arXiv:2601.13553v1 [math.DS] 20 Jan 2026

Basilica 的普适性

Yusheng Luo、Mahan MJ 和 Sabyasachi Mukherjee

Abstract. 我们以下述意义证明胖Basilica Julia集 $J(z^2-\frac{3}{4})$在共形动力学中的普适性： $J(z^2-\frac{3}{4})$ 与任意多项式的胖Basilica Julia集以及任意几何有限闭曲面Bers边界群的极限集均拟共形等价。因此，我们得到了首个连通有理Julia集的例子：它既不同胚于圆或球面，又与某个克莱因极限集拟共形等价。由此可知，任意几何有限Bers边界极限集都是共形可去的。这一普适性结果的其他推论包括：通过圆Basilica对多项式胖巴西利卡类进行拟对称一致化，以及Basilica拟对称群中存在无穷多个两两不可公度的一致拟对称曲面子群。我们将这些方法应用于由施瓦茨反射和三次多项式产生的尖点Basilica Julia集，从而得到更多普适性类。我们还证明，标准Basilica Julia集 $J(z^2-1)$ 是David层级中的拱形巴西利卡。

Contents

1. 引言 1 2. $(X,\ \mathscr{C})$–映射 15 3. $\mathbb{S}^1$ 19
上的保角马尔可夫映射 4. 巴西利卡 Ω–映射 24 5. 巴西利卡 Bowen–Series 映射 36 6. 极限集与 Julia 集的拟共形模型 44 7. David 层级 51 附录 A. 三次多项式 57 附录 B. 施瓦茨反射 58 参考文献 68

1. 引言

本文研究黎曼球面上两类共形动力系统之间的关系：克莱因群与有理映射。我们的研究部分受到以下问题的启发：

- 考虑有限生成克莱因群的极限集与有理映射的 Julia 集所构成的集合。该集合中的两个元素何时拟共形等价?

Date:2026年1月21日。Y.L. 的研究部分得到了美国国家科学基金会 NSFGrantDMS-2349929 的资助。M.M. 的研究部分得到了印度政府原子能部项目（编号：12-R&D-TFR-5.01-0500）以及Infosys基金会捐赠基金的资助。S.M. 的研究部分得到了印度政府原子能部项目（编号：12-R&D-TFR-5.01-0500）、Infosys基金会捐赠基金以及科学与工程研究委员会项目资助 MTR/2022/000248 的资助。

我们的主要结果揭示了两种截然不同的现象（更多详情见 § 1.4）：

（1）在<样式 id='1'>刚性情形</样式>下，任意拟共形同胚都可以提升为共形同胚，并且这两个动力系统是“可公度的”。例如：谢尔宾斯基地毯朱利亚集或极限集。（2）在<样式 id='3'>普适性情形</样式>下，任意两个同胚的对象都是拟共形的（在适当的类型保持条件下）。例如：• 拟圆朱利亚集，或包括克莱因群在内的共形动力系统的极限集（参见 [Ber60、McM84]）；• 花椰菜 Julia 集，或某些包括施瓦茨反射在内的共形动力系统的极限集，如 [McM26]，• Basilica Julia 集，或 Bers 边界群／施瓦茨反射的极限集，正如本文所研究的情形。

我们的前两个定理为这一普适性现象提供了积极证据。

<样式 id='1'>定理 A。 </样式>设 G 是一个几何有限的 B-群，即一个具有单连通、全不变连通分支 Δ_∞ 的不连续域的几何有限克莱因群。设 $\Sigma = \Delta_\infty/G$ ，使得 Σ 是一个具有负欧拉示性数的二维轨形。

假设 Σ 是紧的。那么下列情况恰有一种成立。

(1) G 是拟 Fuchsian 群，且极限集 $\Lambda(G)$ 与圆 $\mathbb{S}^1 = J(z^2)$拟共形等价；或者

(2) G是 Bers 边界群，且极限集 $\Lambda(G)$ 与胖Basilica Julia集 $J(Q)$拟共形等价，其中 $Q(z) = z^2 - \frac{3}{4}$。

