arXiv:2601.13469v1 [math.GT] 19 Jan 2026

塞弗特纤维化三维流形的保纤维反向定向对合

预印本

Benjamin Peet数学
系 圣马丁大学 莱西，华
盛顿州 98503
bpeet@stmartin.edu

2026年1月21日

摘要

我们研究可定向塞弗特纤维化三维流形上的保纤维反向定向对合，以及流形满足哪些条件才可容许此类对合。我们构造了一类在底空间上作用平凡的保纤维反向定向对合。该类中的每个元素 Ψ 均可通过将乘积对合延拓到类型为 $V(2,\ 2;-1)$的塞弗特块上得到——该塞弗特块是一个实心环面，内部填充了三个纤维，其塞弗特不变量分别为 (2，1)、(2，1) 和 (1，-1)。我们证明，Ψ 在保纤维微分同胚下构成单个共轭类。我们的主要结果表明，任意保纤维反向定向对合都可分解为 $\psi \circ g$，其中 g 是保纤维且保持定向的，而 $\psi \in \Psi$，从而将问题归结为先前已知的保持定向情形。通过可定向底空间的二重覆盖，我们进一步将分类推广到具有不可定向底轨形的流形。

关键词 几何；拓扑学；三维流形；对合；塞弗特纤维化；反向定向 g

2010年数学学科分类：57S25,55R05

1 引言

在此前的三篇论文 中 [1], [2], 和 [3], ，我们考察了有限群、保纤维且反转定向的作用 g 群作用于定向 塞弗特流形表。特别是，得到了以下结果：

定理 1.1. 设 M 是一个闭、紧致且可定向的塞弗特3流形，其纤维化于一个可定向底空间之上。设 φ：$G \to Diff_+^{fp}(M)$ 是作用在 M 上的有限群作用，且其障碍类可表示为

$$b = \sum_{i=1}^{m} (b_i \cdot \#Orb_\varphi(\alpha_i))$$

对于一组纤维 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ 和整数 $\{b_1, \ldots, b_m\}$。那么 φ 是一个扩展乘积作用。

从本质上说，这一结果表明，若满足关于障碍项的条件，则有限群作用可以表示为某个乘积结构 $S^1 \times F$ 上乘积作用经德恩填充扩展而成。

本文研究可定向塞弗特流形上的反向定向对合。

本文第一部分考察可容许塞弗特流形，并总结了 [1] 和 [3] 中的一些已有工作。特别是，本文证明了这类流形允许存在此类对合的条件是：其不变量必须具有 $M = (g,\ o_1|(2,\ 1) \ldots,\ (2,\ 1),\ (1,\ -\frac{n}{2}))$ 的形式，其中有 n 个阶为 2 的奇异纤维，且 n 为偶数。 −

随后，我们考察 [4] 的研究，以探讨亏格为 g的曲面可能存在的对合。特别是，我们确定了这类对合的共轭类。

随后，我们分析反向定向对合的形式，并提出一种构造一类对合的方法：给定一个可容许流形，通过将乘积对合扩展到多个 $V(2,2;-1)$ 副本上，构造出在底空间上为恒等映射的对合。这里， $V(2,2;-1)$ 是一个平凡纤维化环面，其边界带有固定的乘积结构；随后钻出三个正则纤维，并按照塞弗特不变量 (2,1)、(2,1) 和 $(1,-1)$ 将其填充。我们将该类中的元素记为 Ψ ，并证明它是一个共轭类。
主要结果将问题归结为定理 1.1（对合的情形），并指出，任意保纤维且反向定向的对合，都是一个保纤维且保持定向的对合与 Ψ 中某个元素的复合：

定理 7.3. 设 M 是一个闭、紧且可定向的塞弗特纤维化3维流形，它纤维化于一个可定向底空间之上，且对于某个曲面 S，它不是 $S^1 \times S$ 。那么，所有保纤维且反向定向的对合都可以表示为 $\psi \circ g$，其中 g 是一个保纤维且保持定向的对合，且 $\psi \in \Psi$。

接着，我们利用 [3]的结果：
定理 8.1. 设 M 是一个可定向的塞弗特纤维化流形，它纤维化于一个轨形 B 之上，该轨形具有不可定向的底空间，且 $p: M \to M$ 为可定向底空间双重覆盖。设覆盖变换为τ: $\tilde{M} \to \tilde{M}$。那么， $Diff_+^{fp}(M)$与 $Cent_+^{fop}(\tau)$之间存在一个同构。

特别是，这说明 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$给定 f 上的一个对合，我们可以将其提升为 M 上的一个对合 f，使得 $p \circ f = f \circ p$.

我们将此推广，从而得到 $Diff_-^{fp}(M)$ 与 $Cent_-^{for}(\tau)$ 之间的一个同构。这意味着，给定 M 上的一个反向定向对合，我们可以将其提升为 M上的一个反向定向对合，其具体形式现已给出。
最后，我们给出一个给定可容许流形上这些对合的例子。

2 初步定义

我们首先给出一些初步定义。设 M 是一个无边界的三维定向光滑流形。记 $Diff(M)$ 为 M 的自微分同胚群，并用 $Diff_-(M)$ 表示 M 的反向定向自微分同胚群。对合是 $Diff(M)$ 中阶为 2 的元素。

M 将假定为可定向塞弗特纤维化流形。我们采用原始的塞弗特定义。也就是说，塞弗特流形是一个三维流形，使得 M 可分解为互不相交的纤维，其中每个纤维都是一条简单闭曲线。于是，对于每条纤维 γ，都存在一个纤维化邻域（即由纤维组成且包含 γ的子集），可通过保纤维映射映到一个实心纤维化环面上。 [5]

我们称塞弗特丛 为塞弗特流形 M，并配有一个连续映射 $\pi: M \to B$，其中 π 将每条纤维映到一个点。

我们用记号 $Diff^{fp}(M)$表示 M（给定某个塞弗特纤维化）的保纤维自微分同胚群。给定一个保纤维微分同胚，它会在底空间 B的底空间 B_U 上诱导一个微分同胚。给定 $f \in Diff_-^{fp}(M)$，由塞弗特定义可知，纤维的定向要么被反转，要么底空间上的诱导映射是反向定向的。

