arXiv:2601.13471v1 [math.SP] 19 Jan 2026

量子波导中的定向弹道输运

Adam Black、David Damanik、Peter Kuchment、Tal Malinovitch 和 Giorgio Young

Abstract. 我们研究定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的薛定谔算子的输运性质，其中的势在某些方向上周期，而在其他方向上具有紧支撑。已知此类系统会产生表面态，它们在势的支撑附近受到弱束缚。我们证明，一类自然的表面态表现出定向弹道输运，其特点是在周期方向上发生弹道输运，而在其他方向上则没有。为证明这一点，我们发展了一种能够刻画表面态解析变化的 Floquet 理论。核心思路是借助狄利克雷-诺伊曼映射，将表面态的特征值问题重新表述为 Fredholm 问题。

1. Introduction

系数仅在某些坐标方向上周期的椭圆算子，自然地出现在许多物理情境中，它们可能用于描述波导。这类系统颇受关注，因为它们能够支持仅沿某些方向传播的导模，不同于通常会各向同性地扩散的波。尽管关于完全周期椭圆算子的研究文献相当丰富，但对部分周期算子的了解却少得多；关于一些重要参考文献，请读者参阅 [22] 第 9.2 节。以往的大多数研究似乎都集中于这些算子的谱性质，却未清楚描述其相关动力学，除谱类型所经典蕴含的内容外（如下文所述）。由于周期介质中的波输运已相对为人熟知，因此自然会问：在波导情境中，是否也存在相应的理论?

本文研究定义在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的薛定谔算子，其势在前 n个坐标方向上具有紧支撑，并在最后 m个方向上呈周期性。这类算子可能产生表面态 [4,8], ，可将其视为局域在势的支撑附近的布洛赫波。Asch-Knauf 的一项著名结果 [2] 表明，定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的薛定谔方程的解在周期势完全周期时会发生弹道输运。因此，人们预期表面态在薛定谔演化下也会呈弹道演化，但仅沿周期方向发生。这种现象在下文称为定向弹道输运，正是本文研究的对象。

完全周期算子的输运性质是其 Floquet 理论的结果。因此，为了研究部分周期算子，我们发展了一套解析 Floquet 理论，与经典的完全周期理论相呼应。在后者的设定中，Floquet 变换将 $\mathbb{R}^d$ 上的周期椭圆算子共轭为一族解析变化的直积分

本材料基于美国国家科学基金会2503339号奖项资助的研究成果。D. D. 部分获得了美国国家科学基金会DMS–2349919号资助。P.K. 感谢 Arthur George and Mary Emolene Owenendowment 提供部分资助。G.Y. 感谢美国国家科学基金会通过DMS–2303363号资助提供的支持。

算子，每个算子都作用于 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 上，其中 $\mathbb{T}^d$ 是 d 维环面。由于环面是紧的， $H(k)$ 构成 Fredholm 算子的解析族，因此可以利用 Fredholm 行列式理论，以解析方式参数化它们的特征向量 [37]。若 H 仅具有部分周期性，仍然存在一个（部分）Floquet 变换，但纤维算子 $H(k)$ 作用于圆柱体上，而圆柱体不再是紧的，因此算子 $H(k)$ 不是 Fredholm 算子。部分周期设定中的主要挑战在于这种紧性缺失，它使表面态的解析变化比布洛赫波的变化更为微妙。具体而言，每个纤维算子的本质谱中都可能嵌有特征值，而这些特征值随 k 的变化则是一个棘手的问题。需要指出的是，这一问题仅存在于开放或“泄漏型”波导设定中，因为该设定在横向上没有边界条件。前述许多关于波导的研究将整个问题置于带边界条件的圆柱体或平板上，从而避开了这些考量。

针对开放波导情形的研究，例如 [12,13,17],，尝试在对势采用不同衰减假设的条件下，排除特征值或奇异连续谱存在的可能性。尽管可以通过 RAGE定理 $[1, 30]$, 从这些结果推导出一个较弱的动力学推论，但这并不令人满意，因为它无法提供有关表面态传播的任何定量信息，更无法解释其方向性。这些文献采用的策略是研究预解算子在 k 中的变化，似乎对表面态的解析控制过弱，因而不足以证明弹道输运；更详尽的讨论见第1.2节。

此外，谈及动力学结果，我们还提及此前的工作 [3] ，其中证明了 $\mathbb{Z}^2$ 上的定向弹道输运结果。正如我们在第1.2节中所解释的，那里的方法不适用于本文所考虑的高维连续情形。

为了发展足以证明弹道输运的解析 Floquet理论，我们转而借助椭圆边值问题理论中的一种工具：狄利克雷到诺伊曼映射。这使我们能够将关于 $H(k)$ 的特征值问题重新表述为紧区域上的 Fredholm问题。Fliss [15]此前的工作中，曾对 $\mathbb{R}^2$ 上一个相关的谱问题（对应于下文的 $n = m = 1$ ）进行过类似的重新表述。该研究着重于为纤维算子的本质谱之外的特征值确立这种等价关系，旨在服务于数值应用。与之相反，我们的工作考察所有能量。

1.1. 主要结果。 对于 $n \geq 2$、 $m \geq 1$, 通过 x 标记 $\mathbb{R}^{n+m}$ 的前 n 个坐标，通过 y 标记最后的 m 个坐标。令 B_1 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球，并令 $\mathbf{e}_1$、..... $\mathbf{e}_{n+m}$ 为标准基向量。

我们考虑满足以下条件的实值势 $V(x, y) \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$:

$$\operatorname{supp} V(x,y) \subset B_1 \times \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

and

$$V((x,y)+\mathbf{e}_i) = V(x,y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m},\, n+1 \leq i \leq m+n. \tag{1.2}$$

记 H 为与 V 相关联的 $L^2(\mathbb{R}^{n+m})$ 上的薛定谔算子，即,

$$H = H_0 + V,$$
$$H_0 = -\Delta,$$

其为自伴算子，区域为 Sobolev空间 $H^2(\mathbb{R}^{n+m})$。

表面态空间可用部分 Floquet 变换 U 表示，该变换将在第 2.1 节中精确定义。此变换将 H 共轭为布里渊区 $\mathcal{B} = [0, 2\pi)^m$ 上的直积分，因此

$$UHU^* = (2\pi)^{-m} \int_{\mathcal{B}}^{\oplus} H(k)\, dk.$$

此处，每个 $H(k)$ 都是作用于 $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$ 上的自伴算子。就此分解而言，表面态空间表示为:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{sur}} := U^* \left((2\pi)^{-m} \int_{\mathcal{B}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(k)\, dk \right),$$

其中， $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(k)$ 表示 $H(k)$ 的纯点子空间。

对于算子 A，我们用 $A_H(t)$ 表示海森堡演化算子 $e^{itH}Ae^{-itH}$。令 X 和 Y 为部分位置算子

$$X\psi(x,y) = (x_1, \ldots, x_n)\psi(x,y),\ Y\psi(x,y) = (y_1, \ldots, y_m)\psi(x,y),$$

其 自然区域，并令 $Q = (X, Y)$。我们作出如下定义:

定义 1.1. 我们称 $\psi \in D(Q)$ 在 H 的演化下呈现定向弹道输运，如果

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} X_H(t)\psi = 0$$

and

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} Y_H(t)\psi$$

存在且非零。

我们的主要定理如下:

定理 1.2. 设 H 是势 V 满足(1.1) 和(1.2)的薛定谔算子。那么，每个态 $\psi \in D(Q) \cap H^2(\mathbb{R}^{n+m}) \cap \mathcal{H}_{\mathrm{sur}} \setminus \{0\}$ 在 H的演化下均呈现定向弹道输运。

根据 Asch-Knauf [2], 的上述研究，周期薛定谔算子的弹道输运是布洛赫态关于准动量 k解析变化的结果。类似地，在我们的情形中，定理 1.2 是我们为部分周期算子证明的解析性结果的推论。事实上，证明下述定理是本文的主要工作。

定理 1.3. 设 H 如定理 *1.2* 中所述。那么，存在一列可数个开集$U_l \subset \mathcal{B}$、函数 $\lambda_{l,\ i}$: $U_l \to \mathbb{R}$以及有限秩投影算子 $k \in \mathcal{B} \mapsto \pi_{l,\ i}(k)$: $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m) \to L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$ 使得

(1) 我们可以写成

$$UH|_{\mathcal{H}_{\mathrm{sur}}}U^* = \sum_{l,i} \int_{U_l}^{\oplus} \lambda_{l,i}(k)\pi_{l,i}(k)\, dk.$$

(2) 每个 $\lambda_{l,\,i}$ 和 $\pi_{l,\,i}$ 作为 k 的函数，在一个测度为零的闭集的补空间上都是解析的。
(3) 使得 $\nabla_k \lambda_{l,\,i}\,(k) \;= 0$ 成立的 k 的集合测度为零。

请注意，若表面子空间为空，则该定理可能不成立。不过，构造满足 (1.1) 和 (1.2) 并能诱发表面态的势的例子很容易，例如令 V 足够负即可。

除了输运之外，完全周期算子的解析结构也是其谱性质和动力学性质的基础，并构成了其理论丰富性的主要来源。因此，该定理可能有助于后续对部分周期算子的分析。例如，定理 1.3 可立即推出 Filonov 和 Klopp [13]关于 H 谱类型的一个特殊情形：

推论 1.4。 设 H 如定理 *1.2* 所述，则其谱是纯绝对连续的。

1.2. 相关工作。 关于部分周期算子的大多数既有研究，至少在“开放”情形下，旨在刻画其谱类型。对于在 y 上周期的 $V(x, y)$，Filonov-Klopp [13] 证明，若 V 在 x 上超指数衰减，则 H 具有绝对连续谱；他们后来将这一结果推广到一类相似的麦克斯韦算子[14]。在较弱条件 $|V(x, y)| < C|x|^{-1-\epsilon}$ 下，Filonov [12] 证明了 Schr¨odinger 算子和麦克斯韦算子均不存在特征值。我们还提及 Hoang-Radosz [17], 的一项研究，其中证明了若 $\mathbb{R}^2$ 上的周期势受到周期线缺陷的扰动，则所得的麦克斯韦算子或 Schr¨odinger 算子没有特征值。与其他结果相比，这一结果值得注意，因为它适用于周期背景。在所有这些研究中，基本思路都是在适当的加权索伯列夫空间上，将 $H(k)$ 的预解算子视为关于 k 和能量 E 的解析函数。接着证明预解算子的极点不是常数。由于这些极点也可能对应共振，这种论证似乎不足以确立特征值的解析变化。

关于表面态的动力学，至少在连续情形下，我们所知的相关工作只有 Davies-Simon [8], ，他们证明了表面态满足一种弱形式的禁闭。具体而言，他们的定理 6.1 表明，对于 $n = 1$， $\mathcal{H}_{\mathrm{sur}}$ 可以等价地表征为满足以下条件的态

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{t} \int_{|x|>a} |(e^{-itH}\psi)(x)|^2 \, dx = 0.$$

事实上，根据 [4] ，更一般地已知，仅在 x 方向上集中的势，即使在 y 中不作任何周期性假设，也会生成一个满足类似但更弱的禁闭条件的表面子空间。关于表面态的弹道输运，目前似乎只有我们先前的工作 [3]。我们在那里证明，对于作用于 $\mathbb{Z}^2$ 上的一类类似的 Schr¨odinger 算子，表面态呈现定向弹道输运。与上述定理的证明相比，这一结果要容易得多，因为纤维算子作用于沿一个方向延展的离散圆柱上，因此可以使用传递矩阵。

已有大量文献研究具有连续谱的其他类别薛定谔算子的量子输运现象；我们不打算对此作全面回顾，而是请读者参阅 [6] ，了解概述。这里我们仅指出，证明高维算子的输运似乎是一个难题。