另一方面，假设 Σ 不是紧的。那么下列情况恰有一种成立。

(1) G 是拟 Fuchsian 群，且极限集 $\Lambda(G)$ 与圆 $\mathbb{S}^1 = J(z^2)$拟共形等价；或者

(2) G 是Bers边界群，且极限集 $\Lambda(G)$不与任何有理映射的 Julia 集拟共形等价。

我们指出，对于非紧曲面，几何有限 Bers 边界群的极限集存在无穷多个拟共形类（更多详情见图 1.2、定理 C 和 § 1.2）。

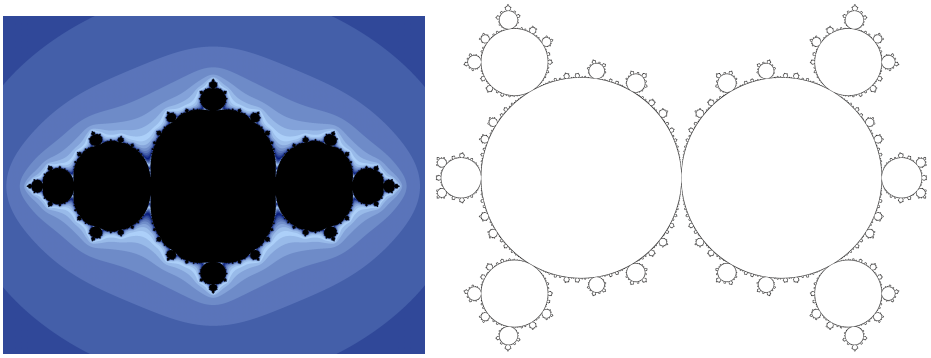

FIGURE 1.1. 左侧是胖Basilica Julia集（对应多项式 $Q(z) = z^2 - \frac{3}{4}$），右侧是一个亏格 2 闭曲面群的Basilica极限集。这两个集合拟共形同胚。

更一般地，闭集 $K \subseteq \mathbb{C}$ 称为巴西利卡，如果它与 $J(Q)$ 同胚，其中 $Q(z) = z^2 - \frac{3}{4}$（见图 1.1）。如果巴西利卡 K 是胖的，则

(1) $\mathbb{C} - K$ 的每个有界分支都是拟圆盘；(2) 如果 $\mathbb{C} - K$ 的任意两个有界分支相接，它们便相切地相接。

（关于两个若尔当域相切地相接的精确定义，见 § 6.1.2。）我们指出，任何几何有限 Bers 边界群都有一个胖Basilica极限集。反过来，任何与 Basilica 同胚的有限生成克莱因群的极限集，都来自一个 Bers 边界群。

下一个定理是关于胖Basilica Julia集的普适性结论。

定理 B。设 f 是一个具有胖Basilica Julia集 $J(f)$的有理映射。那么，当且仅当唯一的非 Jordan 圆盘 Fatou 分支是吸引的/超吸引的，$J(f)$ 才与 $J(Q)$ 拟共形等价。

特别地，任何多项式的胖Basilica Julia集都与 $J(Q)$拟共形等价。

（定理 A 和定理 B 的证明见 § 6.4。）

令 $\mathfrak{C}$ 表示由以下对象构成的类：

- 具有 Basilica 极限集的克莱因群 G，以及• 具有胖Basilica Julia集的有理映射 R，

使得在唯一的非-$\widehat{\ }$Jordan 圆盘连通分支 $U_\infty \subseteq \mathbb{C} - K$ 的理想边界 $\partial^I U_\infty$ 上的诱导动力学是双曲的。这等价于要求 U_∞/G 是紧的，或者 $R|_{U_\infty}$ 是（超）吸引的。依照 Sullivan 字典的思路，将上述两类动力系统置于共同框架下处理会很方便。于是，定理 A 和定理 B 表明，$J(Q)$ 在类 $\mathfrak{C}$ 中具有普适性（参见猜想 1.7 和猜想 1.14，了解类 $\mathfrak{C}$之外的普适性）。

推论1.1（拟共形普适性）。设 K_i、$i \in \{1、2\}$是保形动力系统 $\mathfrak{C}$的胖*Basilica* 极限集或胖*Basilica Julia* 集。那么 K_1、K_2 拟共形等价。

注 1.2 我们指出，经过适当修改，定理 B 可直接推广到任意 p/q–兔子二次多项式或肥兔子情形。为明确起见，我们聚焦于 Q 的情形；此外，在这一族中，只有它的 Julia 集与克莱因群的极限集拟共形等价。

在 $\mathfrak{C}$类中，使用二次多项式 $Q(z) = z^2 - \frac{3}{4}$ 作为模型很方便。我们所依赖的 Q 的一个重要特征是动力学的传递性：所有有界 Fatou 分支都属于 Q的同一个大轨道。两个有界 Fatou 分支之间的每个接触点也具有同样的性质。