如果我们有一个流形 M，那么 M 上的乘积结构是指一个微分同胚 $k: A \times B \to M$，其中 A 和 B 是某些流形。 [6] 如果一个 Seifert-纤维化流形 M 具有乘积结构 $k: S^1 \times F \to M$，其中 F 是某个曲面，并且 $k(S^1 \times \{x\})$ 是 M 对每个 $x \in F$ 的纤维，那么我们称 $k: S^1 \times F \to M$ 是 M 的纤维化乘积结构。

我们在此指出， M 上的纤维化乘积结构等价于存在一种叶状结构： M 由圆和与 F 微分同胚的曲面构成，使得每个圆恰好与每个叶状曲面相交一次。
鉴于环面的第一同调群（等价地，第一基本群）是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 由两个元素生成的，而这两个元素可由在单点处相交的任意两个非平凡环路表示，我们可以使用乘积结构中的经线-纬线标架作为两个生成元的代表元。如果我们有一个微分同胚 $f: T_1 \to T_2$ 以及乘积结构 $k_i: S^1 \times S^1 \to T_i$，那么我们可以用一个矩阵表示其在第一同调群上的诱导映射；该矩阵使用 $H_1(T_i)$ 的基，这些基由源自 $k_i: S^1 \times S^1 \to T_i$ 的经线-纬线标架导出。

如果 $f: A \times B \to A \times B$ 可以表示为 $(f_1, f_2$，其中 $f_1: A \to A$ 且 $f_2: B \to B$，则称 $f \in Diff(A \times B)$ 为乘积微分同胚。
于是，给定 $f \in Diff$（M）及乘积结构 $k: A \times B \to M$，如果 f使乘积结构保持不变，即 $k^{-1} \circ f \circ k$在 $A \times B$ 上定义了一个乘积微分同胚，我们就称之为如此。

现在假设我们有一个纤维化乘积结构 $k\colon\ S^1 \times F \to M$。如果赋予纤维任意定向，然后根据纤维的定向取曲面的法向量来确定 k（$\{u\} \times F$）的每个边界分支的定向，那么我们就称每个边界环面具有正定向。

现在我们考察在什么情况下允许存在一个保纤维但反向定向的对合。

3 可容许塞弗特流形

3.1 先前结果

我们先给出一些预备结果。所有这些结果均已发表在 [2] 中

引理 3.1。设 F 是一个带边界的可定向曲面。根据 F 的某个定向，设边界带有正定向，并且 $f\colon F \to F$ 是一个微分同胚。则 f 在 F 上保持定向，当且仅当 f 在某一对边界分支之间保持定向。

推论 3.2. 设 M 是一个定向平凡塞弗特纤维化三维流形，其定向边界为 $\partial M = T_1 \cup \ldots \cup T_n$。那么，保纤维微分同胚 $f\colon M \to M$ 保持定向，当且仅当它在某一对边界环面之间保持定向。

命题 3.3. 在底空间可定向且至少有一个阶大于二的奇异纤维的可定向塞弗特三维流形上，所有有限的保纤维作用都保持定向。

命题 3.4. 在底空间可定向且欧拉类非零的可定向塞弗特三维流形上，所有有限的保纤维作用都保持定向。

3.2 无不动点对合

现在我们来考察这类无不动点对合的可容许性。

如果塞弗特流形 M存在这样的对合 f，那么商空间 $\tilde{M} = M/f$将是不可定向塞弗特流形。因此， $\tilde{M}$ 的障碍项必为零，而这只有在 $\tilde{M} \cong S^1 \times S$为闭曲面时才成立 S。更多详情请参见 [7]。

由此可知，与 $S^1 \times S$不同胚的塞弗特流形不存在无不动点对合.

3.3 可容许塞弗特流形概述

总而言之，这些结果表明，若塞弗特流形 $M = (g, o_1 | (q_1, p_1) \ldots (q_n, p_n), (1, b))$ 上存在反向定向的保纤维对合，那么必有：

1. $e = -(b + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{q_i}) = 0$2. $q_i = 2$对所有 $i = 1, \ldots, n$3. n为偶数 4. $b = -\frac{n}{2}$特别地，$b = 0$若没有奇异纤维，则 $M = S^1 \times S$对某个曲面成立。

给定 [7]，我们注意到，可能出现的几何结构只有 $S^2 \times \mathbb{R}$、 E^3和 $H^2 \times \mathbb{R}$，具体取决于底空间轨形 B 的欧拉示性数。我们首先只考虑其可定向的情形。

现在利用黎曼-赫尔维茨公式，我们注意到，对于每个 $q_i = 2$:

$$\chi_{orb}(B) = \chi(B_U) - \sum_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{2})$$

这可简化为

$$\chi_{orb}(B) = \chi(B_U) - \frac{n}{2}$$

因此，我们考虑以下三种情况：

1. $\chi(B_U) > \frac{n}{2}$ （ $S^2 \times \mathbb{R}$的几何）
2. $\chi(B_U) = \frac{n}{2}$ （ E^3的几何） 3. $\chi(B_U) < \frac{n}{2}$ （ $H^2 \times \mathbb{R}$的几何）

这些情形可归结为以下几种:

1. $B_U = S^2$ 且 $n = 0$ 或 $n = 2$ ($S^2 \times \mathbb{R}$) 2. $B_U = S^2$ 且 $n = 4$ 或 $B_U = T^2$ 且 $n = 0$ (E^3) 3. B_U 是双曲的，且 n 是任意偶整数；或者 $B_U = T^2$ 且 n 是任意大于 0 的偶整数；或者 $B_U = S^2$且 n 是任意大于 2 的偶整数（$H^2 \times \mathbb{R}$）

鉴于 $b = -\frac{n}{2}$，我们可以用塞弗特记号将这些情形列出如下:

