Gorenstein 特殊纤维环上的梯形行列式模

Louiza Fouli、Kuei-Nuan Lin、Haydee Lindo、Maral Mostafazadehfard

Abstract. 梯形行列式模是一般梯形矩阵的极大子式理想的任意直和。本文给出了此类模的特殊纤维环为 Gorenstein 环的充要条件。这些条件以从底层矩阵获得的数据表示。

arXiv:2601.13483v1 [math.AC] 20 Jan 2026

1. Introduction

设 R 是诺特环，或是域 $\mathbb{K}$上的标准分次环。对于有限生成的R-模 M， M, $\mathcal{R}(M)$ 的 *Rees*代数是一个自然推广理想的 Rees代数概念的代数。它被定义为 M的对称代数对其挠元的商。从几何上看， $\mathcal{R}(M)$对应于沿 M对 Spec(R) 进行的爆破，这推广了沿理想进行爆破的概念。模的 Rees代数描述了由 M诱导的有理映射的图的闭包。当 R 是局部环且其剩余域为 $\mathbb{K}$, 或者 R 是域 $\mathbb{K}$ 上的标准分次环时，可以考虑另一种爆破代数，即 M的特殊纤维环，定义为 $\mathcal{F}(M) := \mathcal{R}(M) \otimes_R \mathbb{K}$。换言之， M 的特殊纤维环是由 M 的生成元在 $\mathbb{K}$上的像生成的代数。从几何上看，$\mathcal{F}(M)$ 是沿 M对 Spec(R) 进行爆破所得例外纤维的齐次坐标环。

当一个坐标环是 Gorenstein 环时，其对应的代数簇具有特别良好的对偶性质，例如典范层会变得可逆， [1, 第 3]章。这通常意味着该代数簇具有温和的奇点以及良好表现的对偶化复形，而这些性质在双有理几何和极小模型纲领中至关重要 [6, 第 21]章。

特殊纤维环的 Gorenstein 性质在交换代数和代数几何中得到了广泛研究。Lima 和 P´erez [14] 建立了 Hilbert过滤的特殊纤维（纤维锥）为 Gorenstein 环的充要条件，并将其与长度和生成元数量等组合不变量联系起来。更早以前，Heinzer、Kim 和 Ulrich [9] 证明，在适当的假设下，在一个 Gorenstein 环 R中，理想 I 的伴随分次环是 Gorenstein 环，当且仅当 $\mathcal{F}(I)$ 和 R/I 都是 Gorenstein 环。进一步地，Kustin、Polini 和 Ulrich [13]分析了高度三Gorenstein理想的特殊纤维环，证明这些环通常继承良好的对偶性质和结构性质。

我们研究的主要对象是梯形行列式模的特殊纤维。梯形行列式模是一个模，它是一般梯形矩阵的极大子式理想的有限个副本的直和；所谓一般梯形矩阵，是指由零和不定元构成、且非零元素形成梯形形状的矩阵，更多详情见第2 节。Conca、Herzog 和 Valla， [4], 研究了有理正规滚曲面的 Rees代数和特殊纤维代数，并确定了这些代数的定义方程。此外，通过研究 h-向量的对称性，他们确定了这些有理正规滚曲面的特殊纤维环为 Gorenstein 的充要条件。近期的研究加深了我们对行列式理想的特殊纤维环的理解：对于稀疏 2×2 矩阵的 $2 \times n$ 子式理想, Celikbas 等人证明，特殊纤维环的定义方程正是预期的（Pl¨ucker 型）关系，并据此推导出该特殊纤维环的正规性、Cohen–Macaulay性以及许多相关不变量， [2]。Ramkumar 和 Sammartano 证明，对于若干族的

2020 *Mathematics Subject Classification*。主要分类号：13C40、13A30、13H10；次要分类号：14M12、14M15、13C70。关键词：多重 Rees 代数、行列式、Gorenstein、Hibi 环。

2-行列式理想的 Rees代数和特殊纤维环是 Cohen–Macaulay 的，并具有二次（Koszul）表示 [19]。

Lin 和 Shen 划分了有理正规滚曲面的割线簇的特殊纤维环何时具有 Gorenstein 性质，[15]。随后，同一组作者确定了梯形行列式模的 Rees代数和特殊纤维环的定义方程，[16, 定理 5.5]。最近，Costantini 及其合作者计算了梯形行列式模的特殊纤维代数的各种代数不变量，见 [5]。

事实证明，梯形行列式模的特殊纤维环的初始代数是一个 Hibi 环 [16, 定理 4。8]。通过 Sagbi 变形，我们证明，对 $\mathcal{F}(M)$ 的 Gorenstein 性质的研究可以归结为研究由给定梯形矩阵的极大子式理想的特殊纤维环初始代数所导出的 Hibi 环的 Gorenstein 性质，命题4.1。

众所周知，Hibi 环是 Gorenstein 的，当且仅当与该环相关联的分配格具有纯的不可约偏序集，也就是说，该偏序集中的所有极大链长度都相同，[11]。最近，Miyazaki 证明，舒伯特簇的齐次坐标环是由分配格生成的带整直律代数，并利用 Hibi 环的不可约偏序集，对舒伯特循环何时为 Gorenstein 给出了组合描述，[17]。舒伯特循环对应于单侧梯形矩阵的极大子式。在我们的工作中，我们研究双侧梯形矩阵，并将研究拓展至极大子式理想直和的特殊纤维环。

现在我们介绍本文的主要结果。在第 2 节中，我们建立所需的记号和框架。在第 3 节中，我们明确描述作为梯形行列式模特殊纤维代数初始代数的 Hibi 环的不可约偏序集，推论 3.6。具体而言，我们将梯形矩阵与 Hibi 环的不可约偏序集相关联，从给定的梯形矩阵即可读出不可约元，详见推论 3.6 和例子 3.13 中的说明性例子。基于这一直接联系，在定理 4.11 和定理 4.12 中，我们给出了从矩阵结构角度判断梯形行列式模的特殊纤维环是否为 Gorenstein 的充要条件。作为这些结果的应用，我们明确计算了这些代数在具有 Gorenstein 性质时的正则度、约化数和 a-不变量，推论 4.14。最后，我们考察这些特殊纤维环是否为 F-正则的问题。当 $\mathcal{F}(M)$ 为 Gorenstein 时，可知其为 F-正则，推论 4.15。本文最后给出一个例子，说明即使不具备 Gorenstein 性质，仍可证明梯形矩阵极大子式理想的特殊纤维环是F-正则，例子 4.16。

这里需要指出，我们考虑的理想是梯形矩阵的极大子式理想，通常不同于 [3] 中所考虑的梯形行列式理想。此外，我们考虑的特殊纤维环通常不是多项式环对行列式理想取商所得的商环。

2. Preliminaries and notations

我们约定，若 p 和 q 是满足 $p \le q$ 的两个正整数，则区间 $[p, q]$ 表示集合 $\{p, p+1, \dots, q-1, q\}$。当 $p = 1$ 时，我们用 $[q]$ 表示区间 $[1, q]$。本文中我们将始终采用下述定义中的记号。

定义 2.1。设 $\mathbb{K}$ 是一个域，且 m, n, r 是满足 $n < m$ 的正整数。记作 $[m] = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$，其中对每个 $i \in [n]$，$S_i := [u_i, v_i]$，这里 u_i, v_i 是满足 $u_i < v_i$ 的某些正整数。不失一般性，我们可以假设 $1 = u_1 < u_2 < \cdots < u_n < m$ 且 $1 < v_1 < v_2 < \cdots < v_n = m$。对每个 $i \in [n]$ 和每个 $j \in S_i$，令 $x_{i,j}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上的一个不定元。令 $\mathbb{S} := \{S_1, \dots, S_n\}$。

(a) 令$\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 为 $n \times m$ 矩阵，其第 (i, j) 个元素在 $j \in S_i$ 时为$x_{i,j}$，否则为 0。我们称$\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 为与 $\mathbb{S}$相关联的梯形矩阵 。(b) 令 $R := \mathbb{K}[\mathbf{X}_{\mathbb{S}}] = \mathbb{K}[x_{i,j} : i \in [n], j \in S_i]$ 为 $\mathbb{K}$ 上的多项式环，并令 $L := I_n(\mathbf{X}_{\mathbb{S}})$为由$\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$的 $n \times n$ （极大）子式生成的 R-理想。

(c) 令 $\mathcal{L} := \{\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n : c_i < c_{i+1}$ 对所有 $i \in [n-1]\}$均成立。注意，由于 $\boldsymbol{X}_{\mathbb{S}}$ 的梯形形状，对于任意 $\boldsymbol{c} \in \mathcal{L}$，我们有 $\det[\boldsymbol{c}] \neq 0$，其中 $\det[\boldsymbol{c}]$ 是$\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$的 $n \times n$ 子矩阵的行列式，其列为 $c_1, \ldots, c_n$。因此，集合 $\{\det[\boldsymbol{c}] : \boldsymbol{c} \in \mathcal{L}\}$ 是理想 L的极小生成集。

(d) 模 $M = \bigoplus_{i=1}^{r} L$ 称为与矩阵 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$相关联的梯形行列式模。令 $\mathcal{L} \times [r] := \{(\boldsymbol{c}, j) : \boldsymbol{c} \in \mathcal{L}, j \in [r]\}$ 为 $\mathcal{L}$ 与 $[r]$的笛卡尔积，并注意到集合 $\{(\det[\boldsymbol{c}], j) : (\boldsymbol{c}, j) \in \mathcal{L} \times [r]\}$ 是 M的极小生成集。(e) 令 τ 为环 R 上的字典序，该字典序由 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$中各项的字典序诱导，也就是说，$x_{i,j} >_\tau x_{l,k}$ 当且仅当 $i < l$ 或 $i = l$ 且 $j < k$。(f) 令 $N = \bigoplus_{i=1}^{r}$为 $\tau(L)$ 中相对于 τ的 L 的初始理想的直和。(g) 对所有 $i \in [n]$ 及所有 $j \in [n-1]$，令 $\Delta_i := v_i - u_i$, $\epsilon_j := u_{j+1} - u_j$，且 $\theta_j := v_{j+1} - v_j$。我们采用如下约定：$\epsilon_n = \theta_0 = \infty$。