我们的定理自然地属于一个更广泛的框架，即对动力学分形集进行分类，分类标准为拟共形等价。关于 $\mathfrak{C}$类以外的 Basilica 极限集，更多讨论请参见 (1.1)、§ 1.2 和 § 1.4。

1.1. **拟共形普适性的推论**。在讨论背景和相关结果之前，我们先列出定理 A 和定理 B 的一些直接推论。

Julia 集与极限集的拟共形等价。在 [LLMM23b] 中，人们猜想，如果一个 Julia 集 J 和一个极限集 Λ 满足

(1) 连通；(2) 不同胚于圆或 2-球面，

那么它们拟共形不等价。作为推论 1.1 的直接推论，我们对上述猜想给出否定回答。

推论 1.3. 存在一个克莱因群的连通极限集，它不同胚于圆或球面，并且与某个有理映射的 *Julia* 集拟共形等价。

我们指出， [LN24b] 已证明，垫片朱利亚集与垫片极限集可以局部拟共形同胚。我们预期，从整体上看，垫片朱利亚集与垫片极限集并非拟共形同胚，更多讨论请参见 § 1.5.5。

拟共形一致化。 若某个巴西利卡 K 的每个有界连通分支的边界都是圆，则称其为圆巴西利卡。由于任何几何有限 Bers 边界群的极限集都与圆Basilica拟共形等价，我们立即得到关于胖Basilica的以下拟共形一致化结果（参见 [LN24b，Nta25]关于胖垫片的研究）。

推论 1.4. 设 g 是一个具有胖*Basilica Julia*集 $J(g)$的多项式。那么$J(g)$ 可以拟共形一致化为圆*Basilica*，也就是说，存在一个拟共形映射 $\Phi\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ，使得 $\Phi(J(g))$ 是圆*Basilica*。

上述推论由 Dimitrios Ntalampekos 独立使用纯解析工具得出。

一致拟对称群。已知，Basilica Julia 集的拟对称群 $J(z^2-1)$ 很大（参见 [LM18, BF25]）。同样的构造也适用于胖Basilica Julia集。若存在一个常数 K ，使得任意元素 $h \in H$ 的拟对称常数都不超过 K，则子群 $H \subseteq$QS(J) 称为一致拟对称。定理 A 表明，QS(J)中存在大量一致拟对称子群。这里需要指出的是，作为背景，Sullivan [Sul78] 证明了，单位圆盘或黎曼球面 $\mathbb{C}$ 上的一致拟共形自同构群，拟共形地共轭于一群 M¨obius 自同构。Markovic [Mar06] 将这一结论推广到单位圆上的一致拟对称同胚群。

推论 1.5. 设 Σ 是一个具有负欧拉特征的非刚性紧二维轨形。存在一个从 $\pi_1(\Sigma)$ 到拟对称群 QS$(J(Q))$的忠实表示，使得其像是一个一致拟对称子群。特别地，QS$(J(Q))$ 包含无穷多个一致拟对称曲面子群。

这里，非刚性是指曲面 Σ具有非平凡的 Teichm¨üller 空间；也就是说， Σ 可拟共形变形。这意味着 Σ 不是带有三个标记点的零亏格曲面。

我们指出，QS$(J(Q))$中存在无穷多个彼此不可公度的一致拟对称子群。事实上，考虑一个亏格为 $g \geqslant 2$ 的闭曲面Σ_g ，其上有一条分离曲线 $\mathcal{C}_g$ ，将 Σ_g 分成一个亏格为 1 的曲面和一个带边界的亏格为 $g-1$的曲面。于是，通过挤压曲线 $\mathcal{C}_g$, $(\Sigma_g, \mathcal{C}_g)$ 导出一个 Bers 边界群，进而由定理 A 得到 QS$(J(Q))$中的一个一致拟对称子群$H_g \subseteq$ 。容易直接验证，若 $g \neq g'$，则 H_g， $H_{g'}$ 在 QS$(J(Q))$ 中不可公度。

共形可去性。 如果子集 $K \subseteq \mathbb{C}$ 满足：任意 同胚 $\Phi\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ 在 $\mathbb{C}-K$ 上是共形的，则它是一个 M¨obius 映射，那么称该子集为共形可去的。根据 [Jon95、Kah98、JS00、LMMN25、LN24a] 的工作，已知某些 Julia 集和极限集是共形可去的。作为定理 A、B 的推论，我们得到了一份新的共形可去极限集列表。

