arXiv:2601.13497v1 [math.QA] 20 Jan 2026

双 Hall-Littlewood 对称函数

JIAYI CHEN、MING LU 和 SHIQUAN RUAN

谨以此文献给邓邦明教授，祝贺他六十寿辰

Abstract. 我们建立了 Jordan 箭图的导出 Hall 代数与双对称函数环之间的环同构；后者即为关于两组各含可数多个变量的对称多项式环，且在各自对称群的作用下保持不变，并带有参数 t。此同构将导出 Hall 基（导出 Hall 代数的自然基）映射到一类双 Hall-Littlewood（HL）对称函数，这类函数由升降算子构造。这些双 HL 函数由双分拆参数化；当其中一个分拆为空时，它们退化为经典 HL 函数，而在 $t = 0$ 处特化为 Schur Laurent 对称函数。我们还推导了这些双 HL 函数的 Pieri 规则。此外，我们为导出 Hall 代数得到了若干自然生成函数及其过渡关系，并可通过已建立的环同构将它们转移到双对称函数环中。

Contents

1. 引言 1
2. 双 Hall-Littlewood 对称函数 5
3. Jordan 箭图的导出 Hall 代数 13
4. 生成函数及其过渡关系 22
参考文献 32

1. Introduction

1.1. **Hall 代数与 Hall-Littlewood 对称函数。** 经典 Hall 代 p群 [St01]；另见 [Ha57]。这一代数同构于无穷多个变量的对称多项式环（即对称函数环），其 Hall 基对应于 Hall-Littlewood（HL）对称函数（参见 [Mac95]）。

Ringel [Rin90] 为任意阿贝尔范畴发展了Hall 代数，从而为 Dynkin 型量子群的正部分提供了范畴化实现；关于向 Kac-Moody 型的扩展，参见 [Gr95]。为了通过 Hall 代数实现完整的量子群，人们为三角范畴引入了 Hall 代数的若干变体；

2020 数学主题分类。 主要分类号 18E35、16G20、05E05。关键词与短语。 Hall 代数与导出 Hall代数、Pieri 规则、双 Hall-Littlewood 函数、Schur Laurent 函数。

例如参见 [Ka97、X97、PX97、T06、XX08、XC13]。特别地，在 [T06 中，XX08] 为满足（左）同调有限性条件的任意三角范畴构造了导出 Hall 代数。Xu-Chen 还给出了奇周期三角范畴的导出 Hall 代数 [XC13]。

最近，作者 [CLR25]为根范畴建立了导出Hall代数；可与 [Zh25]对照。对于有限型遗传阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，通过计数三角形并运用八面体公理，构造了其根范畴的导出Hall代数，并证明它与 $\mathcal{A}$的Hall代数的Drinfeld双同构。

1.2. Jordan 箭图的导出Hall代数。令 Q_{J} 为Jordan 箭图，即具有单顶点1和单环 α 的箭图： $1 \to 1$。令 $\mathcal{A} = \mathrm{rep}^{\mathrm{nil}}_{\Bbbk}(Q_{\mathrm{J}})$为有限域 $\Bbbk = \mathbb{F}_q$上的有限维幂零表示范畴。 $\mathcal{A}$ 的同构类可由所有分拆参数化。对于任意分拆 λ，记 $S^{(\lambda)}$ 为模~。令 $\mathcal{H}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}})$为 $\mathcal{A}$的Hall代数，令 $\Lambda_t = \mathbb{Q}(t)[x_1, x_2, \dots]^{\mathfrak{S}_\infty}$为对称多项式环。于是有一个 $\mathbb{Q}(q^{-1})$-代数同构$\widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}}) \to \Lambda_{q^{-1}}$，它将任意分拆 λ对应到HL对称函数 V_λ；见[Mac95]。这里， $\Lambda_{q^{-1}}$ 是 Λ_t 在 $t = q^{-1}$处的特化。

令 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{A}$的根范畴， $[1]$ 为平移函子；参见 [PX97]。那么， $\mathcal{R}$ 的同构类可由双分拆 (λ, μ) 参数化，相应的对象为 $S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]$。令 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}})$ 为 $\mathcal{R}$的导出 Hall 代数；参见 [CLR25]。令 $\mathcal{D}\Lambda_t = \mathbb{Q}(t)[x_1^+, x_2^+, \dots, x_1^-, x_2^-, \dots]^{\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty}$ 为双对称多项式的环。那么，通过将 $\mathcal{D}\Lambda_t$特化为 $t = q^{-1}$，存在一个代数同构 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}}) \to \mathcal{D}\Lambda_{q^{-1}}$；参见 [CLR25，推论 5.5]。

环 $\mathcal{D}\Lambda_t$ 双对称函数在文献中已得到广泛研究；例如参见 [BR87、Ch05、BLM15]。$\mathcal{D}\Lambda_t$ 可嵌入对角对称函数环 $\mathbb{Q}(t)[x_1^+, x_2^+, \dots, x_1^-, x_2^-, \dots]^{\mathfrak{S}_\infty}$，即在同时对称群作用下，关于两组可数多个变量的对称多项式所构成的环。Jordan 箭图的幂零表示范畴可视为椭圆曲线上凝聚层范畴的基本构件。已有研究表明，对角对称函数和椭圆曲线上的凝聚层都与双仿射Hecke代数密切相关 [Ch05、SchV11]。

1.3. **目标。** 本文旨在引入双 HL 函数 $V_{\lambda,\ \mu}$它们对应于 $[S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]]$ 的自然基 $\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{H}}(Q_{\mathrm{J}})$。受 [Mac95、Tam11、LRW25], 的启发，我们使用升降算子来定义双 HL 函数，并称之为 Giambelli 型公式。这些双 HL 函数由双分拆参数化；当其中一个分拆为空时，它们便退化为经典 HL 函数。我们还推导出这些双 HL 函数的 Pieri 规则。

值得注意的是， [BLM15], 构造了另一类双 HL 函数，它们是双重 Macdonald 对称函数的极限，与我们的方法截然不同。

1.4. **双 Hall-Littlewood 对称函数。** 升算子形式主义在 Buch、Kresch 和 Tamvakis 所发展的经典型舒伯特演算中发挥了基础性作用 [BKT08]。Tamvakis 进一步发展了升算子方法

[Tam11]；具体而言，他从詹比利多项式（进而是 HL 函数）的升算子定义出发，给出了水平 Pieri 规则的直接证明 [Mac95, III,(5.7′)]。Morris 早先已得到了这样的 Pieri 规则 [Mor64]。降算子见于 [Lec06]。由 Jordan 箭图的 $\imath$Hall 代数导出的 HL 对称函数，$\imath$由升降算子的协同作用引入于 [LRW25]，并特化为 C 型泛特征。

借助 Tamvakis 的方法，我们能够为环$\mathbb{Q}(t)[v_1^{\pm}, v_2^{\pm}, \ldots]$构造一个类比，它可被识别为双对称函数的环 $\mathcal{D}\Lambda_t$（将 $v_r^{\pm}$解释为经典对称函数 q_r 或正部/负部中的 h_r）。与最初仅作用于单个分拆[Lec06、LRW25]，的这些算子的定义不同，升降算子经过修订，可作用于双分拆（λ，μ），从而得到双 Hall–Littlewood 对称函数$V_{\lambda,\ \mu}$。

与 Tamvakis 的工作类似，我们证明所有双 Hall–Littlewood 对称函数构成双对称函数环的一组基，并满足两个镜像恒等式。因此，我们推导出两条适用于 $\mathcal{D}\Lambda_t$ 的 Pieri 规则，它们对应于正部/负部的生成元与双 Hall–Littlewood 对称函数相乘时所遵循的公式。此外，在 $t=0$ 特化时，双 Hall–Littlewood 对称函数与 [SV15] 中给出的 Schur-Laurent 函数一致。

在导出 Hall 代数 $\widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}})$ 中，我们还得到了 Pieri 规则，它们是导出 Hall 乘法公式的特殊情形。然后，代数同构$\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}}) \to \mathcal{D}\Lambda_{q^{-1}}$ 将自然基 $[S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]]$ 映射为双 HL 函数 $V_{\lambda,\ \mu}$。我们还介绍了 $\mathcal{D}\mathcal{H}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}})$ 中若干自然生成集的生成函数。基于这一同构，我们将经典生成函数（如初等对称函数/完全对称函数）推广到 $\mathcal{D}\Lambda_t$，并考察它们的过渡关系。

下面，我们更准确地描述主要结果。

1.5. 主要结果。 考虑双对称函数的环 $\mathcal{D}\Lambda_t = \mathbb{Q}(t)[v_1^{\pm}, v_2^{\pm}, \ldots]$。对于两个分拆 ρ，ν，我们通过升降算子 $R_{ij}^{\pm}$和 L_{ij}作用于 $v_{\rho,\ \nu} = v_\rho^+ v_\nu^-$，构造双 HL 对称函数 $V_{\rho,\ \nu}$，其中 $v_\rho^+ = v_{\rho_1}^+ v_{\rho_2}^+ \cdots$和 $v_\rho^- = v_{\nu_1}^- v_{\nu_2}^- \cdots$。

对于分拆 μ，ν，我们记 $\mu \le \nu$ 若 $\mu_i \le \nu_i$ 对所有 i均成立，则记为 $\mu \xrightarrow{a} \nu$ 若 $\mu \le \nu$ 且 $\nu - \mu$ 是水平 a条带。多项式$\varphi_{\nu/\mu}(t)$ $\psi_{\nu/\mu}(t)$ 的定义见（2.10），根据 [Mac95，III，（5.8）–（5.8′）]。随后给出双 Hall–Littlewood 对称函数的水平 Pieri 规则。

定理 A (水平 Pieri 规则，定理 2.6)。 对于 $r \ge 1$ 以及任意分拆 ρ，ν，我们有

$$V_{\rho,\nu} \cdot v_r^+ = \sum_{a+b=r} \sum_{\mu \xrightarrow{a} \nu, \rho \xrightarrow{b} \lambda} \varphi_{\nu/\mu}(t) \psi_{\lambda/\rho}(t)\ V_{\lambda,\mu},$$

$$V_{\rho,\nu} \cdot v_r^- = \sum_{a+b=r} \sum_{\nu \xrightarrow{a} \mu, \lambda \xrightarrow{b} \rho} \psi_{\mu/\nu}(t) \varphi_{\rho/\lambda}(t)\ V_{\lambda,\mu}.$$

$_b$对于分拆 μ,ν，我们用 $\nu\downarrow\mu$ 表示 $\mu\le\nu$ 且 $\nu-\mu$ 是一个垂直 b-条带。 $\varphi_r(t)$、$b_\mu(t)$ 和 f^ν_μ ,$_{(1^b)}(t)$ 的定义可参见 (3.12)–(3.13) 和 (3.29)，遵循 [Mac95, III, (2.12), (3.2)]。此外，也给出了垂直 Pieri 规则的表述。

定理 B （垂直 Pieri 规则，参见定理 3.11）。 对于 $r\ge 1$ 和任意分拆 ρ， ν，有

$$V_{\rho,\nu}\cdot V^{+}_{(1^r)}=\sum_{a+b=r}\sum_{\substack{a\\ \lambda\downarrow\rho}}\sum_{\substack{b\\ \nu\downarrow\mu}}\frac{b_\rho(t)}{b_\lambda(t)}\varphi_r(t)f^{\lambda}_{\rho,(1^a)}(t)f^{\nu}_{\mu,(1^b)}(t)\cdot V_{\lambda,\mu},$$

$$V_{\rho,\nu}\cdot V^{-}_{(1^r)}=\sum_{a+b=r}\sum_{\substack{a\\ \rho\downarrow\lambda}}\sum_{\substack{b\\ \mu\downarrow\nu}}\frac{b_\nu(t)}{b_\mu(t)}\varphi_r(t)f^{\rho}_{\lambda,(1^a)}(t)f^{\mu}_{\nu,(1^b)}(t)\cdot V_{\lambda,\mu}.$$

~将 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$记为 Jordan 箭图~ ~的根范畴的导出 Hall 代数，将 $\mathcal{DH}(Q_J)$记为其一般版本；参见 §3.3。代数 $\mathcal{DH}(Q_J)$ 由无穷多个生成元 $\mathfrak{u}_{(r),\emptyset},\mathfrak{u}_{\emptyset,(r)}$ 生成，其中^均为 $r\ge 1$，并且有一个以}为分拆的 $\mathbb{Q}(t)$-基 $\{V_{\lambda,\mu}\mid\lambda,\mu$。^ 这里 $V_{\lambda,\mu}$ 是 Hall 基元素 $\mathfrak{u}_{\lambda,\mu}$经过轻微缩放后的结果；参见 (3.23)。

定理 C （定理3.8，推论 3.10）。 存在一个 $\mathbb{Q}(t)$-代数同构~$\Phi_t:\ \mathcal{DH}(Q_J)\longrightarrow\mathcal{D}\Lambda_t$ 使得

$$\Phi_t(\mathfrak{u}_{(r),\emptyset})=t^{-r}v_r^{+},\qquad \Phi_t(\mathfrak{u}_{\emptyset,(r)})=v_r^{-}\quad \textit{for } r\ge 1.$$

此外，对于任意分拆 λ、 μ，我们有

$$\Phi_t(\widehat{V}_{\lambda,\mu})=V_{\lambda,\mu}.$$

定理A 中的（水平）Pieri 法则^确定了双 HL 对称函数$V_{\lambda,\ \mu}$。为了证明定理 C，我们只需确立 V_{λ}的 *Pieri* 法则，$_{\ \mu}$~在 $\mathcal{DH}(Q_J)$ 中，该法则见命题 3.7。

为了表述下面的一些生成函数，我们需要考虑定义在域 $\mathbb{Q}(\mathbf{v})$ 上的代数，其中 $\mathbf{v}=\sqrt{q}$。令 y、 z 为两个不定元。回顾 (3.12) 和 (4.4) 中的 $\varphi_m(t)$ 和 $\exp_q\left(\frac{x}{1-q}\right)$。在 (4.1)–(4.13) 中，我们引入导出 Hall 代数 ~$\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$ 中若干自然生成集的生成函数 ~ ~ ~$H(y,z)$ $E(y,z)$ 和 $\Theta(y,z)$（参见 [BKa01, Sch12, LRW23, LRW25]）。遵循 Mac95、BKa01、Sch12],，我们用 $H_i(y)$ $E_i(y)$ $\Theta_i(y)$ 表示 $i=1$、2 中 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$ 的正部/负部里的经典生成函数~；见 (4.10)–(4.12)。

定理 D (命题 4.1、4.2、定理4.4)。以下恒等式成立于~*Jordan* 箭图的导出 *Hall* 代数 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\mathbf{v})$:

$$\widetilde{H}(y,z)\widetilde{E}(-y,-z)=\left(\exp_q(\frac{yz}{1-q})\right)^2,$$

$$\widetilde{\Theta}(y,z)=(1-qyz)^2\frac{\widetilde{E}(-y,-z)}{\widetilde{E}(-qy,-qz)}=(1-yz)^{-2}\frac{\widetilde{H}(qy,qz)}{\widetilde{H}(y,z)},$$

$$\widetilde{\Theta}(y,z)=\Theta_1(y)\Theta_2(z)\exp\big(\sum_{k\geq 1}\frac{1-q^k}{k}(yz)^k\big),$$
$$\widetilde{E}(y,z)=E_1(y)E_2(z)\exp_q\big(\frac{yz}{1-q}\big),$$
$$\widetilde{H}(y,z)=H_1(y)H_2(z)\exp_q\big(\frac{yz}{1-q}\big).$$

得益于定理C中的同构，我们可以将定理D 中建立的生成函数及其过渡关系迁移 $\mathcal{D}\Lambda_t$ 到双对称函数的环中。

1.6. **文章结构**。 在第 2 节中，我们为 Giambelli 型多项式 $V_{\lambda,\ \mu}$ 建立水平 Pieri 法则，并推广 Tamvakis 的方法。随后，我们对 v_r 作适当的识别，以构造双 Hall–Littlewood 对称函数。在第3 节中，我们回顾 Jordan 箭图的导出 Hall 代数 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_\jmath)$，然后建立其中的水平/垂直 Pieri 规则 $\widetilde{\ }\ \mathcal{DH}(\Bbbk Q_\jmath)$。在第 4 节中，我们以生成函数的形式研究导出 Hall 代数 $\widetilde{\ }\ \mathcal{DH}(\Bbbk Q_\jmath)$的若干重要生成集，并建立它们之间的过渡关系。

致谢。 JC 部分得到国家自然科学基金委员会天元数学基金（编号 12526562）的资助。ML 部分得到国家自然科学基金委员会（编号 12171333）的资助。SR 部分得到中央高校基本科研业务费（编号 20720250059）、福建省自然科学基金（编号 2024J010006）以及国家自然科学基金委员会（编号 12271448 和 12471035）的资助。

2. Double Hall-Littlewood symmetric functions

本节介绍双 Hall–Littlewood 对称函数的 Giambelli 型多项式，并建立其 Pieri 规则，同时将其与经典 HL 对称函数进行比较。

分别用 $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ 表示非负整数、整数和有理数的集合。

2.1. **一个 Giambelli 型公式**。 设 $v_r^{\pm}$ 是次数为 r 的可交换变量，其中 $r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$。令 $v_0^{\pm}=1$ 和 $v_a^{\pm}=0$，其中 $a<0$。定义

$$v_\alpha^{\pm}=v_{\alpha_1}^{\pm}v_{\alpha_2}^{\pm}\cdots\quad\text{and}\quad v_{\alpha,\beta}=v_\alpha^{+}v_\beta^{-}$$