1. (a) $M = (0, o_1|)$ (b) $M = (1, o_1|(2, 1), (2, 1), (1, -1))$ 两者都是 $S^2 \times S^1$，但要么是平凡纤维化，要么是具有两条阶为 2 的纤维的纤维化。2. (a) $M = (0, o_1|(2, 1), (2, 1), (2, 1), (2, 1), (1, -2))$ (b) $M = (1, o_1|)$ 第二种只是 T^3 平凡纤维化。3. (a) $M = (g, o_1|(2, 1) \ldots, (2, 1), (1, -\frac{n}{2})$，且 n是任意非负偶整数，并有 n条奇异纤维。（注意，这包括 $(g, o_1|)$）(b) $M = (1, o_1|(2, 1) \ldots, (2, 1), (1, -\frac{n}{2})$，且 n是任意大于 0 的偶整数，并有 n条奇异纤维。(c) $M = (0, o_1|(2, 1) \ldots, (2, 1), (1, -\frac{n}{2})$，且 n是任意大于 2 的偶整数，并有 n条奇异纤维。

–

–

–

4 亏格为 g 的曲面上的对合

本节总结 [4]的研究成果。我们采用的主要结果是定理 5.7 .
为此，我们定义了三类保持定向的对合和两类反定向对合。它们在曲面微分同胚所诱导的共轭下两两不同。我们对这些对合进行描述；若要了解更全面的论述及相关图示，请参见 [4]。

4.1 保持定向

第一种对合是平凡对合。第二种类型如下:

$$spit_{g,r} : S_g \to S_g$$

这是绕一条轴旋转的对合，它固定 $g - 2r$ 个孔，并交换 r 个孔。
该对合具有 $4(g - 2r)$ 个不动点。
第三种类型仅在 g 为奇数时定义:

$$rot : S_g \to S_g$$

这是绕一条穿过“中心”孔的轴进行的旋转。
这个对合没有不动点。

4.2 反向定向

第一类是 th　　固定亏格为 g 的曲面上的 r 个孔并交换其余孔的反射。我们将这些记作　　：

$$refl_{g,r} : S_g \to S_g$$

此对合有 $g-2r+1$ 个互不相交的不动点圆。
第二类是在一个亏格为 $g-r \le g$、带有 $r \ge 0$ 个把手的曲面上取对蹿映射构造的。我们将其记为：

$$anti_{g,r} : S_g \to S_g$$

此对合有 r 个互不相交的不动点圆。如果 $r=0$ 没有不动点。

4.3 定理

为完整起见，我们在此陈述完整定理：
定理 *4.1.* *</style}*对于 $g \ge 0$，亏格为 g 的曲面上有 $4+2g$ 个对合共轭类。它们是以下保持定向的对合：_

1. $[id]$2. $[spit_{g,r}]$当 $0 \le r \le \frac{g}{2}$ 时3. $[rot]$当_ g 为奇数时

以及以下保持定向的对合：

1. $[refl_{g,r}]$ 当 $0 \le r \le \frac{g}{2}$ 时
2. $[anti_{g,r}]$当 $0 \le r \le g$时

例如，这里我们取环面：

例 4.1. 因为 $g=1$在共轭意义下有 *3* 个保持定向的对合和 *3* 个保持定向的对合。至于反定向对合，在 *[4],* 的例 *10.2* 中，我们有：对于反定向对合，在共轭意义下，$H_1(T)$ 上的诱导对合由下式给出：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

对于 $[anti_{1,0}]$ 和 $[refl_{1,0}]$ 以及

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

对于 $[anti_{1,1}]$。

现在，根据第 3.2 节，对于 g 为奇数且 $anti_{g,0}$ 的情形，本文不考虑无不动点对合 rot。

5 预备结果

现在我们证明以下命题：
命题 5.1。设 F 是一个只有一个边界分支的曲面，并设 $\hat{}M \cong S^1 \times F$ 按照纤维化乘积结构 $k_{\hat{}M}: S^1 \times F \to \hat{}M$ 进行纤维化。假设 M 是通过对边界$\hat{}$　　$\hat{}$分支进行$(1,2)$德恩填充得到的。若 $f_{\hat{}M}: M \to M$ 是一个保纤维且反向定向的对合，那么它能够延拓到填充部分，成为 M 上的保纤维、反向定向对合，当且仅当：

$$((k_{\hat{M}}^{-1} \circ f_{\hat{M}} \circ k_{\hat{M}})|_{S^1 \times \partial F})_* = \pm \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

证明。 首先注意，填充环面 V将按照某个乘积结构 k_V：$S^1 \times D \to V$具有诱导的（-2,1）纤维化。更多详情见 [1]。因此，要将映射延拓到这个实心环面内，它必须保持子午线——这一点由半生半死定理推出，见 [8] 中的引理 3.5——同时也必须保持纤维化。该映射必须反转纤维的定向或子午线的定向（但不能两者兼而有之）。
因此，若我们将映射在 ∂V 上按照由 k_V 诱导的乘积结构以同调意义下表示为 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

则：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$。
其唯一解为

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

由此可得以下同调图（按照由 $k_{\hat{M}}$ 和 k_V在边界上诱导的乘积结构）：

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \\ H_1(\partial \hat{M}) & \leftarrow & H_1(\partial V) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ H_1(\partial \hat{M}) & \leftarrow & H_1(\partial V) \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \end{array}$$

因此，

$$((k_{\hat{M}}^{-1} \circ f_{\hat{M}} \circ k_{\hat{M}})|_{S^1 \times \partial F})_* = \pm \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ˆˆ 反过来，注意若用填充映射 d：$\partial V \to \partial M$ 填充 ∂M，则映射：

$$d^{-1} \circ f_{\hat{M}}|_{\partial \hat{M}} \circ d$$

将 V 的边界映到 V 的边界。接下来需要证明，该映射可以延拓到实心环面内部，使其成为一个既保纤维又是对合的映射。
为此，我们注意到：

$$((k_V|_{S^1 \times \partial D})^{-1} \circ (d^{-1} \circ f_{\hat{M}}|_{\partial \hat{M}} \circ d) \circ (k_V|_{S^1 \times \partial D}))_* = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

因此，根据 [4], 的命题 10.5 和 10.6，该映射在 $GL_2(\mathbb{Z})$ 中与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 共轭。