事实上，针对 $\mathbb{Z}^d$ 上短程势的微扰结果也是直到最近才得到的 [7]。除此之外，除了 Asch-Knauf 关于周期算子的经典结果 [2]（以及 Fillman 得到的离散对应结果 [11]）之外，高维情形下其他弹道输运结果似乎仅见于 Karpeshina 等人的工作 [19, 20]。这些工作分别针对 $\mathbb{R}^2$ 上的某些准周期算子和极限周期算子，以及 $\mathbb{R}^d$ 上的一般准周期算子，得到了位置算子阿贝尔平均的弹道输运下界 $d \geq 2$。从这个角度看，我们的定理 1.2 很有意义，因为它为另一类高维薛定谔算子确立了一种强形式的弹道输运。

1.3. 证明概述。狄利克雷-诺伊曼映射（DtN），也称为庞加莱-斯特克洛夫算子，是边值问题理论中的经典对象；例如， [32] 中介绍了其在反问题中的各种应用。给定定义在某个区域（或更一般地说，流形）上的椭圆算子，假设该区域具有光滑边界且给定了适当的边界数据，该算子求解狄利克雷问题，然后将解的法向导数的迹返回到边界上。为了研究 $H(k)$ 的特征值问题，我们将圆柱体 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ 分成两个区域：一个紧内部区域及其补空间。因此，该算子为 $H(k) - E$，其中 $k \in \mathcal{B}$ 和 $E \in \mathbb{C}$满足某些条件，且流形是这两个区域之一。对于某些边界数据，我们分别计算内部区域和外部区域的 DtN，并通过两者之差构造双侧DtN $\Lambda(k, E)$。定理 1.3 证明背后的基本观察是，能量为 E 的 $H(k)$ 的特征函数（的边界迹）与 $\Lambda(k, E)$ 的核之间存在对应关系——至少在适当限制边界数据空间时是如此。这种表述的优点在于，对于 $\mathbb{R}^d$ 中有界区域上的拉普拉斯算子，众所周知，相应的 DtN 是椭圆的 [25, 34]。通常，这是通过层势方法证明的；通过将该方法调整到我们的情形，我们能够证明上述引入的双侧 DtN Λ 也具有这一性质；参见第4节。因此，我们能够将一个非椭圆算子的特征值问题转化为一个 Fredholm[1]问题，尽管该问题对能量和准动量呈非线性依赖。

要精确建立这种对应关系，需要费一番功夫，因为必须谨慎地只选取能够产生无穷远处 H^2 解的边界数据。这是因为可容许数据空间会随 E 和 k的取值而变化，其原因与圆柱体 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$上扭曲拉普拉斯算子 $H_0(k)$ 的谱理论有关。通过对 y 变量作傅里叶模分解，可以将该算子视为作用在 $\mathbb{R}^n$上的一系列拉普拉斯算子之和，每个算子都平移一个依赖于 k 和模 j的值；参见第3节.2。给定某个能量 E，人们便预期，只有对于那些 E 不属于平移拉普拉斯算子谱的模，才能求解无穷远处的边值问题。下文将可容许数据空间记为 $\mathcal{V}(k, E)$；当 $(k, E) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}$ 穿过某些超曲面时，该空间也会随之变化。在这些超曲面上，对应于某些模的谱下确界，相关子空间的描述尤其复杂，下面将对此作出说明。

这些问题源于外部问题，但我们也简要提及一个与内部问题相关的困难，即狄利克雷谱。事实上，对于每个 $k \in \mathcal{B}$ ，只有当能量 E 位于 $B_R \times \mathbb{T}^m$ 上 $H(k)$ 的狄利克雷谱之外时，内部狄利克雷问题才有唯一解。这个集合的出现完全

[1]实际上，由于数据受到限制， Λ 仅为左半弗雷德霍姆，但这一较弱的性质已经足够。

是人为的，因为它取决于用于定义紧内部区域的截断半径 R。因此，不出所料，我们可以改变这一参数，以确保任意给定的E 对于某个开集中的所有 k ，都不属于 $H(k)$ 的谱。这在命题 5.4 中得到了证明。

有了 DtN 的 Fredholm 性质，便可利用解析簇理论得到表面态的解析变化。这类论证源于 Wilcox [37] 的工作，后来 Kuchment 和其他作者从多个方向对其进行了拓展；参见 [21] 和 [22]。为完成定理 1.3 的证明，还需证明函数 $\lambda_{l,i}$ 几乎处处非恒定。完全周期情形中的类似结论，可由 Thomas [36], 提出的一种论证得到；该论证已成为大多数证明周期算子谱连续性的基础。通常，这需要在将准动量 k复化、使其虚部变得很大时，获得 $H_0(k)$ 的预解算子下界。本文同样在第 5.2 节通过分析自由 DtN（即 $V \equiv 0$）给出类似论证。只有在本节中，我们才使用以贝塞尔函数表示的该算子的显式形式。

最后，根据定理 1.3，定向弹道输运结果定理 1.2 可由我们先前工作 [3] 中的类似推论得到。证明的这一部分很容易推广到本文所研究的情形，因此我们仅给出证明概要。

文章概要。 本文的组织如下：在第2节中，我们定义 Floquet变换，并引入分析中所使用的各种空间。在第3节中，我们构造 Dirichlet-to-Neumann算子，并建立其核与特征函数之间的对应关系。在第4节中，我们证明 Dirichlet-to-Neumann算子是左半弗雷德霍姆的。在第5节中，我们给出主要定理的证明。最后，在附录 A 中，我们汇总关于 $\mathbb{R}^n$ 上边值问题的一些结果。

2. Preliminaries

2.1. **Floquet理论**。 令 $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ 表示环面，并令 $H^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$ 表示通常的 Sobolev空间。令 $\mathcal{B} := [0, 2\pi)^m$ 表示布里渊区。对 $f \in L^2(\mathbb{R}^{n+m})$ 和$k \in \mathcal{B}$ ，定义<styles id='12'>部分 Floquet 变换

$$(Uf)(x, y, k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^m} e^{i\langle k, y+j\rangle} f(x, y + j).$$

Floquet变换的标准性质，例如 [22], 第4节中所述的性质，同样可直接推广到部分 Floquet 变换：

命题2.1。 部分 *Floquet* 变换 U 具有以下性质：

(1) U 是一个酉映射

$$U : L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \to (2\pi)^{-m} \int_{\mathcal{B}}^{\oplus} L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)\, dk.$$

(2) 我们有酉等价关系

$$UHU^* = (2\pi)^{-m} \int_{\mathcal{B}}^{\oplus} H(k)\, dk,$$

其中 $H(k)$ 是自伴算子

$$H(k) = H_0(k) + V$$
$$H_0(k) := -\Delta - 2ik \cdot \nabla_y + k^2 \tag{2.1}$$

其区域为 $H^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T})$。

这里我们使用简写 $k^2 = \sum_{j=1}^m k_j^2$。

为后续使用，我们还需要考虑复化布里渊区上的 $H_0(k)$ 和 $H(k)$，

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{k \in \mathbb{C}^m \mid \Re k \in \mathcal{B}\},$$

其中实部是逐项取的。于是，式 (2.1) 中的表达式解析延拓至 $\tilde{\mathcal{B}}$。与完全周期情形一样，对于每个指标 i， $k_i \mapsto H_0(k)$ 和 $k_i \mapsto H(k)$ 分别都是解析族。

2.2. 区域划分与函数空间。我们将空间 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ 划分为两个区域：

$$\Omega_R^- = B_R \times \mathbb{T}^m, \quad \Omega_R^+ = (\overline{B_R})^c \times \mathbb{T}^m, \quad \partial\Omega_R = \partial B_R \times \mathbb{T}^m,$$

对于 B_R 半径为 R 、位于 $\mathbb{R}^n$中的球， $R > 1$。由于我们只需在第5节中改变 R ，因此通常会省略这些集合对 R 的依赖。

我们将 $\Omega^{\pm}$上的 Sobolev空间记为 $H^2(\Omega^{\pm})$，其范数为

$$\|\varphi\|^2_{H^2(\Omega^{\pm})} = \sum_{|\alpha|\le 2} \|\partial^\alpha \varphi\|^2_{L^2(\Omega^{\pm})}.$$

我们还需要 Sobolev空间尺度 $H^s(\partial\Omega)$， $s \ge 0$，其范数通过 Ω ∂上的拉普拉斯算子的谱分解来表示最为方便。为此，首先令

$$\xi_j(y) = e^{i2\pi\langle j,y\rangle}$$

对于任意 $j \in \mathbb{Z}^m$ ，令其为 y 方向上的第 j个傅里叶模。现在回顾一下，单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的拉普拉斯算子有一组完备的标准正交特征函数（球谐函数），通常记为 $Y_{\ell,\ m}(\omega)$，由 $\ell \in \mathbb{N}_0$，$m \in \mathcal{M}_\ell$,[2] 索引，其中 $\mathcal{M}_\ell$ 是某个有限指标集，其大小取决于 n。每个 $Y_{\ell,\ m}$ 对应于特征值 $-\ell(\ell+n-2)$。因此，（经过适当归一化后） $\{Y_{\ell,m}(x/R)\xi_j(y)\}_{\ell\ge 0,\ m\in\mathcal{M}_\ell,\ j\in\mathbb{Z}^m}$构成 $L^2(\partial\Omega)$的标准正交基；对于 $f \in L^2(\partial\Omega)$，我们将 $f_{\ell,\ m,\ j}$ 定义为其关于此基的系数。于是我们定义

$$\|f\|^2_{H^s(\partial\Omega)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}^m} \sum_{\ell\ge 0} \sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} (1 + \ell^2 + \|j\|^2)^s |f_{\ell,m,j}|^2.$$

对于 $j \in \mathbb{Z}^m$，我们还引入闭子空间 $H^s_j(\partial\Omega) \subset H^s(\partial\Omega)$，它由形如 $\psi(x)\xi_j(y)$ 的函数组成，并类似地定义 $H^2_j(\Omega^{\pm})$。我们还令

$$\mathcal{L}_{\ell,j} = \mathrm{span}_{m\in\mathcal{M}_\ell}\{f(r)Y_{\ell,m}(\omega)\xi_j(y)\},$$

它位于 $H^s(\partial\Omega)$ 中，对任意 $s \ge 0$ 成立。下面，我们将需要来自内域与外域的迹以及相应的延拓算子。迹 $T^{\pm}$ 作用于

[2]注意，我们在此使用指标 m，因为这是通用约定，不过不应将其与维数 m混淆。

光滑函数（通过限制），而延拓算子 $\mathrm{Ex}^{\pm}$ 是它们的右逆。下述内容是标准的，参见例如 [33, 第 4] 章。

命题 2.2. 内部和外部迹算子 T^- 和 T^+ 可延拓为有界算子

$$T^{\pm} : H^2(\Omega^{\pm}) \to H^{3/2}(\partial\Omega).$$

此外，它们各自都有一个右逆算子 $\mathrm{Ex}^{\pm}$，该算子是有界算子

$$\mathrm{Ex}^{\pm} : H^{3/2}(\partial\Omega) \to H^2(\Omega^{\pm}).$$

下文中，我们也用 T 表示从 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ 到 $\partial\Omega$ 的迹。

3. Construction of the Dirichlet-to-Neumann map

本节中，我们为大多数对 $(k, E) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}$ 关联一个狄利克雷-诺伊曼映射（DtN），记作 $\Lambda(k, E)$，并证明其核由算子 $H(k)$ 的能量为 E 的特征函数的边界迹构成。为此，我们首先考察算子 $H(k) - E$ 的内部和外部狄利克雷问题的可解性。

3.1. 内部边值问题。 首先，令 $H_{0,D}^-(k, R)$ 为作用于 $L^2(\Omega_R^-)$（内部集合）上的算子$H_0(k)$，其定义域为

$$\mathcal{D}(H_{0,D}^-) = \{u \in H^2(\Omega^-) \mid T^- u = 0\},$$

即采用狄利克雷边界条件。类似地，我们将 $H_D^-(k)$ 定义为作用于同一区域上的算子 $H(k)$。我们省略变量 R，并给出以下基本命题。

命题 3.1. 对于每个 $k \in \mathbb{R}^m$，算子 $H_{0,D}^-(k)$ 和 $H_D^-(k)$ 都是自伴算子，且对任意 $k \in \mathbb{C}^m$ 都是闭算子。此外，它们具有离散谱，且谱仅在无穷远处聚集。