我们考察与模 $M = \bigoplus_{j=1}^{r} L$ 相关的爆破代数。此类模 M 的*Rees*代数，$\mathcal{R}(M)$，以及特殊纤维环，$\mathcal{F}(M)$，定义如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(M) &:= R[Lt_1, \ldots, Lt_r] \\ &= \bigoplus_{a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} L^{\sum_{i=1}^{r} a_i} t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r} \subseteq R[t_1, \ldots, t_r], \\ \mathcal{F}(M) &:= \mathcal{R}(M) \otimes_R \mathbb{K} \cong \mathbb{K}[\det[\boldsymbol{c}]t_j : (\boldsymbol{c}, j) \in \mathcal{L} \times [r]].\end{aligned}$$

可以通过以下方式将特殊纤维环表示为一个多项式环的商。令 $\{T_{\boldsymbol{c},j} : (\boldsymbol{c}, j) \in \mathcal{L} \times [r]\}$ 是一组新的不定元，它们在 $\mathbb{K}$ 上取值，并令 $T := \mathbb{K}[\{T_{\boldsymbol{c},j} : (\boldsymbol{c}, j) \in \mathcal{L} \times [r]\}]$。我们定义如下满同态：

$$\psi : T \longrightarrow \mathcal{F}(M),$$

对每个 $(\boldsymbol{c}, j) \in \mathcal{L} \times [r]$，由 $\psi(T_{\boldsymbol{c},j}) = \det[\boldsymbol{c}]t_j$ 确定。于是 $\mathcal{F}(M) \cong T/\ker(\psi)$，而理想 $\ker(\psi)$ 称为 $\mathcal{F}(M)$ 的定义或表示理想。

为了研究 $\mathcal{F}(M)$ 的 Gorenstein 性质，我们采用 Sagbi 退化方法。回顾一下，对于一个 $\mathbb{K}$-代数 A，若一组元素 $\mathcal{B} \subseteq A$ 关于单项式序 $>$构成 A 的 Sagbi 基，则 $\mathrm{in}_>(A) = \mathbb{K}[\mathrm{in}_>(\mathcal{B})]$。对于我们所考虑的梯形行列式模，Lin 和 Shen 证明了 M 的自然生成元构成 $\mathcal{F}(M)$ 的 Sagbi 基，并利用这个 Sagbi 基确定了 $\mathcal{F}(M)$ 的定义方程。

定理 2.2 ([16, 定理 4.8. 5.5，推论 4.10. 5.7])。设 M 和 N 如定义 *2.1*中所述。

(a) 集合 $\{\det[\boldsymbol{c}]t_i : (\boldsymbol{c}, i) \in \mathcal{L} \times [r]\}$ 是 $\mathcal{F}(M)$ 关于扩展单项式序 τ' 的一个 Sagbi基，即 $\mathrm{in}_{\tau'}(\mathcal{F}(M)) = \mathcal{F}(N)$。此外，存在一个定义在 T 上的单项式序 ω，使得 $\mathrm{in}_\omega(\mathcal{K}) = \mathrm{in}_\sigma(\mathcal{J})$，其中 $\mathcal{K}$、$\mathcal{J}$分别是 $\mathcal{F}(M)$ 和 $\mathcal{F}(N)$ 的定义理想。

(b) $\mathbb{K}$-代数 $\mathcal{F}(N)$是一个 *Hibi* 环，并且同构于 $T/\mathcal{J}$，其中

$$\mathcal{J} = (T_{\boldsymbol{a}} T_{\boldsymbol{b}} - T_{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}} T_{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}} : \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{L} \times [r]).$$

(c) $\mathcal{F}(M)$和 $\mathcal{F}(N)$都是 *Cohen–Macaulay* 正规整环。

我们注意到，$\mathcal{F}(N)$ 是与分配格 $\mathcal{L} \times [r]$ 相关联的 Hibi 环。事实上，集合 $\mathcal{L} \times [r]$ 具有如下定义的偏序：

$$(\boldsymbol{a}, j_1) = (a_1, \ldots, a_n, j_1) \geq (\boldsymbol{b}, j_2) = (b_1, \ldots, b_n, j_2)$$

当且仅当 $a_i \geq b_i$对所有 $i \in [n]$且 $j_1 \geq j_2$，或等价地，$[(\boldsymbol{a}, j_1)]_i \geq [(\boldsymbol{b}, j_2)]_i$对所有 $i \in [n+1]$成立，其中记号 $[-]_i$ 用于表示相应元组的第 i 个分量。在此偏序下，$\mathcal{L} \times [r]$ 成为一个分配格，其交和并定义为：

$$\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d} = \min\{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\} \text{ and } \boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d} = \max\{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\} \text{ for any } \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathcal{L} \times [r],$$

其中，两个元组的最小值和最大值分别是各分量的最小值和最大值所组成的向量。换言之，对于 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathcal{L} \times [r]$，我们有 $[\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}]_i = \min\{[\boldsymbol{c}]_i, [\boldsymbol{d}]_i\}$ 和 $[\boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d}]_i = \max\{[\boldsymbol{c}]_i, [\boldsymbol{d}]_i\}$ 对所有 $i \in [n+1]$成立。

我们以如下注记结束本节。

注 2.3. 对所有 $i \in [2, n]$，若 $u_{i-1} < u_i$，令 $S'_i = S_i$；当$u_{i-1} = u_i$时，令 $S'_i = [u_i + 1, v_i]$。令 $\mathbb{S}' = \{S_1, S'_2, \ldots, S'_n\}$，并令 $\mathrm{X}_{\mathbb{S}'}$ 为对应于 $\mathbb{S}'$的梯形矩阵。注意，在$\tau(I_n(\mathrm{X}_{\mathbb{S}}))$ 中，$=$属于$\tau(I_n(\mathrm{X}_{\mathbb{S}'}))$。此外，由于 τ是对角单项式序，我们可以假设对所有 $i \in [2, n]$，都有 $u_i \leq v_{i-1} + 1$。因此，不失一般性，我们可以假设 $u_i < u_{i+1}$ 且 $v_i < v_{i+1}$ 如定义 2.1 所述。若对某个 $i \in [n]$有 $u_i = v_i$，则$L = x_{i,u_i} I_{n-1}(\mathrm{X}'_{\mathbb{S}})$，其中 $\mathrm{X}'_{\mathbb{S}}$ 是从 $\mathrm{X}_{\mathbb{S}}$ 中删除第 i行后得到的梯形矩阵。注意，$\mathcal{F}(M) \cong \mathcal{F}(\bigoplus_{i=1}^{r} I_{n-1}(\mathrm{X}'_{\mathbb{S}}))$，因此不失一般性，我们可以假设对所有 $i \in [n]$，都有$u_i < v_i$，如定义 2.1 所述。此外，在上述假设下，通过考虑满足 $\epsilon_i = 1$ 且对所有 $i \in [n-1]$都有 $\theta_i = 1$ 的 $\mathrm{X}_{\mathbb{S}}$，我们涵盖了一般矩阵的情形。最后，若 $n = m$，则 $\mathcal{F}(M)$ 是一个多项式环，这种情形无需证明。因此，我们可以假设 $n < m$。

3. The join-irreducible poset

在本文中，我们沿用定义 2.1中的记号。我们首先介绍一组元组，并将用它们构造偏序集的不可约元集合$\mathcal{L} \times [r]$。

定义 3.1. 对于每个 $i \in [n]$ 以及每个 $j \in [u_i + 1, v_i]$ 集合

$$\boldsymbol{a}_{i,j} := (u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, j, \max\{j+1, u_{i+1}\}, \ldots, \max\{j + (n-i), u_n\}).$$

对于所有 $k \in [2, r]$，定义

$$\boldsymbol{a}_{n+1,k} := (u_1, \ldots, u_n, k).$$

注 3.2. 根据构造，每个$\boldsymbol{a}_{i,\,j}$ 都由其第 i 个分量 $[\boldsymbol{a}_{i,j}]_i$ 确定；对于固定的 i，有 $|\{\boldsymbol{a}_{i,j}\}_{j \in [u_i+1, v_i]}| = \Delta_i$ 和 $\boldsymbol{a}_{i,\,j} \in \mathcal{L}$。事实上，对于任意 $s \in [0, n-i]$，若

$$[\boldsymbol{a}_{i,j}]_{i+s} = \max\{j+s, u_{i+s}\} = j + s,$$

则 $u_{i+s} \leq j + s \leq v_i + s \leq v_{i+s}$，其中最后一个不等式由矩阵的阶梯结构推出。因此，$u_{i+s} \leq [\boldsymbol{a}_{i,j}]_{i+s} \leq v_{i+s}$ 意味着 $\boldsymbol{a}_{i,\,j} \in \mathcal{L}$。

定义 3.3。设 P为任意偏序集，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in P$，其中 $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$。若不存在满足 $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{c} < \boldsymbol{a}$的 $\boldsymbol{c} \in P$，则称 $\boldsymbol{a}$覆盖 $\boldsymbol{b}$，并记为 $\boldsymbol{b} \lessdot \boldsymbol{a}$。

备注 3.4。偏序集 P 中的不可约并元是指在 P中恰好覆盖另一个元素的任意元素。我们的目标是确定 $\mathcal{L}$ 的不可约并元，并理解 $\mathcal{L} \times [r]$ 和 $\mathcal{L}$的不可约并元所成偏序集的偏序集结构。注意，将范围限制在不可约并元集合上时，一个不可约并元可能覆盖多个其他不可约并元；参见引理3.8。

下面的结果表明，我们在定义 3.1中定义的元素实际上是 $\mathcal{L}$的不可约并元。

命题 3.5。集合

$$P_{\mathcal{L}} := \{\boldsymbol{a}_{i,j} : i \in [n], j \in [u_i + 1, v_i]\}$$

是 $\mathcal{L}$ 的不可约元集合。

证明。令 P 为 $\mathcal{L}$ 的不可约元集合。我们断言 $P = P_{\mathcal{L}}$。根据 [5,推论 4.24]，可知 $|P| = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$；又由于$|P_{\mathcal{L}}| = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$，只要证明 $P_{\mathcal{L}} \subseteq P$，结论便得证。

我们声称，对于任意 $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots\ldots, c_n) \in \mathcal{L}$，若 $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{a}_{i,\,j}$，则 $[\boldsymbol{c}]_i < [\boldsymbol{a}_{i,j}]_i = j$。事实上，对于任意 $t \in [1, i-1]$，我们有 $[\boldsymbol{c}]_t = c_t = u_t = [\boldsymbol{a}_{i,j}]_t$。由于 $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{a}_{i,\,j}$，存在 $s \geq i$ 使得 $[\boldsymbol{c}]_s = c_s < [\boldsymbol{a}_{i,j}]_s$，并且对所有 $t \leq s-1$ 都有 $[\boldsymbol{c}]_t = [\boldsymbol{a}_{i,j}]_t$。若 $s > i$，则根据 $\mathcal{L}$ 的构造，我们