对任意仅有有限个非零项的整数序列 $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots)$ 和 $\beta=(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ldots)$，按乘法定义。给定两个整数序列 $\alpha,\ \beta$，记作 $\alpha\geq\beta$ （或 $\beta\leq\alpha$），若对所有 $i\geq 1$ 均有 $\alpha_i\geq\beta_i$；特别地，$\alpha\geq 0$ 表示 α 是一个合成。对于合成 α，记作

$$\begin{aligned}\ell(\alpha)&=\text{number of nonzero parts in }\alpha,\\ |\alpha|&=\alpha_1+\alpha_2+\cdots.\end{aligned}\tag{2.1}$$

令 $i,\ j \geq 1$，定义降算子 L_{ij} （参见 [第 06 讲，LRW25]），它作用于整数序列对 $(\alpha,\ \beta)$ 上，定义如下：

$$L_{ij}(\alpha,\beta) = ((\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,,\alpha_{i+1},\ldots),(\ldots,\beta_{j-1},\beta_j-1,,\beta_{j+1},\ldots)).$$

并且对于 $1 \leq i < j$，我们有左升算子 R_{ij}^{+} 按下式作用于 $(\alpha,\ \beta)$：

$$R_{ij}^{+}(\alpha,\beta) = ((\ldots,\alpha_i+1,\ldots,\alpha_j-1,\ldots),\beta).$$

类似地，右升算子 R_{ij}^{-} 按下式作用于 $(\alpha,\ \beta)$：

$$R_{ij}^{-}(\alpha,\beta) = (\alpha,(\ldots,\beta_i+1,\ldots,\beta_j-1,\ldots)).$$

虽然升算子最初由 Young 引入（参见 [Mac95]），但一些重要的应用直到最近才出现；参见 [BKT08、Tam11]。升降算子作用于 $v_{\alpha,\ \beta}$ 的方式如下：

$$L_{ij}v_{\alpha,\beta} = v_{L_{ij}(\alpha,\beta)}, \qquad R_{ij}^{\pm}v_{\alpha,\beta} = v_{R_{ij}^{\pm}(\alpha,\beta)}.$$

注意，所有升降算子彼此可交换。

设 t 为一个不定元。记 $\mathcal{P}_n$ 为带有支配序 $\trianglerighteq$的 n 的分拆 λ集合，并且我们有时记作 $\lambda \vdash n$。令 $\mathcal{P} = \cup_{n\geq 0}\mathcal{P}_n$。支配序 $\trianglerighteq$ 对 n的所有合成所成的集合也有意义。

环

$$\mathcal{D}\Lambda_t = \mathbb{Q}(t)[v_1^{\pm},v_2^{\pm},\ldots]$$

有基 $\{v_{\lambda,\mu} \mid \lambda,\mu \in \mathcal{P}\}$。

关于如何恰当地应用升算子（和降算子）的论证，可见[Tam12，§2。2]以及 [BMPS19，(4.1) 及以下内容]。令

$$F(u) = \frac{1-u}{1-tu} = 1 + (1-t^{-1})\sum_{r\geq 1} t^r u^r. \tag{2.2}$$

记

$$\mathbb{L}_{ij} := \frac{1-L_{ij}}{1-tL_{ij}} = 1 + (1-t^{-1})\sum_{s\geq 1} t^s L_{ij}^s, \tag{2.3}$$

$$\mathbb{R}_{ij}^{\pm} := \frac{1-R_{ij}^{\pm}}{1-tR_{ij}^{\pm}} = 1 + (1-t^{-1})\sum_{p\geq 1} t^p (R_{ij}^{\pm})^p, \tag{2.4}$$

$$\mathbb{L} := \prod_{i,j\geq 1} \mathbb{L}_{ij}, \qquad \mathbb{R}^{\pm} := \prod_{1\leq i<j} \mathbb{R}_{ij}^{\pm}. \tag{2.5}$$

定义 2.1。对于任意整数向量 α 和 β，我们定义 $V_{\alpha,\ \beta} \in \mathcal{D}\Lambda_t$ 如下：

$$V_{\alpha,\beta} = \mathbb{L}\cdot\mathbb{R}^{+}\cdot\mathbb{R}^{-}(v_{\alpha,\beta}). \tag{2.6}$$

特别地，我们记 $V_\alpha^{+} = V_{\alpha,\ \emptyset}$ 和 $V_\beta^{-} = V_{\emptyset,\ \beta}$，其中 $\emptyset$ 表示空集。注意，$V_r^{+} = v_{r,\ \emptyset} = v_r^{+}$ 和 $V_r^{-} = v_{\emptyset,\ r} = v_r^{-}$。此外，$V_\alpha^{+} = \mathbb{R}^{+}(v_\alpha^{+})$ 和 $V_\alpha^{-} = \mathbb{R}^{-}(v_\alpha^{-})$。

记

$$D_{\ell,\mathfrak{m}} := \prod_{\substack{1\leq i\leq \ell\\ 1\leq j\leq \mathfrak{m}}} \mathbb{L}_{ij}\cdot \prod_{1\leq i<j\leq \ell} \mathbb{R}_{ij}^{+}\cdot \prod_{1\leq i<j\leq \mathfrak{m}} \mathbb{R}_{ij}^{-}. \tag{2.7}$$

下面我们遵循 [Tam11，§1-2] 来处理算子 $D_{\ell,\ \mathfrak{m}}$。我们有

$$\begin{aligned} D_{\ell,\mathfrak{m}} &= D_{\ell-1,\mathfrak{m}} \cdot \prod_{1\le j\le \mathfrak{m}} \mathbb{L}_{\ell j} \cdot \prod_{1\le i<\ell} \mathbb{R}^{+}_{i\ell} \\ &= D_{\ell-1,\mathfrak{m}} \cdot \prod_{1\le j\le \mathfrak{m}} \Big(1+(1-t^{-1})\sum_{s\ge 1} t^s L^s_{\ell j}\Big) \cdot \prod_{1\le i<\ell} \Big(1+(1-t^{-1})\sum_{p\ge 1} t^p (R^{+}_{i\ell})^p\Big). \end{aligned}$$

将 $D_{\ell,\mathfrak{m}}$ 应用于 $v_{(\alpha,r),\beta}$，其中 (α,r) 和 β 是满足 $\ell(\alpha,r)=\ell$ 和 $\ell(\beta)=\mathfrak{m}$ 的整数向量，我们得到

$$\begin{aligned} V_{(\alpha,r),\beta} &= D_{\ell,\mathfrak{m}} v_{(\alpha,r),\beta} = D_{\ell-1,\mathfrak{m}} \cdot \prod_{1\le j\le \mathfrak{m}} \mathbb{L}_{\ell j} \cdot \prod_{1\le i<\ell} \mathbb{R}^{+}_{i\ell}(v_{(\alpha,r),\beta}) \\ &= D_{\ell-1,\mathfrak{m}} \cdot \prod_{1\le i<\ell} \mathbb{R}^{+}_{i\ell} \cdot \prod_{1\le j\le \mathfrak{m}} \Big(1+(1-t^{-1})\sum_{s\ge 1} t^s L^s_{\ell j}\Big)(v_{(\alpha,r),\beta}) \\ &= D_{\ell-1,\mathfrak{m}} \cdot \prod_{1\le i<\ell} \mathbb{R}^{+}_{i\ell}\Big(\sum_{\gamma} t^{|\gamma|}(1-t^{-1})^{\ell(\gamma)} v_{(\alpha,r-|\gamma|),\beta-\gamma}\Big) \\ &= \sum_{\gamma} t^{|\gamma|}(1-t^{-1})^{\ell(\gamma)} \cdot D_{\ell-1,\mathfrak{m}} \cdot \prod_{1\le i<\ell} \Big(1+(1-t^{-1})\sum_{p\ge 1} t^p (R^{+}_{i\ell})^p\Big)(v_{(\alpha,r-|\gamma|),\beta-\gamma}) \\ &= \sum_{\gamma} t^{|\gamma|}(1-t^{-1})^{\ell(\gamma)} \cdot D_{\ell-1,\mathfrak{m}}\Big(\sum_{\eta} t^{|\eta|}(1-t^{-1})^{\ell(\eta)} v_{(\alpha+\eta,r-|\gamma|-|\eta|),\beta-\gamma}\Big) \\ &= \sum_{\gamma,\eta} t^{|\gamma|+|\eta|}(1-t^{-1})^{\ell(\gamma)+\ell(\eta)} \cdot D_{\ell-1,\mathfrak{m}}\big(v_{\alpha+\eta,\beta-\gamma} v^{+}_{r-|\gamma|-|\eta|}\big) \\ &= \sum_{\gamma,\eta} t^{|\gamma|+|\eta|}(1-t^{-1})^{\ell(\gamma)+\ell(\eta)} \cdot V_{\alpha+\eta,\beta-\gamma} v^{+}_{r-|\gamma|-|\eta|}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

对所有合成 $\eta\in\mathbb{N}^{\ell-1}$ 和 $\gamma\in\mathbb{N}^{\mathfrak{m}}$ 求和。

类似地，我们也有

$$V_{\alpha,(\beta,r)} = \sum_{\gamma,\eta} t^{|\gamma|+|\eta|}(1-t^{-1})^{\ell(\gamma)+\ell(\eta)} \cdot V_{\alpha-\gamma,\beta+\eta} v^{-}_{r-|\gamma|-|\eta|} \tag{2.9}$$

对所有合成 $\gamma\in\mathbb{N}^{\ell-1}$ 和 $\eta\in\mathbb{N}^{\mathfrak{m}}$ 求和。公式 (2.8) 和 (2.9) 给出了计算 $V_{\alpha,\beta}$ 的递归公式。

命题 2.2. $\{V_{\lambda,\mu} \mid \lambda,\mu\in\mathcal{P}\}$ 构成 $\mathcal{D}\Lambda_t$ 的一个 $\mathbb{Q}(t)$-基。

证明。支配序 $\trianglerighteq$ 可以扩展到分拆集合 $\mathcal{P}$，使得若 $|\lambda|<|\mu|$，则 $\lambda\trianglerighteq\mu$；并且还可以扩展到双分拆集合 $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$，使得 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$$(\lambda,\tilde{\mu})\trianglerighteq(\lambda,\mu)$ 当且仅当 $\lambda\trianglerighteq\lambda$ 且 $\tilde{\mu}\trianglerighteq\mu$。那么，若发生以下任一情况，则 $(\lambda,\tilde{\mu})$ 严格支配 $(\lambda,\mu)$$\tilde{}$（记作 $(\lambda,\tilde{\mu})\triangleright(\lambda,\mu)$）：

(a) 对于某个 i,j，$(\lambda,\tilde{\mu})=L_{ij}(\lambda,\mu)$；$\tilde{}$

(b) 对于某个 $i<j$，$(\tilde{\lambda},\tilde{\mu})=R^{+}_{ij}(\lambda,\mu)$；

(c) 对于某个 $i<j$，$(\lambda,\tilde{\mu})=R^{-}_{ij}(\lambda,\mu)$。

因此，利用（2.6），我们得到

$$V_{\lambda,\mu} \in v_{\lambda,\mu} + \sum_{(\tilde{\lambda},\tilde{\mu})\triangleright(\lambda,\mu)} \mathbb{Q}(t) v_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}$$

˜其中求和遍及严格支配 $(\lambda, \tilde{\mu})$ 的双分拆 (λ, μ)。回忆一下，$\{v_{\lambda,\mu} \mid \lambda, \mu \in \mathcal{P}\}$ 构成了 $\mathcal{D}\Lambda_t$ 的一个 $\mathbb{Q}(t)$-基。由此立即可得，$\{V_{\lambda,\mu} \mid \lambda, \mu \in \mathcal{P}\}$构成了 $\mathcal{D}\Lambda_t$的一个 $\mathbb{Q}(t)$-基。□

2.2. **镜像恒等式。**

命题 2.3. </style}假设一个形如，$_{\beta}a_{\alpha,\ \beta}V_{\alpha,\ \beta} = \sum_{\alpha,\ \beta} {}_{\beta}b_{\alpha,\ \beta}V_{\alpha,\ \beta}$ 的等式（有限和）成立。那么

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} V_{(\mu,\alpha),\beta} = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta} V_{(\mu,\alpha),\beta} \qquad and \qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} V_{\alpha,(\mu,\beta)} = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta} V_{\alpha,(\mu,\beta)}$$

对任意整数向量 μ，均有此结论。

证明。证明采用对 $\ell(\mu)$ 的归纳法，这与 [Tam11，命题 1] 中利用（2.8）和（2.9）所作的证明完全相同，故此处略去。□

给定分拆 μ，ν 和 $b \in \mathbb{N}$，我们记

$$\nu \to \mu, \qquad (\text{respectively, } \nu \xrightarrow{b} \mu)$$

表示 $\nu \leq \mu$ 和 $\mu - \nu$ 构成一个水平条带（分别为水平 b-条带）。用 $m_i(\mu)$ 表示 i 作为 μ的一个部分出现的次数。用 $\mu' = (\mu'_1, \mu'_2, ...)$ 表示 μ的共轭分拆。

对于水平 r-条带 $\sigma = \lambda - \nu$，令 $I = I_{\lambda-\nu}$（分别地，$J = J_{\lambda-\nu}$）为满足以下条件的整数集合 $i \geq 1$：使得 $\sigma'_i = 1$ 且 $\sigma'_{i+1} = 0$（分别地，$\sigma'_i = 0$ 且 $\sigma'_{i+1} = 1$）。遵循 [Mac95，III]，，我们引入

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda/\nu}(t) &= \prod_{i \in I_{\lambda-\nu}} (1 - t^{m_i(\lambda)}), \\ \psi_{\lambda/\nu}(t) &= \prod_{j \in J_{\lambda-\nu}} (1 - t^{m_j(\nu)}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

下文定理 2.6 中的水平 Pieri 规则用上述多项式φ，ψ 来表述。为证明该定理，我们需要两个镜像恒等式。下文的第一个镜像恒等式与 Tamvakis [Tam11，§2.2]类似。

对于 $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_{\ell+1}) \in \mathbb{N}^{\ell+1}$，我们定义

$$\gamma_\bullet := (\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell).$$

命题 2.4 (镜像恒等式 I)。*(另见 [Tam11，§2.2])* 对于整数 $b \geq 0$ 以及满足 ρ，μ 的分拆 $\rho \in \mathbb{N}^\ell$，有

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{\ell+1}, |\gamma|=b} (1-t)^{\ell(\gamma_\bullet)} V_{\rho+\gamma,\mu} = \sum_{\rho \xrightarrow{b} \lambda} \psi_{\lambda/\rho}(t) V_{\lambda,\mu}; \tag{2.11}$$

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{\ell+1}, |\gamma|=b} (1-t)^{\ell(\gamma_\bullet)} V_{\mu,\rho+\gamma} = \sum_{\rho \xrightarrow{b} \lambda} \psi_{\lambda/\rho}(t) V_{\mu,\lambda}. \tag{2.12}$$

证明。 由于（2.12）与（2.11）互为对偶，我们这里只证明前者。对于 $\mu=\emptyset$，有

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{\ell+1},|\gamma|=b}(1-t)^{\ell(\gamma_\bullet)}\,V^+_{\rho+\gamma}=\sum_{\rho\xrightarrow{b}\lambda}\psi_{\lambda/\rho}(t)V^+_\lambda, \tag{2.13}$$

这是在 [LRW25，命题 28] 中通过设定 $\theta=0$ 得到的特殊情形。事实上，其证明完全归功于 Tamvakis [Tam11，§2。2]随后，公式（2.11）由命题2.3推出。□

下面的第二个镜像恒等式与 [Tam11，定理 1]类似。在我们的语境中，这个恒等式是镜像恒等式（2.11）的降算子对应形式；在定理 2.6的证明中很快就会清楚这一点。

回顾 $\varphi_{\lambda/\nu}(t)$（见（2.10））以及 $\ell(\alpha)$（见（2.1））。

命题 2.5（镜像恒等式 II）。（见 [Tam11，定理 1]）对于整数 $a\geq 0$和分拆 ν，$\tilde{\rho}$ 满足 $\nu\in\mathbb{N}^\ell$，有

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}^\ell,|\beta|=a}(1-t)^{\ell(\beta)}\,V_{\nu-\beta,\tilde{\rho}}=\sum_{\mu\xrightarrow{a}\nu}\varphi_{\nu/\mu}(t)V_{\mu,\tilde{\rho}}; \tag{2.14}$$

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}^\ell,|\beta|=a}(1-t)^{\ell(\beta)}\,V_{\tilde{\rho},\nu-\beta}=\sum_{\mu\xrightarrow{a}\nu}\varphi_{\nu/\mu}(t)V_{\tilde{\rho},\mu}. \tag{2.15}$$

证明。 我们只证明第一个公式，因为另一个公式是对偶的。对于 $\tilde{\rho}=\emptyset$，有

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}^\ell,|\beta|=a}(1-t)^{\ell(\beta)}\,V^+_{\nu-\beta}=\sum_{\mu\xrightarrow{a}\nu}\varphi_{\nu/\mu}(t)V^+_\mu, \tag{2.16}$$