推论 1.6. 设 Λ 是与巴西利卡同胚的有限生成克莱因群的极限集。那么 Λ 是共形可去的。

我们指出，LMMN25 中由反射群产生的一类特定 Basilica 极限集已被证明是共形可去的，见定理 9。 [1]

在克莱因群的背景下，值得在此提及推论 1.6 的一些动力学先驱。在 [BCM 12], 中，Brock、Canary 和 Minsky 证明，若 ρ, ρ' 是克莱因曲面群，且它们在黎曼球面上的作用拓扑共轭，那么 ρ, ρ' 便拟共形共轭。在 [Mj14, §4.5] 中，研究者证明，只需假设克莱因曲面群在其极限集上的作用拓扑共轭即可。与推论 1.6 的关键区别在于，这些定理本质上是动力学的，而群在极限集上的作用是其假设中不可或缺的一部分。

为证明该推论，我们注意到，若 G对应于一个紧曲面，那么 $\Lambda(G)$ 是共形可去的，因为它是 $J(Q)$的拟共形像；而我们知道 $J(Q)$ 是共形可去的（见 [LMMN25，定理 C]）。若 G对应于一个非紧曲面，那么 $\Lambda(G)$ 是 $J(z^2-1)$ 在 David 同胚下的像（见定理 D）。由于 $J(z^2-1)$ 是一个约翰区域（见[CJY94]），且约翰区域的 David 像是共形可去的（见[LMMN25，第 2 节.4.]），故推论得证。

1.2. **超越某一类别的巴西利卡极限集 $\mathfrak{C}$**。受 [McM26],的结果启发，我们的讨论可以置于分形集的元 *Teichm¨uller* 理论这一更广阔的背景之中：即在拟共形等价意义下对拓扑对象进行分类。

令 $\mathfrak{B}$ 表示所有巴西利卡类的空间，并赋予如下等价关系：$[K_1] = [K_2]$ 若存在拟共形映射 $\phi\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ 使得 $\phi(K_1) = K_2$。

每个巴西利卡 Julia 集或极限集都确定 $\mathfrak{B}$中的一个点。若 $\mathfrak{B}$ 中的一个点分别是某个几何有限有理映射的 Julia 集或某个几何有限克莱因群的极限集，则称其为有理点或克莱因点。分别用 $\mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}}$，$\mathfrak{U}_{\mathrm{Klein}} \subseteq \mathfrak{B}$ 表示有理点和克莱因点的集合。

从这一角度来看，定理 A 意味着

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Klein}} = \{[J(Q)]\} \subseteq \mathfrak{B}, \tag{1.1}$$

也就是说，$[J(Q)]$是同时为有理点和克莱因点的唯一点。另一方面，集合 $\mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}}$，$\mathfrak{U}_{\mathrm{Klein}} \subseteq \mathfrak{B}$ 都是无限集。

定理 C。 集合 $\mathfrak{B}$ 包含无穷多个有理点和无穷多个克莱因点。

我们简述克莱因情形下证明的主要思路。可以为巴西利卡极限集关联一棵双色接触树：顶点对应于 $\Omega(G) - \Delta_\infty$ 的分支（其中 Δ_∞ 是 $\Omega(G)$的唯一非乔丹圆盘分支），若两个对应分支相接触，则在相应的两个顶点之间连一条边。若对应分支的稳定子包含一个持续的（而非偶然的）抛物元素，则该顶点着白色；否则着黑色（见图 1.2）。我们证明，巴西利卡极限集之间的任意拟对称都会在相应的双色接触树之间诱导出保色同构，由此得出双色接触树是一个拟共形不变量。我们通过构造无穷多个具有非同构双色接触树的克莱因巴西利卡极限集，证明 $\mathfrak{B}$ 中克莱因点的数量无穷。关于有理点的情形，证明方法类似。进一步讨论及定理 C 的完整证明，参见 § 6.3.2 和 § 6.3.3。