有 $u_s \le [\boldsymbol{c}]_s < [\boldsymbol{a}_{i,j}]_s =$ 最大值$\{j+s-i, u_s\} = j+s-i$。此外，根据定义 3.1，我们有$[\boldsymbol{a}_{i,j}]_{s-1} =$ 最大值$\{j+s-i-1, u_{s-1}\} = j+s-i-1$。于是

$$[\boldsymbol{c}]_{s-1} = [\boldsymbol{a}_{i,j}]_{s-1} = j+s-i-1 < [\boldsymbol{c}]_s < [\boldsymbol{a}_{i,j}]_s = j+s-i$$

这是不可能的。因此，$s = i$ 和 $[\boldsymbol{c}]_i < [\boldsymbol{a}_{i,j}]_i = j$。

现在定义

$$\boldsymbol{b}_{i,j} := (u_1, \dots, u_{i-1}, j-1, \max\{j+1, u_{i+1}\}, \dots, \max\{j+(n-i), u_n\}).$$

于是 $\boldsymbol{a}_{i,\,j}, \boldsymbol{b}_{i,\,j} \in \mathcal{L}$ 和 $\boldsymbol{b}_{i,\,j} < \boldsymbol{a}_{i,\,j}$。若 $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{a}_{i,\,j}$，则由上述论证可知，对所有 $t \in [i-1]$ 和 $[\boldsymbol{c}]_i < [\boldsymbol{a}_{i,j}]_i = j$，都有 $[\boldsymbol{c}]_t = [\boldsymbol{a}_{i,j}]_t = [\boldsymbol{b}_{i,j}]_t$。因此 $[\boldsymbol{c}]_i \le [\boldsymbol{b}_{i,j}]_i$。此外，对所有 $t \ne i$，都有 $[\boldsymbol{c}]_t \le [\boldsymbol{a}_{i,j}]_t = [\boldsymbol{b}_{i,j}]_t$。特别地，$\boldsymbol{c} \le \boldsymbol{b}_{i,\,j}$，因此 $\boldsymbol{b}_{i,\,j} \lessdot \boldsymbol{a}_{i,\,j}$，也就是说，$\boldsymbol{a}_{i,\,j}$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个不可约并元，正如所声称的那样。□

推论 3.6. $\mathcal{L} \times [r]$ 的不可约元恰好是这些元素

$$P_{\mathcal{L}\times[r]} := \{(\boldsymbol{a}_{i,j}, 1) : i \in [n], j \in [u_i+1, v_i]\} \cup \{\boldsymbol{a}_{n+1,k} : k \in [2, r]\}.$$

证明。令 P 为 $\mathcal{L} \times [r]$的不可约并元集合。根据 [5, 推论 4.24]，我们有$|P| = |P_{\mathcal{L}\times[r]}|$；与之前一样，只需证明 $P_{\mathcal{L}\times[r]} \subseteq P$。设 $(\boldsymbol{c}, k) \in \mathcal{L} \times [r]$。若 $k = 1$，则 $(\boldsymbol{c}, 1) \in P$当且仅当 $\boldsymbol{c} \in P_{\mathcal{L}}$。若 $k \ge 2$，则 $(\boldsymbol{c}, k-1) \lessdot (\boldsymbol{c}, k)$，且对任意满足 $\boldsymbol{d} \lessdot \boldsymbol{c}$的$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{c} \in \mathcal{L}$，都有 $(\boldsymbol{d}, k) \lessdot (\boldsymbol{c}, k)$。因此，当 $k \ge 2$时，$(\boldsymbol{c}, k) \in P$当且仅当不存在满足 $\boldsymbol{d} \lessdot \boldsymbol{c}$的 $\boldsymbol{d} \in \mathcal{L}$。后者意味着 $\boldsymbol{c} = (u_1, \dots, u_n)$，结论得证。□

确定了 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$（等价地，也确定了 $P_{\mathcal{L}}$）中的元素后，我们转而关注 $P_{\mathcal{L}}$ 的偏序集结构。

引理 3.7. 设 $\boldsymbol{a}_{i,j}, \boldsymbol{a}_{k,l} \in P_{\mathcal{L}}$. 那么 $\boldsymbol{a}_{k,l} \le \boldsymbol{a}_{i,j}$ 当且仅当 $k \ge i$ 且 $l - j \le k - i$。

证明. 设 $\boldsymbol{a}_{k,l} \le \boldsymbol{a}_{i,j}$。根据定义 3.1，我们必须有 $k \ge i$ 且 $[\boldsymbol{a}_{k,l}]_t \le [\boldsymbol{a}_{i,j}]_t$ 对所有$t \in [n]$。特别地，

$$u_k < l = [\boldsymbol{a}_{k,l}]_k \le [\boldsymbol{a}_{i,j}]_k = \max\{j+k-i, u_k\},$$

这意味着 $l - j \le k - i$。

反过来，设 $k \ge i$ 且 $l - j \le k - i$。对于任意 $t < k$，有 $[\boldsymbol{a}_{k,l}]_t = u_t \le [\boldsymbol{a}_{i,j}]_t$。对于任意 $t \ge k$，可得

$$[\boldsymbol{a}_{k,l}]_t = \max\{l + (t-k), u_t\} \le \max\{j + (t-i), u_t\} = [\boldsymbol{a}_{i,j}]_t$$

因此 $\boldsymbol{a}_{k,l} \le \boldsymbol{a}_{i,j}$。□

对于 $P_{\mathcal{L}}$的任意元素，我们确定它覆盖哪些元素。

Le理 3.8. 若 $\boldsymbol{a}_{i,j} \in P_{\mathcal{L}}$，那么$\boldsymbol{a}_{i,j}$ 所覆盖的唯一元素是 *se* 中的元素 t

$$\{\boldsymbol{a}_{i,j-1}, \boldsymbol{a}_{i+1,j+1}\},$$

其中可能是空集。此外，$\boldsymbol{a}_{i,j-1} \in P_{\mathcal{L}}$ 当且仅当 $j \ge u_i + 2$ 且 $\boldsymbol{a}_{i+1,j+1} \in P_{\mathcal{L}}$当且仅当 $j \ge u_{i+1}$ 且 $i \ne n$。

证明。首先注意，由于 $\boldsymbol{a}_{i,j} \in P_{\mathcal{L}}$，因此 $i \in [n]$ 和 $j \in [u_i+1, v_i]$。由定义 3.1，$\boldsymbol{a}_{i,j-1} \in P_{\mathcal{L}}$ 当且仅当 $j - 1 \in [u_i + 1, v_i]$，而后者等价于 $j \ge u_i + 2$，因为$j \le v_i$。类似地，$\boldsymbol{a}_{i+1,j+1} \in P_{\mathcal{L}}$ 当且仅当 $i + 1 \in [n]$ 和 $j + 1 \in [u_{i+1} + 1, v_{i+1}]$。由于 $i \in [n]$ 且 $j \le v_i < v_{i+1}$，我们可以得出，$\boldsymbol{a}_{i+1,j+1} \in P_{\mathcal{L}}$ 当且仅当 $i \ne n$和$j \ge u_{i+1}$。由引理 3.7，若 $\boldsymbol{a}_{i,j-1} \in P_{\mathcal{L}}$，则 $\boldsymbol{a}_{i,j-1} < \boldsymbol{a}_{i,j}$；类似地，若 $\boldsymbol{a}_{i+1,j+1} \in P_{\mathcal{L}}$，则$\boldsymbol{a}_{i+1,j+1} < \boldsymbol{a}_{i,j}$。

现在假设 $\boldsymbol{a}_{i,j}$ 覆盖 $\boldsymbol{a}_{g,h} \in P_{\mathcal{L}}$。由于 $\boldsymbol{a}_{g,h} < \boldsymbol{a}_{i,j}$，因此 $g \ge i$ 和 $h - j \le g - i$，由引理 3.7 可得。若 $g = i$，则 $h < j$，因为 $\boldsymbol{a}_{g,h} < \boldsymbol{a}_{i,j}$。于是 $h \le j - 1 < j$，并且由于 $\boldsymbol{a}_{g,h}, \boldsymbol{a}_{i,j} \in P_{\mathcal{L}}$，因此存在 $\boldsymbol{a}_{i,j-1}$，且 $\boldsymbol{a}_{g,h} \le \boldsymbol{a}_{i,j-1}$，再次由引理 3.7 可得。因此，$\boldsymbol{a}_{g,h} = \boldsymbol{a}_{i,j-1}$，因为 $\boldsymbol{a}_{i,j}$ 覆盖 $\boldsymbol{a}_{g,h}$。

若 $g > i$，则我们断言 $\boldsymbol{a}_{i+1,j+1}$ 存在，且 $\boldsymbol{a}_{g,h} = \boldsymbol{a}_{i+1,j+1}$。若 $\boldsymbol{a}_{i+1,j+1}$ 不存在，则 $j < u_i + 1$，因而 $h < u_i + 1 + g - i \le u_g + 1$。这意味着 $\boldsymbol{a}_{g,h}$ 不存在，

这与我们的假设矛盾，即 $\boldsymbol{a}_{i,j}$ 覆盖 $\boldsymbol{a}_{g,h} \in P_{\mathcal{L}}$。因此 $\boldsymbol{a}_{i+1,j+1}$ 存在，且由于$h-j \leq g-i = 1+g-(i+1)$，可得 $\boldsymbol{a}_{g,h} \leq \boldsymbol{a}_{i+1,j+1}$，引理 3.7。因此 $\boldsymbol{a}_{g,h} = \boldsymbol{a}_{i+1,j+1}$。

因此，$\boldsymbol{a}_{i,\ j}$ 覆盖 $P_{\mathcal{L}}$ 的一个元素，当且仅当 $\{\boldsymbol{a}_{i,j-1}, \boldsymbol{a}_{i+1,j+1}\} \neq \emptyset$。此外，当该集合非空时，$\boldsymbol{a}_{i,\ j}$ 只覆盖 $\{\boldsymbol{a}_{i,j-1}, \boldsymbol{a}_{i+1,j+1}\}$ 中的不可约元。□

这里指出，引理 3.8 蕴含：如果 $\boldsymbol{a}_{i,\ j-1}$ 和 $\boldsymbol{a}_{i+1,\ j+1}$ 均不存在，那么 $\boldsymbol{a}_{i,\ j}$ 不覆盖 $P_{\mathcal{L}}$ 中的任何元素。我们的下一个目标是理解 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$ 的连通分支。下面引入相应的记号。