见 [Tam11，定理 1]。于是公式（2.14）由命题2.3得出。□

2.3. **水平 Pieri 规则**。 正如我们将看到的，以下 Pieri 规则对应于导出 Hall 代数中的乘法公式（3.18）。

Th定理 2.6（水平 Pieri 规则）。 对于 $r\geq 1$ 以及任意分拆 ρ、ν，我们有 e

$$V_{\rho,\nu}\cdot v^+_r=\sum_{a+b=r}\sum_{\mu\xrightarrow{a}\nu,\rho\xrightarrow{b}\lambda}\varphi_{\nu/\mu}(t)\psi_{\lambda/\rho}(t)\;V_{\lambda,\mu}, \tag{2.17}$$

$$V_{\rho,\nu}\cdot v^-_r=\sum_{a+b=r}\sum_{\nu\xrightarrow{a}\mu,\lambda\xrightarrow{b}\rho}\psi_{\mu/\nu}(t)\varphi_{\rho/\lambda}(t)\;V_{\lambda,\mu}. \tag{2.18}$$

证明。 我们只证明（2.17）。令 $\ell=\ell(\rho)$ 和 $\mathfrak{m}=\ell(\nu)$。回顾（2.3）–（2.7），有$\mathbb{L}_{ij}^{-1}=1+(1-t)\sum_{k\geq 1}L_{ij}^k$ 以及

$$D_{\ell,\mathfrak{m}}=\prod_{\substack{1\leq i\leq\ell\\1\leq j\leq\mathfrak{m}}}\mathbb{L}_{ij}\cdot\prod_{1\leq i<j\leq\ell}\mathbb{R}^+_{ij}\cdot\prod_{1\leq i<j\leq\mathfrak{m}}\mathbb{R}^-_{ij}.$$

于是我们有

$$V_{\rho,\nu}\cdot v^+_r=D_{\ell,\mathfrak{m}}(v_{(\rho,r),\nu})$$

$$
\begin{aligned}
&= D_{\ell+1,\mathfrak{m}} \cdot \prod_{1\le j\le \mathfrak{m}} (\mathbb{L}_{\ell+1,j})^{-1} \cdot \prod_{1\le i\le \ell} (\mathbb{R}^{+}_{i,\ell+1})^{-1}(v_{(\rho,r),\nu}) \\
&= D_{\ell+1,\mathfrak{m}} \cdot \prod_{1\le i\le \ell} (\mathbb{R}^{+}_{i,\ell+1})^{-1} \cdot \prod_{1\le j\le \mathfrak{m}} (1+(1-t)\sum_{k\ge 1} L^{k}_{\ell+1,j})(v_{(\rho,r),\nu}) \\
&= D_{\ell+1,\mathfrak{m}} \cdot \prod_{1\le i\le \ell} (\mathbb{R}^{+}_{i,\ell+1})^{-1} \sum_{\beta\in\mathbb{N}^{\mathfrak{m}}} (1-t)^{\ell(\beta)}\, v_{(\rho,r-|\beta|),\nu-\beta} \\
&= \prod_{1\le i\le \ell} (\mathbb{R}^{+}_{i,\ell+1})^{-1} \sum_{0\le a\le r} \sum_{\beta\in\mathbb{N}^{\mathfrak{m}},|\beta|=a} (1-t)^{\ell(\beta)}\, V_{(\rho,r-|\beta|),\nu-\beta} \\
&= \prod_{1\le i\le \ell} (\mathbb{R}^{+}_{i,\ell+1})^{-1} \sum_{0\le a\le r} \sum_{\mu \xrightarrow{a} \nu} \varphi_{\nu/\mu}(t) V_{(\rho,r-a),\mu}, \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

最后一步中，我们使用了镜像恒等式（2.15），其中 $\tilde{\rho}=(\rho,r-a)$。

注意到 $V_{(\rho,r-a),\mu}=D_{\ell+1,\mathfrak{m}}(v_{(\rho,r-a),\mu})$，且 $D_{\ell+1,\mathfrak{m}}$ 与 $(\mathbb{R}^{+}_{i,\ell+1})^{-1}$ 对$1\le i\le r$，有交换性，因此我们可以将（2.19）的右端改写为

$$
\begin{aligned}
V_{\rho,\nu}\cdot v^{+}_{r} &= \prod_{1\le i\le \ell} (\mathbb{R}^{+}_{i,\ell+1})^{-1} \sum_{0\le a\le r} \sum_{\mu \xrightarrow{a} \nu} \varphi_{\nu/\mu}(t) D_{\ell+1,\mathfrak{m}}(v_{(\rho,r-a),\mu}) \\
&= \sum_{0\le a\le r} \sum_{\mu \xrightarrow{a} \nu} \varphi_{\nu/\mu}(t) D_{\ell+1,\mathfrak{m}} \cdot \prod_{1\le i\le \ell} (1+(1-t)\sum_{k\ge 1} (R^{+}_{i,\ell+1})^{k})(v_{(\rho,r-a),\mu}) \\
&= \sum_{0\le a\le r} \sum_{\mu \xrightarrow{a} \nu} \varphi_{\nu/\mu}(t) D_{\ell+1,\mathfrak{m}}\Big(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{\ell+1},|\gamma|=r-a} (1-t)^{\ell(\gamma_\bullet)} v_{(\rho+\gamma),\mu}\Big) \\
&= \sum_{0\le a\le r} \sum_{\mu \xrightarrow{a} \nu} \varphi_{\nu/\mu}(t) \cdot \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{\ell+1},|\gamma|=r-a} (1-t)^{\ell(\gamma_\bullet)} V_{(\rho+\gamma),\mu}. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

现在将镜像恒等式（2.11）应用于（2.20）的右端，即可得到该定理。 □

2.4. **双 Hall-Littlewood 函数。** 我们回顾变量 $x=(x_1,x_2,\dots)$ 中的 Hall-Littlewood（HL）函数，遵循 [Mac95，第 208–211] 页。将 h_r 第 r 个完全对称函数记为 $r\ge 0$。对于不定元 u，记

$$
H(u)=\sum_{r=0}^{\infty} h_r u^r = \prod_{i\ge 1} \frac{1}{1-ux_i}, \qquad Q(u)=\sum_{r=0}^{\infty} Q_r u^r = H(u)/H(tu).
$$

对于任意合成 $q_r=Q_r$，我们设 $q_\lambda=q_{\lambda_1}q_{\lambda_2}\cdots$。令 λ。设 $u_1,u_2,\cdots$为相互独立的不定元。回顾（$F(u)=(1-u)/(1-tu)$）（见（2.2））。那么 HL 对称函数 Q_λ 是 $u^\lambda=u_1^{\lambda_1}u_2^{\lambda}\cdots$在以下表达式中的系数

$$
Q(u_1,u_2,\dots)=\prod_{i\ge 1} Q(u_i)\prod_{i<j} F(u_i u_j^{-1}). \qquad (2.21)
$$

根据 [Mac95，第 212], HL 函数的生成函数（2.21） Q_λ 可以改述如下

$$
Q_\lambda=\prod_{i<j}\frac{1-R_{ij}}{1-tR_{ij}}q_\lambda=\prod_{i<j}\Big(1+(t-1)\sum_{r\ge 1} t^{r-1}R^{r}_{ij}\Big)q_\lambda. \qquad (2.22)
$$

在任意合成 λ、μ 的情况下，我们将在 V_λ 的定义（2.6）中令 $v_r^\pm = q_r^\pm = Q_r^\pm$，$\mu$。这样，我们将环 $\mathcal{D}\Lambda_t = \mathbb{Q}(t)[q_1^\pm, q_2^\pm, \dots]$ 与双对称函数环 $\mathbb{Q}(t)[x_1^+, x_2^+, \dots, x_1^-, x_2^-, \dots]^{\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty}$ 等同起来。对于任意分拆 λ，我们可以构造 HL 对称函数的两个版本，记作 $Q_\lambda^\pm$，属于 $\mathcal{D}\Lambda_t$。并将 $Q^\pm(u) = \sum_{r=0}^\infty Q_r^\pm u^r$ 记作 $Q^\pm(u) = \sum_{r=0}^\infty Q_r^\pm u^r$。由（2.6）和（2.22）可知，若其中一个分拆为空，则 V_λ、$\emptyset$ 或 $V_\emptyset$、λ 分别与 Q_λ^+ 或 Q_λ^- 相同。另一方面，V_λ、μ 给出了另一类双对称函数，称为双 Hall–Littlewood 对称函数，记作 Q_λ、μ。或者，按照（2.21）与（2.22）等价的思路，我们可以如下定义 Q_λ、μ。

定义 2.7 (双 HL 函数)。对于任意合成 λ 和 μ, $Q_{\lambda,\mu}$ 是 $u^\lambda w^\mu = u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \cdots w_1^{\mu_1} w_2^{\mu_2} \cdots$ 在.....中的系数

$$\begin{aligned} Q(u,w) =& Q(u_1, u_2, \cdots, w_1, w_2, \cdots) \\ =& \prod_{i\geq 1} Q^+(u_i) \prod_{j\geq 1} Q^-(w_j) \prod_{i<i'} F(u_i^{-1}u_{i'}) \prod_{j<j'} F(w_j^{-1}w_{j'}) \prod_{i,j} F(u_i w_j) \\ =& \prod_{i\geq 1} Q^+(u_i) \prod_{j\geq 1} Q^-(w_j) \prod_{i<i'} \frac{1-u_i^{-1}u_{i'}}{1-tu_i^{-1}u_{i'}} \prod_{j<j'} \frac{1-w_j^{-1}w_{j'}}{1-tw_j^{-1}w_{j'}} \prod_{i,j} \frac{1-u_i w_j}{1-tu_i w_j}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

2.5. 修正 HL 函数。令 $x = (x_1, x_2, \dots)$。回顾一下，修正 Hall-Littlewood 函数 $H_\lambda(x; t)$ 可以用复合定义为：$H_\lambda(x;\ t) = Q_\lambda(x/(1-t); t)$，参见 [Mac95，第 234], 页，例 7, 其中记作 Q'_λ。它也可以通过 Garsia 版本的 Jing 顶点算子 [J91] 来定义。借助升算子，修正 HL 函数定义为

$$H_\mu = \prod_{1\leq i<j} \frac{1-R_{ij}}{1-tR_{ij}} h_\mu. \tag{2.24}$$

注意 $H_{(r)} = h_r$。

在本小节中，我们将在定义（2.6）中取 $v_r^\pm = h_r^\pm$，然后将 $V_{\lambda,\mu}$ 重新记作 $H_{\lambda,\mu}$。这样，我们便将 $\mathcal{D}\Lambda_t = \mathbb{Q}(t)[h_1^\pm, h_2^\pm, \dots]$ 视为双对称函数环。

定义 2.8. 对于任意合成 λ、μ，修正双 *HL* 函数 $H_{\lambda,\mu} \in \mathcal{D}\Lambda_t$ 定义为

$$H_{\lambda,\mu} = \mathbb{L}\cdot\mathbb{R}^+\cdot\mathbb{R}^-(h_{\lambda,\mu}) = \mathbb{L}\cdot\mathbb{R}^+\cdot\mathbb{R}^-(h_\lambda^+ h_\mu^-). \tag{2.25}$$

那么 $H_{\lambda,\emptyset}$ 就是修正 HL 函数 $H_\lambda(x; t)$。

现在令 $t = 0$，并考虑双对称函数的环 $\mathcal{D}\Lambda := \mathbb{Q}[h_1^\pm, h_2^\pm, \dots]$。回忆一下，对于分拆 λ, μ，在 [SV15], 中，Schur-Laurent 函数 $s_{\lambda,\mu}$ 定义为

$$s_{\lambda,\mu} = \det \begin{pmatrix} h_{\mu_s}^- & h_{\mu_s-1}^- & \cdots & h_{\mu_s-s-r+1}^- \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{\mu_1+s-1}^- & h_{\mu_1+s-2}^- & \cdots & h_{\mu_1-r}^- \\ h_{\lambda_1-s}^+ & h_{\lambda_1-s+1}^+ & \cdots & h_{\lambda_1+r-1}^+ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{\lambda_r-s-r+1}^+ & h_{\lambda_r-s-r+2}^+ & \cdots & h_{\lambda_r}^+ \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

其中 $\ell(\lambda) = r$ 且 $\ell(\mu) = s$。若 $\mu = \emptyset$，则 $s_\lambda = s_{\lambda,\emptyset}$ 就是舒尔函数。另一方面，我们有

$$H_{\lambda,\mu}|_{t=0} = \prod_{i,j\geq 1}(1 - L_{ij}) \cdot \prod_{1\leq i<j}(1 - R_{ij}^{+}) \cdot \prod_{1\leq i<j}(1 - R_{ij}^{-})(h_{\lambda,\mu}). \tag{2.27}$$

作为一个著名结果 $s_\lambda = H_\lambda|_{t=0}$ (例如参见 [Mac95]) 的推广，我们有如下命题。

命题 2.9。对于任意分拆 λ 和 μ，有 $s_{\lambda,\mu} = Q_{\lambda,\mu}|_{t=0}$.

证明。记 $r = \ell(\lambda)$ $s = \ell(\mu)$。令 $\mathfrak{S}_{r+s}$ 为对称群。一个整数序列

$$\alpha = (\alpha_{-s}, \alpha_{-s+1}, \cdots, \alpha_{-1}, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$$

若满足 $\alpha_i \geq 0$，对 $1 \leq i \leq r$ 成立，且 $\alpha_j \leq 0$，对 $-s \leq j \leq -1$ 成立，则称其为 (r, s)-合成；若进一步满足 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r > 0$ 且 $\alpha_{-1} \leq \alpha_{-2} \leq \cdots \leq \alpha_{-s} < 0$，则称其为 (r, s)-分拆。给定一对分拆

$$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_r) \quad \text{and} \quad \gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_s),$$

我们可以得到一个 (r, s)-分拆 $\lambda = (-\gamma_s, \cdots, -\gamma_1, \beta_1, \cdots, \beta_r)$。反过来，任意 (r, s)-分拆给出两个分拆 β 和 γ，其长度分别为 r 和 s。

对于任意 (r, s) -合成 α，定义

$$h_\alpha := h^{-}_{-\alpha_{-s}} \cdots h^{-}_{-\alpha_{-1}} h^{+}_{\alpha_1} \cdots h^{+}_{\alpha_r}.$$

因此，我们可以通过（2.26）为 (r, s) -合成 α附加一个舒尔-劳朗对称多项式；或者等价地，有

$$s_\alpha = \sum_{\omega\in\mathfrak{S}_{r+s}} \epsilon(\omega) h_{\alpha+\delta-\omega(\delta)}$$

其中 $\epsilon(\omega) \in \{\pm 1\}$ 是置换 ω 的符号，δ 是合成 $(r + s - 1, r + s - 2, \cdots, 1, 0)$。

对于任意 (r, s) -合成 α，定义

$$H_\alpha = H_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_r),(-\alpha_{-1},\cdots,-\alpha_{-s})}. \tag{2.28}$$

定义广义升算子 R_{ij} 作用于 (r, s) -合成 α 上为

$$R_{ij}(\alpha) = (\ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_j - 1, \ldots).$$

当 $i, j \in \{-s, \cdots, -1, 1, \cdots, r\}$ 且 $i < j$。记 $R_{ij}h_\alpha = h_{R_{ij}\alpha}$。于是我们可以将公式（2.27）改写为

$$H_\alpha|_{t=0} = \prod_{i<j}(1 - R_{ij})h_\alpha, \tag{2.29}$$

对于任意的 (r, s) -分拆 α。值得注意的是，对于 $a < 0$，$h_a^{\pm} = 0$。

只需证明，对于任意的 (r, s) -分拆 α，$s_\alpha = H_\alpha|_{t=0}$。

我们考虑环 $\mathbb{Q}[x_{-s}^{\pm 1},\cdots,x_{-1}^{\pm 1},x_1^{\pm 1},\cdots,x_r^{\pm 1}]$。对于任意整数序列 $\beta=(\beta_{-s},\cdots,\beta_{-1},\beta_1,\cdots,\beta_r)$，我们将 $x^\beta=x_{-s}^{\beta_{-s}}\cdots x_{-1}^{\beta_{-1}}x_1^{\beta_1}\cdots x_r^{\beta_r}$ 和 $R_{ij}x^\beta=x^{R_{ij}\beta}$ 记作 $i<j$。那么，对于任意的 (r,s)-分拆 α，以下结论成立：

$$\sum_{\omega\in\mathfrak{S}_{r+s}}\epsilon(\omega)x^{\alpha+\delta-\omega(\delta)}=x^{\alpha+\delta}\prod_{i<j}(x_i^{-1}-x_j^{-1})=x^\alpha\prod_{i<j}(1-x_ix_j^{-1})=\prod_{i<j}(1-R_{ij})x^\alpha. \tag{2.30}$$

显然，$\{x^\beta\mid\beta=(\beta_{-s},\cdots,\beta_{-1},\beta_1,\cdots,\beta_r)\in\mathbb{Z}^{r+s}\}$ 是环$\mathbb{Q}[x_{-s}^{\pm 1},\cdots,x_{-1}^{\pm 1},x_1^{\pm 1},\cdots,x_r^{\pm 1}]$的一个 $\mathbb{Q}$-基。于是存在一个 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$\psi:\mathbb{Q}[x_{-s}^{\pm 1},\cdots,x_{-1}^{\pm 1},x_1^{\pm 1},\cdots,x_r^{\pm 1}]\to\mathcal{D}\Lambda,\ x^\beta\mapsto h_\beta.$$

注意，$h_\beta=0$ 如果 β 不是一个（r，s）-合成。将线性映射 ψ 应用于（2.30），我们得到

$$\sum_{\omega\in\mathfrak{S}_{r+s}}\epsilon(\omega)h_{\alpha+\delta-\omega(\delta)}=\prod_{i<j}(1-R_{ij})h_\alpha.$$