因此，我们必须有 $(k_V|_{S^1 \times \partial D})^{-1} \circ (d^{-1} \circ f_{\hat{M}}|_{\partial \hat{M}} \circ d) \circ (k_V|_{S^1 \times \partial D})$ 与 $anti_{1,1}$ 共轭，并且特别地，我们可以通过某个$h_1 \in Diff^+(S^1 \times \partial D)$将其取为不失一般性的形式，使其由一个保持定向的微分同胚（若不然，则取 $h_1 \circ anti_{1,1}$）的同调代表为 $\pm \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。代数计算见 [4]。于是：

$$anti_{1,1} = h_1^{-1} \circ ((k_V|_{S^1\times\partial D})^{-1} \circ (d^{-1} \circ f_{\hat{M}}|_{\partial\hat{M}} \circ d) \circ (k_V|_{S^1\times\partial D})) \circ h_1$$

这里我们利用环面的映射类群与 $GL_2(\mathbb{Z})$ 一一对应这一事实。详尽的证明见 [9]。

然而，考虑映射 $g \in Diff(S^1 \times \partial D)$，其中 $g_{\pm}(u, v) = (u^{\pm 1}, u^{\mp 1}v^{\mp 1})$，我们注意到 $g_{\pm *} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，并且通过与上述类似的论证，存在一个 $h_2 \in Diff^+(S^1 \times \partial D)$，使得：

$$anti_{1,1} = h_2^{-1} \circ g \circ h_2$$

因此，特别地：

$$g = h_2 \circ h_1^{-1} \circ [(k_V|_{S^1\times\partial D})^{-1} \circ (d^{-1} \circ f_{\hat{M}}|_{\partial\hat{M}} \circ d) \circ (k_V|_{S^1\times\partial D})] \circ h_1 \circ h_2^{-1}$$

所以现在 $(k_V|_{S^1\times\partial D})^{-1} \circ (d^{-1} \circ f_{\hat{}M}|_{\partial\hat{}M} \circ d) \circ (k_V|_{S^1\times\partial D})$ 与 g 共轭，且共轭映射为保向映射 $h = h_1 \circ h_2^{-1}$，特别是：

$$h_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} (\pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix})^{-1} = \pm I$$

那么 $(k_V|_{S^1\times\partial D})^{-1} \circ (d^{-1} \circ f_{\hat{}M}|_{\partial\hat{}M} \circ d) \circ (k_V|_{S^1\times\partial D})$ 与 g 共轭，共轭映射同伦于恒等映射或其负映射。重要的是，$k_V \circ g \circ k_V^{-1}$ 是保纤维的（纤维由 $k_V(S^1 \times u)$ 给出），且可通过 $g(u, \rho v) = (u, \rho u^{-1}v^{-1})$ 延拓到实心环面内部。该映射仍然是保纤维的对合。
设塞弗特流形 M' 是按照 $d \circ h$ 填充得到的。它与 M 同构，其同构由某个保纤维微分同胚 φ： $M \to M'$ 给出；该微分同胚限制在 M 上时为恒等映射。
f 可扩展为 M' 上的保纤维对合，其形式为 f'；此时 $f = \varphi \circ \overline{f'} \circ \varphi^{-1}$ 限制在 $\hat{}M$ 上时为 f，且仍是保纤维对合。

□

命题5.2。 设 F 是只有一个边界分支的曲面，且 $\hat{}M \cong S^1 \times F$ 按照纤维化乘积结构 $k_{\hat{}M}$： $S^1 \times F \to \hat{}M$ 进行纤维化。假设 M 是对边界 $\hat{}$ $\hat{}$ 分支进行 $(x, 1)$ 德恩填充所得，其中 $x \in \mathbb{Z}$ 为某个值。若 $f_{\hat{}M}$： $M \to M$ 是保纤维且反向定向的对合，则当且仅当满足以下条件时，它可延拓到填充部分，从而成为 M 上的保纤维、反向定向对合：

$$((k_{\hat{M}}^{-1} \circ f_{\hat{M}} \circ k_{\hat{M}})|_{S^1\times\partial F})_* = \pm \begin{bmatrix} 1 & -2x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

证明。 证明仿照前一个命题。
这次，填充环面将带有诱导的 (1,0) 纤维化。同样，该映射需要保持子午线和纤维化，并且只反转其中一个的定向，而不是两者。因此：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里 $\varepsilon = \pm 1$。
唯一的解是：

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

由此可得以下同调图:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} -1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \\ H_1(\partial\hat{M}) & \leftarrow & H_1(\partial V) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ H_1(\partial\hat{M}) & \leftarrow & H_1(\partial V) \\ & \begin{bmatrix} -1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \end{array}$$

因此:

$$((k_{\hat{M}}^{-1} \circ f_{\hat{M}} \circ k_{\hat{M}})|_{S^1\times\partial F})_* = \pm\begin{bmatrix} 1 & -2x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

我们再次使用 [4]的命题10.6，得到某个 $h \in Diff(S^1 \times \partial D)$，使得 t:

$$g = h^{-1} \circ ((k_V|_{S^1\times\partial D})^{-1} \circ (d^{-1} \circ f_{\hat{M}}|_{\partial\hat{M}} \circ d) \circ (k_V|_{S^1\times\partial D})) \circ h$$

其中 $g(u,\ v) = (u^{\pm1},\ v^{\mp1})$。

再次，我们可以假 设 $h \in Diff^+(S^1 \times \partial D)$，并且它同伦于恒等映射或其相反映射，方式简单 e
计算和组合 合并一个 $refl_{1,\ 0}$ 若为反向定向。

因此现在 $(k_V|_{S^1\times\partial D})^{-1} \circ (d^{-1} \circ f_{\hat{}M}|_{\partial\hat{}M} \circ d) \circ (k_V|_{S^1\times\partial D})$ 共轭于 $refl_{1,\ 0}$，所用的共轭映射同伦于正或负恒等映射。$(k_V|_{S^1\times\partial D})^{-1} \circ refl_{1,\ 0} \circ (k_V|_{S^1\times\partial D})$ 显然是保纤维的（纤维由 $k_V(S^1 \times u)$ 给出），可以通过 $g(u,\ \rho v) = (u^{\pm1},\ \rho v^{\mp1})$ 延拓到实心环面内。这仍然是保纤维的对合。