证明。对于 $k \in \mathbb{C}^m$，$H_{0,D}^-(k)$ 是 $H_{0,D}^-(0)$ 的相对有界扰动。因此，根据加藤-雷利希定理，$H_{0,D}^-(k)$ 对所有 $k \in \mathbb{C}^m$ 都是闭算子，并且当 $k \in \mathbb{R}^m$ 时是自伴算子。由于 $H_{0,D}^-(k)$ 根据雷利希-孔德拉绍夫定理具有紧预解式，$H_D^-(k)$ 也具有紧预解式，从而保证其谱是离散的，且仅在无穷远处聚集。□

这使我们能够定义预解算子

$$R_D^-(k, E) = (H_D^-(k) - E)^{-1},$$

作为从 $L^2(\Omega^-)$ 到 $\to H^2(\Omega^-)$ 的有界算子，只要 $E \notin \sigma(H_D^-(k))$ 成立即可。我们用它来给出以下关于内部狄利克雷问题的结果。

命题 3.2. 设 $E \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_D^-(k))$ 对某个 $k \in \tilde{\mathcal{B}}$ 成立。那么对所有 $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$，都存在唯一的 $u \in H^2(\Omega^-)$ 使得

$$\begin{cases} H(k)u = Eu \text{ in } \Omega^- \\ T^- u = f. \end{cases} \tag{3.1}$$

解映射 $f \mapsto u$ 记作 $D^-(k, E)$，从 $H^{3/2}(\partial\Omega) \to H^2(\Omega^-)$ 到有界空间，且可表示为

$$D^-(k, E) = (\mathrm{Id} - R_D^-(k, E)(H^-(k) - E))\,\mathrm{Ex}^- . \tag{3.2}$$

证明。该

$$u = (\mathrm{Id} - R_D^-(k,E)(H(k)-E))\,\mathrm{Ex}^- f$$

求解 (3.1) 很容易验证。唯一性源于这样一个事实：该问题的解

$$\begin{cases} H^-(k)u = Eu \\ T^-u = 0. \end{cases}$$

由 $R_{0}^{-}{}_{,D}(k,E)0 = 0$ 唯一求得，其中 $E \notin \sigma(H_D^-(k))$。其有界性

$$D^- : H^{3/2}(\partial\Omega) \to H^2(\Omega^-)$$

可由表达式 (3.2) 立即得出。 □

3.2. 外部边值问题。接下来，我们转向外部问题，即 Ω^+ 上的问题。外部边值问题的可解性要求边界数据属于 $H^{3/2}(\partial\Omega)$ 的一个子空间，该子空间取决于 k 和 E。为理解这一点，注意到 $H_0(k)$ 在每个子空间 $H_j^2(\Omega^+)$ 上的作用为

$$-\Delta_x + (k+2\pi j)^2. \tag{3.3}$$

事实上，如果令 $H_0^+{}_{,D}(k)$ 为 $H_0(k)$ 在 $L^2(\Omega^+)$ 上、定义域为的 H_0,

$$\mathcal{D}(H_{0,D}^+(k)) = \{u \in H^2(\Omega^+) \mid T^+u = 0\}$$

then

$$\sigma(H_{0,D}^+(k)|_{H_j(\Omega^+)}) = [0,\infty) + (k+2\pi j)^2.$$

这表明，对于任意 k 和 E， $H_0(k)$ 在能量 E处的外部狄利克雷问题只有在数据在那些满足以下条件的 $H_j^{3/2}(\partial\Omega)$中没有分量时才可解：

$$E_j(k) := E - (k+2\pi j)^2$$

属于 $[0,\infty)$。相应地，对于任意 $(k, E) \in \mathcal{B}\times\mathbb{R}$，我们定义 $H^{3/2}(\partial\Omega)$ 的子空间

$$\mathcal{V}_-(k,E) = \bigoplus_{\{j\in\mathbb{Z}^m | E_j(k)<0\}} H_j^{3/2}(\partial\Omega),$$

并令 $\tilde{R}_D^+(k, E)$ 为 $H_0^+{}_{,D}$ 在能量 E处限制在该子空间上的预解算子。与内部狄利克雷预解算子一样， $\tilde{R}_D^+(k, E)$ 是从 $L^2(\Omega^+)$ 到 $\to H^2(\Omega^+)$ 的有界算子。注意，作为 k 和 E 的函数，空间 $\mathcal{V}_-(k, E)$ 在超曲面$E_j(k) = 0$的补空间上保持不变。

˜在第 5.2 节中，我们需要对 k 进行复化，因此对于 $k \in \mathcal{B}$，令

$$\mathcal{V}_-(k,E) = \bigoplus_{\{j\in\mathbb{Z}^m | E_j(\Re k)<0\}} H_j^{3/2}(\partial\Omega),$$

其中实部是逐项取的。注意，按照此定义， $\mathcal{V}(k, E)$ 不会随着 k 取得虚部而改变。在这种情况下，

$$E_j(k) = E_j(\Re k) + (\Im k)^2 - 2i\Im k\cdot(\Re k + 2\pi j),$$

因此，如果最后一项非零， $\tilde{R}_D^+(k, E)$ 仍然是良好定义的。

事实证明，如果 $E_j(k) = 0$，则在$H^2_j(\Omega^+)$ 中外部边值问题的可解性更加微妙，并且至少在低维情形下取决于数据所属的角动量扇区。因此，我们定义

$$\mathcal{V}_0(k,E) := \bigoplus_{\{j\in\mathbb{Z}^m | E_j(k)=0\}} \bigoplus_{\ell\geq \ell_0(m)} \mathcal{L}_{\ell,j},$$

$$\ell_0(n) := \begin{cases} 2 & n=2 \\ 1 & n=3,4 \\ 0 & n\geq 5. \end{cases}$$

此子空间沿着超曲面 $E_j(k) = 0$ 保持不变，至少在任意两个超曲面不相交的区域内如此。

对于给定的 (k, E)，该子空间

$$\mathcal{V}(k,E) := \mathcal{V}_-(k,E) \oplus \mathcal{V}_0(k,E) \tag{3.4}$$

恰好是使外部边值问题可解的数据空间：

命题 3.3。 固定 $E \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \tilde{\mathcal{B}}$。那么，对于 $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$，存在 $u \in H^2(\Omega^+)$，使得

$$\begin{cases} H(k)u = Eu \text{ in } \Omega^+ \\ T^+u = f \end{cases} \tag{3.5}$$

当且仅当 $f \in \mathcal{V}(k, E)$。此外，解存在时是唯一的。解映射 $f \mapsto u$ 记作 $D^+(k, E)$，是从 $\mathcal{V}(k, E)$ 到 $\to H^2(\Omega^+)$ 的有界映射，并且有如下显式表达式

$$\begin{aligned} u(x,y) = &(\mathrm{Id} - \tilde{R}^+_D(k,E)(H(k)-E))\,\mathrm{Ex}^+\,\tilde{f} \\ &+ \sum_{\{j\in\mathbb{Z}^m | E_j(k)=0\}} \sum_{\ell\geq\ell_0} \sum_{m\in\mathcal{M}_l} f_{\ell,m,j} \left(\frac{r}{R}\right)^{2-n-\ell} Y_{\ell,m}(\omega)\xi_j(y), \end{aligned} \tag{3.6}$$

˜对于 f 中 f 在 $\mathcal{V}_-$ 和 $r = |x|$中的分量。

证明需要用到关于 $\mathbb{R}^n$中的外部狄利克雷问题的以下引理。证明见附录 A。

引理 A.1。 设 $f \in H^{3/2}(\partial B_R)$ 由下式给出

$$f = \sum_{\ell\geq 0} \sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m} Y_{\ell,m}.$$

则存在 $u \in H^2(B^c_R)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ T^+u = f \end{cases} \tag{A.1}$$

当且仅当 $f_{\ell,m} = 0$ 对所有 $\ell < \ell_0(n)$均成立。此外，解是唯一的，且由下式给出

$$u(r\omega) = \sum_{\ell\geq\ell_0} \sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m} \left(\frac{r}{R}\right)^{2-n-\ell} Y_{\ell,m}(\omega),$$

对于 $r \in \mathbb{R}^+$、$\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$，并满足

$$\|u\|_{H^2(B^c_R)} \leq C\|f\|_{H^{3/2}(\partial B_R)} \tag{A.2}$$

对于某个维数常数 $C > 0$。

命题 *3.3* 的证明。容易验证，如果 $f \in \mathcal{V}(k,\ E)$，那么按照 (3.6) 定义的 u 是 (3.5) 的一个解；根据引理 A.1 以及命题 3.2 中的论证，它必定是唯一的。事实是，

$$\|u\|_{H^2(\Omega^+)} \leq C\|f\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$$

这是 (A.2) 以及 $\tilde{R}_D^+(k,\ E)$ 的映射性质的结果。

为说明仅当 $f \in \mathcal{V}$ 时才存在解，注意到边值问题 (3.5) 等价于

$$\begin{cases} (-\Delta_x - E_j(k))u_j = 0 \text{ in } B_R^c \subset \mathbb{R}^n \\ T^+ u_j = f_j \end{cases} \tag{3.7}$$

对所有 $j \in \mathbb{Z}^m$ 都成立。根据 Rellich 的一个定理，如果 $E_j(k) \in (0,\ \infty)$，则 (3.7) 的唯一 L^2 解为 0，相关版本见 [25, 引理 9。8] 另一方面，如果 $E_j(k) = 0$，则根据引理 A.1，对于所有 $\ell < \ell_0(n)$，都有 $f_{\ell,\ j,\ m} = 0$ 。由于这些恰好就是 $f \in \mathcal{V}$ 的条件，因此得证。□

3.3. 双侧狄利克雷-诺伊曼映射。

现在我们可以定义双侧狄利克雷-诺伊曼映射。

定义 3.4。设 $\mathcal{S} = \{(k, E) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R} \mid E \in \sigma(H_{0,D}^-(k))\}$。对于任意 $(k, E) \in (B \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}$，我们定义双侧狄利克雷-诺伊曼映射 $\Lambda\colon \mathcal{V}(k, E) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$

$$\begin{aligned} \Lambda(k, E) &:= \Lambda^-(k, E) - \Lambda^+(k, E) \\ \Lambda^\pm(k, E) &:= T^\pm \partial_r D^\pm(k, E). \end{aligned}$$

这里，∂_r 表示关于 x变量的径向导数。

为了证明此映射确实刻画了特征函数存在性，我们回顾格林恒等式的以下形式，参见例如 [25, 引理 4.4]:

引理 3.5。假设 $u, v \in H^1(\Omega^\pm)$。若 Δu 和 Δv 属于 $L^2(\Omega^\pm)$，则

$$\langle u, \Delta v\rangle_{\Omega^\pm} = \langle \Delta u, v\rangle_{\Omega^\pm} \pm \left\langle T^\pm \partial_r u, T^\pm v\right\rangle_{\partial\Omega} \mp \left\langle T^\pm u, T^\pm \partial_r v\right\rangle_{\partial\Omega}.$$

类似地，如果 $(H(k) - E)u$ 和 $(H(k) - E)v$ 属于 $L^2(\Omega^\pm)$，那么

$$\langle u, (H(k) - E)v\rangle_{\Omega^\pm} = \langle (H(k) - E)u, v\rangle_{\Omega^\pm} \pm \left\langle T^\pm \partial_r u, T^\pm v\right\rangle_{\partial\Omega} \mp \left\langle T^\pm u, T^\pm \partial_r v\right\rangle_{\partial\Omega}. \tag{3.8}$$

特别地，如果 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$ 是一个测试函数，那么

$$\left\langle D^\pm f, (H^\pm(k) - E)\varphi\right\rangle_{\Omega^\pm} = \pm\left\langle T^\pm \partial_r D^\pm f, T\varphi\right\rangle_{\partial\Omega} \mp \langle f, T\partial_r\varphi\rangle_{\partial\Omega}. \tag{3.9}$$

由此，我们可以确立 Λ 的关键性质，即其核对应于 $H(k)$的特征向量，其特征值为 E。

命题 3.6。固定 $(k, E) \in (\mathcal{B} \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}$，映射

$$\mathcal{V}(k, E) \ni f \mapsto (D^-(k, E) + D^+(k, E))f \in H^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$$

是一个同构 从 $\ker \Lambda(k, E)$ 到与 E 对应的 $H(k)$ 的特征空间之间的同构 .