证明完成。 □

通过在定理 $t=0$ 2.6中令，即可立即推出以下关于 Schur-Laurent 函数的 Pieri 法则。（也可以像证明定理 2.6那样直接证明，使用关于 s_λ一个众所周知且更简单的镜像恒等式，参见例如 [Tam12，（8）]。）

推论 2.10。对于 $r\geq 1$ 以及任意分拆 ρ、ν，有

$$s_{\rho,\nu}\cdot s_r^+=\sum_{a+b=r}\sum_{\mu\xrightarrow{a}\nu,\rho\xrightarrow{b}\lambda}s_{\lambda,\mu}, \tag{2.31}$$

$$s_{\rho,\nu}\cdot s_r^-=\sum_{a+b=r}\sum_{\nu\xrightarrow{a}\mu,\lambda\xrightarrow{b}\rho}s_{\lambda,\mu}. \tag{2.32}$$

关于 $r=1$ （2.31）的 [SV15，定理 6.1]，Jack-Laurent对称函数的 Pieri 法则也可以通过令 $k=-1$ 其中的

3. Derived Hall algebra of the Jordan quiver

对于任意（本质上小的）阿贝尔范畴 $\mathcal{B}$，记 Iso($\mathcal{B}$) 为对象 $M\in\mathcal{B}$ 的同构类 $[M]$ 所成的集合。对于集合 S，记 $|S|$ 为其基数。设 $\Bbbk=\mathbb{F}_q$ 为含有 q 个元素的有限域。本节中，我们用 Q_J 表示 Jordan 箭图，即具有单顶点 1 和单环 $\alpha:1\to 1$ 的箭图。令 $\mathcal{A}=\mathrm{rep}_\Bbbk^{\mathrm{nil}}(Q_J)$ 表示由有限维幂零 $\Bbbk$-线性表示构成的范畴。众所周知，$\mathcal{A}$ 的欧拉形式是平凡的。

rep 的导出 Hall 代数$\mathcal{D}^{\mathrm{nil}}_\Bbbk(Q_J)$ 由 [CLR25] 给出。我们将阐述其基本性质，其中包括 Jordan 箭图的导出 Hall 代数的两条 Pieri 规则。我们还将建立从导出 Hall 代数到双对称函数环的代数同构。

3.1. 根范畴。 众所周知， $\mathcal{A}=\mathrm{rep}_{\Bbbk}^{\mathrm{nil}}(Q_J)$ 是一个单列范畴。令S 为 $\mathcal{A}$ 中的简单对象。那么，$\mathrm{rep}_{\Bbbk}^{\mathrm{nil}}(Q_J)$ 中任意不可分解对象（在同构意义下）都具有长度为 $n\geq 1$ 的 $S^{(n)}$ 形式。因此，同构类集合 $\mathcal{A}$ 通过如下对应，与所有分拆组成的集合 $\mathcal{P}$ 自然同构：

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)\mapsto S^{(\lambda)}=S^{(\lambda_1)}\oplus\cdots\oplus S^{(\lambda_r)}. \tag{3.1}$$

令 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$为 $\mathcal{A}$的有界导出范畴，并带有 $[1]$平移函子。众所周知， $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$是一个三角范畴。设 F 是 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$的一个自同构。轨道范畴 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})/F$ 与 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$具有相同的对象，并且

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})/F}(M^\bullet,N^\bullet)=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(M^\bullet,F^iN^\bullet).$$

对于任意 $m\geq 1$，轨道范畴 $\mathcal{D}_m(\mathcal{A}):=\mathcal{D}^b(\mathcal{A})/[m]$ 称为 $\mathcal{A}$的 m-周期导出范畴，并且它是一个三角范畴，使得自然投影 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})\to\mathcal{D}_m(\mathcal{A})$是一个三角函子；参见 [PX97, Ke05]。我们也用 $[1]$表示$\mathcal{D}_m(\mathcal{A})$的平移函子。对于 $m=2$，我们还记 $\mathcal{R}(\mathcal{A}):=\mathcal{D}_2(\mathcal{A})=\mathcal{D}^b(\mathcal{A})/[2]$，它也称为根范畴。

$\mathcal{A}$的任意对象都可以视为一个集中于零次的茎复形。这诱导出一个满嵌入 $\mathcal{A}\to\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$，继而得到一个满嵌入 $\mathcal{A}\to\mathcal{R}(\mathcal{A})$。我们始终以这种方式将 $\mathcal{A}$ 视为 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$的一个满子范畴。

对于任意对象 $M^\bullet\in\mathcal{R}(\mathcal{A})$，它都同构于 $M_0\oplus M_1[1]$ 某个（在同构意义下唯一的） M_0，$M_1\in\mathcal{A}$参见 [PX97]。由此，我们称 M_i 为 i的第 $M^\bullet$个同调群，记作 $H^i(M^\bullet)$，其中 $i=0,1$。

3.2. 导出 Hall 代数。对于 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$中的两个对象 $M^\bullet$和 $N^\bullet$，记 $\mathrm{Aut}(M^\bullet)$ 为 $M^\bullet$的自同构群，并且

$$\{M^\bullet,N^\bullet\}:=|\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0(M^\bullet),H^0(N^\bullet))|\cdot|\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(H^1(M^\bullet),H^1(N^\bullet))|. \tag{3.2}$$

若对于 M_0，M_1，N_0，$N_1\in\mathcal{A}\subset\mathcal{R}(\mathcal{A})$，有 $M^\bullet=M_0\oplus M_1[1]$和 $N^\bullet=N_0\oplus N_1[1]$，则

$$\{M^\bullet,N^\bullet\}=|\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_0,N_0)||\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M_1,N_1)|=|\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_0,N_0)||\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_1,N_1)|. \tag{3.3}$$

对于 $\mathcal{R}(\mathcal{A})$中的任意 $M^\bullet$、 $N^\bullet$、 $L^\bullet$，定义

$$\mathrm{Hom}(M^\bullet,N^\bullet)_{L^\bullet}=\{l:M^\bullet\to N^\bullet\mid\mathrm{Cone}(l)\cong L^\bullet\}.$$

进而将导出 Hall 数定义为

$$G^{L^\bullet}_{M^\bullet N^\bullet}:=\frac{|\mathrm{Hom}(M^\bullet,N^\bullet[1])_{L^\bullet[1]}|}{\{M^\bullet,N^\bullet\}}. \tag{3.4}$$

根据 [CLR25，§5]，导出 Hall 代数（Drinfeld 对偶） $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$ 是一个结合代数，其 $\mathbb{Q}$基为 $\{[M^\bullet]\mid M^\bullet\in\mathcal{R}(\mathcal{A})\}$，乘法定义如下：

$$[M^\bullet]*[N^\bullet]=\sum_{[L^\bullet]}G^{L^\bullet}_{M^\bullet N^\bullet}\,[L^\bullet], \tag{3.5}$$

以及恒等式 $[0]$。

给定对象 M，N，$L\in\mathcal{A}$，令 $\mathrm{Ext}^1(M,N)_L\subseteq\mathrm{Ext}^1(M,N)$ 表示参数化扩张的子集，其中项与 L 同构。霍尔代数 （或 *Ringel-Hall*

~代数） $\mathcal{H}(\Bbbk Q_J)$ 定义为一个 $\mathbb{Q}$-向量空间，其基为对象的同构类 $[M]$ $M \in \mathcal{A}$ ，乘法定义如下（参见例如 [Br13]）

$$[M] * [N] = \sum_{[L] \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A})} G_{MN}^{L} \cdot [L], \tag{3.6}$$

其中 $G_{MN}^{L} = |\mathrm{Ext}^1(\ M\ N\ _L|,) \mathrm{Hom}(,)$。

给定三个对象 M, N, L，霍尔数定义为

$$F_{MN}^{L} := |\{X \subseteq L \mid X \cong N \text{ and } L/X \cong M\}|.$$

记 b y Aut(M) 为 M 的自同构群。Riedtmann-Peng 公式表明 s

$$F_{MN}^{L} = \frac{|\mathrm{Ext}^1(M,N)_L|}{|\mathrm{Hom}(M,N)|} \cdot \frac{|\mathrm{Aut}(L)|}{|\mathrm{Aut}(M)| \cdot |\mathrm{Aut}(N)|}. \tag{3.7}$$

~众所周知， $\mathcal{H}(\Bbbk Q_J)$ 是交换的。

Let $\widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_J) \otimes \widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_J)$是自然张量代数。于是我们有如下结果。

~**引理 3.1** （[CLR25，命题 5.1、5.2]）。 导出 *Hall* 代数 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$ 是交换的。

~ ~ ~此外，我们有一个代数同构 $\mathcal{H}(\Bbbk Q_J) \otimes \mathcal{H}(\Bbbk Q_J) \cong \mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$ 。

~**命题 3.2**。 导出 *Hall* 代数 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$ 同构于

（1）关于 $\mathbb{Q}$ 的多项式代数，其无限多个生成元为 $[S^{(1^r)}]$、$[S^{(1^r)}[1]]$ ，其中 $r \geq 1$；（2）关于 $\mathbb{Q}$ 的多项式代数，其无限多个生成元为 $[S^{(r)}]$、$[S^{(r)}[1]]$ ，其中 $r \geq 1$。

证明。 我们只证明第一个陈述，第二个陈述可以用同样的方法证明。

~根据 [Mac95第二章（2.3）]， $\mathcal{H}(\Bbbk Q_J)$ 同构于由无穷多个生成元构成的多项式代数 $[S^{(1^r)}]$, 对于 $r \geq 1$。于是，由引理3.1即可得到所需结果。□

我们将利用霍尔数给出一个适用于导出霍尔数的公式。为此，我们需要使用 2-周期复形范畴。

$\mathcal{A}$ 上的 2-周期复形是

$$(\ M^0 \underset{d^1}{\overset{d^0}{\rightleftarrows}} M^1\ ), \quad d^1 d^0 = d^0 d^1 = 0.$$

令 $\mathcal{C}_2(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$的 2-周期复形范畴。众所周知，

$$|\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(\mathcal{A})}(M^\bullet, N^\bullet[1])_{L^\bullet[1]}| = \sum_{\substack{[X^\bullet] \in \mathrm{Iso}(\mathcal{C}_2(\mathcal{A})), \\ H^i(X^\bullet) \cong L_i}} |\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_2(\mathcal{A})}(M^\bullet, N^\bullet)_{X^\bullet}|.$$

回顾在 [LP21] 中定义的 $\mathcal{C}_2(\mathcal{A})$ 的半导出 Ringel-Hall 代数 $\mathcal{SDH}(\mathcal{A})$。令$\mathcal{H}(\mathcal{C}_2(\mathcal{A}))$ 为 $\mathcal{C}_2(\mathcal{A})$ 的 Hall 代数， I为由所有 $[M^\bullet] - [N^\bullet \oplus K^\bullet]$ 生成的理想，其中存在短正合列 $0 \to K^\bullet \to M^\bullet \to N^\bullet \to 0$，且 $K^\bullet$ 无环。于是 $\mathcal{SDH}(\mathcal{A})$ 是商代数 $\mathcal{H}(\mathcal{C}_2(\mathcal{A}))/I$ 的局部化，使得对于任意无环复形 $K^\bullet$， $[K^\bullet]$ 都可逆。

对于任意对象 $M\in\mathcal{A}$，我们在 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{A})$ 中定义以下对象：

$$\begin{aligned} K_M &:=(\ M \underset{0}{\overset{1}{\rightleftarrows}} M\ ), \qquad & K_M^* &:=(\ M \underset{1}{\overset{0}{\rightleftarrows}} M\ ),\\ C_M &:=(\ 0 \rightleftarrows M\ ), & C_M^* &:=(\ M \rightleftarrows 0\ ). \end{aligned} \tag{3.8}$$

令 $K_0(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 的格罗滕迪克群。记 $M\in\mathcal{A}$ 在 $K_0(\mathcal{A})$ 中的类为 M。对于任意 $\alpha\in\mathcal{A}$，若 $\alpha=\widehat{M}-\widehat{N}$ 属于 $\mathcal{SDH}(\mathcal{A})$，则记 $[K_\alpha]:=[K_M]*[K_N]^{-1}$；$[K_\alpha^*]$ 的定义类似。根据定义，我们知道

$$[M^\bullet]*[N^\bullet]=\sum_{\substack{[L_0],[L_1]\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A}),\\ \alpha,\beta\in K_0(\mathcal{A})}}\ \sum_{\substack{[X^\bullet]\in\mathrm{Iso}(\mathcal{C}_2(\mathcal{A})),\\ H^i(X^\bullet)\cong L_i,\widehat{\mathrm{Im}(d^0)}=\alpha,\widehat{\mathrm{Im}(d^1)}=\beta}} \frac{|\operatorname{Ext}_{\mathcal{C}_2(\mathcal{A})}(M^\bullet,N^\bullet)_{X^\bullet}|}{|\operatorname{Hom}(M^\bullet,N^\bullet)|}[C_{L_0}\oplus C_{L_1}^*]*[K_\alpha]*[K_\beta^*]. \tag{3.9}$$

这里，d^1 是 $N^\bullet$ 的微分。

根据 [LR24、命题 3.3、例 2，2], 注意到欧拉形式是平凡的，可知

$$\begin{aligned}[M^\bullet]*[N^\bullet]=&\sum_{\substack{[L_0],[L_1]\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A}),\\ \alpha,\beta\in K_0(\mathcal{A})}}\ \sum_{[B_0],[B_1],[C_0],[C_1]}\ \sum_{\substack{[A_0],[A_1],\\ \widehat{A_0}=\alpha,\widehat{A_1}=\beta}}\\ &\times\frac{|\operatorname{Aut}(A_0)||\operatorname{Aut}(A_1)||\operatorname{Aut}(B_0)||\operatorname{Aut}(B_1)||\operatorname{Aut}(C_0)||\operatorname{Aut}(C_1)|}{|\operatorname{Aut}(L_0)||\operatorname{Aut}(L_1)|}\\ &\times F_{A_0B_0}^{M_0}F_{B_0C_0}^{L_0}F_{C_0A_1}^{N_0}F_{A_1B_1}^{M_1}F_{B_1C_1}^{L_1}F_{C_1A_0}^{N_1}[C_{L_0}\oplus C_{L_1}^*]*[K_\alpha]*[K_\beta^*].\end{aligned} \tag{3.10}$$

命题 3.3。 对于任意满足 M_i、N_i、$L_i\in\mathcal{A}$（对 $i=0$，1）的 $M^\bullet=M_0\oplus M_1[1]$、$N^\bullet=N_0\oplus N_1[1]$、$L^\bullet=L_0\oplus L_1[1]\in\mathcal{R}(\mathcal{A})$，我们有

$$\begin{aligned}G_{M^\bullet N^\bullet}^{L^\bullet}=&\sum_{\substack{[A_0],[A_1],[B_0],[B_1],\\ [C_0],[C_1]\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A})}} F_{A_0B_0}^{M_0}F_{B_0C_0}^{L_0}F_{C_0A_1}^{N_0}F_{A_1B_1}^{M_1}F_{B_1C_1}^{L_1}F_{C_1A_0}^{N_1}\\ &\times\frac{|\operatorname{Aut}(A_0)||\operatorname{Aut}(A_1)||\operatorname{Aut}(B_0)||\operatorname{Aut}(B_1)||\operatorname{Aut}(C_0)||\operatorname{Aut}(C_1)|}{|\operatorname{Aut}(L_0)||\operatorname{Aut}(L_1)|}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

证明。通过比较公式（3.9）和（3.10），可知

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}(\mathcal{A})}(M^\bullet,N^\bullet[1])_{L^\bullet[1]}|\\ &=\sum_{\substack{[X^\bullet]\in\mathrm{Iso}(\mathcal{C}_2(\mathcal{A})),\\ H^i(X^\bullet)\cong L_i}}|\operatorname{Ext}_{\mathcal{C}_2(\mathcal{A})}(M^\bullet,N^\bullet)_{X^\bullet}|\\ &=|\operatorname{Hom}(M^\bullet,N^\bullet)|\sum_{\substack{[A_0],[A_1],[B_0],[B_1],\\ [C_0],[C_1]\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A})}} F_{A_0B_0}^{M_0}F_{B_0C_0}^{L_0}F_{C_0A_1}^{N_0}F_{A_1B_1}^{M_1}F_{B_1C_1}^{L_1}F_{C_1A_0}^{N_1}\\ &\quad\times\frac{|\operatorname{Aut}(A_0)||\operatorname{Aut}(A_1)||\operatorname{Aut}(B_0)||\operatorname{Aut}(B_1)||\operatorname{Aut}(C_0)||\operatorname{Aut}(C_1)|}{|\operatorname{Aut}(L_0)||\operatorname{Aut}(L_1)|}.\end{aligned}$$

所需公式由此得出，因为 $|\text{同态}(M^\bullet,N^\bullet)|=\{M^\bullet,N^\bullet\}$；参见 (3.3)。 □

3.3. **泛型导出霍尔代数。** 根据 Hall 和 Steinitz（参见 [Mac95，III]），存在唯一的多项式 $F^{\lambda}_{\mu,\nu}(T)\, G^{\lambda}_{\mu,\nu}(T) \in \mathbb{Z}[T]$ 使得

$$F^{S^{(\lambda)}}_{S^{(\mu)},S^{(\nu)}} = F^{\lambda}_{\mu,\nu}(q), \qquad G^{S^{(\lambda)}}_{S^{(\mu)},S^{(\nu)}} = G^{\lambda}_{\mu,\nu}(q).$$