再一次，根据 $d \circ h$ 进行填充得到的塞弗特流形 M' 与 M 同构，通过一个保纤维的 ˆ 微分同胚 φ:
$M \to M'$ 当限制在 M 上时，该微分同胚是恒等映射。
f 可扩展为 M' 上的保纤维对合 f'，然后将 $f = \varphi \circ f' \circ \varphi^{-1}$ 限制到 $\hat{}M$ 上时，它是 f，并且仍然是保纤维对合。

□

6 保纤维且反向定向对合 Ψ的构造

本节介绍一类保纤维且反向定向的对合 Ψ的构造。所有这些对合在底空间上都是恒等映射。

6.1 V的构造$(2,2;-1)$

我们首先考虑 $V(2,2;-1)$的构造。其构造方法是取一个具有乘积结构k_V的实心环面 V: $S^1 \times D \to V$，并赋予其由纤维 $k_V(S^1 \times \{x\})$给出的平凡纤维化，然后挖去三个内部纤维的纤维化环面邻域，并根据塞弗特不变量(2,1)、(2, 1)和(1, −1)粘入三个实心环面。

ˆ更准确地说，设 V为 V，其中三个内部纤维的纤维化环面邻域已被挖去，并具有纤维化乘积结构 $k_{\hat{V}}$: $S^1 \times (D \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)) \to \hat{}V$；设内环面边界分别记为 T_1、T_2和 T_3，外边界记为 T。那么，若 $X = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 是三个实心环面的不交并，则存在粘合映射d: $\partial X \to \partial\hat{}V$，以及 X 上的某个乘积结构 k_X: $S^1 \times (D_1 \cup D_2 \cup D_3) \to X$，使得限制后的正向定向乘积结构$k_{\partial\hat{V}_i}$: $S^1 \times S^1 \to \partial\hat{}V_i$ 和 k_{T_i}: $S^1 \times S^1 \to T_i$ 满足以下条件:

$$(k_{T_i}^{-1} \circ d|_{\partial V_i} \circ k_{\partial V_i})(u,v) = (v, uv^2)$$

对于 $i = 1,\ 2$

$$(k_{T_3}^{-1} \circ d|_{\partial V_3} \circ k_{\partial V_3})(u,v) = (u^{-1}v^{-1}, v)$$

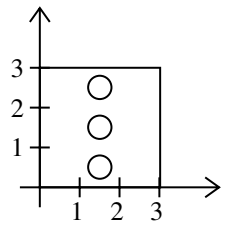


图 1: $3I \times 3I$ 个无 $3I \times 3I$ 的三个圆盘

对于 $i = 3$

请注意，这个 $V(2,\ 2;\ -1)$的边界环面仍然具有受限的正定向纤维化乘积结构k_T: $S^1 \times S^1 \to T$。

6.2 $M = (g,\ o_1|(2,\ 1).....,\ (2,\ 1),\ (1,\ -\frac{n}{2}))$的构造

由此可知，将其视为 $M\ =\hat{}\ (g,\ o_1|(2,\ 1).....,\ (2,\ 1),\ (1,\ -1).....,\ (1,\ -1))$，即可得到 $M\ =(g,\ o_1|(2,\ 1)....,\ (2,\ 1),\ (1,\ -\frac{n}{2}))$；也就是说，进行 $n(2,\ 1)$次填充和 $\frac{n}{2}(1,\ -1)$次填充。然后取带有纤维化乘积结构 $k\hat{}_M$的 M: $S^1 \times F \to \hat{}M$，以及带有填充的亏格 g曲面 F，并按照平凡填充的方式，用$V(2,\ 2;-1)$填充每个边界环面。

也就是说，对于一个带有受限的正定向纤维化乘积结构 $k_{(\partial\ \hat{}M)_i}$ 的边界分支 $(\partial\ \hat{}M)_i$，我们可以用某个 d: $T \to (\partial\hat{}M)_i$ 进行填充，使得:

$$(k^{-1}_{(\partial \hat{M})_i} \circ d \circ k_T)(u, v) = (u, v)$$

6.3 保纤维且反向定向的对合的构造

我们选取一个保纤维且反向定向的对合 $\psi\hat{}_M \in Diff(\hat{}M)$，定义如下:

$$(k^{-1}_{\hat{M}} \circ \psi_{\hat{M}} \circ k_{\hat{M}})(u, x) = (u^{-1}, x)$$

6.4 $V(2, 2; -1)$ 上的保纤维且反向定向对合

为方便起见，我们用 $S^1 \times ((3I \times 3I) \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3))$ 代替 $S^1 \times (D \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3))$；也就是说，$\hat{}V$ 上的乘积结构现在为 $k_{\hat{V}}$: $S^1 \times ((3I \times 3I)) \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)) \to \hat{}V$。我们定义 $\psi_{\hat{V}}$ 如下:

$$k^{-1}_{\hat{V}} \circ \psi_{\hat{V}} \circ k_{\hat{V}}(u, x, 1) = (u^{-1}e^{-2\pi ix}, x, 1)$$
$$k^{-1}_{\hat{V}} \circ \psi_{\hat{V}} \circ k_{\hat{V}}(u, x, 2) = (u^{-1}e^{2\pi ix}, x, 2)$$

然后:

$$k^{-1}_{\hat{V}} \circ \psi_{\hat{V}} \circ k_{\hat{V}}(u, x, y) = (u^{-1}, x, y)$$

$\hat{}$ 如果 $x = 0,1$ 或 $y = 0,1$。也就是说，在 V 的边界上。

然后，通过向每个被移除圆盘的中心向内作锥化，我们看到，按照乘积结构所给出的框架，在同调意义下有:

$$((k^{-1}_{\hat{V}} \circ \psi_{\hat{V}} \circ k_{\hat{V}})|_{\partial D_1})* = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$((k^{-1}_{\hat{V}} \circ \psi_{\hat{V}} \circ k_{\hat{V}})|_{\partial D_2})* = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$((k_{\hat{V}}^{-1} \circ \psi_{\hat{V}} \circ k_{\hat{V}})|_{\partial D_3})* = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，根据命题5.1和命题5.2，我们可以延拓穿过填充部分。