记号3.9. 考虑集合

$$\mathcal{C} = \{i \in [n-1] : v_i < u_{i+1}\} \cup \{n\} = \{q_1, \ldots, q_{t-1}, q_t = n : q_i < q_{i+1} \text{ for all } i \in [n-1]\}.$$

注意到 $i \in \mathcal{C}$ 当且仅当 $u_{i+1} = v_i + 1$ 对所有 $i \in [n-1]$ 根据注记2.3。我们将 $[n]$分拆如下

$$[n] = [1, q_1] \cup [p_2, q_2] \cup \cdots \cup [p_t, q_t],$$

其中，对所有 $i \in [t-1]$，$p_{i+1} = q_i + 1$。为简单起见，令 $p_1 = 1$。注意，在这些假设下，$\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 是一个分块矩阵，含有 t 个块 $\mathbf{X}_i$，其中 $\mathbf{X}_i$ 是行 p_i 至 q_i 上的梯形矩阵：

$$\mathbf{X}_{\mathbb{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & & & \\ & \mathbf{X}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{X}_t \end{bmatrix}.$$

现在我们确定 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$的连通分支。

命题 3.10。 格 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$ 连通，当且仅当 $r = 1$ 且 $|\mathcal{C}| = 1$。特别地，当 $r = 1$ 时，$P_{\mathcal{L}\times[r]}$ 有 $|\mathcal{C}|$ 个连通分支；当 $r > 1$ 时，有 $|\mathcal{C}| + 1$ 个连通分支。

证明。 回忆 $P_{\mathcal{L}\times[r]} = \{(\boldsymbol{a}_{i,j}, \mathbf{1}) : i \in [n], j \in [u_i+1, v_i]\} \cup \{\boldsymbol{a}_{n+1,k} : k \in [2, r]\}$，推论 3.6。令 $\mathcal{C} = \{i \in [n-1] : v_i < u_{i+1}\} \cup \{n\} = \{q_1, \ldots, q_{t-1}, q_t = n : q_i < q_{i+1}$，对所有 $i \in [n-1]\}$，如记号 3.9 中所述。对于每个 $s \in [t]$，令 $A_s := \{(\boldsymbol{a}_{i,j}, \mathbf{1}) : i \in [p_s, q_s], j \in [u_i + 1, v_i]\}$。令 $B = \{\boldsymbol{a}_{n+1,k} : k \in [2, r]\}$，它存在当且仅当 $r \geq 2$。我们断言，当 $r \geq 2$ 时，$A_1, \ldots, A_t, B$ 是 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$ 的连通分支。事实上，A_s 是与 $X_{\mathbb{S}}$ 的第 s 个块对应的偏序集的一个同构副本。

注意到 $B \cup \bigcup_{i=1}^{t} A_i = P_{\mathcal{L}\times[r]}$。观察到 $(\boldsymbol{a}_{i,\ j},\ \mathbf{1})$ 与 $\boldsymbol{a}_{n+1,\ k}$ 不可比，其中 $i \in [n]$、$j \in [u_i + 1, v_i]$ 和 $k \in [2, r]$ 任意。此外，B 是 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$ 的一个连通分支，因为对所有 $k \in [2, r-1]$，都有 $\boldsymbol{a}_{n+1,\ k} < \boldsymbol{a}_{n+1,\ k+1}$。

令 $s \in [t]$，并令 $i \in [p_s, q_s]$。由引理 3.7，集合 $\{(\boldsymbol{a}_{i,\ j},\ 1) : j \in [u_i + 1, v_i]\}$ 是连通的。若 $i < q_s$，则 $v_i \geq u_{i+1}$。因此 $(\boldsymbol{a}_{i,\ v_i},\ 1) > (\boldsymbol{a}_{i+1,\ v_i+1},\ \mathbf{1})$，由引理 3.8。因此，$A_s$ 是连通的。

我们断言，对于任意 $s,\ s' \in [t]$，若 $s \neq s'$，则 A_s 和 $A_{s'}$ 的元素不可比。事实上，设 $(\boldsymbol{a}_{i,\ j},\ \mathbf{1}) \in A_s$，且 $(\boldsymbol{a}_{g,\ h},\ \mathbf{1}) \in A_{s'}$，不失一般性，假设 $s' > s$。那么 $g > i$ 且 $\boldsymbol{a}_{g,\ h} \not> \boldsymbol{a}_{i,\ j}$。由于

$$j \leq v_i \leq v_{q_s} < u_{q_s+1} = u_{p_{s+1}} \leq u_g < h,$$

由此可得 $h - j > u_g - v_i \geq g - p_{s+1} + 1 + q_s - i = g - i$，对于任意 $k > l$，$p_{s+1} = q_s + 1$、$u_k - u_l \geq k - l$ 和 $v_k - v_l \geq k - l$ 也是如此。因此，$\boldsymbol{a}_g$、$_h \not> \boldsymbol{a}_i$、$_j$，从而 $(\boldsymbol{a}_{i,\ j}, \mathbf{1})$、$(\boldsymbol{a}_{g,\ h}, \mathbf{1})$ 按照引理 3.7 彼此不可比，结论得证。因此，A_1、……、A_t、B 是 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$的连通分支。在 $r = 1$ 的情况下，同样可以证明，集合 $A'_s = \{\boldsymbol{a}_{i,j} :\ i \in [p_s, q_s]$、$j \in [u_i + 1, v_i]\}$ 对所有 $s \in [t]$ 都是 $P_{\mathcal{L}}$ 的连通分支。□

在本节的最后一个结果中，我们确定 $P_{\mathcal{L}}$ 的极小元和极大元。

命题 3.11。 $P_{\mathcal{L}}$ 的极小元为

$$\{\boldsymbol{a}_{i,u_i+1} : \epsilon_i > 1\}$$

$P_{\mathcal{L}}$ 的极大元为

$$\{\boldsymbol{a}_{i,v_i} : \theta_{i-1} > 1\}.$$

证明。 由引理 3.8, $\boldsymbol{a}_{i,j} \in P_{\mathcal{L}}$ 仅覆盖 $P_{\mathcal{L}}$ 中的元素 $\{\boldsymbol{a}_{i,j-1}, \boldsymbol{a}_{i+1,j+1}\}$（若它们存在）。由此可知，$\boldsymbol{a}_{i,j}$ 是极小元，当且仅当该集合为空，也就是说，当 $j = u_i + 1$且 $u_i + 1 < u_{i+1}$ 或 $i = n$ 时。后者等价于 $j = u_i + 1$ 且 $\epsilon_i > 1$，因为按约定 $\epsilon_n > 1$。

类似地，$\boldsymbol{a}_{i,j}$ 是极大元，当且仅当 $\{\boldsymbol{a}_{i,j+1}, \boldsymbol{a}_{i-1,j-1}\} = \emptyset$。注意，由于 $\boldsymbol{a}_{i,j} \in P_{\mathcal{L}}$，因此 $\boldsymbol{a}_{i,j+1}$ 不存在，当且仅当 $j = v_i$。此外，$\boldsymbol{a}_{i-1,v_i-1}$ 不存在，当且仅当 $i = 1$ 或 $v_i - 1 \notin [u_{i-1} + 1, v_{i-1}]$。后者等价于 $i = 1$ 或 $v_i - 1 > v_{i-1}$。因此，$\boldsymbol{a}_{i,j}$ 是极大元，当且仅当 $j = v_i$ 且 $\theta_{i-1} > 1$，因为按约定 $\theta_0 > 1$。□

注记 3.12。可以为 $P_{\mathcal{L}}$关联若干组合对象。我们首先如下定义一个与 $\mathrm{X}_{\mathbb{S}}$ 同型的双侧梯式矩阵 $\mathrm{X}^{P_{\mathcal{L}}}$：对于任意 $i \in [n]$ 及任意 $j \in [m]$，$\mathrm{X}^{P_{\mathcal{L}}}$的第（$i$，$j$）个元素为 $\boldsymbol{a}_{i,\ j}$，若 $j \in [u_i+1, v_i]$ 成立；否则为零。$\mathrm{X}^{P_{\mathcal{L}}}$的非零元素恰好是 $P_{\mathcal{L}}$的不可约并元。根据引理 3.8，$\boldsymbol{a}_{i,\ j}$ 仅覆盖位置（i，$j-1$）和（$i+1$，$j+1$）处的元素，前提是这些元素非零。因此，可以直接从 $\mathrm{X}^{P_{\mathcal{L}}}$识别 $P_{\mathcal{L}}$ 的偏序集结构，进而直接从 $\mathrm{X}_{\mathbb{S}}$识别。注意，$\mathrm{X}_{\mathbb{S}}$ 和 $\mathrm{X}^{P_{\mathcal{L}}}$ 的阶梯结构之间的差异仅在于（i，u_i）处的元素；因此，$\mathrm{X}_{\mathbb{S}}$和 $\mathrm{X}^{P_{\mathcal{L}}}$ 具有相同的 ϵ_i 和 θ_i值。还可以看出，$P_{\mathcal{L}}$ 可以与一个斜杨图关联起来。最近，Gasanova 和 Nicklasson 将一个斜杨图与某些源自平面格的 Hibi 环的不可约偏序集关联起来，以计算这些环的h向量 [7]。

例 3.13。 考虑分拆 $[1, 13] = [1, 5] \cup [3, 7] \cup [4, 8] \cup [9, 11] \cup [10, 13]$。则梯形矩阵 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 为

$$\mathbf{X}_{\mathbb{S}} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{2,3} & x_{2,4} & x_{2,5} & x_{2,6} & x_{2,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{3,4} & x_{3,5} & x_{3,6} & x_{3,7} & x_{3,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{4,9} & x_{4,10} & x_{4,11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{5,10} & x_{5,11} & x_{5,12} & x_{5,13} \end{bmatrix}$$

其对应的并不可约梯形矩阵$\mathbf{X}^{P_{\mathcal{L}}}$ 为

$$\mathbf{X}_{P_{\mathcal{L}}} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{a}_{1,2} & \boldsymbol{a}_{1,3} & \boldsymbol{a}_{1,4} & \boldsymbol{a}_{1,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_{2,4} & \boldsymbol{a}_{2,5} & \boldsymbol{a}_{2,6} & \boldsymbol{a}_{2,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_{3,5} & \boldsymbol{a}_{3,6} & \boldsymbol{a}_{3,7} & \boldsymbol{a}_{3,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_{4,10} & \boldsymbol{a}_{4,11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \boldsymbol{a}_{5,11} & \boldsymbol{a}_{5,12} & \boldsymbol{a}_{5,13} \end{bmatrix}.$$