证明。 首先，我们验证若 $\Lambda(k,E)f=0$，则 $u=(D^-+D^+)f$ 是 $H(k)$ 的特征向量，其特征值为 E。若 $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m)$，则由 (3.9) 得

$$\begin{aligned}\langle u,(H(k)-E)\psi\rangle &= \left\langle D^+f,(H(k)-E)\psi\right\rangle_{\Omega^+}+\left\langle D^-f,(H(k)-E)\psi\right\rangle_{\Omega^-}\\ &= \left\langle T^+\partial_rD^\pm f,T\psi\right\rangle_{\partial\Omega}-\left\langle T^-\partial_rD^\pm f,T\psi\right\rangle_{\partial\Omega},\end{aligned}\tag{3.10}$$

它为零，因为 $f\in\ker\Lambda$。因此，$(H(k)-E)u$ 作为广义函数为零，所以我们只需验证它属于 $H^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m)$。根据 $D^\pm$ 在 $(\partial\Omega)^c$ 上的定义，这一点显而易见。在 $\partial\Omega$ 的一个邻域内，u 满足

$$(H_0(k)-E)u=0$$

在广义函数的意义下，因此根据局部椭圆正则性，它实际上在该处是光滑的 [33, 命题 3.9.1]。

这证实了 u 是一个特征函数。为了说明每个特征函数都可以由此得到，设 $(H(k)-E)u=0$。那么，由于 $u\in H^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m)$，我们有 $T^+u=T^-u$，记作 $f\in H^{3/2}(\partial\Omega)$。根据命题 3.2 和 3.3 中的唯一性结论，我们得到

$$u=(D^++D^-)f$$

此外，由 (3.10) 可得 $\Lambda f=0$。最后，我们注意到，由于 D^+T^+f在无穷远处是 L^2，f 必定属于命题 3.3 中的 $\mathcal{V}(k,E)$。因此，$\varphi\mapsto f$ 是一个逆算子，证毕。□

4. Fredholm property of the Dirichlet-to-Neumann map

在确立了 Λ与 $H(k)$ 的特征函数之间的联系后，我们现在转而讨论其 Fredholm 性质。由于 Λ 仅定义在子空间 $\mathcal{V}$上，因此它只能是左半弗雷德霍姆的，即其核有限维且值域闭，但其余核可能是无限维的。为此，我们采用层势方法。通常，在有限体积区域上，单层势是通过全空间上 Δ 的格林函数定义的，但为避免无穷远处的一些技术问题，我们倾向于改用能量为 -1 时的预解核。为此，令 $G=(-\Delta_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m}+1)^{-1}$，并令 $G(x,\ y)$ 为其核。回忆 [35, (7.53)]，对于 $z\notin[0,\infty)$，$(-\Delta_{\mathbb{R}^d}-z)^{-1}$ 的核对任意 $d\geq 2$ 都由下式给出

$$G_{\mathbb{R}^d}(w;z)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{-z}}{2\pi|w|}\right)^{\frac{d}{2}-1}K_{\frac{d}{2}-1}(\sqrt{-z}|w|),\tag{4.1}$$

其中，K_ν 是第二类修正贝塞尔函数，且根始终取实部为正的那个。我们还令 $G_{\mathbb{R}^d}(w;0)$ 表示 $-\Delta$ 的标准格林函数，即：

$$G_{\mathbb{R}^d}(w;0)=\frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}(d-2)}|w|^{2-d}.\tag{4.2}$$

通过对 y 进行傅里叶模分解，我们有

$$G(x,y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^m}G_{\mathbb{R}^n}(x;-1-\|2\pi j\|^2)\xi_j(y).$$

现在令 T^*： $H^{-1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$ 为迹算子的伴随算子（相对于 L^2 内积），该迹算子作用于 $H^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$。对于 $f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$，我们通过以下方式定义单层算子 SL:

$$\mathrm{SL}\, f := GT^* f.$$

由定义可知，在 $\Omega^{\pm}$ 上，$(-\Delta+1)$ SL f 在广义函数意义下为 0，因为 f 支持在 $\partial\Omega$ 上。由于当 $(x,\ y) \neq 0$ 时， G 是光滑的，因此当 $f \in L^1(\partial\Omega)$ 时，我们有如下积分表示

$$(\mathrm{SL}\, f)(x,y) = \int_{\partial\Omega} G(x-x', y-y') f(x',y')\, dx'dy', \tag{4.3}$$

当 $(x,\ y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \setminus \partial\Omega$ 时。

预解核的以下性质是众所周知的，本质上是 G 为 -2 阶伪微分算子的结果。

命题 4.1。 在 $(0,0)$ 的某个邻域内，核 $G(x,y)$ 满足

$$G(x,y) = G_{\mathbb{R}^{n+m}}(x,y;0) + \mathcal{R}(x,y), \tag{4.4}$$

其中 $\mathcal{R}$ 满足

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \mathcal{R}(x,y)| \le C_{\alpha,\beta} d((x,y),0)^{3-n-m-|\alpha|-|\beta|}, \tag{4.5}$$

对所有多重指标 α,β 均成立。特别地，我们有

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta G(x,y)| \le C_{\alpha,\beta} d((x,y),0)^{2-n-m-|\alpha|-|\beta|}, \tag{4.6}$$

在0附近。

证明。 设 $\chi(x,y)$ 是一个光滑函数，在 $(0,0)$ 的某个邻域内恒等于 1，且紧支集包含于该流形的一个坐标图内。因此，我们可以将 $G\cdot\chi$ 视为 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的一个分布。由于圆柱体 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ 是平坦的，我们有

$$(-\Delta_{\mathbb{R}^{n+m}} + 1)(G\cdot\chi) = \delta_0 + \nabla G \cdot \nabla\chi + G\cdot\Delta\chi.$$

后两项是光滑的，因为 G 在 (0,0) 以外光滑，且 χ 在 (0,0) 的某个邻域内等于 1。因此，

$$(-\Delta_{\mathbb{R}^{n+m}} + 1)(G(x,y)\cdot\chi(x,y) - G_{\mathbb{R}^{n+m}}(x,y;1))$$

是光滑的，因此由椭圆正则性可知， $G(x,y)\cdot\chi(x,y) - G_{\mathbb{R}^{n+m}}(x,y;1)$ 是光滑的。因此，只需证明 $G_{\mathbb{R}^{n+m}}(x,y;1) - G_{\mathbb{R}^{n+m}}(x,y;0)$ 是 $3-n-m$ 阶奇异的。

为证明这一点，我们需要使用标准的贝塞尔函数渐近式，例如见 $w \to 0$ [9,§10.31]。它们为

$$K_\nu(w) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}w)^{-\nu}(\Gamma(\nu)+O(w^2)) + (-1)^{\nu+1}(\frac{1}{2}w)^{\nu}\log(\frac{1}{2}w)(1+O(w^2)), \tag{4.7}$$

当 ν 是正整数且

$$K_{\nu/2}(w) = \frac{1}{2}\Gamma(\nu/2)(\frac{1}{2}w)^{-\nu/2}(1+O(w^2)), \tag{4.8}$$

当 ν 是奇正整数，且所有 $O(w^2)$ 项都是解析的。将这些渐近展开代入 (4.1)，我们发现如果 $n+m$ 是偶数，那么

$$G_{\mathbb{R}^{n+m}}(x,y;1) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2}-1)}{4\pi^{(n+m)/2}}|(x,y)|^{2-n-m}(1+O(|(x,y)|^2) \\ + (-1)^{(n+m)/2-1}\frac{1}{2\pi}\log(\frac{1}{2}|(x,y)|)(1+O(|x,y|^2)),$$

而当 $n+m$ 为奇数时，可以省去第二项。与 (4.2) 比较，我们得到 (4.4)，对其求导即可立即得到 (4.6)。□

界 (4.6) 表明，当 $(x,y) \to (x',y')$ 时，$G(x-x',y-y')$ 在 $\partial\Omega$ 上一致可积，因此 $(T^+ \mathrm{SL}\ f)(x,y)$ 和 $(T^- \mathrm{SL}\ f)(x,y)$ 相等，并且当 $(x,y) \in \partial\Omega$ 时，它们由表达式 (4.3) 给出。

接下来，我们需要以下映射性质。

命题 4.2。 算子 SL 从 $H^{-1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$有界映射到。此外，$T^{\pm}\,\mathrm{SL}$ 从 $H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^2(\Omega^{\pm})$有界映射到。

证明。 我们将讨论 Ω^+，Ω^- 的情形类似。由对偶性，T^* 在 $H^{-1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$ 上有界。由于 G 在 $H^{-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m) \to H^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$ 上有界，因此得到 SL 的映射性质。

由 (4.6) 可知，在 $n+m-1$ 维流形 $\partial\Omega$ 上，$G(x-x',\ y-y')$ 是一个 -1 阶伪微分算子的施瓦茨核，因为其奇异性阶为 $1-(n+m-1)$，参见 [34, 命题 2.4]。因此，$T^{\pm}$ SL 将 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 映射到 $\to H^{3/2}(\partial\Omega)$，如所声称。□

与连续的 SL f 不同，SL f 的法向导数在 $\partial\Omega$ 上存在不连续性。拉普拉斯算子的格林函数也有类似的跳跃关系，这一点广为人知。

命题 4.3 (跳跃关系)。 我们有恒等式

$$T^{\pm}\partial_r\,\mathrm{SL} = \mp\frac{1}{2}\,\mathrm{Id} + N,$$

其中 N 是积分算子

$$Nf(x,y) = \int_{\partial\Omega} \partial_r G(x-x',y-y')f(x',y')\,dx'dy'$$

对于 $(x,y) \in \partial\Omega$.

证明。 由 SL 的积分表示可得

$$\partial_r\,\mathrm{SL}\,f = \int_{\partial\Omega} \partial_r G(x-x',y-y')f(x',y')\,dx'dy' \\ = \int_{\partial\Omega} \partial_r G_{\mathbb{R}^{n+m}}(x-x',y-y')f(x',y')\,dx'dy' + \int_{\partial\Omega} \partial_r \mathcal{R}(x-x',y-y')f(x',y')\,dx'dy',$$

对于 $(x,y) \notin \partial\Omega$。由 (4.5) 可知，当 $(x',y') \to (x,y) \in \partial\Omega$ 时，$\partial_r\mathcal{R}$ 一致可积。因此，由第二个积分预先定义在 $(x,y) \notin \partial\Omega$ 上的函数可延拓至 $\partial\Omega$，故

对于 $(x,y) \in \partial\Omega$，其双侧迹由相同表达式给出。另一方面，单层势 [34, 满足经典跳跃关系（见命题 7.11）。3]

$$T^{\pm}\int_{\partial U}\partial_r G_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}(x-x',y-y')f(x',y')\,dx'dy' = \mp\frac{1}{2}f+\int_U \partial_r G_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}(x-x',y-y')f(x',x')\,dx'dy',$$

适用于 $U\ \mathbb{R}^{n+m}$ 中边界光滑的任意区域。通过在 $\partial\Omega$ 上取从属于坐标图的单位分解，并在局部应用这一恒等式，证明即告完成。□

命题 4.4. 我们有以下恒等式：

$$T^+\,\mathrm{SL}\,\Lambda^+ = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_{\mathcal{V}} + N + \mathcal{K}_1 \tag{4.9}$$

$$T^-\,\mathrm{SL}\,\Lambda^- = \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_{\mathcal{V}} + N + \mathcal{K}_2 \tag{4.10}$$

其中

$$\mathcal{K}_1 = T^+G(2ik\cdot\nabla - k^2 + E + 1)D^+$$
$$\mathcal{K}_2 = T^-G(2ik\cdot\nabla - k^2 - V + E + 1)D^-.$$