请注意，实际上可以将此映射视为先反转纤维的定向，然后沿着环带 $S^1 \times I$ 进行德恩扭转；区间 I 如下图中的粗线所示:

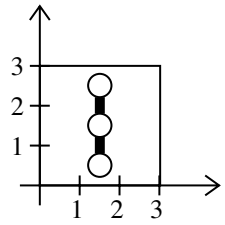


图 2：德恩扭转环带

6.5 最终对合

我们现在已经描述了 ˆM 和 V(2,2; -1) 上的对合。根据平凡粘合，这些对合在边界上相互吻合。

6.6 关于 Ψ的备注

请注意，在给定 ψ的构造中，需要对乘积结构作出选择，但重要的是将ˆ分解为 M和一组 V(2，2； -1)s。例如，给定四条二阶奇异纤维，有两种可能的配对方式。不过，我们将证明， Ψ 实际上是由保纤维微分同胚作用下的一个共轭类，如命题7.2所述。

6.7 命题5.1和命题5.2的推论

推论6.1。 **</style}假设是(2**，2； -1) 的一个保纤维且反向定向对合，它对应于某个边界乘积结构 k： $S^1 \times S^1 \to \partial V$。那么， f在同调意义下保持乘积结构。

证明。 我们应用前面的两个命题。取 F 为一个圆盘，并去掉三个圆盘 D 、 D_1、 D_2和 D_3 。然后，在同调意义下，分别取代表元 α、 α_1、α_2和 α_3 作为这些圆盘边界的代表元，并取 t 作为纤维的代表元。

根据 (1，2)、(1，2) 和 (-1，1) 的填充应用上述命题后，要么 f 保留纤维的定向，并且:

$$f_*(\alpha) = f_*(\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\alpha_2^{-1}) = f_*(\alpha_1^{-1})f_*(\alpha_2^{-1})f_*(\alpha_3^{-1}) = \alpha_1 t \alpha_2 t \alpha_3 t^{-2} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha^{-1}$$

要么 f 反转纤维的定向，并且:

$$f_*(\alpha) = f_*(\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\alpha_2^{-1}) = f_*(\alpha_1^{-1})f_*(\alpha_2^{-1})f_*(\alpha_3^{-1}) = \alpha_1^{-1}t^{-1}\alpha_2^{-1}t^{-1}\alpha_3^{-1}t^2 = \alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1} = \alpha$$

在两种情况下， f 在同调意义下保留乘积结构。

□

7 定理的证明

我们首先证明，所有 Ψ 都包含所有在底空间上为恒等映射的反向定向保纤维对合:

命题 **7.1.** 设 $\psi \in Diff_-^{fp}(M)$ 是一个对合，并且在底空间上是恒等映射。那么 $\psi \in$ Ψ.

证明。 我们任意地将 M 分成 $\hat{}M \cong S^1 \times F$ 和一组 $V(2,\ 2:\ -1)$。

根据推论4.3，乘积结构 $k_{\hat{}M}:\ S^1 \times F \times \hat{}M$ 在边界上同调意义下保持不变。因此，不失一般性，我们可以假设它在边界上保持不变，并且在内部也保持不变（因为 $\hat{}$ 乘积结构是唯一的） M，如下所示：

$$(k_{\hat{M}}^{-1} \circ \psi|_{\hat{M}} \circ k_{\hat{M}})(u, x) = (u^{-1}, x)$$

这满足 7.3。

现在取一个 $V(2, 2, ; -1)$，并考虑底空间中下图灰色所示的环路 σ：

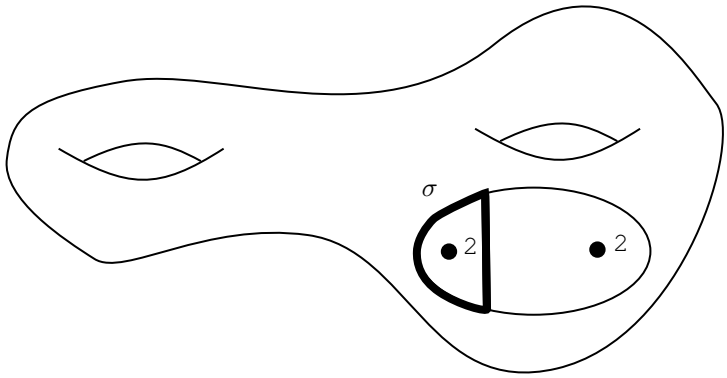


图3：底空间中的环路

根据为 $V(2,2;\ -1)$ 给出的乘积结构，并应用命题 4.1 ψ，在 $S^1 \times \sigma$ 上的作用在同调意义下为：

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

已知在边界上 σ 的部分， ψ 的作用为（$u,\ x$） $\mapsto$ （$u^{-1},\ x$），那么在其余部分（将其参数化为单位区间；定向由 V 的边界上的正定向确定——对于像而言，方向向下） I，必定有（$u,\ t$） $\mapsto$ （$u^{-1}e^{-2\pi it},\ t$）。

□

命题7.2. Ψ 在保纤维微分同胚的共轭作用下是一个共轭类 *s.*

证明。 给定 $\psi \in \Psi$，注意对于保纤维微分同胚 g， $g^{-1} \circ \psi \circ g$ 是保纤维的、反定向的对合，并且在底空间上是恒等映射。因此由命题7.1， $g^{-1} \circ \psi \circ g \in \Psi$。

这就证明了 $[\psi] \subset \Psi$。

要完整证明 $[\psi] = \Psi$，我们只需证明：给定 $\psi_1,\ \psi_2 \in \Psi$，存在一个保纤维微分同胚 g 使得 $\psi_1 = g^{-1} \circ \psi_2 \circ g$。

鉴于 ψ_1 和 ψ_2 在任意给定的 $V(2、2; -1)$ 上相等，我们根据 ψ_1 移除所有 $V(2、2;\ -1)$，从而构造出 $\hat{}\,M_1$；类似地，我们根据 ψ_2 移除所有 $V(2、2; -1)$，构造出 $\hat{}\,M_2$。于是我们得到乘积结构 $k_{\hat{}M_1}:\ S^1 \times F \to \hat{}\,M_1$ 和 $k_{\hat{}M_2}:\ S^1 \times F \to \hat{}M_2$