当且仅当 $\boldsymbol{a}_{k,l} < \boldsymbol{a}_{i,j}$时，我们记作 $\boldsymbol{a}_{k,l} \to \boldsymbol{a}_{i,j}$。于是，$P_{\mathcal{L}}$ 的结构可由下图表示

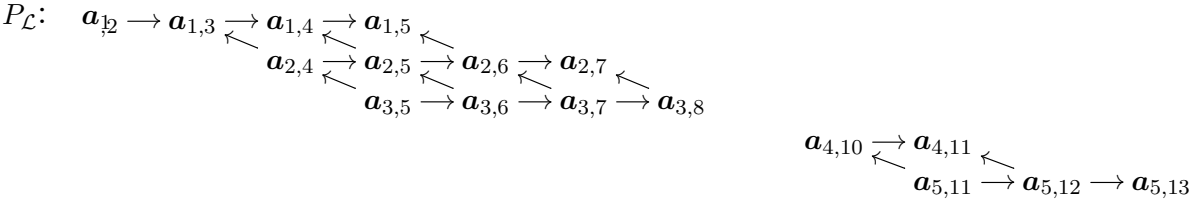

FIGURE 1. 由矩阵 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 和 $\mathbf{X}^{P_{\mathcal{L}}}$直接导出的偏序集 $P_{\mathcal{L}}$。

T矩阵 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 有两个块，每个块分别对应 $P_{\mathcal{L}}$ 的一个连通分支。

4. The Gorenstein property

在第3 节中，我们明确描述了 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$ 的结构。本节的目标是给出 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$为纯的充要条件，或者等价地，给出 $\mathcal{F}(M)$ 为 Gorenstein 的充要条件。

回忆一下，偏序集 P 的子集 $\mathcal{A}$ 称为 P 的一条 链，如果相对于诱导序，它是一个全序子集。换句话说，链是 P 的一个子集 $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$，且满足 $a_1<a_2<\cdots<a_k$。链 $\mathcal{A}$ 的 长度 为 $|\mathcal{A}|-1$。令 rank(P) 表示 P 的秩，它等于 P 中最长链的长度。我们还回忆，对于域 $\mathbb{K}$ 上的标准分次代数 A，希尔伯特函数 $H_A(t)$ 计算 A 的第 t 个分次分量的维数。希尔伯特级数定义为

$$H_A(t) = \frac{h(t)}{(1-t)^d},$$

其中， d 是 A 的 Krull 维数，并且

$$h(t)=h_0+h_1t+\cdots+h_st^s$$

是一个具有整数系数的多项式。 A 的 h-向量记作

$$h(A)=(h_0,h_1,\ldots,h_s).$$

We 首先证明，只需考虑 $\mathcal{F}$(中的$\tau(L)$)，它是一个 Hibi 环，见定理 2.2。

命题 4.1。 对于 $r\geq 2$，以下条件等价：

(a) $\mathcal{F}(M)$ 是 *Gorenstein*；(b) $\mathcal{F}(N)$ 是 *Gorenstein*；
(c) $\mathcal{F}$(中$\tau(L)$) 是 *Gorenstein*，且 秩($P_{\mathcal{L}}$) $=r-2$；(d)
$\mathcal{F}(L)$ 是 *Gorenstein*，且 秩($P_{\mathcal{L}}$) $=r-2$。

证明。 回顾一下，分次代数是 Gorenstein，当且仅当它是 Cohen-Macaulay 整环，且其 h-向量对称；参见 [1, 推论 4.46]。

由定理 2.2 可知，在τ'($\mathcal{F}(M)$) 中，$\cong \mathcal{F}(N)$，其中 $N=\bigoplus_{i=1}^r$属于$\tau(L)$。于是由[4, 命题 2.4]，可知， $\mathcal{F}(M)$ 和 $\mathcal{F}(N)$ 的希尔伯特函数相同，因此 $\mathcal{F}(M)$ 和$\mathcal{F}(N)$ 具有相同的 h-向量。因此，由于 $\mathcal{F}(M)$ 和 $\mathcal{F}(N)$ 是 Cohen-Macaulay 整环，根据定理 2.2， $\mathcal{F}(M)$ 是 Gorenstein，当且仅当 $\mathcal{F}(N)$ 是 Gorenstein。此外，根据定理 2.2，$\mathcal{F}(N)$ 是分配格 $\mathcal{L}\times[r]$ 的 Hibi 环。因此， $\mathcal{F}(N)$ 是 Gorenstein，当且仅当不可约并元 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$ 构成的偏序集为纯， [11]。后者成立，当且仅当 $P_{\mathcal{L}\times[r]}$ 中的所有极大链长度相同。

最后，根据命题 3.10 的证明， $P_{\mathcal{L}\times[r]}$ 的极大链与 $P_{\mathcal{L}}$ 的极大链一一对应，此外还有由 $\{\boldsymbol{a}_{n+1,k}\}_{k=2}^r$给出的链，其长度为 $r-2$。结论由此得证。□

注 4.2. 注意，根据命题 4.1，即使 $\mathcal{F}(L)$ 是 Gorenstein 的，代数 $\mathcal{F}(M)$ 也只有在 r取某一个值时才是 Gorenstein 的。另一方面，对于固定的 r，$\mathcal{F}(M)$ 是 Gorenstein 的这一条件会对梯形矩阵的形状施加限制，正如我们将在定理 4.12中所证明的那样。

根据命题 4.1，现在我们可以着重确定使 $\mathcal{F}$（在$\tau(L)$ 中）成为 Gorenstein 的充要条件。在下一个结果中，我们计算 $P_{\mathcal{L}}$中任意两个可比较元素之间任意一条饱和链的长度。

引理 4.3。 任意两个不可约元 $\boldsymbol{a}_{i,\,j}$、$\boldsymbol{a}_{k,\,l}\in P_{\mathcal{L}}$ 之间的饱和链（其中 $\boldsymbol{a}_{k,\,l}<\boldsymbol{a}_{i,\,j}$）长度为 $2(k-i)+j-l$。

证明。 令 $\boldsymbol{a}_{i,\,j}$，$\boldsymbol{a}_{k,\,l}\in P_{\mathcal{L}}$ 满足 $\boldsymbol{a}_{k,\,l}<\boldsymbol{a}_{i,\,j}$。由引理 3.7，可得 $k\geq i$。注意，由引理 3.8，只要 $\boldsymbol{a}_{i+1,\,j+1}$ 和 $\boldsymbol{a}_{i,\,j-1}$ 存在，就有 $\boldsymbol{a}_{i+1,\,j+1}<\boldsymbol{a}_{i,\,j}$ 以及$\boldsymbol{a}_{i,\,j-1}<\boldsymbol{a}_{i,\,j}$。因此，饱和链中两个连续元素的指标之差不是 (1，1)，就是 (0，−1)。由于 $\boldsymbol{a}_{k,\,l}<\boldsymbol{a}_{i,\,j}$，我们必有

$$(k,l)=(i,j)+a(1,1)+b(0,-1)$$

对于某个 a， $b \in \mathbb{N}$。唯一解为 $a = (k-i)$ 和 $b = (k-i) + (j-l)$。因此，任意一条从 $\boldsymbol{a}_{k,\ l}$ 到 $\boldsymbol{a}_{i,\ j}$ 的此类饱和链的长度为 $a + b = 2(k-i) + (j-l)$. □

为了确定 $P_{\mathcal{L}}$ 中饱和链的结构，我们引入连续极小值和极大值的概念。

定义 4.4. 设 $\boldsymbol{a}_{i,u_i+1}, \boldsymbol{a}_{k,u_k+1}$ 是 $P_{\mathcal{L}}$ 的两个极小元，如命题 3.11 所述。我们称 $\boldsymbol{a}_{i,u_i+1}$ 和 $\boldsymbol{a}_{k,\ u_k+1}$ （其中 $i < k$ ）为连续极小值，若不存在其他极小元 $\boldsymbol{a}_{t,u_t+1}$ 属于 $P_{\mathcal{L}}$ 且满足 $i < t < k$。特别地，若 $i < k$ 和 $\boldsymbol{a}_{i,u_i+1}$、 $\boldsymbol{a}_{k,u_k+1}$ 是连续极小值，则对所有 $s \in [i+1, k-1]$ ，均有 $\epsilon_s = 1$。类似地，我们可以定义连续极大值。

借助连续极小值和极大值的定义，我们现在可以说明 $P_{\mathcal{L}}$ 中极大链之间的关系。

引理 4.5. 假设对所有 $i \in [n-1]$， $v_i \geq u_{i+1}$ 均成立。那么，对于 $P_{\mathcal{L}}$ 中任意两个连续极小元，都存在通向 $P_{\mathcal{L}}$ 中同一个极大元的饱和链。类似地，对于 $P_{\mathcal{L}}$ 中任意两个连续极大元，都存在通向 $P_{\mathcal{L}}$ 中同一个极小元的饱和链。

证明。 令 $\boldsymbol{a}_{i,\ u_i+1}$、$\boldsymbol{a}_{k,\ u_k+1} \in P_{\mathcal{L}}$ 为两个连续极小元。不妨设 $i < k$，且对于所有 $s \in [i+1, k-1]$，都有 $\epsilon_s = 1$。

首先注意到，根据引理 3.7，有 $\boldsymbol{a}_{i,\ u_i+1} \leq \boldsymbol{a}_{i,\ v_i}$。此外，由于对于所有 $s \in [i+1, k-1]$都有 $\epsilon_s = 1$，我们有 $u_k = u_{i+1} + (k - (i+1)) = u_{i+1} + (k-i) - 1$。因此，由于$u_{i+1} \leq v_i$，有 $u_k + 1 \leq v_i + k - i$。所以，根据引理 3.7，有 $\boldsymbol{a}_{k,\ u_k+1} < \boldsymbol{a}_{i,\ v_i}$。最后，由于 $\boldsymbol{a}_{i,\ v_i}$ 大于$\boldsymbol{a}_i$和u_i+1，因此 $\boldsymbol{a}_{k,\ u_k+1}$，于是存在一个最大值，它是从每个极小元出发的一条链的公共末端。类似地，对于两个连续极大元 $\boldsymbol{a}_{i,\ v_i}$，可以证明 $\boldsymbol{a}_{k,\ v_k} \in P_{\mathcal{L}}$，以及 $\boldsymbol{a}_{k,\ u_k+1} \leq \boldsymbol{a}_{i,\ v_i}$ 和 $\boldsymbol{a}_{k,\ u_k+1} \leq \boldsymbol{a}_{k,\ v_k}$。 □