我们在猜想 6.10 中提出，双色接触树是一个完全拟共形不变量。这是下文猜想 1.7 的一个特例。

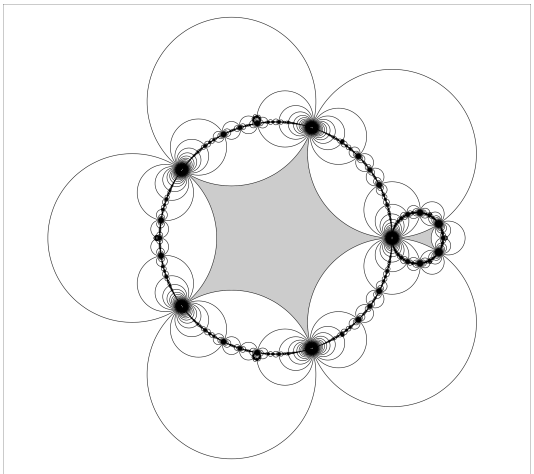

FIGURE 1.2. 一个具有持续抛物元素的 Basilica 极限集。注意，当我们在持续抛物点处不断缩放时，极限集会在豪斯多夫拓扑下收敛到一条直线。另一方面，对于图 1.1 中胖Basilica极限集的任意非接触点，我们都可以选取一个特定的缩放序列，使极限集收敛到一个拓扑上不是直线的闭集。这表明这两个 Basilica 极限集拟共形不同（更多详情见命题 6.8）。

Basilica 极限集的拟共形普适性。设 K 是一个 Basilica Julia集或极限集，且 U 是 $\mathbb{C}-K$的一个分支。对于映射，若点 $x \in \partial^I U$ 位于 U 的理想边界上，且属于 Fatou 分支理想边界上诱导映射下某个抛物点的大轨道，则称该点为抛物的 。类似地，对于群，若 $x \in \partial^I U$ 是诱导福克斯群 $G_U = \phi\,\mathrm{Stab}_G(U)\,\phi^{-1}$的一个抛物元素的不动点，则称 $x \in \partial^I U$ 为抛物的； 其中，$\mathrm{Stab}_G(U)$ 是 G中 U 的稳定子，且 $\phi\colon U \to \mathbb{D}$ 是 U的黎曼映射。否则，称理想边界上的点为双曲的 。

设 $K_i,\ \ i = 1,\ 2$ 是 Basilica Julia 集或极限集。我们称 一个同胚 $\Phi\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ，其中 $\Phi(K_1) = K_2$ ，是类型保持的，如果对于 $\hat{\mathbb{C}}-K_1$ 的每个连通分支 U，其在理想边界 $\partial^I U$ 上的诱导映射将抛物点映为 抛物点（即，它在抛物点之间诱导一个双射）。如果它将抛物点映到抛物点（但双曲元可以映到抛物元），则称其为弱类型保持的。

注意，对于胖Basilica Julia集，两个有界 Fatou 分支之间的接触点在每个分支的理想边界上都是抛物的。任何 Basilica 极限集也具有同样的性质。因此，推论1.1是以下猜想的一个特例。

猜想 1.7. 设 $K_i, i \in \{1, 2\}$, 为某个几何有限共形动力系统的 *Basilica* 极限集（例如，几何有限克莱因群的极限集，或几何有限有理映射的 *Julia* 集）。

假设 K_1, K_2 通过某个类型保持映射同胚。那么 K_1与 K_2拟对称。

（关于共形动力系统的一般定义，参见 [McS98] 。）

注 1.8. 我们相信，经过适当的组合修改，本文介绍的方法足以证明该猜想。关于猜想 *1.7* 的其他一些情形，请见 *§ 1.3*。

David 层级。 设 $[K_1], [K_2] \in \mathfrak{B}$。如果存在一个$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$David 同胚 ϕ：$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ （也称为指数可积畸变的同胚，见 [AIM09，第 20] 章），使得 $\phi(K_1) = K_2$，我们就写作 $[K_1] \geq [K_2]$ 。我们认为， $\mathfrak{B}$ 中的有理点和克莱因点具有自然的 David 层级，并证明标准巴西利卡 Julia 集 $J(z^2 - 1)$ 是该 David 层级中的拱形巴西利卡，因为它支配所有其他对象。

定理 D. 设 $Q_{\mathrm{pcf}}(z) = z^2 - 1$ 是具有 Basilica Julia 集的二次后临界有限多项式。设 $[K] \in \mathfrak{B}$ 为克莱因或有理的。那么

$$[J(Q_{\mathrm{pcf}})] \geq [K].$$

此外， $[K] = [J(Q_{\mathrm{pcf}})]$ 若 K 是某个无抛物周期的几何有限有理映射的 Basilica Julia 集。

定理 D 的证明见 § 7。上述定理也启发了以下关于一般 Basilica Julia 集和极限集的猜想。

猜想 1.9 (David 层级**)。** 设 K_i、 $i \in \{1、 2\}$ 为某个几何有限共形动力系统的 *Basilica* 极限集。假设存在一个从 K_1 到 K_2 的弱型保持映射。那么存在一个 *David* 同胚$\curvearrowright$ $\curvearrowright\phi$： $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$，满足 $\phi(K_1) = K_2$。