$\hat{}\,\hat{}$ 确实存在一个保纤维且保持定向的微分同胚 $\hat{}g:\ M_1 \to M_2$，使得 $k^{-1}{}_{\hat{}M_2} \circ \hat{}g \circ k_{\hat{}M_1}$ 是一个乘积映射。由于按照 $k_{\hat{}M_1}$ 和 $k_{\hat{}M_2}$所诱导的乘积结构，它在同调意义下是恒等映射，因此可以将其延拓到 $V(2,2;\ -1)$s 上。 □

现在我们来证明主要结果：

定理 7.3. 设 M 是一个闭、紧致且可定向的 *Seifert* 3维流形，它以可定向底空间为底纤维化，且对于某个曲面 S，并非 $S^1 \times S$。那么，所有保纤维且反向定向的对合都可以表示为 $\psi \circ g$，其中 g 是保纤维且保持定向的对合，且 $\psi \in \Psi$。

ˆ证明。 取 f，它是一个保纤维并反向定向的对合。我们任意将其分成 M 以及一组 $V(2,\ 2;\ -1)$。通过选取乘积结构 $k_{\hat{M}}: S^1 \times F \to \hat{M}$，我们可以将 $f|_{\hat{M}}$ 表示为：

$$(k_{\hat{M}}^{-1} \circ f|_{\hat{M}} \circ k_{\hat{M}})(u,x) = (f_1(u,x), f_2(x))$$

ˆ 接着，我们先在 M 上定义 g，如下：

$$(k_{\hat{M}}^{-1} \circ g|_{\hat{M}} \circ k_{\hat{M}})(u,x) = (u^{\epsilon}, f_2(x))$$

此处，若保持纤维定向，则为 $\epsilon = 1$；若反转纤维定向，则为 $\epsilon = -1$。

首先注意到 $f|_{\hat{M}} \circ g|_{\hat{M}}$ 在底空间上是恒等映射，我们证明它是一个对合。

首先，

$$(k_{\hat{M}}^{-1} \circ f|_{\hat{M}} \circ g|_{\hat{M}} \circ k_{\hat{M}})(u,x) = (f_1(u^{\epsilon}, f_2(x)), x)$$

然后：

$$(k_{\hat{M}}^{-1} \circ (f|_{\hat{M}} \circ g|_{\hat{M}})^2 \circ k_{\hat{M}})(u,x) = (f_1(f_1(u^{\epsilon}, f_2(x)), x)^{\epsilon}, x) \tag{1}$$

但我们有：

$$(u^{\epsilon}, f_2(x)) = (k_{\hat{M}}^{-1} \circ f|_{\hat{M}}^2 \circ k_{\hat{M}})(u^{\epsilon}, f_2(x)) = (f_1(f_1(u^{\epsilon}, f_2(x)), x), f_2(x))$$

因此：

$$f_1(f_1(u^{\epsilon}, f_2(x)), x)^{\epsilon} = (u^{\epsilon})^{\epsilon} = u$$

因此，在方程（1）中，我们有：

$$(k_{\hat{M}}^{-1} \circ (f|_{\hat{M}} \circ g|_{\hat{M}})^2 \circ k_{\hat{M}})(u,x) = (u,x) \tag{2}$$

也就是说，$f|_{\hat{M}} \circ g|_{\hat{M}}$ 是一个对合。

当然，我们可以根据命题 4.1 和命题 4.2，将 $g|_{\hat{M}}$ 延拓到 $V(2,2:\ -1)$s 上，使其成为一个对合。因此，$f|_{\hat{M}} \circ g|_{\hat{M}}$ 也可以延拓为一个对合，并且在底空间上是恒等映射。

根据命题 9.1，$f \circ g = \psi$ 对于某个 $\psi \in \Psi$ 和 $f = \psi \circ g$。

□

我们在此陈述以下引理：

引理 7.4。 设 $g \in Diff^{fp}(M)$ 是一个对合。则对于给定的 $\psi \in \Psi$，$g \circ \psi$ 是一个对合，当且仅当 g 与 ψ 交换。

证明。 这可由以下结论推出：

$$(g \circ \psi)^2 = id \iff g \circ \psi = (g \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ g^{-1} = \psi \circ g$$

□

我们使用这个引理和主要定理 9.2 来证明：

推论 7.5. 不存在一种保纤维且反向定向的对合，它保持某条纤维不变，并且在底空间上保持定向。

证明. 假设存在这样的 f。那么根据定理 9.2， $f = g \circ \psi$ 对于某个保纤维且保持定向的对合 g 和 $\psi \in \Psi$。

我们证明了 g 和 ψ 不能交换，因此根据引理 9.3， f 的存在性与之矛盾。
我们首先注意到，在底空间上，可以假设得到如下图像。在这里，第一个圆盘经由 g 映射到第二个圆盘，使得 I_2 位于第一个圆盘之外。若非如此，我们可以用适当的保纤维映射对 f 进行共轭，使其满足这一条件：

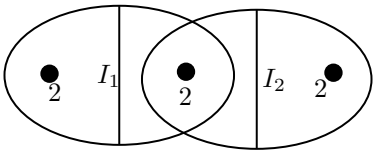


图 4：底空间

其次，由于 [1] 和定理 1.1， g 是一个扩展乘积对合——它固定一条纤维，因此该纤维的轨道数为 1。因此，我们可以假设它在 I_1 和 I_2 上的作用为乘积作用。
基于此，我们在 $k_1 : \ S^1 \times I \to S^1 \times I_1$ 和 $k_2 : \ S^1 \times I \to S^1 \times I_2$ 上建立乘积结构。
因此 $(k_2^{-1} \circ g|_{I_1} \circ k_1)(u,t) = (u^\epsilon, g_2(t))$，并且：

$$(k_2^{-1} \circ (g \circ \psi)|_{I_1} \circ k_1)(u,t) = (k_2^{-1} \circ g|_{I_1} \circ k_1^{-1}) \circ (k_1 \circ \psi|_{I_1} \circ k_1)(u,t) = (k_2^{-1} \circ g|_{I_1} \circ k_1^{-1})(u^{-1}e^{-2\pi it}, t) = (u^{-\epsilon}e^{-2\pi\epsilon it}, g_2(t))$$