证明。设 $f\in\mathcal{V}(k,E)$ 和 $g\in L^2(\partial\Omega)$。对于 (4.9)，利用 $\mathrm{SL} = GT^*$ 并取伴随算子，可写为

$$\begin{aligned}\left\langle T^+\,\mathrm{SL}\,\Lambda^+ f, g\right\rangle_{\partial\Omega} &= \left\langle \Lambda^+ f, T\,\mathrm{SL}\,g\right\rangle_{\partial\Omega}\\ &= \left\langle T^+\partial_r u^+, T\,\mathrm{SL}\,g\right\rangle_{\partial\Omega},\end{aligned}$$

其中我们令 $u^+ = D^+f$。由于 u^+ 和 $\mathrm{SL}\ g$ 均属于 $H^1(\Omega^+)$，且 Δu^+ 和 $\Delta\,\mathrm{SL}\ g$ 属于 $L^2(\Omega^+)$，因此可以应用格林恒等式（引理 3.5），得到

$$\left\langle T^+\partial_r u^+, T^+\,\mathrm{SL}\,g\right\rangle_{\partial\Omega} = \left\langle f, T^+\partial_r\,\mathrm{SL}\,g\right\rangle_{\partial\Omega} + \left\langle u^+, \Delta\,\mathrm{SL}\,g\right\rangle_{\Omega^+} - \left\langle \Delta u^+, \mathrm{SL}\,g\right\rangle_{\Omega^+}.$$

根据命题 4.3，第一项可改写为

$$\left\langle f, T^+\partial_r\,\mathrm{SL}\,g\right\rangle_{\partial\Omega} = \left\langle (-\frac{1}{2}+N)f, g\right\rangle_{\partial\Omega}.$$

利用 $\Delta\mathrm{SL}\ g = \mathrm{SL}\ g\,\mathrm{inside}\,\Omega^+$，我们也可以写成

$$\left\langle u^+, \Delta\,\mathrm{SL}\,g\right\rangle_{\Omega^+} = \left\langle u^+, \mathrm{SL}\,g\right\rangle_{\Omega^+} = \left\langle T^+Gu^+, g\right\rangle_{\partial\Omega}.$$

类似地，由于 $(H_0(k)-E)u^+ = 0$，我们有

$$\left\langle \Delta u^+, \mathrm{SL}\,g\right\rangle_{\Omega^+} = \left\langle T^+G(-2ik\cdot\nabla + (k^2-E))u^+, g\right\rangle_{\partial\Omega}.$$

结合这三个恒等式并应用对偶性，可得 (4.9)。

(4.10) 的推导过程相同，只是我们通过改用以下表达式，在 $\mathcal{K}_2$ 中得到一个额外项

$$(H_0(k)+V-E)D^-f = 0.$$

□

推论 4.5 。对于任意 $(k,E)\in(\mathcal{B}\times\mathbb{R})\setminus\mathcal{S}$，完整的 *Dirichlet-to-Neumann*算子 $\Lambda(k,E)$ 是左半弗雷德霍姆的 .

证明。 根据命题 4.2，算子 $T^{\pm}$ SL 从 $H^{1/2}(\partial\Omega) \to \mathcal{V}(k, E)$ 有界。此外，根据命题 4.4，我们有

$$T \operatorname{SL} \Lambda = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} - \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2.$$

因此，如果我们能够证明 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 是紧算子，那么算子 Λ 将以 T SL 作为左正则化子。

对于定义 $\mathcal{K}_2$ 的复合映射，我们有以下映射性质：

$$H^{3/2}(\partial\Omega) \xrightarrow{D^-} H^1(\Omega^-) \xrightarrow{-2ik\cdot\nabla - k^2 - V + E + 1} L^2(\Omega^-) \xrightarrow{T^- G} H^{3/2}(\partial\Omega).$$

如我们所见， D^- 是从 $H^{3/2}(\partial\Omega)$ 到 $\to H^2(\Omega^-)$ 的有界算子，因此作为从 $H^{3/2}(\partial\Omega)$ 到 $\to H^1(\Omega^-)$ 的算子，它是紧的。因此，第一个箭头是紧的，所以 $\mathcal{K}_2$ 也是紧的。同样的论证表明 $\mathcal{K}_1$ 是紧的，证毕。□

5. Proofs of the main theorems

为了证明定理 1.3，我们首先需要一些结果，以便对左半 Fredholm 算子解析族的核进行参数化。关于 Fredholm 算子族的相关结果可见 [39]。

5.1. 左半 Fredholm 算子核的解析变化。

命题 5.1. 设 $B_\epsilon \subset \mathbb{T}^d$ 为一个开凸子集，并设

$$k \in B_\epsilon \mapsto F(k) : X \to Y$$

为希尔伯特空间 X 与 Y 之间的左半 *Fredholm* 算子解析族。则存在一个满测度开集 $\mathcal{W} \subset B_\epsilon$，其补集是解析集，并且存在一个关于 $k \in \mathcal{W}$ 解析的算子函数，将空间投影到 核 $F(k)$ 上。

证明。考虑 δ 宽度为复数（ δ 较小）的 U 管状邻域。它在几何上是一个全纯凸域，因此也是 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯凸域。如果宽度 δ 足够小，则该算子函数仍然解析，并且由于半-Fredholm 算子集合的开性（参见例如 [10, 第 VI.7] 节和 [5, 命题 XI.2.4]），它也仍是半-Fredholm 算子。

现在令 $d_0 \geq 0$ 为 U 中 ker $F(k)$ 的最小维数，该最小值在点 k_0 处取得。取 ker $F(k_0)$ 的一个补空间 E_0。考虑从 $F(k_0)$ 的值域 $E_0 \to$im $F(k_0)$ 到其逆算子 G，以及一个投影到值域 $\in F(k_0)$ 上的有界投影算子 P。此外，引入解析算子函数

$$B(k) := GPF(k).$$

如果邻域 U 足够小，显然这是一个解析 Fredholm 算子函数，使得 ker $B(k) =$ker $F(k)$，从而 dim ker $B(k) \geq d_0$。

现在可以参考关于Fredholm解析算子函数的已知结果。具体而言，设 $A_0 \subset U$为满足 dim ker $F(k) \geq d_0 + 1$的集合。根据 [39], 中的定理 4.11，该子集是解析集。取一个非零解析函数 ϕ，它属于与 A_0 对应的理想，并将集合 $A \subset U$ 定义为 ϕ的所有零点组成的集合。显然， $A_0 \subset A$。采用 A 的优点在于它的余维为 1（与之不同， A_0的余维可能更大）。于是， $\mathcal{W} := U \setminus A$ 是全纯凸的，因为它是全纯域中主解析集的补集。此外，对于 $k \in \mathcal{W}$, $F(k)$的核具有相同的维数 d_0。因此，这些核在环境空间中构成一个解析的 d_0维子丛，故在 $\mathcal{W}$ 中局部存在解析投影算子（例如，可以使用Riesz投影算子）。

由于 $\mathcal{W}$的全纯凸性，这种解析投影算子也全局存在（M. Shubin定理，参见 [31] 或 [39, 定理 3.11], [21, 定理 1.6.13]）。

“坏”集合 A与实子空间的交集测度为零；参见 [22,引理 5.22]（非原始来源）及其中的参考文献，特别是 [26]中简洁的推导。

这就证明了该定理：事实上，在一个满测度集合 $\mathcal{W}\bigcap\mathbb{R}^n$ 上存在解析投影算子。□

命题 5.2。 对于某个 $\epsilon>0$ 和实数 $a<b$，令

$$(k,E)\in B_\epsilon\times(a,b)\mapsto F(k,E):X\to Y$$

为希尔伯特空间 X 和 Y之间的左半 ***Fredholm*** 算子解析族。假设对每个 $k\in B_\epsilon$，集合

$$\mathcal{D}_k:=\{E\in(a,b)\mid \dim\ker F(k,E)>0\}$$

是离散的。那么存在可数多个函数 $\lambda_n(k):\ B_\epsilon\to(a,b)$ 以及投影算子族

$$k\in B_\epsilon\mapsto\pi_n(k):X\to X$$

使得

(1) 对每个 n， $\lambda_n(k)$ 和 $\pi_n(k)$ 都在 B_ϵ中几乎处处有定义且解析。*(2)* 对所有 $k\in B_\epsilon$

$$\ker F(k,\lambda_n(k))=\operatorname{Ran}\pi_n(k).$$

(3) 维数 ker $F(k,E)>0$ 当且仅当存在某个 n，使得 $E=\lambda_n(k)$。

证明。 [3] 定义解析簇

$$\mathcal{D}:=\{k\in\mathbb{T}^m,E\in(a,b)\mid \dim\ker F(k,E)>0\}.$$

只需考虑其一个不可约分支 C，它自动是 Stein。根据 [21, 定理 1.6.14],，在 C 上，ker $(H(k)-\lambda I)$ 的解析截面芽构成的层是凝聚的。设该核在 C 上的最小维数为 d。于是，由于 C 的不可约性，除一个解析子集$S\subset C$外，其维数处处相同。在任意点 $(k_0,\lambda_0)\in C\setminus S$ 的某个邻域内，存在截面的局部全纯基 $\phi_j(\lambda,k)\ j=1,\dots k$。于是，根据经典逼近定理（例如参见 [18, 定理 7.2.7]），这些函数在 (k_0,λ_0) 的某个（可能更小的）邻域内可由整体截面 ψ_j 一致逼近。于是，除 B 的一个真解析子集 A 外，它们仍是所需的基截面。□

现在回想一下，在 (3.4) 中定义的子空间 $\mathcal{V}(k,\ E)$ 在 $\mathcal{B}\times\mathbb{R}$ 中任何 $E_j(k)$ 不变号的子集上都是常数。在这样的邻域内，Λ 是 $(k,\ E)$ 的解析函数，但不包括 $\mathcal{S}$，即对应于狄利克雷谱的 $(k,\ E)$ 集合。

命题 5.3。 设 $U\subset\mathcal{B}\times\mathbb{R}$ 是一个邻域，在该邻域上 $\mathcal{V}(k,E)$ 为常数。那么

$$(k,E)\in(U\times\mathbb{R})\setminus\mathcal{S}\mapsto\Lambda(k,E):\mathcal{V}\to H^{1/2}(\partial\Omega)$$

是一个左半 ***Fredholm*** 算子的解析族。

[3] 另见即将出版的书中的定理 5.5.1 [23]。

证明。 算子 $H_{0\,D,}^{\pm}(k)$ 在 $\mathcal{B}$ 上构成解析族。因此，根据 [28, 第 XII 定理7]，它们的预解式是 $(U \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}$ 上的解析函数。结论随即由表示式 (3.2) 和 (3.6) 得出。 □

现在我们证明，通过改变 R，可以避开使 $\Lambda(k, E)$ 未定义的 (k, E) 集合。令 $\lambda_1(k, R) \leq \lambda_2(k, R) \leq \ldots$ 为 $H_D^-(k, R)$ 的特征值，计入重数。

命题 5.4。 对于任意 $(k_0, E_0) \in \mathcal{B}\times\mathbb{R}$，存在 $R > 1$ 和一个包含 (k_0, E_0) 的邻域 $U \subset \mathbb{T}\times\mathbb{R}$，使得对于所有 $(k, E) \in U$，都有 $E \notin \sigma(H_D(k, R))$。

这将很容易由以下引理推出：

引理 5.5。 固定 $k \in \mathbb{T}^*$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，函数 $R \mapsto \lambda_n(k, R)$ 连续且严格单调递减。

证明。 我们首先证明单调性。为此，回顾相对于形式定义域的特征值极小极大表达式：

$$\lambda_n(R) = \min_{\substack{\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}\subset H_0^1(\partial\Omega_R)\\ \|\psi_j\|=1}} \max_{\substack{\psi\in\operatorname{span}\{\psi_1,\ldots,\psi_j\}\\ \|\psi\|=1}} \langle H_{D,R}(k)\psi, \psi\rangle\,, \tag{5.1}$$

最大值仅由一个特征函数取得。对于 $R' > R$，由于狄利克雷边界条件，通过零延拓，我们有自然包含 $H_0^1(\partial\Omega_R) \hookrightarrow H_0^1(\partial\Omega_{R'})$，因此至少有 $\lambda_n(R) \geq \lambda_n(R')$。

