（

$$1+\ 1+\ 1$$

1903 10686, ）场2019论。arXiv预印本 arXiv: . .[37] A. Dancer、F. Kirwan 和 A. Swann，超凯勒流形的内爆，《Compositio Mathematica》149（2013年），第9期，1592–1630。
（Mohamed Moussadek Maiza）数学系，舍布鲁克大学，2500 Bd de l’Université，舍布鲁克，QC，J1K 2R1，加拿大 电子邮箱：mohamed.moussadek.maiza@usherbrooke.ca