对于任意分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots)$，令 $n(\lambda) = \sum_i (i-1)\lambda_i$。记

$$\varphi_m(t) = (1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^m), \quad \forall m \in \mathbb{N}; \tag{3.12}$$

$$b_\lambda(t) = \prod_{i\geq 1} \varphi_{m_i(\lambda)}(t), \quad \forall \lambda \in \mathcal{P}. \tag{3.13}$$

以下结果众所周知（例如，参见 [Sch12，引理 2。8]）：

$$\begin{aligned} |\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})| =& q^{|\lambda|+2n(\lambda)} \prod_i (1-q^{-1})(1-q^{-2})\cdots(1-q^{-m_i(\lambda)}) \\ =& q^{|\lambda|+2n(\lambda)} \prod_{i\geq 1} \varphi_{m_i(\lambda)}(q^{-1}) = q^{|\lambda|+2n(\lambda)} b_\lambda(q^{-1}). \end{aligned} \tag{3.14}$$

引理 3.4。 对于分拆 $\lambda, \tilde{\lambda}, \mu, \tilde{\mu}, \nu, \tilde{\nu}$，存在劳朗多项式 $\mathcal{G}^{\lambda,\tilde{\lambda}}_{\mu,\tilde{\mu},\nu,\tilde{\nu}}(T) \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ 使得

$$[S^{(\mu)} \oplus S^{(\tilde{\mu})}[1]] * [S^{(\nu)} \oplus S^{(\tilde{\nu})}[1]] = \sum_{\lambda,\tilde{\lambda}} \mathcal{G}^{\lambda,\tilde{\lambda}}_{\mu,\tilde{\mu},\nu,\tilde{\nu}}(q)[S^{(\lambda)} \oplus S^{(\tilde{\lambda})}] \tag{3.15}$$

证明。 由命题3.3 及上述结论，我们可以写成

$$[S^{(\mu)} \oplus S^{(\tilde{\mu})}[1]] * [S^{(\nu)} \oplus S^{(\tilde{\nu})}[1]] = \sum_{\lambda,\tilde{\lambda}} \mathcal{G}^{\lambda,\tilde{\lambda}}_{\mu,\tilde{\mu},\nu,\tilde{\nu}}(q)[S^{(\lambda)} \oplus S^{(\tilde{\lambda})}], \tag{3.16}$$

其中 $\mathcal{G}^{\lambda,\tilde{\lambda}}_{\mu,\tilde{\mu},\nu,\tilde{\nu}}(T) = {}^{F_1}(T)\, {}_{F_2}(T)$ 对于 $F_1(T)\ F_2(T) \in \mathbb{Z}[T]$成立，且 $F_2(q) = |\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})||\operatorname{Aut}(S^{(\tilde{\lambda})})|$。与 (3.4) 比较可知，$q^m G^{\lambda,\tilde{\lambda}}_{\mu,\tilde{\mu},\nu,\tilde{\nu}}(q) = {}^{q^m F_1}(q)\, {}_{F_2}(q) \in \mathbb{Z}$ 对于某个 $m \in \mathbb{N}$成立。因此，$F_2(T)$ 整除 $T^m F_1(T)$，注意到 q可以是任意素数幂，便得到 $\mathcal{G}^{\lambda}_{\mu,\nu}(T) \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$。□

现在，我们定义 Jordan 箭图在 $\mathbb{Q}(t)$ 上的泛型导出霍尔代数，并将其记为 $\mathcal{DH}(Q_J)$。代数 $\mathcal{DH}(Q_J)$ 是一个自由的 $\mathbb{Q}(t)$-模，其基为 $\{u_{\lambda,\tilde{\lambda}} | \lambda,\ \lambda \in \mathcal{P}\}$ 乘法定义为

$$u_{\mu,\tilde{\mu}} * u_{\nu,\tilde{\nu}} = \sum_{\lambda,\tilde{\lambda}\in\mathcal{P}} \mathcal{G}^{\lambda,\tilde{\lambda}}_{\mu,\tilde{\mu},\nu,\tilde{\nu}}(t^{-1}) u_{\lambda,\tilde{\lambda}}. \tag{3.17}$$

3.4. **水平 Pieri 规则。**现在，我们在$\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$中建立 Pieri 规则的第一个版本。

引理 3.5。 对于 $r \geq 1$ 以及任意分拆 ρ, ν，下列恒等式在 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$中成立：

$$[S^{(\rho)} \oplus S^{(\nu)}[1]] * [S^{(r)}] = \sum_{a=0}^{r} \sum_{\lambda,\mu} F^{\lambda}_{\rho,(a)}(q) F^{\nu}_{(r-a),\mu}(q) \tag{3.18}$$

$$\times \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(a)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(r-a)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|} \cdot [S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]],$$

$$[S^{(\rho)} \oplus S^{(\nu)}[1]] * [S^{(1^r)}] = \sum_{a=0}^{r} \sum_{\lambda,\mu} F^{\lambda}_{\rho,(1^a)}(q) F^{\nu}_{(1^{r-a}),\mu}(q) \tag{3.19}$$

$$\times \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(1^r)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})| \cdot q^{a(r-a)}} \cdot [S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]].$$

对偶地，我们有

$$[S^{(\rho)} \oplus S^{(\nu)}[1]] * [S^{(r)}[1]] = \sum_{a=0}^{r} \sum_{\lambda,\mu} F^{\rho}_{\lambda,(a)}(q) F^{\mu}_{(r-a),\nu}(q) \tag{3.20}$$

$$\times \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\nu)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(a)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(r-a)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\mu)})|} \cdot [S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]],$$

$$[S^{(\rho)} \oplus S^{(\nu)}[1]] * [S^{(1^r)}[1]] = \sum_{a=0}^{r} \sum_{\lambda,\mu} F^{\rho}_{\lambda,(1^a)}(q) F^{\mu}_{(1^{r-a}),\nu}(q) \tag{3.21}$$

$$\times \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\nu)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(1^r)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\mu)})| \cdot q^{a(r-a)}} \cdot [S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]].$$

证明。我们只证明恒等式（3.18）和（3.19）。利用命题3.3，可得

$$[S^{(\rho)} \oplus S^{(\nu)}[1]] * [S^{(r)}] = \sum_{a=0}^{r} \sum_{\lambda,\mu} F^{\lambda}_{\rho,(a)}(q) F^{(r)}_{(a),(r-a)}(q) F^{\nu}_{(r-a),\mu}(q)$$

$$\times \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(a)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(r-a)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|} \cdot [S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]],$$

其中 $F^{(r)}_{(a),(r-a)}$ 对任意 $0 \le a \le r$，其值均为 1。因此，我们得到公式（3.18）。

同样，由命题3.3和 Riedtmann-Peng 公式，可得

$$\begin{aligned}
&[S^{(\rho)} \oplus S^{(\nu)}[1]] * [S^{(1^r)}] \\
&= \sum_{a=0}^{r} \sum_{\lambda,\mu} F^{\lambda}_{\rho,(1^a)}(q) F^{(1^r)}_{(1^a),(1^{r-a})}(q) F^{\nu}_{(1^{r-a}),\mu}(q) \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(1^{r-a})})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|} \\
&\qquad \times [S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]] \\
&= \sum_{a=0}^{r} \sum_{\lambda,\mu} F^{\lambda}_{\rho,(1^a)}(q) F^{\nu}_{(1^{r-a}),\mu}(q) \frac{|\operatorname{Ext}(S^{(1^a)}), S^{(1^{r-a})})_{S^{(1^r)})}|}{|\operatorname{Hom}(S^{(1^a)}), S^{(1^{r-a})})|} \cdot \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(1^r)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|} \\
&\qquad \times [S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]] \\
&= \sum_{a=0}^{r} \sum_{\lambda,\mu} F^{\lambda}_{\rho,(1^a)}(q) F^{\nu}_{(1^{r-a}),\mu}(q) \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})| \cdot |\operatorname{Aut}(S^{(1^r)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})| \cdot q^{a(r-a)}} \cdot [S^{(\lambda)} \oplus S^{(\mu)}[1]].
\end{aligned}$$

证明完成。 □

现在我们将对公式（3.18）–（3.21）重新规范化，使其与对称函数一侧相容。

对于一个水平 r-条带 $\sigma=\nu-\mu$，令 $I=I_{\nu-\mu}$ 为满足以下条件的整数集合 $i\geq 1$：$\sigma'_i=1$ 且 $\sigma'_{i+1}=0$。回顾 [Mac95, II,(4.13)] 中的结论

$$F^{\nu}_{\mu,(r)}(T)=\frac{T^{n(\nu)-n(\mu)}}{1-T^{-1}}\prod_{i\in I_{\nu-\mu}}(1-T^{-m_i(\nu)})$$

若 $r>0$；且 $F^{\nu}_{\mu,\ (0)}(T)=1$。因此我们有

$$F^{\nu}_{\mu,(r)}(q)\cdot|\operatorname{Aut}(S^{(r)})|=q^{n(\nu)-n(\mu)+r}\prod_{i\in I_{\nu-\mu}}(1-q^{-m_i(\nu)}),\quad \forall r\geq 0. \tag{3.22}$$

对于任意分拆 λ，μ，记

$$\widehat{V}_{\lambda,\mu}:=q^{-|\lambda|-n(\lambda)-n(\mu)}\cdot[S^{(\lambda)}\oplus S^{(\mu)}[1]]\in\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}}) \tag{3.23}$$

and

$$\widehat{V}^{+}_{\lambda}=\widehat{V}_{\lambda,\emptyset},\qquad \widehat{V}^{-}_{\mu}=\widehat{V}_{\emptyset,\mu}.$$

特别地，对于任意 $r>0$,

$$\begin{aligned}\widehat{V}^{+}_{(r)}&=q^{-r}\cdot[S^{(r)}],&\qquad \widehat{V}^{+}_{(1^r)}&=q^{-\binom{r+1}{2}}\cdot[S^{(1^r)}],\\ \widehat{V}^{-}_{(r)}&=[S^{(r)}[1]],&\qquad \widehat{V}^{-}_{(1^r)}&=q^{-\binom{r}{2}}\cdot[S^{(1^r)}[1]].\end{aligned} \tag{3.24}$$

注 3.6. 我们还可以定义

$$\widehat{V}'_{\lambda,\mu}:=q^{-|\mu|-n(\lambda)-n(\mu)}\cdot[S^{(\lambda)}\oplus S^{(\mu)}[1]]\in\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}}) \tag{3.25}$$

~对于任意分拆 λ，μ，容易验证存在 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}})\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 的一个自同构，它将 $V_{\lambda,\ \mu}$ 映射到 $V'_{\lambda,\ \mu}$。

命题 3.7. 对于 $r\geq 1$ 和任意分拆 ρ,ν，有

$$\widehat{V}_{\rho,\nu}*\widehat{V}^{+}_{(r)}=\sum_{a+b=r}\sum_{\mu\xrightarrow{a}\nu,\rho\xrightarrow{b}\lambda}\varphi_{\nu/\mu}(q^{-1})\psi_{\lambda/\rho}(q^{-1})\,\widehat{V}_{\lambda,\mu}, \tag{3.26}$$

$$\widehat{V}_{\rho,\nu}*\widehat{V}^{-}_{(r)}=\sum_{a+b=r}\sum_{\nu\xrightarrow{a}\mu,\lambda\xrightarrow{b}\rho}\psi_{\mu/\nu}(q^{-1})\varphi_{\rho/\lambda}(q^{-1})\,\widehat{V}_{\lambda,\mu}. \tag{3.27}$$

证明。我们只证明公式 (3.26)。根据 (3.23)，恒等式 (3.18) 可改写为

$$\begin{aligned}\widehat{V}_{\rho,\nu}*\widehat{V}^{+}_{(r)}=\sum_{a=0}^{r}\sum_{\lambda,\mu}F^{\lambda}_{\rho,(a)}(q)F^{\nu}_{(r-a),\mu}(q)\cdot q^{|\lambda|+n(\lambda)+n(\mu)-|\rho|-n(\rho)-n(\nu)-r}\\ \times\frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})|\cdot|\operatorname{Aut}(S^{(a)})|\cdot|\operatorname{Aut}(S^{(r-a)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|}\cdot\widehat{V}_{\lambda,\mu}.\end{aligned}$$

然后结合（3.22）和 $|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|=q^{|\lambda|+2n(\lambda)}b_\lambda\,(q^{-1})$，我们得到

$$\widehat{V}_{\rho,\nu}*\widehat{V}^{+}_{(r)}=\sum_{a+b=r}\sum_{\mu\xrightarrow{a}\nu,\rho\xrightarrow{b}\lambda}\varphi_{\nu/\mu}(q^{-1})\varphi_{\lambda/\rho}(q^{-1})\cdot q^{n(\lambda)-n(\rho)+n(\nu)-n(\mu)+r}$$

$$\times\, q^{|\lambda|+n(\lambda)+n(\mu)-|\rho|-n(\rho)-n(\nu)-r}\frac{q^{|\rho|+2n(\rho)}b_\rho(q^{-1})}{q^{|\lambda|+2n(\lambda)}b_\lambda(q^{-1})}\cdot\widehat{V}_{\lambda,\mu}$$

$$=\sum_{a+b=r}\sum_{\mu\xrightarrow{a}\nu,\rho\xrightarrow{b}\lambda}\varphi_{\nu/\mu}(q^{-1})\varphi_{\lambda/\rho}(q^{-1})\frac{b_\rho(q^{-1})}{b_\lambda(q^{-1})}\cdot\widehat{V}_{\lambda,\mu}.$$

所需的公式（3.26）可由 [Mac95，III，（5.12）]

$$\psi_{\lambda/\rho}(q^{-1})=\varphi_{\lambda/\rho}(q^{-1})\cdot\frac{b_\rho(q^{-1})}{b_\lambda(q^{-1})}.$$

证明完成。 □

3.5. **导出 Hall 代数与环** $\mathcal{D}\Lambda$。回顾环 $\mathcal{D}\Lambda_t=\mathbb{Q}(t)[v_1^{\pm},v_2^{\pm},\ldots]$以及 $\mathcal{D}\Lambda_{q^{-1}}=\mathbb{Q}[v_1^{\pm},v_2^{\pm},\ldots]$，其中 $V_{\lambda,\mu}\in\mathcal{D}\Lambda_{q^{-1}}$ 由特化 $V_{\lambda,\mu}\in\mathcal{D}\Lambda_t$ 在$t=q^{-1}$ 给定 $\Bbbk=\mathbb{F}_q$时定义。回顾 $\widehat{V}_{\lambda,\mu}$，见（3.23）。

定理 3.8. 存在一个 $\mathbb{Q}$-代数同构 $\Phi_{(q)}:\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)\longrightarrow\mathcal{D}\Lambda_{q^{-1}}$，使得

$$\Phi_{(q)}([S^{(r)}])=q^r v_r^+,\qquad \Phi_{(q)}([S^{(r)}[1]])=v_r^-\quad for\ r\geq 1.$$

此外，对于任意分拆 λ,μ，有

$$\Phi_{(q)}([S^{(\lambda)}\oplus S^{(\mu)}[1]])=q^{|\lambda|+n(\lambda)+n(\mu)}V_{\lambda,\mu},\qquad \Phi_{(q)}(\widehat{V}_{\lambda,\mu})=V_{\lambda,\mu}.\tag{3.28}$$

证明。第一条结论由命题 3.2得出。

第二条结论将利用命题 3.7 和定理 2.6证明。首先考虑情形 $\lambda=\emptyset$ 或 $\mu=\emptyset$。有

$$\widehat{V}_{\rho,\emptyset}*\widehat{V}^+_{(r)}=\sum_{\rho\xrightarrow{r}\lambda}\psi_{\lambda/\rho}(q^{-1})\,\widehat{V}_{\lambda,\emptyset},\quad \widehat{V}_{\emptyset,\nu}*\widehat{V}^-_{(r)}=\sum_{\nu\xrightarrow{r}\mu}\psi_{\mu/\nu}(q^{-1})\,\widehat{V}_{\emptyset,\mu}.$$

于是可由 [Mac95，III，（3.4）] 得到

$$\Phi_{(q)}(\widehat{V}_{\lambda,\emptyset})=V_{\lambda,\emptyset},\quad \Phi_{(q)}(\widehat{V}_{\emptyset,\mu})=V_{\emptyset,\mu},$$

据此，我们通过对3.28中的 $n=|\lambda|$ 作归纳，并利用 λ 关于 $\mathcal{P}_n\widehat{\ }$在$V_{\lambda\text{上的支配序}\mu}$来证明。对于 $n=0$ 的情形显然成立。若 $n>1$，令 ρ 为从 λ 中删去最后一行后得到的分拆（可以为空）。设最后一行有 r 个元素。于是由命题3.7，可得

$$\widehat{V}_{\rho,\mu}*\widehat{V}^+_{(r)}=\widehat{V}_{\lambda,\mu}+\sum_{\rho\xrightarrow{r}\tilde{\lambda},\lambda\triangleright\tilde{\lambda}}\psi_{\lambda/\rho}(q^{-1})\,\widehat{V}_{\tilde{\lambda},\mu}+\sum_{\substack{a+b=r\\ a\neq 0}}\sum_{\tilde{\mu}\xrightarrow{a}\mu,\rho\xrightarrow{b}\tilde{\lambda}}\varphi_{\mu/\tilde{\mu}}(q^{-1})\psi_{\tilde{\lambda}/\rho}(q^{-1})\,\widehat{V}_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}.$$