现在假设对于某个 $R' > R$，有 $\lambda_n(R) = \lambda_n(R')$，并令 $\psi_1, \ldots, \psi_n$ 为关于 $\lambda_1(R) \ldots, \lambda_n(R)$ 的 L^2- 归一化特征函数。将它们作零延拓后，它们在 (5.1) 中对 $H_{D,R'}(k)$ 取得极小极大值，因此 ψ_n 在 $\Omega_{R'}^-$ 上满足 $H(k)\psi_n = \lambda_n(R)$。特别地，它在 $\Omega_{R'}^- \setminus \Omega_R^-$ 上为零，所以根据 Schr¨odinger 特征函数的唯一延拓性（例如参见 [28, Thm. XIII.57]），它实际上必须恒等于零。这与 ψ_n 是非平凡特征函数相矛盾，因此必有 $\lambda_n(R') > \lambda_n(R)$，如所声称。

为了证明连续性，我们利用算子

$$\tilde{H}_D(k, R) := -R^{-2}\Delta_x - \Delta_y - 2ik \cdot \nabla_y + k^2 + V(Rx, y),$$

其定义域为 $H_0^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1)$，且其谱与 $H_D(k, R)$ 相同。根据索伯列夫嵌入，取 $p > 2$ 为一个指数，使得 $H_0^1(\partial\Omega_1) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega_1)$，并令 q 满足 $\frac{1}{q} + \frac{2}{p} = 1$。略去$k$后，我们注意到对于任意 $\psi \in H_0^1(\partial\Omega_1)$

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \tilde{H}_D(R)\psi, \psi\right\rangle - \left\langle \tilde{H}_D(R')\psi, \psi\right\rangle\right| \\
&\quad\leq \int_{\Omega_1} (R^{-2} - (R')^{-2})|\nabla_x\psi|^2 + |V(Rx, y) - V(R'x, y)||\psi|^2(x, y)\, dxdy \\
&\quad\leq (R^{-2} - (R')^{-2})\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega_1)} + \|V(Rx, y) - V(R'x, y)\|_{L^q(\Omega_1)}\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega_1)},
\end{aligned}$$

最后一行用到了 H¨older 不等式和索伯列夫嵌入。由于

$$\|V(Rx, y) - V(R'x, y)\|_{L^q(\partial\Omega_1)} \to 0,\ R' \to R,$$

例如，通过取 V 在 L^q中的光滑逼近，我们已经证明

$$\sup_{\psi\in H_0^1(\Omega_1), \|\psi\|_{H_0^1(\Omega_1)}=1} |\left\langle (\tilde{H}_D(R) - \tilde{H}_D(R'))\psi, \psi\right\rangle| \to 0,\ R' \to R.$$

˜根据 $[29,$ 定理 VIII.25$]$, 可知，任何满足 $R_j \to R$ 的序列 $H_D(R_j)$ 都按范数预解收敛。因此，根据 $[29,$ 定理 VIII.23$]$，任意区间˜ ˜$P_{(a,b)}(H_D(R_n))$上的谱投影都按范数收敛到 $P_{(a,b)}(H_D(R))$，由此可直接推出 $\lambda_n(R)$ 的连续性。至此，证明完成。□

命题 5.4 现可迅速得出：

命题 *5.4* 的证明。 对于某个 $R>0$，令 $\lambda_N(k_0,\ R)$ 表示 $H_D(k_0,\ R)$ 中大于 E_0 的最小特征值。由于 $\lambda_N(k_0,\ R)$ 是连续的，如果我们将 R 增加一个充分小的量，它仍不会等于 E_0 ；根据单调性，对于 $j<N$ 的所有 $\lambda_j(k_0,\ R)$ 也同样如此。因此，存在某个 R'，使得 $E_0 \notin \sigma(H_D(k_0,\ R))$。现在，我们只需运用关于 k 的标准解析扰动理论，就可以找到 k_0 的一个邻域，在该邻域上 $E_0 \notin \sigma(H_{D,\ R}(k))$。选取 E_0 的一个足够小的邻域，证明即告完成。□

现在我们将这些结果应用于 Dirichlet-to-Neumann算子，从而得到定理 1.3 的第 (1) 和 (2) 项。

命题 5.6. 存在一个可数的开集族 $U_l \subset \mathcal{B}$ ，使得以下结论成立：对于每个 U_l ，都存在有限个有限秩投影族

$$k \in U_l \mapsto \pi_{l,j}(k) : H^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m) \to H^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$$

以及函数 $\lambda_{l,\ j}(k)$：$U_l \to \mathbb{R}$ ，使得

(1) 函数 $\lambda_{l,j}(k)$ 和算子族 $\pi_{l,j}(k)$ 在一个零测度闭集的补空间上是解析的。*(2)* 对每个 $k \in U_l$ 和每个 j，$\ker[H(k)-\lambda_{l,j}(k)] = \mathrm{Ran}\pi_{l,j}(k)$。*(3)* 若对于某个 $(k_0, E_0) \in \mathcal{B}\times\mathbb{R}$，$\ker[H(k_0)-E_0)] \neq 0$，则对于某些指标 l 和 j，$E_0 = \lambda_{l,j}(k_0)$。

证明。 我们将证明，对于每个满足 $\ker[H(k_0)-E_0]\neq 0$ 的 $(k_0,E_0)\in\mathcal{B}\times\mathbb{R}$，都存在某个包含 k_0 的 $U\subset\mathcal{B}$，以及满足命题结论的 $\lambda_j(k)$ 和 $\pi_j(k)$。根据命题 (5.4)，我们可以改变 R，使得 $(k_0,E_0)\subset U\times(a,b)$，且其与 $\mathcal{S}$ 不相交。

分为两种情况。第一种是当 $(E_0)_j(k_0)\neq 0$ 对所有 $j\in\mathbb{Z}^m$都成立时。在这种情况下，我们可以限制 $U\times(a,b)$，使得 $\mathcal{V}(k,E)$ 在其上为常数。于是，根据推论 4.5 和命题 5.6，$\Lambda(k,E)$ 是定义在 $U\times(a,b)$ 上的左半 Fredholm 算子解析族，因此我们可以应用命题 5.2，构造函数 $\lambda_j(k)$ 和投影算子 $\pi_j(k)$，它们刻画了该算子在 $U\times(a,b)$ 上的核，并且除一个零测集外均为解析的。其值域

$$(D^-(k,\lambda_j(k))+D^+(k,\lambda_j(k)))\circ\pi_j(k)$$

对每个指标 j 而言，随后在 k 中几乎处处解析变化。根据命题 3.6，投影到它们的值域上的投影算子构成了 $H(k)$ 的一组完备特征投影算子，其特征值位于 E，当 $(k,E)\subset U\times(a,b)$ 时成立。至此便完成了这种情况下的证明。

对于第二种情形，我们假设对于某个 $j\in\mathbb{Z}^m$，$(E_0)_j(k_0)=0$。我们可以假设对于任意其他 j'，$(E_0)_{j'}(k_0)\neq 0$，因为不满足这一条件的 k 构成的集合测度为 0。因此，我们可以限制 U，使得对于所有 $k\in U$，$\mathcal{V}(k,\ E_0)=\mathcal{V}(k_0,\ E_0)$。现在，我们可以将命题 5.1 应用于解析族 $k\in U\mapsto\Lambda(k,\ (E_0)_j(k))$，并按照第一种情形的论证得出结论。□

5.2. 能量的非恒定性。 现在我们证明，所有 $\lambda_n(k)$ 都不是局部常数。这表明 H 的谱是纯绝对连续的，从而证明推论 1.4。

为此，我们将 分析与 $V \equiv 0$ 对应的自由Dirichlet-to-Neumann算子 Λ_0。更准确地说，我们 t

$$\Lambda_0(k,E) := \Lambda_0^-(k,E) - \Lambda^+(k,E)$$
$$\Lambda_0^-(k,E) := T^-\partial_r D_0^-(k,E),$$

其中， $D_0^-(k,E)$ 是 $H_0(k)$ 在 Ω^- 上的狄利克雷解映射 $-E$ （回忆一下，根据定义， Λ^+ 没有势）。显然，对于 $E \notin \sigma(H_{0,D}^-(k))$， $\Lambda_0^-(k,E)$ 是良定义的。

根据附录 A 中给出的球谐函数常微分方程计算，我们得到以下以 $P_\nu(w)$ 表示 Λ_0 的表达式：$= I_\nu(w)K_\nu(w)$，其中 I_ν 是第一类修正贝塞尔函数。

命题 5.7. 设 $(k,E) \in \mathcal{B}\times\mathbb{R}$。对于任意满足 $E_j(\Re k) < 0$ 的 $j \in \mathbb{Z}^m$，有

$$(\Lambda_0(k,E)f)_j = -\sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} \frac{f_{\ell,m,j}}{RP_{n/2+\ell-1}(z_jR)}Y_{\ell,m}(\omega),$$

其中 $z_j^2 = -E_j(k)$， $\Re z > 0$。

证明。 根据引理 A.2,

$$(D_0^-f)_j = \sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m,j}\left(\frac{r}{R}\right)^{1-n/2}\frac{I_{n/2+\ell-1}(z_jr)}{I_{n/2+\ell-1}(z_jR)}$$
$$(D^+f)_j = \sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m,j}\left(\frac{r}{R}\right)^{1-n/2}\frac{K_{n/2+\ell-1}(z_jr)}{K_{n/2+\ell-1}(z_jR)}.$$

Thus

$$(\Lambda_0^-f)_j = \sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell}\frac{f_{j,\ell,m}}{R}[(1-\frac{n}{2}) + z_jR\frac{I'_{n/2+\ell-1}(z_jR)}{I_{n/2+\ell-1}(z_jR)}]Y_{\ell,m}(\omega)$$
$$(\Lambda^+f)_j = \sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell}\frac{f_{j,\ell,m}}{R}[(1-\frac{n}{2}) + z_jR\frac{K'_{n/2+\ell-1}(zR)}{K_{n/2+\ell-1}(z_jR)}]Y_{\ell,m}(\omega)$$

从而

$$(\Lambda_0 f)_j =$$
$$-\sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m,j}z_j\frac{K_{n/2+\ell-1}(z_jR)I'_{n/2+\ell-1}(z_jR) - K'_{n/2+\ell-1}(z_jR)I_{n/2+\ell-1}(z_jR)}{P_{n/2+\ell-1}(z_jR)}Y_{\ell,m}(\omega),$$

根据 [9,(10.28.2)], ，分子中的朗斯基行列式计算得 $1/(z_jR)$，由此即可得出结论。 □

接下来，我们证明以下技术估计：

命题 5.8。 我们有以下界，对任意满足 $\Re z > 0$ 的 $\nu \geq 0$ 和 $z \in \mathbb{C}$ 均成立：

$$|P_\nu(z)| \leq \frac{C}{(|\Im z^2|)^{\frac{1}{3}}},$$

对于某个普适常数 $C > 0$。

证明。 我们从下面这个恒等式开始，该恒等式对于 $\Re z > 0$, $\Re(\nu) > -1$成立，参见 [16, (6.535)]：

$$P_\nu(z) = \int_0^\infty \frac{x}{x^2+z^2}[J_\nu(x)]^2\,dx.$$

接下来我们使用以下界，该界由 [24], 给出，并且对 $x \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 0$成立

$$|J_\nu(x)| < c|x|^{-\frac{1}{3}},$$

以及一个 niform 常数 $c > 0$。将这些结果结合起来并令 $a = \Im z^2$，我们得到

$$\begin{aligned}
|P_\nu(z)| &\leq c\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{|x^2+z^2|}\,dx \\
&\leq c\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^4+a^2}}\,dx \\
&= c|a|^{-1}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(x^2/|a|)^2+1}}\,dx \\
&= c|a|^{-1/3}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{u^4+1}}\,du,
\end{aligned}$$

由此结论立即得出。 □

为了证明 H的谱簇中不存在平带，我们给出一个受经典 Thomas 方法启发的论证，该论证依赖于将准动量复化。

引理 5.9。 对任意 $E_0 \in \mathbb{R}$，使得 E_0 是 $H(k)$ 的特征值的 $k \in \mathcal{B}$ 所构成的集合是零测集。