现在我们给出 $\mathcal{F}(L)$ 为 Gorenstein 的充要条件，前提是 $P_{\mathcal{L}}$连通。回顾一下， $P_{\mathcal{L}}$ 连通当且仅当 $|\mathcal{C}| = 1$，等价地， $v_i \geq u_{i+1}$ 对所有 $i \in [n-1]$，命题 3.10。

命题 4.6。 假设 $v_i \geq u_{i+1}$ 对所有 $i \in [n-1]$均成立。那么 $\mathcal{F}(L)$ 为 *Gorenstein* 当且仅当 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 满足以下条件：

(a) $u_k - u_i = 2(k-i)$ 当 $\epsilon_i, \epsilon_k > 1$ 时成立；(

b) $v_k - v_i = 2(k-i)$ 当 $\theta_{i-1}, \theta_{k-1} > 1$ 时成立。

证明。 注意，根据命题 3.11 ，当 $\epsilon_i, \epsilon_k > 1$ 时，$\boldsymbol{a}_{i,u_i+1}, \boldsymbol{a}_{k,u_k+1}$ 是 $P_{\mathcal{L}}$ 中的极小元。类似地，当 $\theta_{i-1}, \theta_{k-1} > 1$ 时，$\boldsymbol{a}_{i,v_i}, \boldsymbol{a}_{k,v_k}$ 是 $P_{\mathcal{L}}$ 中的极大元。

首先，假设 $\mathcal{F}(L)$ 是 Gorenstein。根据命题 4.1 $\mathcal{F}$ 的证明，(in$_\tau(L)$ 是 Gorenstein，因此 $P_{\mathcal{L}}$ 是纯的， [11]。于是， $P_{\mathcal{L}}$ 中所有极大链的长度都相同。设 $\boldsymbol{a}_{i,u_i+1}, \boldsymbol{a}_{k,u_k+1} \in P_{\mathcal{L}}$ 是任意两个连续的极小元。根据引理 4.5，存在一个极大元 $\boldsymbol{a}_{h,v_h}$ ，使得 $\boldsymbol{a}_{i,u_i+1} \leq \boldsymbol{a}_{h,v_h}$ 且 $\boldsymbol{a}_{k,\ u_k+1} \leq \boldsymbol{a}_{h,v_h}$。不失一般性，可假设 $h \leq i < k$。于是，根据引理 4.3，我们有

$$2(i-h) + v_h - (u_i + 1) = 2(k-h) + v_h - (u_k + 1)$$

或者等价地，$(u_k - u_i) = 2(k-i)$。同样地，利用引理 4.5，对于任意两个连续的极大元 $\boldsymbol{a}_{i,\ v_i}$， $\boldsymbol{a}_{k,\ v_k} \in P_{\mathcal{L}}$ ，我们有 $(v_k - v_i) = 2(k-i)$。

现在，对于任意一对极小元 $\boldsymbol{a}_{i,\ u_i+1}$， $\boldsymbol{a}_{k,\ u_k+1} \in P_{\mathcal{L}}$，令 $j_1, \ldots, j_s$ 表示 i 与 k 之间的极小元的指标。于是我们有

$$(u_k - u_i) = u_k - u_{j_1} + u_{j_1} - u_{j_2} + \cdots + u_{j_s} - u_i = 2[(k-j_1) + (j_1 - j_2) + \cdots + (j_s - i)] = 2(k-i)。$$

同样，对于每一对极大值 $\boldsymbol{a}_{i,\ v_i}$， $\boldsymbol{a}_{k,\ v_k} \in P_{\mathcal{L}}$， $(v_k - v_i) = 2(k-i)$。

反之，现假设条件 (a) 和 (b) 成立。考虑从$\boldsymbol{a}_{i,\ u_{i+1}}$ 到$\boldsymbol{a}_{g,\ v_g}$ 以及从$\boldsymbol{a}_{k,\ u_k+1}$ 到$\boldsymbol{a}_{h,\ v_h}$的两条极大链。当 $2(i-g) + v_g - u_i - 1 = 2(k-h) + v_h - u_k - 1$时，这两条链的长度相等，见引理 4.3。这等价于

$$2(i-k) + v_g - v_h = 2(g-h) + u_i - u_k,$$

这由条件 (a) 和 (b) 得出。 □

注 4.7。 命题 4.6扩展了 [2, 推论 4。8], 因为我们为 $\mathcal{F}(L)$ 为 Gorenstein 提供了充要条件，其中 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 是一个稀疏 $2 \times n$ 矩阵，因为稀疏矩阵可以重新排列成梯形矩阵，如 [2, 推论 4。8] 所示。如果 $\mathbf{X}$ 是一个一般 $n \times m$ 矩阵，那么 $\mathcal{F}(I_n(\mathbf{X}))$ 根据以下事实是 Gorenstein 的:

$$\mathrm{in}_\tau(I_n(\mathbf{X}_{\mathbb{S}})) = \mathrm{in}_\tau(I_n(\mathbf{X}))\,,$$

其中 $\mathrm{X}_{\mathbb{S}}$ 是一个 $n \times m$ 梯形矩阵，对所有 $i \in [n-1]$、$j \in [n]$ 以及 ϵ_n、$\theta_0 > 1$均满足 $\epsilon_i = \theta_j = 1$。注意，由于 $m > n$，我们对所有 $i \in [n-1]$都有 $v_i \geq u_{i+1}$。根据命题 4.1 的证明，代数 $\mathcal{F}(I_n(\mathrm{X}))$ 是 Gorenstein 的，当且仅当 $\mathcal{F}(\mathrm{in}_\tau(I_n(\mathrm{X})))$ 是 Gorenstein 的。通过同样的推理，$\mathcal{F}(\mathrm{in}_\tau(I_n(\mathrm{X})))$ 是 Gorenstein 的，当且仅当 $\mathcal{F}(I_n(\mathrm{X}_{\mathbb{S}}))$ 是 Gorenstein 的。根据命题 4.6，结论现已成立，因为在一般情形下，所需的假设均为空。

正如命题 4.6 的证明中所见，当 $P_{\mathcal{L}}$ 连通时，要证明 $\mathcal{F}(L)$ 是 Gorenstein，只需分别验证关于连续极小值和极大值的条件 (a) 和 (b)。

推论 4.8。 假设对于所有 $i \in [n-1]$，$v_i \geq u_{i+1}$。那么 $\mathcal{F}(L)$ 是 *Gorenstein*，当且仅当矩阵$\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$满足以下条件:

(a) 对于任意 $i \in [n-1]$，若 $\epsilon_i > 1$，则对于所有 $j \in [i+1, \epsilon_i - 2]$ 和 $\epsilon_{i+\epsilon_i-1} > 1$，$\epsilon_j = 1$；

(b) 对于任意 $i \in [n-1]$，若 $\theta_i > 1$，则对于所有 $j \in [i-(\theta_i-2)\ i-1]$ 和 $\theta_{i-(\theta_i-1)} > 1$，$\theta_j = 1$。

证明。由命题 4.6 的证明可知，当 $\boldsymbol{a}_{i,u_i+1}, \boldsymbol{a}_{k,u_k+1}$ 和 $\boldsymbol{a}_{h,v_h}, \boldsymbol{a}_{j,v_j}$ 分别为连续极小值和极大值时，$\mathcal{F}(L)$ 是 Gorenstein 的充要条件是 $u_k - u_i = 2(k-i)$ 和 $v_j - v_h = 2(j-h)$。不失一般性，假设 $i < k$ 和 $h < j$。由于 $u_k - u_i = \sum_{s=i}^{k-1} \epsilon_s$，可得 $\boldsymbol{a}_{i,u_i+1}, \boldsymbol{a}_{k,u_k+1}$ 是连续极小值当且仅当 $u_k - u_i = \epsilon_i + k - 1 - i$。同理，$\boldsymbol{a}_{h,v_h}, \boldsymbol{a}_{j,v_j}$ 是连续极大值当且仅当 $v_j - v_h = \theta_{j-1} + j - h - 1$。

可以看出，对于 $i \in [n-1]$，条件 (a) 成立当且仅当 $\boldsymbol{a}_{i,\ u_i+1}$，$\boldsymbol{a}_{k,\ u_k+1}$ 是连续极小值，且满足 $k = i + \epsilon_i - 1$。这等价于 $u_k - u_i = \epsilon_i + k - 1 - i = 2(k-i)$。

同理，$j - 1 \in [0, n-1]$ 满足条件 (b) 当且仅当 $\boldsymbol{a}_{h,\ v_h}$、$\boldsymbol{a}_{j,\ v_j}$ 是连续极大值，其中 $h = j - \theta_{j-1} + 1$。如上所述，这等价于 $v_j - v_h = 2(j-h)$。□

例4.9。 考虑由分拆给出的梯形矩阵$\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$

$$[1, 15] = [1, 8] \cup [4, 9] \cup [5, 10] \cup [7, 14] \cup [9, 15].$$

我们有 $\epsilon_1 = 3$、$\epsilon_2 = 1$、$\epsilon_3 = \epsilon_4 = 2$、$\theta_1 = \theta_2 = \theta_4 = 1$，且 $\theta_3 = 4$。因此，由推论 4.8，$\mathcal{F}(L)$ 是 Gorenstein。请注意，使用计算机代数程序验证此例中的这一性质，计算开销很大，因为理想 L有 1769 个生成元。

注4.10。 回顾命题 3.10 指出，$P_{\mathcal{L}}$ 的连通分支由集合 $\mathcal{C} = \{i \in [n-1]$ 确定: $v_i < u_{i+1}\} \cup \{n\} = \{q_1 < \cdots < q_{t-1} < q_t = n\}$。此外，$\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$是一个分块矩阵，包含 t个块 $\mathbf{X}_i$，其中 $\mathbf{X}_i$ 是行 p_i 至 q_i中的梯形矩阵，其中$[n] = \bigsqcup_{i=1}^{t} [p_i, q_i]$ 且 $p_{i+1} = q_i + 1$ 对所有 $i \in [t-1]$ 以及 $p_1 = 1$。

对于每个 $s \in [t]$，令 $i_s :=$ 最小值$\{i \in [p_s, q_s] :\ \epsilon_i > 1\}$。注意，$i_s$ 定义良好，因为 $\epsilon_{q_s} = u_{p_{s+1}} - u_{q_s} \geq u_{p_{s+1}} - v_{q_s} > 0$。此外，对于 $j = p_s$，有 $\theta_{j-1} = v_j - v_{j-1} \geq u_j - v_{j-1} > 0$，因为 $j - 1 = q_{s-1}$。因此，对于每个 $s \in [t]$，可得 $\boldsymbol{a}_{i_s,\ u_{i_s}+1}$ 是$P_{\mathcal{L}}$ 中的$\boldsymbol{a}_{p_s,\ v_{p_s}}$ 是 $P_{\mathcal{L}}$中的极大元，依据命题 3.11。