由定理2.6，可得

$$V_{\rho,\mu}\cdot v_r^+=V_{\lambda,\mu}+\sum_{\rho\xrightarrow{r}\tilde{\lambda},\lambda\triangleright\tilde{\lambda}}\psi_{\lambda/\rho}(q^{-1})\,V_{\tilde{\lambda},\mu}+\sum_{\substack{a+b=r\\ a\neq 0}}\sum_{\tilde{\mu}\xrightarrow{a}\mu,\rho\xrightarrow{b}\tilde{\lambda}}\varphi_{\mu/\tilde{\mu}}(q^{-1})\psi_{\tilde{\lambda}/\rho}(q^{-1})\,V_{\tilde{\lambda},\tilde{\mu}}.$$

根据归纳假设并比较上述两个恒等式，我们得到$\widetilde{\ }\Phi_{(q)}(V_{\lambda,\ \mu})=V_{\lambda,\ \mu}$。 □

注 3.9。 本文中的霍尔乘积与 [Mac95] 采用了不同的归一化方式（尽管所得的 Jordan 箭图的 Hall 代数通过 $[S^\lambda]\mapsto[S^\lambda]/|\operatorname{Aut}(S^\lambda)|$同构）。

因此，我们可以表述泛型导出 Hall 代数的同构：

推论 3.10. 存在一个 $\mathbb{Q}(t)$-代数同构 $\Phi_t:\mathcal{DH}(Q_J)\longrightarrow\mathcal{D}\Lambda_t$，使得

$$\Phi_t(\mathfrak{u}_{(r),\emptyset})=t^{-r}v_r^+,\qquad \Phi_t(\mathfrak{u}_{\emptyset,(r)})=v_r^-\quad \textit{for } r\geq 1.$$

此外，对于任意分拆 λ、μ，我们有

$$\Phi_t(\mathfrak{u}_{\lambda,\mu})=t^{-|\lambda|-n(\lambda)-n(\mu)}V_{\lambda,\mu},\qquad \Phi_t(\widehat{V}_{\lambda,\mu})=V_{\lambda,\mu}.$$

3.6. **垂直 Pieri 规则**。设 $n,r\in\mathbb{Z}$。定义

$$\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}_+(t)=\frac{\varphi_n(t)}{\varphi_r(t)\varphi_{n-r}(t)}=\frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\cdots(1-t^{n-r+1})}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^r)}$$

对于 $r\geq 0$ 和 $\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}_+(t)=0$ 对于 $r<0$。

对于任意分拆 λ,μ 和 $m\geq 0$，定义（参见 [Mac95, III, (3.2)]）

$$f^\lambda_{\mu,(1^m)}(t)=\begin{cases}\prod_{i\geq 1}\begin{bmatrix}\lambda_i'-\lambda_{i+1}'\\ \lambda_i'-\mu_i'\end{bmatrix}_+(t), & \text{if } \lambda-\mu \text{ is a vertical } m\text{-strip},\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{3.29}$$

回顾一下，$n(\lambda)=\sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i$ 对于任意分拆 λ。根据 [Mac95，III，(3.3)]，我们有

$$F^\lambda_{\mu,(1^m)}(q)=q^{n(\lambda)-n(\mu)-n(1^m)}f^\lambda_{\mu,(1^m)}(q^{-1}).\tag{3.30}$$

给定分拆 μ，ν 和 $a\in\mathbb{N}$，我们记

$$\mu\downarrow\nu,\qquad (\text{respectively, } \mu\overset{a}{\downarrow}\nu)$$

表示 $\nu\leq\mu$ 和 $\mu-\nu$ 是垂直条带（分别是垂直 a-条带）。

定理 3.11。 对于 $r\geq 1$ 和任意分拆 ρ、ν，在 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$中有

$$\widehat{V}_{\rho,\nu}*\widehat{V}^+_{(1^r)}=\sum_{a+b=r}\sum_{\lambda\overset{a}{\downarrow}\rho}\sum_{\nu\overset{b}{\downarrow}\mu}\frac{b_\rho(q^{-1})}{b_\lambda(q^{-1})}\varphi_r(q^{-1})f^\lambda_{\rho,(1^a)}(q^{-1})f^\nu_{\mu,(1^b)}(q^{-1})\cdot\widehat{V}_{\lambda,\mu},\tag{3.31}$$

$$\widehat{V}_{\rho,\nu}*\widehat{V}^-_{(1^r)}=\sum_{a+b=r}\sum_{\rho\overset{a}{\downarrow}\lambda}\sum_{\mu\overset{b}{\downarrow}\nu}\frac{b_\nu(q^{-1})}{b_\mu(q^{-1})}\varphi_r(q^{-1})f^\rho_{\lambda,(1^a)}(q^{-1})f^\mu_{\nu,(1^b)}(q^{-1})\cdot\widehat{V}_{\lambda,\mu}.\tag{3.32}$$

证明。 我们只证明第一个等式。从（3.23）和（3.19）出发，并同时利用（3.30）和 $|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|=q^{|\lambda|+2n(\lambda)}b_\lambda(q^{-1})$，可得

$$\widehat{V}_{\rho,\nu}*\widehat{V}^+_{(1^r)}=\sum_{a+b=r}\sum_{\lambda\overset{a}{\downarrow}\rho}\sum_{\nu\overset{b}{\downarrow}\mu}F^\lambda_{\rho,(1^a)}F^\nu_{(1^b),\mu}\cdot\frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})|\cdot|\operatorname{Aut}(S^{(1^r)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|\cdot q^{a(r-a)}}$$

$$\times\, q^{n(\lambda)+n(\mu)+|\lambda|-n(\rho)-n(\nu)-|\rho|-n(1^r)-r}\cdot \widehat{V}_{\lambda,\mu}$$

$$= \sum_{a+b=r}\sum_{\substack{a\\ \lambda\downarrow\rho}}\sum_{\substack{b\\ \nu\downarrow\mu}} f^{\lambda}_{\rho,(1^a)}(q^{-1}) f^{\nu}_{(1^b),\mu}(q^{-1})\cdot \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})|\cdot|\operatorname{Aut}(S^{(1^r)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|\cdot q^{a(r-a)}}$$

$$\times\, q^{2n(\lambda)+|\lambda|-2n(\rho)-|\rho|-n(1^r)-r-n(1^a)-n(1^b)}\cdot \widehat{V}_{\lambda,\mu}$$

$$= \sum_{a+b=r}\sum_{\substack{a\\ \lambda\downarrow\rho}}\sum_{\substack{b\\ \nu\downarrow\mu}} f^{\lambda}_{\rho,(1^a)}(q^{-1}) f^{\nu}_{(1^b),\mu}(q^{-1})\cdot \frac{b_\rho(q^{-1})}{b_\lambda(q^{-1})}$$

$$\times\, |\operatorname{Aut}(S^{(1^r)})|\cdot q^{-n(1^r)-r-n(1^a)-n(1^{r-a})-a(r-a)}\cdot \widehat{V}_{\lambda,\mu}$$

$$= \sum_{a+b=r}\sum_{\substack{a\\ \lambda\downarrow\rho}}\sum_{\substack{b\\ \nu\downarrow\mu}} \frac{b_\rho(q^{-1})}{b_\lambda(q^{-1})}\varphi_r(q^{-1}) f^{\lambda}_{\rho,(1^a)}(q^{-1}) f^{\nu}_{\mu,(1^b)}(q^{-1})\cdot \widehat{V}_{\lambda,\mu},$$

这就是所需的（3.31）。 □

4. Generating functions and their transition relations

~本节中，我们使用 Jordan 箭图的导出 Hall 代数 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_{\mathrm{J}})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\mathbf{v})$，其中 $\Bbbk=\mathbb{F}_q$ 且 $\mathbf{v}=\sqrt{q}$.定义导出 Hall 代数中若干自然生成集对应的生成函数（参见 [BKa01、Sch12、LRW23、LRW25]）：

$$\widetilde{E}(y,z)=\sum_{r,t\geq 0}\mathbf{v}^{r(r-1)+t(t-1)}\frac{[S^{(1^r)}\oplus S^{(1^t)}[1]]}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^r)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^t)})|}y^r z^t, \tag{4.1}$$

$$\widetilde{H}(y,z)=\sum_{r,t\geq 0}\sum_{\lambda\vdash r,\mu\vdash t}\frac{[S^{(\lambda)}\oplus S^{(\mu)}[1]]}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})||\operatorname{Aut}(S^{(\mu)})|}y^r z^t, \tag{4.2}$$

$$\widetilde{\Theta}(y,z)=\sum_{r,t\geq 0}[S^{(r)}\oplus S^{(t)}[1]]y^r z^t, \tag{4.3}$$

本节余下部分旨在确定这些生成函数之间的转移关系。

4.1. 欧拉恒等式。 在本小节中，q 也可以解释为一个形式变量。对于 $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，我们用……表示

$$(x;q)_n=(1-x)(1-qx)\ldots(1-q^{n-1}x).$$

我们有以下欧拉所得的恒等式：

$$\exp_q\left(\frac{x}{1-q}\right):=\sum_{r\geq 0}\frac{x^r}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)}=\frac{1}{(x;q)_\infty}. \tag{4.4}$$

将 $1/(x;q)_\infty$ 改写为通常的指数函数形式是初等的:

$$\frac{1}{(x;q)_\infty}=\exp\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k(1-q^k)}\Big).$$

因此我们有

$$\exp_q\big(\frac{x}{1-q}\big)=\exp\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k(1-q^k)}\Big). \tag{4.5}$$

4.2. $\widetilde{E}(y,z)$ 与 $\widetilde{H}(y,z)$. </style}我们首先给出生成函数(, z) 与 $\widetilde{E}(y,z)$ 之间的联系。

命题 4.1. 我们有

$$\widetilde{H}(y,z)\widetilde{E}(-y,-z)=\big(\exp_q(\frac{yz}{1-q})\big)^2. \tag{4.6}$$

证明。 利用 (3.11), 我们得到

$$\begin{aligned}
&\widetilde{H}(y,z)\widetilde{E}(-y,-z)\\
&=\sum_{a,b\geq 0}\sum_{r,t\geq 0}\sum_{\lambda\vdash r,\mu\vdash t}(-1)^{a+b}\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}\frac{[S^{(1^a)}\oplus S^{(1^b)}[1]]}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}\\
&\quad *\frac{[S^{(\lambda)}\oplus S^{(\mu)}[1]]}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})||\operatorname{Aut}(S^{(\mu)})|}y^{a+r}z^{b+t}\\
&=\sum_{a,b\geq 0}\sum_{r,t\geq 0}\sum_{\lambda\vdash r,\mu\vdash t}(-1)^{a+b}\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}\sum_{d=0}^{b}\sum_{c=0}^{a}\sum_{\rho,\nu,\alpha,\beta\in\mathcal{P}}F^{\lambda}_{(1^d),\alpha}(q)F^{\rho}_{\alpha,(1^{a-c})}(q)F^{(1^a)}_{(1^{a-c}),(1^c)}(q)\\
&\quad\times F^{\mu}_{(1^c),\beta}(q)F^{\nu}_{\beta,(1^{b-d})}(q)F^{(1^b)}_{(1^{b-d}),(1^d)}(q)\frac{|\operatorname{Aut}(S^{(1^d)})||\operatorname{Aut}(S^{(\alpha)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{a-c})})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})||\operatorname{Aut}(S^{(\nu)})|}\\
&\quad\times|\operatorname{Aut}(S^{(1^c)})||\operatorname{Aut}(S^{(\beta)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b-d})})|\cdot[S^{(\rho)}\oplus S^{(\nu)}[1]]y^{a+r}z^{b+t}.
\end{aligned}$$

由 Riedtmann-Peng 公式, 我们推得

$$\sum_{\lambda\vdash r}F^{\lambda}_{(1^d),\alpha}\frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\alpha)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|}=\frac{1}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^d)})|},\quad \sum_{\mu\vdash t}F^{\mu}_{(1^c),\beta}\frac{|\operatorname{Aut}(S^{(\beta)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\mu)})|}=\frac{1}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^c)})|}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{H}(y,z)\widetilde{E}(-y,-z)\\
&=\sum_{a,b\geq 0}\sum_{r,t\geq 0}(-1)^{a+b}\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}\sum_{d=0}^{b}\sum_{c=0}^{a}\sum_{\rho,\nu}\sum_{\alpha\vdash(r-d)}\sum_{\beta\vdash(t-c)}F^{\rho}_{\alpha,(1^{a-c})}(q)F^{(1^a)}_{(1^{a-c}),(1^c)}(q)\\
&\quad\times F^{\nu}_{\beta,(1^{b-d})}(q)F^{(1^b)}_{(1^{b-d}),(1^d)}(q)\frac{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a-c})})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b-d})})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})||\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})||\operatorname{Aut}(S^{(\nu)})|}\\
&\quad\times[S^{(\rho)}\oplus S^{(\nu)}[1]]y^{a+r}z^{b+t}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{a,b,r,t\geq 0} (-1)^{a+b}\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)} \sum_{d=0}^{b}\sum_{c=0}^{a}\sum_{\rho,\nu}\sum_{\alpha\vdash(r-d)}\sum_{\beta\vdash(t-c)} F^{\rho}_{\alpha,(1^{a-c})}(q)F^{\nu}_{\beta,(1^{b-d})}(q)\mathbf{v}^{c(a-c)+d(b-d)}$$
$$\times \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}_{\mathbf{v}} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}_{\mathbf{v}} \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a-c})})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b-d})})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a})})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b})})||\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})||\operatorname{Aut}(S^{(\nu)})|}[S^{(\rho)}\oplus S^{(\nu)}[1]]y^{a+r}z^{b+t}.$$

在最后一个等式中，我们使用公式

$$F^{(1^a)}_{(1^{a-c}),(1^c)}(q) = \mathbf{v}^{c(a-c)}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}_{\mathbf{v}}, \quad F^{(1^b)}_{(1^{b-d}),(1^d)}(q) = \mathbf{v}^{d(b-d)}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}_{\mathbf{v}}.$$

固定以下的 ρ,ν和 $a+r=e, b+t=f$。证明分为以下三种情况。

情况 $\rho=\nu=\emptyset$。则 $\alpha=\beta=\emptyset$ 和 $b=d=r, a=c=t$。 y^ez^e 的系数等于

$$\sum_{c+d=e}\frac{(-1)^{c+d}\mathbf{v}^{c(c-1)+d(d-1)}}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^c)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^d)})|} = \sum_{c+d=e}\frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^c)}\cdot\frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^d)}.$$

情况 $\rho\neq\emptyset$。我们还固定 c,d。则 $F^{\rho}_{\alpha,(1^{a-c})}(q)\neq 0$ 意味着 $|\rho|+c+d=a+r$ 和 $c\leq a\leq \ell(\rho)+c$。因此， $[S^{(\rho)}\oplus S^{(\nu)}[1]]$ $|\quad S^{(\rho)}\ ||$ $\operatorname{Aut}(\ )\operatorname{Aut}(S^{(\nu)})|$ y^ez^f 的系数等于

$$\sum_{a+r=e}\sum_{b+t=f}(-1)^{a+b}\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}\sum_{\alpha\vdash(r-d)}\sum_{\beta\vdash(t-c)}F^{\rho}_{\alpha,(1^{a-c})}(q)F^{\nu}_{\beta,(1^{b-d})}(q)$$
$$\times\mathbf{v}^{c(a-c)+d(b-d)}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}_{\mathbf{v}}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}_{\mathbf{v}}\cdot\frac{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a-c})})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b-d})})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a})})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b})})|}$$
$$= \sum_{b+t=f}(-1)^b\mathbf{v}^{b(b-1)}\mathbf{v}^{d(b-d)}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}_{\mathbf{v}}\sum_{\beta}F^{\nu}_{\beta,(1^{b-d})}(q)\frac{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{b-d})})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{b})})|}$$
$$\times\sum_{c\leq a\leq\ell(\rho)+c}(-1)^a\mathbf{v}^{a(a-1)}\mathbf{v}^{c(a-c)}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}_{\mathbf{v}}\sum_{\alpha}F^{\rho}_{\alpha,(1^{a-c})}\frac{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a-c})})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a})})|}$$
$$= 0,$$

其中最后一个等式由以下内容得出

$$\sum_{c\leq a\leq\ell(\rho)+c}(-1)^a\mathbf{v}^{a(a-1)}\mathbf{v}^{c(a-c)}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}_{\mathbf{v}}\sum_{\alpha}F^{\rho}_{\alpha,(1^{a-c})}\frac{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a-c})})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a})})|} = 0,$$