证明。 设 $E_0 \in \mathbb{R}$，我们将证明，对于任意满足 $|(k_0)_1| > 0$ 的 $k_0 \in [0, 2\pi)^m$，存在某个区间 $0 \in I$，使得

$$\{k \in k_0 + I\mathbf{e_1} \mid E_0 \text{ is an eigenvalue of } H(k)\} \tag{5.2}$$

其勒贝格测度为零。因此，由 Fubini定理和覆盖论证即可得到结论。

注意，每个集合 $\{(k, E) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R} \mid E_j(k) = 0\}$ 都是一个抛物面，因此

$$\{k_0 \in \mathcal{B} \mid (E_0)_j(k_0) = 0 \text{ for some } j \in \mathbb{Z}^m\}$$

的测度为零。因此，我们可以假设对于每个 j，$(E_0)_j(k_0)$ 均非零。此外，由命题 5.4 可知，我们可以选取 R，使得对于任意 $k \in k_0 + I\mathbf{e}_1,$， E_0 均不属于 $\sigma(H_0^-, D(k))$ 或 $\sigma(H_D^-(k))$，其中 I 是某个充分小的闭区间。这保证了对所有 $k \in k_0 + I\mathbf{e}_1$, $\mathcal{V}(k, E_0) = \mathcal{V}(k_0, E_0)$。我们进一步假设 I 足够小，使得所有 $k \in k_0 + I\mathbf{e}_1$ 均满足 $|k_1| > \delta$ 和 $|k_1 - 2\pi| > \delta$，其中 $\delta > 0$ 为某个值。

现在令 $\mathbb{V}$ 为复平面中的垂直条带

$$\mathbb{V} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \in I\}.$$

注意，根据解析 Fredholm 定理 [38, §8.1], 满足以下条件的 $z \in \mathbb{V}$ 集合

$$E_0 \in \sigma(H^-_{0,D}(k_0+z)) \cup \sigma(H^-_D(k_0+z))$$

是离散的。此外，对 k_1 的条件保证了对于所有 $k \in k_0 + I\mathbf{e}_1$， $\tilde{R}^+_D(k, E_0)$ 都是定义良好的。

因此，由下式给出的算子

$$\tilde{\Lambda}_0(z) := \Lambda_0(k_0+z, E_0)$$
$$\tilde{\Lambda}(z) := \Lambda(k_0+z, E_0)$$

在 $\mathbb{V}$ 上除一个离散集外，构成一个 Fredholm 算子的解析族。

根据命题 5.7，我们有

$$(\tilde{\Lambda}_0(it)f)_j = -\sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} \frac{f_{\ell,m,j}}{RP_{n/2+\ell-1}(z_j(t)R)} Y_{\ell,m}(\omega),$$

其中我们用到了

$$\begin{aligned}(z_j^2(t)) &= -(E_0)_j(k_0+it\mathbf{e}_1) = -E_0 + (k_0+2\pi j + it\mathbf{e}_1)^2 \\ &= -(E_0)_j(k_0) - t^2 + 2it((k_0)_1 + 2\pi j_1)\end{aligned}$$

且 $\Re z_j(t) > 0$。由于 $|(k_0)_1| > \delta$ 且 $|(k_0)_1 - 2\pi| > \delta$，可知 $|\Im z_j^2(t)| > C|t|$关于 j 一致，因此由命题 5.8 得

$$\frac{1}{|P_{n/2+\ell-1}(z_j(t)R)|} \geq C|t|^{1/3},$$

关于 ℓ 和 j 一致。因此，

$$\|\tilde{\Lambda}_0(it)f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \geq C|t|^{1/3}\|f\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$$

对任意 $f \in \mathcal{V}$。

参照 (3.2)，我们写出

$$\begin{aligned}D^-(k,E) - D_0^-(k,E) &= [-R_D\cdot(H(k)-E) + R^-_{0,D}\cdot(H_0(k)-E)]\,\mathrm{Ex}^- \\ &= \left[(R^-_{0,D}-R^-_D)((H(k)-E)) - R^-_{0,D}V\right]\mathrm{Ex}^- \\ &= R^-_{0,D}V(R^-_D\cdot(H(k)-E) - \mathrm{Id})\,\mathrm{Ex}^-,\end{aligned}$$

其中最后一行用到了预解式恒等式。现在利用 $R_{0,\ D}(k_0+it,\ E_0)$ 关于 t 一致地从 $L^2(\Omega^-)$ $\to H^2(\partial\Omega^-)$ 有界，得到

$$\|\tilde{\Lambda}(it) - \tilde{\Lambda}_0(it)\|_{\mathcal{V}\to H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C$$

对所有 t ˜足够大，因此对于所有 t 足够大的情形， $\Lambda(it)$均可逆 ge.

˜最后，我们注意到，根据解析 Fredholm 定理，除 $\mathbb{V}$中的一个离散集外， $\Lambda(z)$均可逆。因此，使 $\Lambda(k)$具有非平凡核的 $k \in k_0 + I\mathbf{e}_1$ 构成一个零测集，这正是我们要证明的。□

定理 1.3 的证明现在显而易见:

定理 *1.3* 的证明。第 (1) 和 (2) 部分由命题 5.6 得出，而第 (3) 部分由引理 5.9 得出。□

为得到定理 1.2，我们借鉴了 [3] 中给出的一些论证。虽然那里考虑的情形有所不同，但证明足够相似，因此我们只强调其中的差异。

定理 *1.2* 的证明。固定 $\psi \in D(Q) \cap H^2(\mathbb{R}^{n+m}) \cap \mathcal{H}_{\mathrm{sur}} \setminus \{0\}$。首先，必须证明 $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} Y_H(t)\psi$ 存在且非零。根据标准的极限论证（例如，参见 [2, 定理 2.3] 的证明），只需对形如以下形式的 ψ 证明该定理

$$\mathcal{U}\psi = \left(\sum_{l=1}^{N} \int_{U_l}^{\oplus} \sum_{n=1}^{M} \pi_{l,n}(k) \, \frac{dk}{|\mathcal{B}|} \right) \mathcal{U}\psi \tag{5.3}$$

其中 N, $M > 0$。由 [27], 可得恒等式

$$Y_H(T)\psi = Y_H(0)\psi + 2 \int_0^T P_H^y(t)\psi \, dt,$$

其中 P^y 是动量算子 $-i(\partial_{y_1}, \ldots\ldots, \partial_{y_m})$, ψ 属于该区域。因此，只需证明

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_H^y(t)\psi \, dt$$

存在且非零。现在, [3] 中命题 4.1 的证明可原样应用于我们的情形，因此可以得出结论，因为定理 1.3 的输入在两种情形中完全相同。

现在，我们必须证明 $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} X(t)\psi = 0$。这正是 [3] 中的命题 4.2。请注意，虽然该证明针对定义在 $\mathbb{Z}^2$上的薛定谔算子，但无需任何修改即可应用于当前情形。□

Appendix A. Boundary value problems on $\mathbb{R}^n$

在本附录中，我们汇总了关于B_R^- 及其 $B_R^+ = B_R^{-c}$ 中的 $\mathbb{R}^n$上拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程的狄利克雷问题的一些简单事实。尽管这些结果很可能是标准结论，但我们未能找到合适的参考文献；因此，为方便读者，我们给出证明。

引理 A.1. 设 $f \in H^{3/2}(\partial B_R)$ 由下式给出

$$f = \sum_{\ell\geq 0} \sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m} Y_{\ell,m}.$$

则存在 $u \in H^2(B_R^c)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ T^+ u = f \end{cases} \tag{A.1}$$

当且仅当 $f_{\ell,\ m} = 0$ 对所有 $\ell < \ell_0$（n）均成立。此外，该解是唯一的，其表达式为

$$u(r\omega) = \sum_{\ell\geq\ell_0} \sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m} \left(\frac{r}{R}\right)^{2-n-\ell} Y_{\ell,m}(\omega),$$

对于 $r \in \mathbb{R}^+, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}$，且满足

$$\|u\|_{H^2(B_R^c)} \le C\|f\|_{H^{3/2}(\partial B_R)} \tag{A.2}$$

对于某个维数常数 $C > 0$。

证明。 我们分解

$$u(r\omega) = \sum_{\ell \ge 0} \sum_{m \in \mathcal{M}_\ell} u_{\ell,m}(r) Y_{\ell,m}(\omega).$$

By w在球坐标中写出 Δ，我们发现每个 $u_{\ell,m}$ 都满足常微分方程

$$r^2 u''_{\ell,m}(r) + (n-1) r u'(r) - \ell(\ell+n-2) u(r) = 0,$$

其解基为 $\{r^\ell, r^{2-n-\ell}\}$ （除非 $n = 2$ 且 $\ell = 0$，此时解基为 $\{1, \log\ r\}$）。回忆

$$\ell_0(n) := \begin{cases} 2 & n = 2 \\ 1 & n = 3, 4 \\ 0 & n \ge 5, \end{cases}$$

并注意到 $r^{2-n-\ell} \in L^2([R,\infty)\ r^{n-1}\,dr)$ 当且仅当 $\ell \ge \ell_0$，这迫使 $f_{\ell,m} = 0$ 对于$\ell < \ell_0$。因此我们有

$$u(r\omega) = \sum_{\ell \ge \ell_0} \sum_{m \in \mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m} \left(\frac{r}{R}\right)^{2-n-\ell} Y_{\ell,m}(\omega),$$

满足 (A.1)，因此只需估计 $\|u\|_{H^2(B_R^+)}$。通过缩放，不妨取 $R = 1$。

利用$Y_{\ell,m}$的正交性，积分可得

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2(B_R^c)} &\le C \sum_{\ell \ge \ell_0} \sum_{m \in \mathcal{M}_\ell} \ell^{-1} \|f_{\ell,m}\|^2 \\ &\le C\|f\|^2_{L^2(\partial B_R)}. \end{aligned}$$

将梯度写成球坐标形式，得到

$$\begin{aligned} \nabla u &= \frac{\partial u}{\partial r}\hat{r} + r^{-2} \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} u \\ &= \sum_{\ell \ge \ell_0} \sum_{m \in \mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m} r^{1-n-\ell} \left((2-n-\ell) Y_{\ell,m}(\omega)\hat{r} + r^{-1} \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{\ell,m}(\omega) \right). \end{aligned}$$

注意，由于将 $|\theta|$ 归一化为 1，梯度的表达式与通常的表达式 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} u\hat{\theta}$ 不同。

于是我们可以估计

$$\begin{aligned} \| \sum_{\ell \ge \ell_0} \sum_{m \in \mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m} r^{1-n-\ell} \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{\ell,m}(\omega) \|^2_{L^2(B_R^+)} &\le C \sum_{\ell \ge \ell_0} \sum_{m \in \mathcal{M}_\ell} \ell^{-1} |f_{\ell,m}|^2 \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{\ell,m}(\omega)|^2 \, d\omega \\ &\le C\|f\|^2_{H^{1/2}(\partial B_R)} \end{aligned}$$

利用恒等式

$$\langle \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{\ell,m}, \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{\ell',m'} \rangle = -\langle \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_{\ell,m}, Y_{\ell',m'} \rangle$$

利用向量场的正交性 $\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{\ell,m}$，并得到最后一行。界定

$$\|\sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m} r^{1-n-\ell}(2-n-\ell)Y_{\ell,m}(\omega)\hat{r}\|_{L^2(B_R^c)} \leq C\|f\|_{L^2(\partial B_R)},$$

与之前一样，我们发现

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_R^+)} \leq C\|f\|_{H^{1/2}(\partial B_R)}.$$