定理4.11。 采用记号 *3.9*。则 $\mathcal{F}(L)$ 是*Gorenstein*的，当且仅当矩阵 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$满足以下条件:

(a) 对于每个 $s \in [t]$,(i) $(u_k - u_i) = 2(k-i)$ 当 $\epsilon_i, \epsilon_k > 1$ 且 $i, k \in [p_s, q_s]$ 时；(ii) $(v_k - v_i) = 2(k-i)$ 当 $\theta_{i-1}, \theta_{k-1} > 1$ 且 $i, k \in [p_s, q_s]$ 时。(b) 对于任意 $s \in [t]$，有 $\Delta_{p_s} + i_s - p_s = \Delta_1 + i_1 - 1$，其中 $i_s =$最小值$\{i \in [p_s, q_s] :\ \epsilon_i > 1\}$。

证明。 令 $s \in [t]$，并注意，对于备注 4.10 中的 i_s，我们有 $\boldsymbol{a}_{i_s,\ u_{i_s}+1}$ 是最小值，而 $\boldsymbol{a}_{p_s,\ v_{p_s}}$ 是最大值。根据引理 3.8，在 $P_{\mathcal{L}}$ 中存在一条极大链，从 $\boldsymbol{a}_{i_s,\ u_{i_s}+1}$ 到

$\boldsymbol{a}_{p_s,\ v_{p_s}}$。根据引理 4.3 这条链的长度为 $2(i_s-p_s)+v_{p_s}-u_{p_s}-1=\Delta_{p_s}+i_s-p_s-1$，因为$u_{i_s}=u_{p_s}+(i_s-p_s)$。

现在 $\mathcal{F}$(在$\tau(L)$) 是 Gorenstein 的，当且仅当所有极大链的长度相等。根据命题 4.6及其证明，每个连通分支中的极大链长度相等，当且仅当条件 (a) 成立。此外，在每个连通分支中，极大链的公共长度为 $\Delta_{p_s}+i_s-p_s-1$，因此这些长度全都相等，当且仅当条件 (b) 成立。 □

定理 4.12. 采用记号 *3.9*并假设 $r\geq 2$。则 $\mathcal{F}(M)$ 是 *Gorenstein* 的，当且仅当对于每个 $s\in[t]$，矩阵 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 满足以下条件：

(a) $(u_k-u_i)=2(k-i)$ 当 $\epsilon_i,\epsilon_k>1$ 满足 $i,k\in[p_s,q_s]$ 时；(b) $(v_k-v_i)=2(k-i)$ 当 $\theta_{i-1},\theta_{k-1}>1$ 满足 $i,k\in[p_s,q_s]$ 时。(c) $r=\Delta_{p_s}+i_s-p_s+1$，其中 $i_s=$最小值$\{i\in[p_s,q_s]:\ \epsilon_i>1\}$。

证明。根据命题 4.1，$\mathcal{F}(M)$ 是 Gorenstein，当且仅当 $\mathcal{F}$(在$\tau(L)$) 中是 Gorenstein，且所有极大链的长度都等于秩 $P_{\mathcal{L}}=r-2$。由定理 4.11及其证明即可得出结论。 □

推论4.13。设 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 是一个 $n\times m$ 梯形矩阵，其中 $\epsilon_i=\theta_i=1$ 对所有 $i\in[n-1]$均成立。那么$\mathcal{F}(M)$ 是 *Gorenstein*，当且仅当 $r=m$。特别地，若 $\mathbf{X}$ 是一个泛型 $n\times m$ 矩阵，则$\mathcal{F}(\oplus_{i=1}^{r}I_n(\mathbf{X}))$ 是 *Gorenstein*，当且仅当 $r=m$。

证明。首先注意，由于 $\epsilon_i=\theta_i=1$ 对所有 $i\in[n-1]$均成立，因此 $\Delta_1=m-n$。此外，$\boldsymbol{a}_{n,\ n+1}$ 是 $P_{\mathcal{L}}$ 中的唯一极小元，且 $\boldsymbol{a}_{1,\ m-n+1}$ 是 $P_{\mathcal{L}}$的唯一极大元。第一个断言的结论由定理 4.12 可得，注意到 $i_1=n$。

最后请注意，在$\tau(L)$ $=$ 中$\tau(I_n(\mathbf{X}_{\mathbb{S}}))$ $=$ 中$\tau(I_n(\mathbf{X}))$。第二个结论可由与注记 4.7 中类似的论证得到。 □

若 $\mathcal{F}(M)$ 是 Gorenstein，则可立即计算 $\mathcal{F}(M)$ 的正则度和 a-不变量，以及 M 的约化数 $r(M)$。

推论 4.14。设 $\mathbb{K}$ 是一个无限域。

(a) *If* $\mathcal{F}(M)$ *is Gorenstein, then* $\operatorname{reg}(\mathcal{F}(M))=r(M)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$ *and* $a(\mathcal{F}(M))=-r$.
(b) *If* $\mathcal{F}(L)$ *is Gorenstein, then* $\operatorname{reg}(\mathcal{F}(L))=r(L)=\sum_{i=2}^{n}\Delta_i-i+1$ *and* $a(\mathcal{F}(L))=-\Delta_1-i$, *where* $i=\min\{j:\epsilon_j>1\}$.

*Pro*的。由 [10, 定理 6.42], [5, 推论 2.14、4.24], 和 [5, 命题 2.6], , 我们有 e

$$\operatorname{reg}(\mathcal{F}(M))=r(M)=|P_{\mathcal{L}\times[r]}|-\operatorname{rank}(P_{\mathcal{L}\times[r]})-1 \quad \text{and}$$
$$a(\mathcal{F}(M))=\operatorname{reg}(\mathcal{F}(M))-\ell(M)$$

由 [5, 推论 4.24] 可得 $|P_{\mathcal{L}\times[r]}|=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i+r-1$。若 $r\geq 2$，则秩$(P_{\mathcal{L}\times[r]})=r-2$，由定理 4.12 得出。若 $r=1$，则秩$(P_{\mathcal{L}})=\Delta_1+i-2$，其中 $i=$最小值$\{j:\ \epsilon_j>1\}$ 并可得出 $\mathcal{F}(M)$ 的正则度和 M的约化数公式。最后，可利用 a-不变量 [5,定理 3.4] 进行计算。 □

作为命题 4.1 和定理 4.8的另一个应用，我们得到当该特殊纤维为 Gorenstein 时 F-正则度$\mathcal{F}(M)$。回顾一下，F-正则度是与环在 Frobenius 态射下的行为相关的一种性质，并且在理解代数几何中的奇点方面发挥着至关重要的作用。一般而言，F-正则度不会发生变形[20], , 但当该环为 Gorenstein 时，这一性质成立 [12, 推论 4.7(c)]；也就是说，如果环 A 是 Gorenstein 且 A/wA 对于某个 F-正则的非零因子 $w\in A$，那么 A 是 F-正则的。

推论 4.15。如果 $\mathbf{X}_{\mathbb{S}}$ 满足定理 *4.12*中的假设，那么 $\mathcal{F}(M)$ 是 F-正则的。

证明。根据 [16, 推论 5.7]，代数 $\mathcal{F}(M)$ 在 Char$\mathbb{K}=0$ 时具有有理奇点，并且在 Char$F$时是$\mathbb{K}>0$-有理的。根据 [12, 推论 4.7(a)] F，对于 Gorenstein 环，-有理性与 F-正则度是等价的。由定理4.12可得结论。 □

回忆一下，根据 [16, 定理 4.15] $\mathcal{F}(L)$ 总是 F-有理的。下一个例子表明，即使不是 Gorenstein，$\mathcal{F}(L)$ 也可以是 F-正则的。

例 4.16。 考虑矩阵

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,4} & x_{2,5} & x_{2,6} \end{bmatrix}.$$

令 $L = I_2(\mathbf{X})$，并考虑特殊纤维环 $\mathcal{F}(L)$。根据推论 4.8，环$\mathcal{F}(L)$不是 Gorenstein。我们声称 $\mathcal{F}(L)$ 是 F-正则的。我们的证明采用 Glassbrenner 判据和 Jacobian 判据。令 $T := \mathbb{K}[T_{(i,j)} : (i,j) \in \mathcal{L}]$，并回忆 $\mathcal{F}(L) \cong T/\mathcal{K}$，其中 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{F}(L)$ 的定义理想，可如 [16, 定理 5.5] 中那样显式描述。

令 $S = T/\mathcal{K}$。根据 [8, 定理 3.1]，，只需找到一个齐次元素 $\alpha \in T\alpha \in T = \mathbb{K}[T_{(i,j)} : (i,j) \in \mathcal{L}]$，使得 $\alpha \notin \mathcal{K}$，且 S_α 是正则的，并且

$$\alpha(\mathcal{K}^{[p^e]}) : \mathcal{K}) \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p]},$$

其中 $\mathfrak{m}$ 是 T 的齐次极大理想，且 e 是某个正整数。我们断言$\alpha = T_{(1,4)}$ 满足上述条件。

我们首先构造一个高度为 ht($\mathcal{K}$) 的完全交理想 $\mathfrak{a} \subset \mathcal{K}$。令 $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots\ldots, f_5)$，其中

$$\begin{aligned} f_1 &= T_{(4,5)}T_{(3,6)} - T_{(3,5)}T_{(4,6)} + T_{(3,4)}T_{(5,6)}, \\ f_2 &= T_{(4,5)}T_{(2,6)} - T_{(2,5)}T_{(4,6)} + T_{(2,4)}T_{(5,6)}, \\ f_3 &= T_{(3,5)}T_{(2,6)} - T_{(2,5)}T_{(3,6)}, \\ f_4 &= T_{(2,5)}T_{(1,6)} - T_{(1,5)}T_{(2,6)}, \\ f_5 &= T_{(3,4)}T_{(1,5)} - T_{(1,4)}T_{(3,5)}. \end{aligned}$$

由 [16, 定理 5.5]，对所有 $i \in [5]$，$f_i \in \mathcal{K}$。我们将证明 $f_1, \ldots\ldots, f_5$ 是一个长度为 5 的正则序列，方法是证明这些多项式关于项序$\succ$ 的初始项互素。令 $\succ$为 T 上的分次逆字典序，它由 T 中变量的以下次序诱导:

$$T_{(2,4)} > T_{(3,4)} > T_{(3,5)} > T_{(4,5)} > T_{(1,6)} > T_{(3,6)} > T_{(5,6)} > T_{(2,6)} > T_{(4,6)} > T_{(2,5)} > T_{(1,5)} > T_{(1,4)}.$$