由 [LRW25命题 6 的证明可得。3]。

情况 $\nu\neq\emptyset$。这与第二种情况类似，因此此处略去。

因此，我们有

$$\widetilde{H}(y,z)\widetilde{E}(-y,-z) = \sum_{e\geq 0}\sum_{c+d=e}\frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^c)}\cdot\frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^d)}y^ez^e$$
$$= \left(\exp_q(\frac{yz}{1-q})\right)^2.$$

	c	d	ρ	ν	$[S^{(\rho)} \oplus S^{(\nu)}[1]]$ 的系数
a)	0	0	$(r,\ 1^a)$	$(t,\ 1^b)$	q^{-a-b}
b)	0	0	$(r+1,\ 1^{a-1})$	$(t,\ 1^b)$	$(1-q^{-a})q^{-b}$
c)	0	0	$(r,\ 1^a)$	$(t+1,\ 1^{b-1})$	$q^{-a}(1-q^{-b})$
d)	0	0	$(r+1,\ 1^{a-1})$	$(t+1,\ 1^{b-1})$	$(1-q^{-a})\cdot(1-q^{-b})$
e)	1	0	$(r,\ 1^{a-1})$	$(t-1,\ 1^b)$	$(q^a-1)q^{1-a-b}$
f)	1	0	$(r+1,\ 1^{a-2})$	$(t-1,\ 1^b)$	$(q^a-1)(1-q^{1-a})q^{-b}$
g)	1	0	$(r,\ 1^{a-1})$	$(t,\ 1^{b-1})$	$(q^a-1)q^{1-a}(1-q^{-b})$
h)	1	0	$(r+1,\ 1^{a-2})$	$(t,\ 1^{b-1})$	$(q^a-1)(1-q^{1-a})(1-q^{-b})$
i)	0	1	$(r-1,\ 1^a)$	$(t,\ 1^{b-1})$	$(q^b-1)q^{1-a-b}$
j)	0	1	$(r,\ 1^{a-1})$	$(t,\ 1^{b-1})$	$(q^b-1)q^{1-b}(1-q^{-a})$
j)	0	1	$(r-1,\ 1^a)$	$(t+1,\ 1^{b-2})$	$(q^b-1)q^{-a}(1-q^{1-b})$
l)	0	1	$(r,\ 1^{a-1})$	$(t+1,\ 1^{b-2})$	$(q^b-1)(1-q^{-a})(1-q^{1-b})$
m)	1	1	$(r-1,\ 1^{a-1})$	$(t-1,\ 1^{b-1})$	$(q^b-1)(q^a-1)q^{2-a-b}$
n)	1	1	$(r,\ 1^{a-2})$	$(t-1,\ 1^{b-1})$	$(q^b-1)(q^a-1)q^{1-b}(1-q^{1-a})$
o)	1	1	$(r-1,\ 1^{a-1})$	$(t,\ 1^{b-2})$	$(q^b-1)(q^a-1)q^{1-a}(1-q^{1-b})$
p)	1	1	$(r,\ 1^{a-2})$	$(t,\ 1^{b-2})$	$(q^b-1)(q^a-1)(1-q^{1-a})(1-q^{1-b})$

TABLE 1. 的计算 $[S^{(r)} \oplus S^{(t)}[1]] * [S^{(1^a)} \oplus S^{(1^b)}[1]]$

证明完成。 □

4.3. $\widetilde{E}(y,\ z)$ 或 $\widetilde{H}(y,\ z)$ 与 $\widetilde{\Theta}(y,\ z)$。在阐述之间的关系之前，我们需要做一些准备工作：$\widetilde{E}(y,\ z)$、$\widetilde{H}(y,\ z)$以及 $\widetilde{\Theta}(y,\ z)$。

由公式（3.11），我们得到

$$
\begin{aligned}
&[S^{(r)} \oplus S^{(t)}[1]] * [S^{(1^a)} \oplus S^{(1^b)}[1]] \\
&= \sum_{d=0,1} \sum_{c=0,1} \sum_{\rho,\nu,\alpha,\beta \in \mathcal{P}} F^{(r)}_{(1^d),\alpha}(q) F^{\rho}_{\alpha,(1^{a-c})}(q) F^{(1^a)}_{(1^{a-c}),(1^c)}(q) F^{(t)}_{(1^c),\beta}(q) F^{\nu}_{\beta,(1^{b-d})}(q) F^{(1^b)}_{(1^{b-d}),(1^d)}(q) \\
&\quad \times \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(1^d)})||\operatorname{Aut}(S^{(\alpha)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{a-c})})||\operatorname{Aut}(S^{(1^c)})||\operatorname{Aut}(S^{(\beta)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b-d})})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})||\operatorname{Aut}(S^{(\nu)})|} \\
&\quad \times [S^{(\rho)} \oplus S^{(\nu)}[1]].
\end{aligned}
$$

注意，和 d 的取值均属于 $\{0,1\}$。对于固定的 c 和 d，ρ 和 ν 各自恰有两种选择，分别来自这些对的平凡扩张和非平凡扩张：$(S^{(\alpha)},\ S^{(1^{a-c})})$ 和 $(S^{(\beta)},\ S^{(1^{b-d})})$。为系统枚举所有可能的情形，我们列出表1。

命题 4.2。我们有

$$
\widetilde{\Theta}(y,z) = (1-qyz)^2 \frac{\widetilde{E}(-y,-z)}{\widetilde{E}(-qy,-qz)}, \tag{4.7}
$$

$$\widetilde{\Theta}(y,z)=(1-yz)^{-2}\frac{\widetilde{H}(qy,qz)}{\widetilde{H}(y,z)}. \tag{4.8}$$

证明。 首先，让我们证明（4.7）。根据定义，我们有以下公式:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Theta}(y,z)\widetilde{E}(-qy,-qz)\\&=\sum_{a,b\geq 0}\sum_{r,t\geq 0}(-q)^{a+b}\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}\frac{[S^{(r)}\oplus S^{(t)}[1]]*[S^{(1^a)}\oplus S^{(1^b)}[1]]}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}y^{a+r}z^{b+t}.\end{aligned}$$

注意到，右边只能出现来自表1中 a)–d)、e)–l) 和 m)–p) 的项 $[S^{(r,1^a)}\oplus S^{(t,1^b)}[1]]y^{a+r+k}z^{b+t+k}$，其中 $k=0,1,2$。进一步，通过简单计算可知，若 $r>1$ 或 $t>1$，它们的系数均为 0。因此，只需计算 $[S^{(1^a)}\oplus S^{(1^b)}[1]]y^{a+k}z^{b+k}$ 的系数，其中 $k=0,1,2$；这些项来自某些 (i,j) 对应的 $[S^{(i)}\oplus S^{(j)}[1]]*[S^{(1^{a+k-i})}\oplus S^{(1^{b+k-j})}[1]]$。

若 $k=0$，则 $(i,j)=(0,0),(1,0),(0,1)$ 或 $(1,1)$。因此，其系数等于

$$\begin{aligned}&(-q)^{a+b}\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}\frac{1}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}\\&+(-q)^{a+b-1}\mathbf{v}^{(a-1)(a-2)+b(b-1)}\frac{q^{1-a}}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a-1})})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}\\&+(-q)^{a+b-1}\mathbf{v}^{(a-1)a+(b-1)(b-2)}\frac{q^{1-b}}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b-1})})|}\\&+(-q)^{a+b-2}\mathbf{v}^{(a-1)(a-2)+(b-1)(b-2)}\frac{q^{2-a-b}}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a-1})})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b-1})})|}\\&=(-1)^{a+b}\frac{\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}.\end{aligned}$$

若 $k=2$，则 $(i,\ j)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2)$ 或 $(2,\ 2)$。因此其系数等于

$$\begin{aligned}&(-q)^{a+b+2}\mathbf{v}^{a(a+1)+b(b+1)}\frac{(q^{a+1}-1)(q^{b+1}-1)}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a+1})})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b+1})})|}\\&+(-q)^{a+b+1}\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b+1)}\frac{(q-q^{1-a})(q^{b+1}-1)}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^{b+1})})|}\\&+(-q)^{a+b+1}\mathbf{v}^{a(a+1)+b(b-1)}\frac{(q^{a+1}-1)(q-q^{1-b})}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^{a+1})})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}\\&+(-q)^{a+b}\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}\frac{(q-q^{1-a})(q-q^{1-b})}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}\\&=(-1)^{a+b+2}\frac{q^2\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}.\end{aligned}$$

若 $k=1$，则当 $c=1,d=0$ 时，$(i,j)=(0,1)$、$(1,1)$、$(0,2)$ 或 $(1,2)$；而当 $c=0$，$d=1$ 时，$(i,j)=(1,0)$、$(1,1)$、$(2,0)$ 或 $(2,1)$，分别见表 1。通过类似的

计算，其系数等于

$$(-1)^{a+b+1}\frac{2q\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta}(y,z)\widetilde{E}(-qy,-qz) &= \sum_{a,b\geq 0}(-1)^{a+b}\frac{\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}[S^{(1^a)}\oplus S^{(1^b)}[1]]y^a z^b\\ &\quad+\sum_{a,b\geq 0}(-1)^{a+b+2}\frac{q^2\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}[S^{(1^a)}\oplus S^{(1^b)}[1]]y^{a+2}z^{b+2}\\ &\quad+\sum_{a,b\geq 0}(-1)^{a+b+1}\frac{2q\mathbf{v}^{a(a-1)+b(b-1)}}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^a)})||\operatorname{Aut}(S^{(1^b)})|}[S^{(1^a)}\oplus S^{(1^b)}[1]]y^{a+1}z^{b+1}\\ &= (1+q^2y^2z^2-2qyz)\widetilde{E}(-y,-z)\\ &= (1-qyz)^2\widetilde{E}(-y,-z).\end{aligned}$$

对于（4.8），我们使用命题 4.1。因此，我们推得

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta}(y,z) &= (1-qyz)^2\frac{\widetilde{E}(-y,-z)}{\widetilde{E}(-qy,-qz)}\\ &= (1-qyz)^2\frac{\widetilde{E}(-y,-z)}{\widetilde{E}(-qy,-qz)}\frac{\widetilde{H}(y,z)}{\widetilde{H}(qy,qz)}\frac{\widetilde{H}(qy,qz)}{\widetilde{H}(y,z)}\\ &= (1-qyz)^2(\exp_q(\frac{yz}{1-q}))^2(\exp_q(\frac{q^2yz}{1-q}))^{-2}\frac{\widetilde{H}(qy,qz)}{\widetilde{H}(y,z)}\\ &= (1-qyz)^2(1-yz)^{-2}(1-qyz)^{-2}\frac{\widetilde{H}(qy,qz)}{\widetilde{H}(y,z)}\\ &= (1-yz)^{-2}\frac{\widetilde{H}(qy,qz)}{\widetilde{H}(y,z)},\end{aligned}$$

其中，在第四个等式中我们使用了等式

$$\exp_q(\frac{x}{1-q}) = (1-x)^{-1}\exp_q(\frac{qx}{1-q}) = (1-x)^{-1}(1-qx)^{-1}\exp_q(\frac{q^2x}{1-q}).$$

证明完毕。 □

4.4. 与经典生成函数的比较。 在本小节中，我们将$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$比较 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_J)$ 中的生成函数 $\Theta(y,z)$、$E(y,z)$、$H(y,z)$ 与经典霍尔代数中的相应生成函数。

我们还考虑 $\widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_J)$ 在 $\mathbb{Q}(\mathbf{v})$ 上。

引理 4.3. 存在 $\mathbb{Q}(\mathbf{v})$-代数嵌入

$$\iota^+ : \widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_J)\longrightarrow \mathcal{D}\widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_J),\qquad \iota^- : \widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_J)\longrightarrow \mathcal{D}\widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_J) \tag{4.9}$$

使得 $\iota^+([M]) = [M]$, $\iota^-([M]) = [M[1]]$。

证明。只需证明这些映射 $\iota^{\pm}$ 保持乘法，这由命题 3.3得出。□

由引理 4.3启发，借鉴经典霍尔代数的生成函数$\sim$ $\sim\mathcal{H}$ $(\Bbbk Q_{\jmath})$（参见 [BKa01，第 222] 页），我们在 $\mathcal{DH}(\Bbbk Q_{\jmath})$ 中定义

$$\Theta_1(y)=\sum_{r\geq 0}[S^{(r)}]y^r,\qquad \Theta_2(z)=\sum_{t\geq 0}[S^{(t)}[1]]z^t; \tag{4.10}$$

$$E_1(y)=\sum_{r\geq 0}\mathbf{v}^{r(r-1)}\frac{[S^{(1^r)}]}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^r)})|}y^r,\qquad E_2(z)=\sum_{t\geq 0}\mathbf{v}^{t(t-1)}\frac{[S^{(1^t)}[1]]}{|\operatorname{Aut}(S^{(1^t)})|}z^t; \tag{4.11}$$

$$H_1(y)=\sum_{r\geq 0}\sum_{\lambda\vdash r}\frac{[S^{(\lambda)}]}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|}y^r,\qquad H_2(z)=\sum_{t\geq 0}\sum_{\mu\vdash t}\frac{[S^{(\mu)}[1]]}{|\operatorname{Aut}(S^{(\mu)})|}z^t. \tag{4.12}$$

我们还定义（参见 [Mac95，第 23] 页）

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(y)&=\sum_{r\geq 1}\widetilde{P}_r y^{r-1},\quad \text{where } \widetilde{P}_r=\sum_{\lambda\vdash r}\varphi_{\ell(\lambda)-1}(q)\frac{[S^{(\lambda)}]}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|},\\ \widetilde{P}'(z)&=\sum_{t\geq 1}\widetilde{P}'_t z^{t-1},\quad \text{where } \widetilde{P}'_t=\sum_{\mu\vdash t}\varphi_{\ell(\mu)-1}(q)\frac{[S^{(\mu)}[1]]}{|\operatorname{Aut}(S^{(\mu)})|}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

于是我们有如下命题。

定理 4.4. 我们有

$$\widetilde{\Theta}(y,z)=\Theta_1(y)\Theta_2(z)\exp\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{1-q^k}{k}(yz)^k\Big), \tag{4.14}$$

$$\widetilde{E}(y,z)=E_1(y)E_2(z)\exp_q\Big(\frac{yz}{1-q}\Big), \tag{4.15}$$

$$\widetilde{H}(y,z)=H_1(y)H_2(z)\exp_q\Big(\frac{yz}{1-q}\Big). \tag{4.16}$$

定理 4.4的证明将在下一小节给出。策略是利用 $P_1(y)$，$\sim$ $\sim$ $\sim P_2(z)$ 来表示 $\Theta(y,\ z)$、$E(y,\ z)$、$H(y,\ z)$。

4.5. 定理 4.4的证明。记作 $\widetilde{\Theta}_{m,\ n}=\dfrac{[S^{(m)}\oplus S^{(n)}[1]]}{\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1}}$ 于 $\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{H}}(\Bbbk Q_{\jmath})$。由此可得

$$\widetilde{\Theta}(y,z)=(\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1})\sum_{m,n\geq 0}\widetilde{\Theta}_{m,n}y^m z^n. \tag{4.17}$$

$\sim$ $\sim$将 $T_{m,n}\in\mathcal{DH}(\Bbbk Q_{\jmath})$ 定义为

$$\widetilde{\Theta}(y,z)=\exp\Big((\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1})\sum_{m,n\geq 0}\widetilde{T}_{m,n}y^m z^n\Big). \tag{4.18}$$

$\sim$注意，$T_{0,\ 0}=0$。

引理 4.5。我们有

$$m\widetilde{\Theta}_{m,n} = (\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1}) \sum_{1\le a\le m} \sum_{0\le b\le n} a\widetilde{T}_{a,b} * \widetilde{\Theta}_{m-a,n-b}, \tag{4.19}$$

and

$$n\widetilde{\Theta}_{m,n} = (\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1}) \sum_{0\le a\le m} \sum_{1\le b\le n} b\widetilde{T}_{a,b} * \widetilde{\Theta}_{m-a,n-b}. \tag{4.20}$$

证明。我们只证明第一个公式。对 $\frac{\partial}{\partial y}$ 在（4.17）和（4.18）两边进行微分，得到

$$\begin{aligned} &\sum_{m\ge 1,n\ge 0} (\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1}) m\widetilde{\Theta}_{m,n} y^{m-1}z^n \\ &= \Big(\sum_{a\ge 1,b\ge 0} (\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1}) a\widehat{T}_{a,b} y^{a-1}z^b\Big)\Big(\sum_{m,n\ge 0} (\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1})\widetilde{\Theta}_{m,n}y^m z^n\Big). \end{aligned} \tag{4.21}$$

现在，通过比较两边 $y^{m-1}z^n$ 的系数，即可得到所需公式。 □

命题 4.6。我们有

$$\widetilde{T}_{m,n} = \delta_{n,0}\mathbf{v}^m \frac{[m]_{\mathbf{v}}}{m}\widetilde{P}_m + \delta_{m,0}\mathbf{v}^n \frac{[n]_{\mathbf{v}}}{n}\widetilde{P}'_n - \delta_{m,n}\mathbf{v}^m\frac{[m]_{\mathbf{v}}}{m} \quad (m\ge 1 \text{ or } n\ge 1), \tag{4.22}$$

$$\widetilde{\Theta}(y,z) = \exp\Big(\sum_{r\ge 1}\frac{q^r-1}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big)\exp\Big(\sum_{t\ge 1}\frac{q^t-1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big)\exp\Big(\sum_{k\ge 1}\frac{1-q^k}{k}(yz)^k\Big). \tag{4.23}$$

证明。第二个公式（4.23）可由（4.22）和（4.18）立即得到。因此只需证明（4.22），我们用归纳法得到它。当 $m=0$ 或 $n=0$ 时，结论显然成立。

设 m，$n\ge 1$ 并假设（4.22）对任意 m'，n' 且满足 $m'<m$，$n'<n$ 时均成立。不失一般性，设 $m\le n$。于是由（4.19）及归纳假设，得到

$$\begin{aligned} &m\widetilde{T}_{m,n} \\ &= m\widetilde{\Theta}_{m,n} - (\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1}) \sum_{\substack{1\le a\le m,0\le b\le n\\(a,b)\ne(m,n)}} a\widetilde{T}_{a,b} * \widetilde{\Theta}_{m-a,n-b} \\ &= m\widetilde{\Theta}_{m,n} - (\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1}) \sum_{1\le a\le m} a\widetilde{T}_{a,0} * \widetilde{\Theta}_{m-a,n} - (\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1}) \sum_{\substack{1\le a\le \min(m,n)\\(a,a)\ne(m,n)}} a\widetilde{T}_{a,a} * \widetilde{\Theta}_{m-a,n-a} \\ &= m\widetilde{\Theta}_{m,n} - (\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1}) \sum_{1\le a\le m} \mathbf{v}^a[a]_{\mathbf{v}}\widetilde{P}_a * \widetilde{\Theta}_{m-a,n} + (\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1}) \sum_{\substack{1\le a\le \min(m,n)\\(a,a)\ne(m,n)}} \mathbf{v}^a[a]_{\mathbf{v}}\widetilde{\Theta}_{m-a,n-a}. \end{aligned}$$