接下来，我们计算得，对于形如 $h(r)Y_{\ell,\ m}(\omega)$ 的函数，

$$\begin{aligned}\nabla^2(hY) = h''Y_{\ell,m}dr\otimes dr + \left(h'(r) - \frac{h(r)}{r}\right)(dr\otimes dY_{\ell,m} + dY_{\ell,m}\otimes dr)\\ + rh'Y_{\ell,m}g_{\mathbb{S}^{n-1}} + h\nabla^2_{\mathbb{S}^{n-1}}Y_{\ell,m}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 u\|_{L^2(B_R^+)} \leq C(&\|\sum_{\ell\geq\ell_0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell}\ell^2 f_{\ell,m}r^{-n-\ell}dr\otimes dr\|_{L^2(B_R^+)} + \|\sum_{\ell\geq\ell_0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell}\ell f_{\ell,m}r^{1-n-\ell}dr\otimes dY_{\ell,m}\|_{L^2(B_R^+)}\\ &+\|\sum_{\ell\geq\ell_0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell}\ell f_{\ell,m}r^{2-n-\ell}Y_{\ell,m}g_{\mathbb{S}^{n-1}}\|_{L^2(B_R^+)} + \|\sum_{\ell\geq\ell_0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m}r^{2-n-\ell}\nabla^2_{\mathbb{S}^{n-1}}Y_{\ell,m}\|_{L^2(B_R^+)}).\end{aligned}$$

第一个 三项的估计与之前相同，而对于最后一项，我们写作

$$\begin{aligned}&\|\sum_{\ell\geq\ell_0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m}r^{2-n-\ell}\nabla^2_{\mathbb{S}^{n-1}}Y_{\ell,m}\|^2_{L^2(B_R^+)} \leq\\ &\int_0^\infty \left\|\nabla^2_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\sum_{\ell\geq\ell_0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m}r^{2-n-\ell}Y_{\ell,m}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} r^{n-1}\,dr\end{aligned}$$

然后在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上应用椭圆正则性：

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left\|\nabla^2_{\mathbb{S}^{d-1}}\left(\sum_{\ell\geq\ell_0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m}r^{2-n-\ell}Y_{\ell,m}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} r^{d-1}\,dr \leq\\ &\int_0^\infty \left\|\sum_{\ell\geq\ell_0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m}r^{2-n-\ell}(1+\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}})Y_{\ell,m}\right\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} r^{n-1}\,dr.\end{aligned}$$

在 r 上积分，并利用球谐函数的正交性，我们得出

$$\begin{aligned}\|\sum_{\ell\geq\ell_0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m}r^{2-n-\ell}\nabla^2_{\mathbb{S}^{n-1}}Y_{\ell,m}\|^2_{L^2(B_R^+)} &\leq C\sum_{\ell\geq\ell_0}\sum_{\mathcal{M}_\ell}\ell^{-1}|f_{\ell,m}|^2\|(1+\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}})Y_{\ell,m}\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\\ &\leq C\|f\|^2_{H^{3/2}(\partial B_R)}.\end{aligned}$$

已将 $\|u\|_{L^2}$、$\|\nabla u\|_{L^2}$ 和 $\|\nabla^2 u\|_{L^2}$ 表示为关于 $\|f\|_{H^{3/2}(\partial B_R)}$ 的估计，证明至此完成。□

引理 A.2. 固定 $E\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$。设 $f\in H^{3/2}(\partial B_R)$ 由下式给出

$$\sum_{\ell\geq 0}\sum_{m\in\mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m}Y_{\ell,m}.$$

那么，满足下式的唯一 $u \in H^2(B_R^-)$

$$\begin{cases}(-\Delta - E)u = 0\\ T^- u = f,\end{cases} \tag{A.3}$$

由下式给出

$$u(r\omega) = \sum_{\ell \geq \ell_0} \sum_{m \in \mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m} \left(\frac{r}{R}\right)^{1-n/2} \frac{K_{n/2+\ell-1}(zr)}{K_{n/2+\ell-1}(zR)} Y_{\ell,m}(\omega),$$

其中 $z^2 = -E$ 满足 $\Re z > 0$，且 K_ν 是第二类修正贝塞尔函数。类似地，唯一的 $u \in H^2(B_R^+)$ 解满足

$$\begin{cases}(-\Delta - E)u = 0\\ T^+ u = f,\end{cases} \tag{A.4}$$

由下式给出

$$u(r\omega) = \sum_{\ell \geq \ell_0} \sum_{m \in \mathcal{M}_\ell} f_{\ell,m} \left(\frac{r}{R}\right)^{1-n/2} \frac{I_{n/2+\ell-1}(zr)}{I_{n/2+\ell-1}(zR)} Y_{\ell,m}(\omega),$$

其中 I_ν 是第二类修正贝塞尔函数。

证明。与引理 A.1 的证明一样，每个 $u_{\ell,m}$ 都满足常微分方程

$$r^2 u''_{\ell,m}(r) + (n-1) r u'(r) - \ell(\ell + n - 2) u(r) = 0.$$

使用变量替换

$$h(r) = r^{\frac{n}{2}-1} u_{\ell,m}(r),$$

容易看出，解基为 $\{r^{1-n/2} I_{n/2+\ell-1}(zr)\ r^{1-n/2} K_{n/2+\ell-1}(zr)\}$由 [9, 10.17.3-4], 可知，当 $r \to \infty$ 时，对于某些常数 $C_{1,\ 2} > 0$

$$I_\nu(r) = C_1 \frac{e^r}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} + O(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}})$$
$$K_\nu(r) = C_2 \frac{\sqrt{\pi} e^{-r}}{(2r)^{\frac{1}{2}}} + O(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}})$$

因此，解 B_R^+ 必须与 $r^{1-n/2} K_{n/2+\ell-1}(zr)$成比例。另一方面，由 [9, 10.30(i)], 可知，当 $r \to 0$时，对于某些常数 $C_{1,\ 2} > 0$

$$I_\nu(r) = C_1 (\frac{r}{2})^\nu + O(r^{\nu+1})$$
$$K_\nu(r) = C_2 (\frac{r}{2})^{-\nu} + O(r^{-\nu+1}),$$

因此，唯一在 0 附近的解必定与 $r^{1-n/2} I_{n/2+\ell-1}(zr)$成比例。代入边界条件后，结论即得。□

References

1. W. Amrein 和 V. Georgescu，论量子力学中束缚态与散射态的刻画，Helvetica Physica Acta 46（1974），第 5 期，635–658。2. J. Asch 和 A. Knauf，周期势中的运动，Nonlinearity 11（1998），第 1 期，175–200。3. A. Black、D. Damanik、T. Malinovitch 和 G. Young，¨上的部分周期 Schr ¨odinger 算子的定向弹道输运，arXiv 预印本 arXiv:2311.08612（2023）。4. A. Black 和 T. Malinovitch，集中于子空间附近的势所对应的 Schr ¨odinger 算子的散射，Transactions of the American Mathematical Society 376（2023），第 4 期，2525–2555。5. J. Conway，《单复变函数》，第 2 版，Graduate Texts in Mathematics，第 11 卷，Springer-Verlag，纽约—柏林，1978。MR 503901 6. D. Damanik、T. Malinovitch 和 G. Young，什么是弹道输运？，Journal of Spectral Theory（2024）。7. D. Damanik 和 Z. Zhao，具有衰减势的离散多维 Schr ¨odinger 算子的弹道输运，arXiv 预印本 arXiv:2507.04988（2025）。8. E. B. Davies 和 B. Simon，左右两侧具有不同空间渐近行为的系统的散射理论，Communications in Mathematical Physics 63（1978），第 3 期，277–301。9. NIST 数学函数数字图书馆，https://dlmf.nist.gov/，2023-09-15 发布的 1.1.11 版，F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。10. N. Dunford 和 J. Schwartz，《线性算子·第一部分》，Wiley Classics Library，John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1988，一般理论；William G. Bade 和 Robert G. Bartle 协助编写；1958 年原版重印；Wiley-Interscience 出版物。MR 1009162 11. J. Fillman，$\mathbb{Z}^d$上的周期 Jacobi 算子的弹道输运，From Operator Theory to Orthogonal Polynomials, Combinatorics, and Number Theory: A Volume in Honor of Lance Littlejohn's 70th Birthday，施普林格，2021，第 57–68 页。12. N. Filonov，某些具有部分周期系数的算子不存在特征值，St. Petersburg Mathematical Journal 33（2022），第 5 期，867–878。13. N. Filonov 和 F. Klopp，某些方向上周期、其他方向上衰减的势所对应的 Schr ¨odinger 算子的谱的绝对连续性，Documenta Mathematica 9（2004），107–121。14. N Filonov 和 F. Klopp，系数在某些方向上周期、在其他方向上衰减的各向同性麦克斯韦算子的绝对连续谱，Communications in mathematical physics 258（2005），第 1 期，75–85。15. S. Fliss，采用狄利克雷到诺伊曼方法精确计算光子晶体波导中的导模，SIAM Journal on Scientific Computing 35（2013），第 2 期，B438–B461。16. I. S. Gradshtein、I. Ryzhik、A. Jeffrey 和 D. Zwillinger，《积分、级数与乘积表》，第七版，Academic，牛津，2007–2007（英语）。17. V. Hoang 和 M. Radosz，二维周期结构中波导的束缚态不存在，Journal of Mathematical Physics 55（2014），第 3 期，033506。18. L. H¨ormander，《多复变函数论导论》，第 3 版，North-Holland Mathematical Library，第 7 卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1990。MR 1045639 19. Y. Karpeshina、Y. Lee、R. Shterenberg 和 G. Stolz，二维中具有极限周期或准周期势的 Schr ¨odinger 算子的弹道输运，Communications in Mathematical Physics 354（2017），85–113。20. Y. Karpeshina、L. Parnovski 和 R. Shterenberg，具有准周期势的 Schr ¨odinger 算子的弹道输运，Journal of Mathematical Physics 62（2021），第 5 期，053504。21. P Kuchment，偏微分方程的 Floquet 理论，Operator theory: Advances and Applications 60（1993）。22. P. Kuchment，周期椭圆算子概述，Bulletin of the American Mathematical Society 53（2016），343–414。23.，周期椭圆偏微分算子：主要结构，剑桥大学出版社，2026。24. L. Landau，贝塞尔函数：单调性与界，Journal of the London Mathematical Society 61（2000），第 1 期，197–215。

25. W. McLean，《强椭圆系统与边界积分方程》，剑桥大学出版社，2000。26. B. Mityagin，《实解析函数的零点集》，《数学札记》107（2020），第3期，529–530。27. C. Radin 和 B. Simon，《时变薛定谔方程的不变域》，《微分方程杂志》29（1978），第2期，289–296。28. M. Reed 和 B. Simon，《现代数理物理方法—IV：算子分析》，第4卷，爱思唯尔，1978。29.，《现代数理物理方法—I：泛函分析》，第1卷，Gulf Professional Publishing，1980。30. D. Ruelle，《关于势散射理论中束缚态的一则评论》，《新物理学杂志A辑》（1965–1970）61（1969），第4期，655–662。31. M. Shubin，《巴拿赫空间子空间的全纯族》，《积分方程与算子理论》2（1979），第3期，407–420。32. John Sylvester 和 Gunther Uhlmann，《狄利克雷到诺伊曼映射及其应用》，《偏微分方程中的反问题》42（1990），101。33. M. Taylor，《偏微分方程. 1：基础理论》，施普林格，1996。34.，《偏微分方程 II：线性方程的定性研究》，第116卷，施普林格科学与商业媒体，2010。35. G. Teschl，《量子力学中的数学方法》，第157卷，美国数学学会，2014。36. L. E Thomas，《晶体中杂质散射的时变方法》，Communications in Mathematical Physics 33（1973），335–343。37. C.H. Wilcox，《布洛赫波理论》，《数学分析杂志》33（1978），第1期，146–167。38. D. Yafaev，《数学散射理论：一般理论》，第105卷，美国数学学会，1992。39. M. Zaidenberg、S. Krein、P. Kuchment 和 A. Pankov，《巴拿赫丛与线性算子》，《俄罗斯数学评论》30（1975），第5期，115.Department of Mathematics, University of California, Berkeley, Berkeley, CA 94720电子邮箱：adamblack@berkeley.edu
Department of Mathematics, Rice University, Houston, TX, 77005 电子邮箱：damanik@rice.eduDepartment of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843Department of Mathematics, Rice University, Houston, TX, 77005 电子邮箱：tal.malinovitch@rice.eduDepartment of Mathematics, The University of Wisconsin, Madison, WI 53706电子邮箱：gfyoung@wisc.edu