另一方面：

$$(k_2^{-1} \circ (\psi \circ g)|_{I_1} \circ k_1)(u,t) = (k_2^{-1} \circ \psi|_{I_2} \circ k_2^{-1}) \circ (k_2 \circ g|_{I_1} \circ k_1)(u,t) = (k_2^{-1} \circ \psi|_{I_2} \circ k_2^{-1})(u^\epsilon, g_2(t)) = (u^{-\epsilon}, g_2(t)$$

显然，这些并不相等。

□

请注意，鉴于没有自由群作用是可容许的，存在一个固定纤维，且障碍条件总是成立。

8 非可定向底空间

我们再次引用 [3]:
定理 8.1. 设 M 是一个可定向塞弗特纤维化流形，它纤维化于一个轨形 B 之上，该轨形的底空间 $\tilde{}$ 不可定向，并且 $p : \ M \to M$ 是可定向底空间双重覆盖。设覆盖变换为 $\tau : \ \tilde{M} \to \tilde{M}$。那么 $Diff_+^{fp}(M)$ 与 $Cent_+^{fop}(\tau)$ 之间存在同构。
我们给出以下推论：
推论 8.2. 设 M 是一个可定向塞弗特纤维化流形，它纤维化于一个轨形 B 之上，该轨形的底空间 $\tilde{}$ 不可定向，并且 $p : \ M \to M$ 是可定向底空间双重覆盖。设覆盖变换为 $\tau : \ \tilde{M} \to \tilde{M}$。那么 $Diff_-^{fp}(M)$ 与 $Cent_-^{for}(\tau)$ 之间存在同构。

证明。 首先注意，我们可以取 $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi} \subset Diff_-^{fp}(\tilde{M})$，且 $\tilde{\psi}$ 与覆盖变换 τ 交换。关于这一点，请参阅 [3]。
然后我们可以定义 $\psi \in Diff_-^{fp}(M)$，其中带有 $\hat{} \ \psi \circ p = p \circ \psi$。
那么 ψ 也将是一个在底空间上为恒等映射的反向定向对合 .
已知 $f \in Diff_-^{fp}(M)$，我们有 $f \circ \psi \in Diff_+^{fp}(M)$。因此，根据定理，存在 $\tilde{g} \in Cent_+^{fop}(\tau)$，使得：
$p \circ \tilde{g} = f \circ \psi \circ p$。
现在， $\tilde{g} \circ \tilde{\psi} \in Cent_-^{for}(\tau)$，如 $\tilde{g} \circ \tilde{\psi} \circ \tau = \tilde{g} \circ \tau \circ \tilde{\psi} = \tau \circ \tilde{g} \circ \tilde{\psi}$ 所示。

因此，令 $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \tilde{\psi} \in Cent^{for}_{-}(\tau)$，我们得到：
$\tilde{} \quad \tilde{} \quad \tilde{}p \circ f = (p \circ \tilde{g})$
$\circ \psi = f \circ \psi \circ p \circ \psi = f \circ \psi \circ \psi \circ p = f \circ p$。这就建立了该同构。

□

9 示例

最后，我们以一个具体的可容许流形作为例子。取欧几里得流形 $M \quad = (0, o_1 | (2,1), (2,1), (2,1), (2,1), (1,-2))$。

我们为这个流形任取一个 $\psi \in \Psi$。根据定理 7.3，我们知道所有反向定向且保纤维的对合都具有 $\psi \circ g$ 的形式，而保持定向且保纤维的对合则具有 g 的形式。
根据 [1], 的工作，我们知道任何 g 都是扩展乘积对合。在这种情况下，我们可以将其分解为一个保持定向的乘积对合 $\hat{}g(u,x) = (g_1(u)\ g_2(x))$，作用于 $S^1 \times (S^1 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4))$ 上，并将其延拓至德恩填充部分。

然后，我们可以用 [4] 来刻画两种情况下的 $\hat{}g$：

9.1 保纤维定向

我们可以假设 $g_1(u) = u$（如果不是，则调整乘积结构），并根据 [?]，可知 g_2 就是 $spit_{0,\ 0}$（限制在 $S^1 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4)$ 上）。
注意，限制之后，$spit_{0,\ 0}$ 要么不固定任何边界分支，要么固定两个边界分支。因此，在共轭意义下，有两种可能。

9.2 反转纤维定向

我们可以假设 $g_1(u) = u^{-1}$，然后根据 [4] g_2，限制在 $S^1 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4)$ 上时，它要么是 $refl_{0,\ 0}$，要么是 $anti_{0,\ 0}$。
对于 $refl$ 和 $anti_{0,\ 0}$，同样，边界分支要么一个也不固定，要么有两个固定；每种情况各有两种可能，总计四种。

总而言之，我们看到，在共轭意义下，保纤维且反向定向的对合只有六种可能。

参考文献

[1] Benjamin Peet. 完全可定向塞弗特流形上的有限保纤维且保持定向的群作用。载于*Annales Mathematicae Silesianae*，第 33 卷，第 235–265 页。De Gruyter，2019。[2] Benjamin Peet. 椭圆型三流形上的有限保纤维群作用。*Kyungpook Mathematical Journal*，62(2):363–388，2022。[3] Benjamin Peet. 不可定向基空间上可定向塞弗特流形的有限保纤维且保持定向的群作用。*JP Journal of Geometry and Topology*，23(1):45–68，2019。[4] Daniel Dugger. 曲面上的对合。*Journal of Homotopy and Related Structures*，14(4):919–992，2019。[5] H. Seifert. 三维纤维化空间的拓扑学。*Acta Mathematica*，60(1):147–238，1933。[6] J. M. Lee. 光滑流形。载于*Introduction to Smooth Manifolds*，第 1–29 页。Springer，2003。[7] P. Scott. 三流形的几何结构。*Bulletin of theLondon Mathematical Society*，15(5):401–487，1983。[8] Alan Hatcher. 三流形拓扑学笔记。未发表，康奈尔大学，2000。[9] John Stillwell. 经典拓扑学与组合群论，第 72 卷。Springer Science & Business Media，2012。