根据定义，我们有

$$(\mathbf{v}-\mathbf{v}^{-1})\widetilde{P}_a * \widetilde{\Theta}_{m-a,n} = \sum_{\lambda\vdash a} \varphi_{\ell(\lambda)-1}(q)\frac{[S^{(\lambda)}]}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|} * [S^{(m-a)} \oplus S^{(n)}[1]]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda\vdash a} \frac{\varphi_{\ell(\lambda)-1}(q)}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|} \sum_{\rho,c,\alpha} F^{\lambda}_{(n-c),\alpha} F^{\rho}_{\alpha,(m-a)} \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(n-c)})||\operatorname{Aut}(S^{(\alpha)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(\rho)})|} \\
&\quad \times |\operatorname{Aut}(S^{(m-a)})|[S^{(\rho)} \oplus S^{(c)}[1]] \\
&= \sum_{\lambda\vdash a} \varphi_{\ell(\lambda)-1}(q) \sum_{\rho,c,\alpha} \frac{|\operatorname{Ext}^1(S^{(\alpha)}, S^{(n-c)})_{S^{(\lambda)}}|}{|\operatorname{Hom}(S^{(\alpha)}, S^{(n-c)})|} \frac{|\operatorname{Ext}^1(S^{(\alpha)}, S^{(m-a)})_{S^{(\rho)}}|}{|\operatorname{Hom}^1(S^{(\alpha)}, S^{(m-a)})|} \\
&\quad \times \frac{1}{|\operatorname{Aut}(S^{(\alpha)})|}[S^{(\rho)} \oplus S^{(c)}[1]].
\end{aligned}
$$

注意，对于任意 $r \geq 1$ 和 $\alpha \neq \emptyset$，根据 [LRW25，推论 5。2],

$$
\sum_{\lambda} \varphi_{\ell(\lambda)-1}(q) |\operatorname{Ext}^1(S^{(\alpha)}, S^{(r)})_{S^{(\lambda)}}| = 0.
$$

因此，除非 $n = c$ 或 $\alpha = \emptyset$，否则这些项在 $(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1})\widetilde{P}_a * \widetilde{\Theta}_{m-a,n}$ 中消失。若 $n = c$，则 $\lambda = \alpha$；若 $\alpha = \emptyset$，则 $\lambda = (n-c)$ $n - c = a$ 且 $\rho = (m-a)$。因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1})\widetilde{P}_a * \widetilde{\Theta}_{m-a,n} =& [S^{(m-a)} \oplus S^{(n-a)}[1]] + \sum_{\lambda\vdash a} \varphi_{\ell(\lambda)-1}(q) \sum_{\rho} \frac{|\operatorname{Ext}^1(S^{(\lambda)}, S^{(m-a)})_{S^{(\rho)}}|}{|\operatorname{Hom}^1(S^{(\lambda)}, S^{(m-a)})|} \\
&\times \frac{1}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|}[S^{(\rho)} \oplus S^{(n)}[1]].
\end{aligned}
$$

注意

$$
(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}) \sum_{\substack{1\leq a\leq \min(m,n) \\ (a,a)\neq(m,n)}} \mathbf{v}^a [a]_{\mathbf{v}} \widetilde{\Theta}_{m-a,n-a} - \sum_{1\leq a\leq m} \mathbf{v}^a [a]_{\mathbf{v}} [S^{(m-a)} \oplus S^{(n-a)}[1]] = -\delta_{m,n} \mathbf{v}^m [m]_{\mathbf{v}}.
$$

剩下要证明的是

$$
\begin{aligned}
& m\widetilde{\Theta}_{m,n} - \sum_{1\leq a\leq m} \mathbf{v}^a [a]_{\mathbf{v}} \sum_{\lambda\vdash a} \varphi_{\ell(\lambda)-1}(q) \\
& \cdot \sum_{\rho} \frac{|\operatorname{Ext}^1(S^{(\lambda)}, S^{(m-a)})_{S^{(\rho)}}|}{|\operatorname{Hom}^1(S^{(\lambda)}, S^{(m-a)})|} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(S^{(\lambda)})|} [S^{(\rho)} \oplus S^{(n)}[1]] = 0.
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

我们将通过考察 4.24) 中的系数来证明 ($[S^{(\rho)} \oplus S^{(n)}[1]]$。

对于情形 $\ell(\rho) = 1$，我们有 $\rho = (m)$ 和 $\lambda = (a)$。那么 $[S^{(\rho)} \oplus S^{(n)}[1]]$ 的系数等于

$$
\begin{aligned}
& \frac{m}{\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}} - \sum_{1\leq a\leq m} \mathbf{v}^a [a]_{\mathbf{v}} \frac{|\operatorname{Aut}(S^{(m-a)})|}{|\operatorname{Aut}(S^{(m)})|} \\
=& \frac{m}{\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}} - \mathbf{v}^m [m]_{\mathbf{v}} \frac{1}{(q-1)q^{m-1}} - \sum_{1\leq a\leq m-1} \frac{q^a - 1}{\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}} \frac{q^{m-a}(1-q^{-1})}{q^m(1-q^{-1})} \\
=& \frac{m}{\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}} - \frac{q^m - 1}{(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1})(q-1)q^{m-1}} - \sum_{1\leq a\leq m-1} \frac{1-q^{-a}}{\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}} \\
=& \frac{m}{\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}} - \frac{q - q^{1-m}}{(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1})(q-1)} - \frac{m-1}{\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1}} + \frac{1-q^{1-m}}{(q-1)(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{-1})} = 0.
\end{aligned}
$$

对于情形 $\ell(\rho) > 1$，系数 $[S^{(\rho)} \oplus S^{(n)}[1]]$ 根据b中的情形（[LRW25，命题 67]，也等于 0。□

同样地，我们可以用 $P_1(y)$、$P_2(z)$ 来表示 $E(y, z)$、$H(y, z)$；见下述命题。

命题 4.7. 我们有

$$\widetilde{E}(y,z) = \exp\Big(\sum_{r\geq 1}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big)\exp\Big(\sum_{t\geq 1}\frac{(-1)^{t-1}}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big)\exp_q\Big(\frac{yz}{1-q}\Big), \tag{4.25}$$

$$\widetilde{H}(y,z) = \exp\Big(\sum_{r\geq 1}\frac{1}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big)\exp\Big(\sum_{t\geq 1}\frac{1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big)\exp_q\Big(\frac{yz}{1-q}\Big). \tag{4.26}$$

证明。 利用命题 4.1，我们只需证明（4.25）。

由命题 4.2，可得

$$\frac{\widetilde{E}(-y,-z)}{\widetilde{E}(-qy,-qz)} = \frac{\widetilde{\Theta}(y,z)}{(1-qyz)^2}.$$

分别将 y，z替换为 $q^m y$，$q^m z$，得到

$$\widetilde{E}(-y,-z) = \prod_{m\geq 0}\frac{\widetilde{E}(-q^m y,-q^m z)}{\widetilde{E}(-q^{m+1}y,-q^{m+1}z)} = \frac{\prod_{m\geq 0}\widetilde{\Theta}(q^m y,q^m z)}{\prod_{m\geq 0}(1-q^{2m+1}yz)^2}. \tag{4.27}$$

由命题 4.6可推得

$$\widetilde{\Theta}(y,z) = \frac{\exp\big(\sum_{r\geq 1}\frac{q^r}{r}\widetilde{P}_r y^r\big)}{\exp\big(\sum_{r\geq 1}\frac{1}{r}\widetilde{P}_r y^r\big)}\cdot\frac{\exp\big(\sum_{t\geq 1}\frac{q^t}{t}\widetilde{P}'_t z^t\big)}{\exp\big(\sum_{t\geq 1}\frac{1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\big)}\cdot\exp\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{1-q^k}{k}(yz)^k\Big),$$

从而得到

$$\begin{aligned}
\prod_{m\geq 0}\widetilde{\Theta}(q^m y,q^m z) &= \exp\Big(\sum_{r\geq 1}-\frac{1}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big)\exp\Big(\sum_{t\geq 1}\frac{1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big)\exp\Big(\sum_{m\geq 0}\sum_{k\geq 1}\frac{1-q^k}{k}(q^{2m}yz)^k\Big)\\
&= \exp\Big(\sum_{r\geq 1}-\frac{1}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big)\exp\Big(\sum_{t\geq 1}\frac{1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big)\exp\Big(\sum_{m\geq 0}\sum_{k\geq 1}\frac{q^{2mk}-q^{(2m+1)k}}{k}(yz)^k\Big)\\
&= \exp\Big(\sum_{r\geq 1}-\frac{1}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big)\exp\Big(\sum_{t\geq 1}\frac{1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big)\exp\Big(\sum_{m\geq 0}\ln\frac{1-q^{2m+1}yz}{1-q^{2m}yz}\Big)\\
&= \exp\Big(\sum_{r\geq 1}-\frac{1}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big)\exp\Big(\sum_{t\geq 1}\frac{1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big)\cdot\Big(\prod_{m\geq 0}\frac{1-q^{2m+1}yz}{1-q^{2m}yz}\Big).
\end{aligned}$$

将其代入（4.27），得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}(-y,-z) &= \exp\Big(\sum_{r\geq 1}-\frac{1}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big)\exp\Big(\sum_{t\geq 1}\frac{1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big)\frac{\prod_{m\geq 0}\frac{1-q^{2m+1}yz}{1-q^{2m}yz}}{\prod_{m\geq 0}(1-q^{2m+1}yz)^2}\\
&= \exp\Big(\sum_{r\geq 1}-\frac{1}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big)\exp\Big(\sum_{t\geq 1}\frac{1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big)\prod_{m\geq 0}\frac{1}{1-q^m yz}
\end{aligned}$$

$$= \exp\Big(\sum_{r\geq 1} -\frac{1}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big)\exp\Big(\sum_{t\geq 1}\frac{1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big)\exp_q\Big(\frac{yz}{1-q}\Big).$$

证明完毕。 □

推论 4.8. 我们有

$$\widetilde{P}(-y)\widetilde{E}(y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\widetilde{E}(y,z) - \widetilde{E}(y,z)\sum_{k\geq 1}\frac{y^{k-1}z^k}{1-q^k},$$

$$\widetilde{P}(y)\widetilde{H}(y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\widetilde{H}(y,z) - \widetilde{H}(y,z)\sum_{k\geq 1}\frac{y^{k-1}z^k}{1-q^k}.$$

$$\widetilde{P}'(-z)\widetilde{E}(y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}(y,z) - \widetilde{E}(y,z)\sum_{k\geq 1}\frac{y^{k}z^{k-1}}{1-q^k},$$

$$\widetilde{P}'(z)\widetilde{H}(y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\widetilde{H}(y,z) - \widetilde{H}(y,z)\sum_{k\geq 1}\frac{y^{k}z^{k-1}}{1-q^k}.$$

证明。 第一个公式可通过先将命题$_q$ 中的第一个公式里的 exp 替换为 4.7 ，利用恒等式（4.5），再应用微分 $\frac{\partial}{\partial y}$ 得到。其他公式的证明完全类似。 □ —

现在，我们可以完成定理4.4的证明。

定理 *4.4* 的证明。 我们只证明（4.14），因为另外两个证明类似。

将 [Mac95，第 3 章，（2.10）]转化为经典霍尔代数 $\mathcal{H}(\Bbbk Q_\jmath)$ ，我们得到

$$\Theta_1(y) = \exp\Big(\sum_{r\geq 1}\frac{q^r-1}{r}\widetilde{P}_r y^r\Big), \quad \Theta_2(z) = \exp\Big(\sum_{t\geq 1}\frac{q^t-1}{t}\widetilde{P}'_t z^t\Big).$$

于是（4.14）由（4.23）得出。 □

References

[BKa01] P. Baumann 和 C. Kassel，射影直线上凝聚层范畴的 *Hall* 代数，《纯粹与应用数学杂志》**533**（2001），207–233。[BR87] A. Berele 和 A. Regev，钩形杨图及其在组合学和李超代数表示中的应用，《数学进展》**64**（1987），118–175。[BMPS19] J. Blasiak、J. Morse、A. Pun、D. Summers，卡特兰函数与 *k*-舒尔正性，《美国数学会杂志》**32** （2019），921–963。[BLM15] O. Blondeau-Fournier、L. Lapointe、P. Mathieu，双麦克唐纳多项式作为麦克唐纳超多项式的稳定极限，《代数组合杂志》**41**（2015），第 2 期，397–459。[BOR15] E. Briand、R. Orellana 和 M. Rosa，对称函数系数的矩形对称性，《电子组合学杂志》**22** （2015），第 3 期，论文 3.15，18 页。[Br13] T. Bridgeland，通过复形的霍尔代数构造量子群，《数学年刊》**177**（2013），739–759。[BKT08] A. Buch、A. Kresch 和 H. Tamvakis，各向同性格拉斯曼流形上的詹贝利公式，《数学精选》（N.S.）**23** （2017），869–914。[CLR25] J. Chen、M. Lu 和 S. Ruan，根范畴的导出 *Hall* 代数，《以色列数学杂志》**270**（2025），185–228。

[Ch05] I. Cherednik, 《双仿射Hecke代数》，剑桥大学出版社，2005。[Gr95] J.A. Green，Hall 代数、遗传代数与量子群，《数学发明》120（1995），361–377。[Ha57] P. Hall，《分拆代数》，载于：《第四届加拿大数学大会论文集》，班夫 1957，多伦多大学出版社，多伦多，1959。[J91] N. Jing，顶点算子与 Hall-Littlewood 对称函数，《数学进展》87（1991），226–248。[Ka97] M. Kapranov，Heisenberg双代数与导出范畴，《代数学杂志》202（1997），712–744。[Ke05] B. Keller，关于三角轨道范畴，《数学文献》10（2005），551–581。[Lec06] C. Lecourvey，张量积中的 q重数与根系 B、C或 D的权的 q重数之间的对偶性，《组合理论杂志A辑》113（2006），739–761。[LP21] M. Lu 和 L. Peng，半导出Ringel-Hall代数与 Drinfeld双，《数学进展》383（2021），107668。[LR24] M. Lu 和 S. Ruan，$\imath$带权射影直线的 Hall 代数与量子对称对 III：准分裂型，arXiv:2411.13078。[LRW23] M. Lu、S. Ruan 和 W. Wang，$\imath$射影直线的 Hall 代数与 q-Onsager 代数，《美国数学会汇刊》376（2023），第 2 期，1475–1505。[LRW25] M. Lu、S. Ruan 和 W. Wang，$\imath$Jordan 箭图的 Hall 代数与 $\imath$Hall-Littlewood 函数，《数学精选》31（2025），论文编号 106。[Mac95] I.G. Macdonald，《对称函数与 Hall 多项式》，牛津数学专著，牛津大学出版社，纽约，第二版，1995。[Mor64] A.O. Morris，Hall函数乘法的一则注记，《伦敦数学会杂志》39（1964），481–488。[PX97] L. Peng 和 J. Xiao，根范畴与单李代数，《代数学杂志》198（1997），19–56。[Rin90] C.M. Ringel，Hall 代数与量子群，《数学发明》101（1990），583–591。[Sch12] O. Schiffmann，Hall代数讲义，《表示论中的几何方法》II，1–141，S´emin. Congr.，24-II，法国数学会，巴黎，2012。[SchV11] O. Schiffmann 和 E. Vasserot，椭圆Hall代数、Cherednick Hecke代数与 Macdonald多项式，《组合数学》147（2011），188–234。[SV15] A.N. Sergeev 和 A.P. Veselov，Jack-Laurent对称函数，《伦敦数学会会刊》（3）111（2015），第 1 期，63–92。[St01] E. Steinitz，《论阿贝尔群理论》，《德国数学家协会年报》9（1901），80–85。[Tam11] H. Tamvakis，通过升算子给出的 Giambelli、Pieri 与杨表公式，《纯粹与应用数学杂志》652（2011），207–244。[Tam12] H. Tamvakis，Schur多项式理论再探，《数学教学》58（2012），147–163。[T06] B. T¨oen，导出 Hall 代数，《杜克数学杂志》135（2006），587–615。[X97] J. Xiao，Hall 代数的 Drinfeld双与 Ringel-Green 理论，《代数学杂志》190（1997），100–144。[XX08] J. Xiao 和 F. Xu，三角范畴关联的Hall代数，《杜克数学杂志》143（2008），357–373。[XC13] F. Xu 和 X. Chen，奇周期三角范畴的霍尔代数，《代数与表示论》16（2013），673–687。[Zh25] H. Zhang，根范畴关联的Hall代数，《以色列数学杂志》270（2025），413–448。

Department of Mathematics, Shantou University, Shantou 515063, P.R. China
电子邮箱地址：chenjiayi@stu.edu.cn

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R. China
电子邮箱地址：luming@scu.edu.cn

School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, P.R. China电子邮箱地址：sqruan@xmu.edu.cn