于是 $\text{in}_\succ f_1 = T_{(4,5)}T_{(3,6)}$、$\text{in}_\succ f_2 = T_{(2,4)}T_{(5,6)}$、$\text{in}_\succ f_3 = T_{(3,5)}T_{(2,6)}$、$\text{in}_\succ f_4 = T_{(2,5)}T_{(1,6)}$、$\text{in}_\succ f_5 = T_{(3,4)}T_{(1,5)}$，因此 $f_1, \ldots\ldots, f_5$是一个长度为 5 的正则序列。注意，$\dim T = |\mathcal{L}| = \binom{6}{2} - 3 = 12$，因此 ht($\mathcal{K}$) $= 5$，因为由[5, 定理 3.4]可知，$\dim(\mathcal{F}(L)) = \sum_{i=1}^{2} \Delta_i + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$。因此 ht($\mathfrak{a}$) $=$ ht($\mathcal{K}$) $= 5$。

现在我们证明 $T_{(1,4)}(\mathcal{K}^{[p]} : \mathcal{K}) \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p]}$。注意，

$$(\text{in}_\succ f_1)^{p-1} \cdots (\text{in}_\succ f_5)^{p-1} = \text{in}_\succ (f_1 \cdots f_5)^{p-1} \in \text{in}_\succ(\mathfrak{a}^{[p]} : \mathfrak{a}) \subseteq \text{in}_\succ(\mathcal{K}^{[p]} : \mathcal{K}),$$

其中，最后一个包含关系由 [18, 推论 3.3] 得出。因此，

$$T_{(1,4)}(\text{in}_\succ f_1)^{p-1} \cdots (\text{in}_\succ f_5)^{p-1} \in T_{(1,4)} \text{in}_\succ(\mathcal{K}^{[p]} : \mathcal{K}).$$

根据构造，

$$T_{(1,4)}(\text{in}_\succ f_1)^{p-1} \cdots (\text{in}_\succ f_5)^{p-1} \notin \mathfrak{m}^{[p]}$$

因此，$T_{(1,4)}(\mathcal{K}^{[p]} : \mathcal{K}) \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p]}$。

还需证明 S_α 是正则的，其中 $\alpha = T_{(1,4)}$。为此，我们应用雅可比判据，[6, 推论 16.20]。令 J 为由 $\mathcal{K}$ 的雅可比矩阵的所有 5×5 阶子式生成的理想，并考察理想 $\mathcal{K}$ 中涉及 $T_{(1,4)}$的以下生成元:

$$\begin{aligned} &g_1 = T_{(1,4)}T_{(2,5)} - T_{(1,5)}T_{(2,4)},\ g_2 = T_{(1,4)}T_{(3,5)} - T_{(1,5)}T_{(3,4)},\ g_3 = T_{(1,4)}T_{(2,6)} - T_{(1,6)}T_{(2,4)}, \\ &g_4 = T_{(1,4)}T_{(3,6)} - T_{(1,6)}T_{(3,4)},\ g_5 = T_{(1,4)}T_{(5,6)} - T_{(1,5)}T_{(4,6)} + T_{(1,6)}T_{(4,5)}. \end{aligned}$$

注意，矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial T_{(2,5)}} & \frac{\partial g_1}{\partial T_{(3,5)}} & \frac{\partial g_1}{\partial T_{(2,6)}} & \frac{\partial g_1}{\partial T_{(3,6)}} & \frac{\partial g_1}{\partial T_{(5,6)}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial T_{(2,5)}} & \frac{\partial g_2}{\partial T_{(3,5)}} & \frac{\partial g_2}{\partial T_{(2,6)}} & \frac{\partial g_2}{\partial T_{(3,6)}} & \frac{\partial g_2}{\partial T_{(5,6)}} \\ \frac{\partial g_3}{\partial T_{(2,5)}} & \frac{\partial g_3}{\partial T_{(3,5)}} & \frac{\partial g_3}{\partial T_{(2,6)}} & \frac{\partial g_3}{\partial T_{(3,6)}} & \frac{\partial g_3}{\partial T_{(5,6)}} \\ \frac{\partial g_4}{\partial T_{(2,5)}} & \frac{\partial g_4}{\partial T_{(3,5)}} & \frac{\partial g_4}{\partial T_{(2,6)}} & \frac{\partial g_4}{\partial T_{(3,6)}} & \frac{\partial g_4}{\partial T_{(5,6)}} \\ \frac{\partial g_5}{\partial T_{(2,5)}} & \frac{\partial g_5}{\partial T_{(3,5)}} & \frac{\partial g_5}{\partial T_{(2,6)}} & \frac{\partial g_5}{\partial T_{(3,6)}} & \frac{\partial g_5}{\partial T_{(5,6)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{(1,4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{(1,4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{(1,4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{(1,4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{(1,4)} \end{bmatrix}$$

是 $\mathcal{K}$ 的雅可比矩阵的一个子矩阵， $T_{(1,4)} \in \sqrt{J}$因此 S_α 的任意素理想都具有 P_α的形式，其中 $P \in \operatorname{Spec}(S)$，且 $\alpha \notin P$。对于任意素理想 $P \in \operatorname{Spec}(S)$，且 $T_{(1,4)} \notin P$，我们有（S_α）$_{P_\alpha} \cong S_P$。根据 Jacobian 判据， [6，推论 16。20] S_P 是正则局部环当且仅当 $J \not\subset P$。由于 $T_{(1,4)} \in \sqrt{J} \setminus P$，我们有 S_P是正则的，因此 S_α 如所声称的那样是正则的。

例子 4.16 中的方法通常无法推广。这自然引出了一个问题。

问题 4.17。 在什么条件下， $\mathcal{F}(L)$ 是 F-正则的?

致谢 辞。 我们感谢审稿人认真审阅稿件并提出了周到的建议

我们感谢新墨西哥州立大学于2025年夏季接待我们小组，并提供部分差旅资助。前往新墨西哥州立大学的差旅费用部分由美国国家科学基金会资助项目 DMS–2433082 提供。Kuei-Nuan Lin 获得了 AMS–Simons 主要面向本科院校教师的研究提升资助（2024）的部分资助。Maral Mostafazadehfard 的部分经费来自 CAPES–Brasil（财务代码 001）和 PROEX/- CAPES，并获益于 APQ1-Faperj 211.012/2024 - SEI-260003/006427/2024。最后，Haydee Lindo 得到了西蒙斯·劳弗数学科学研究所的资助。

References

[1] W. Bruns 和 J. Herzog， *Cohen-Macaulay rings*，《剑桥高等数学研究丛书》第39卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[2] E. Celikbas、E. Dufresne、L. Fouli、E. Gorla、K.-N. Lin、C. Polini 和 I. Swanson， *Rees algebras of sparse determinantal ideals* **377** 2024 2317 2333 ，《美国数学会汇刊》（），–。[3] A. Conca， *Ladder determinantal rings*，《纯数学与应用代数杂志》98（1995年），119–134。[4] A. Conca、J. Herzog 和 G. Valla， *Sagbi bases with applications to blow-up algebras*，《纯粹与应用数学杂志》474（1996年），113–138。[5] A. Costantini、L. Fouli、K. Goel、K.-N. Lin、H. Lindo、W. Liske 和 M. Mostafazadehfard， *Algebraic invariants of the special fiber ring of ladder determinantal modules* 2025 2507 22167 （）。参见 arXiv：。[6] D. Eisenbud， *Commutative algebra*，《数学研究生教材》第150卷，Springer-Verlag，纽约，1995年。旨在介绍代数几何。[7] O. Gasanova 和 L. Nicklasson， *Chain algebras of finite distributive lattices*，《代数组合学杂志》59（2024年），第3期，473–494。[8] D. Glassbrenner， *Strong F-regularity in images of regular rings* **124** 1996 2, ，《美国数学会会刊》（），第 期，–。[9] W. Heinzer、M-K. Kim 和 B. Ulrich， *The Gorenstein and complete intersection properties of associated graded rings* **201** 2005 1 3, 264 283 ，《纯数学与应用代数杂志》（），第 期，–。[10] J. Herzog、T. Hibi 和 H. Ohsugi， *Binomial ideals*，《数学研究生教材》第279卷，Springer，Cham，2018年。[11] T. Hibi， *Distributive lattices affine semigroup rings and algebras with straightening laws*，《交换代数与组合学》（京都，1985），1987年，第93–109页。[12] M. Hochster 和 C. Huneke， *F-regularity test elements and smooth base change*，《美国数学会汇刊》346（1994年），第1期，1–62。[13] A. R. Kustin、C. Polini 和 B. Ulrich， *The equations defining blowup algebras of height three Gorenstein ideals* **11** 2017 7, 1489 1525 ，《代数与数论》（），第 期，–。[14] P. H. Lima 和 V. H. Jorge Pérez， *On the Gorenstein property of the fiber cone to filtration*，《国际代数杂志》8（2014年），第1–4期，159–174。

[15] K.-N. Lin 和 Y.-H. Shen, *Blow-up algebras of secant varieties of rational normal scrolls*, Collect. Math. **74** (2023年), 247–278。[16], *Blowup algebras of determinantal modules*（2024年）。参见 。[17] M. Miyazaki, *On the generating poset of schubert cycles and the characterization of gorenstein property*, 京都教育大学学报 **106** (2005年), 125–128。[18] V. Pandey 和 Y. Tarasova, *Linkage and F-regularity of determinantal rings*, 国际数学研究通知 **11** (2024年), 9323–9339。[19] R. Ramkumar 和 A. Sammartano, *On Rees algebras of 2-determinantal ideals*, 伦敦数学会杂志（第2辑）**109** (2024年), 第1期, 论文编号 e12821, 共31页。[20] A. K. Singh, *F-regularity does not deform*, 美国数学杂志 **121** (1999年), 第4期, 919–929。

Department of Mathematical Sciences, New Mexico State University, Las Cruces, NM 88003,USA*Email address*: lfouli@nmsu.eduDepartment of Mathematics, The Penn State University, McKeesport, PA, 15132, USA*Email address*: linkn@psu.edu Department of Mathematics, Harvey Mudd College, Claremont, CA, 91711, USA*Email address*: hlindo@hmc.eduInstitute of Mathematics, Federal University of Rio de Janeiro, RJ, 21941-909, Brazil*Email address*: maral@im.ufrj.br