注 1.10. 1）我们指出，与拟共形映射不同，两个 David 映射的复合以及 David 映射的逆映射不一定是 David 映射。因此，与猜想 1.7 相比，要完整描绘 David 层级还面临着额外的技术挑战（更多细节见注 7.12）。我们还指出，猜想 1.9 将意味着 $\geq$ 在$\mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}} \cup \mathfrak{U}_{\mathrm{Klein}} \subseteq \mathfrak{B}$上构成偏序。

2）我们指出，具有抛物周期（重数 3）的几何有限有理映射的巴西利卡 Julia 集也可能与 $J(Q_{\mathrm{pcf}})$拟共形等价。

1.3. **Basilica 极限集的百态。** 现在我们举例说明一些符合猜想 1.7 的其他共形动力系统极限集。

施瓦茨反射巴西利卡。 施瓦茨反射提供了一类反共形动力系统，它们通常作为反全纯多项式与反射群的配对而出现。近年来，这类系统得到了广泛研究（关于这种配对现象在全纯和反全纯领域的综述，见[LM25a、LM26] ）。

三尖瓣线的施瓦茨反射是这一配对框架中最简单的例子：它将反全纯多项式 $\bar{z}^2$ 与理想三角形反射群结合起来（参见 [LLMM23a]）。更一般地，对于每个 $d \geqslant 2$， $\bar{z}^d$ 与理想 $(d+1)$–边形反射群的配对都可以实现为施瓦茨反射。这些施瓦茨反射源自以下次数为 $d+1$ 的有理映射族的单叶限制：

$$\Sigma_d^* := \left\{ f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \cdots - \frac{1}{dz^d} : f|_{\widehat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}}} \text{ is univalent} \right\}.$$

此外， Σ_d^* 与理想 $(d+1)$–边形反射群的 Teichm¨uller 空间的伯斯紧化之间存在一个典范双射，使得由 $f \in \Sigma_d^*$ 导出的施瓦茨反射是 z^d 与相应反射群的配对（见 [LMM22]）。为简化记号，我们将有理映射空间 Σ_d^* 与相应的施瓦茨反射映射族视为同一对象。采用这一识别后， Σ_d^* 可视为理想 $(d+1)$–边形反射群的 Teichm¨uller 空间的伯斯紧化。我们也记 $\Sigma^* := \bigsqcup_{d \geqslant 2} \Sigma_d^*$。

当 $S \in \operatorname{Int}\Sigma^*$、[McM26 定理 1.2] 蕴含极限集 $\Lambda(S)$ 与花椰菜 Julia 集 $J(z^2 + \frac{1}{4})$ 拟共形等价。当 $S \in \partial\Sigma^* = \bigsqcup_{d\geqslant 2} \partial\Sigma_d^*$ 时，极限集是一个巴西利卡。我们用 $\mathfrak{U}_{\partial\Sigma^*} \subseteq \mathfrak{B}$ 表示在 $\partial\Sigma^*$ 中由施瓦茨反射的极限集构成的巴西利卡的拟共形类集合。

我们的理论适用于施瓦茨反射情形，并且对于施瓦茨反射，我们有定理 A 和定理 B 的类似结论。为了对 $\partial\Sigma^*$ 上某些施瓦茨反射的极限集进行建模，我们考虑多项式

$$R(z) = az^4 + \frac{1-4a}{3}z^3 + \frac{2+a}{3}.$$

这里，$a = \frac{1}{12} + \frac{i\sqrt{2}}{24}$ 的选取使得临界点 $1 - \frac{1}{4a}$ 映射到抛物不动点 1。其 Julia 集是一个尖点 *Basilica*，见图 1.3。

定理 E。集合 $\mathfrak{U}_{\partial\Sigma^*} \subseteq \mathfrak{B}$ 是无限的。此外，

$$\mathfrak{U}_{\partial\Sigma^*} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}} = \{[J(R)]\};\ \text{and}$$
$$\mathfrak{U}_{\partial\Sigma^*} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Klein}} = \varnothing.$$

定理 E 的证明见附录 B。我们指出，证明中的一个关键要素是命题 B.15 中陈述的拟共形普适性结果。

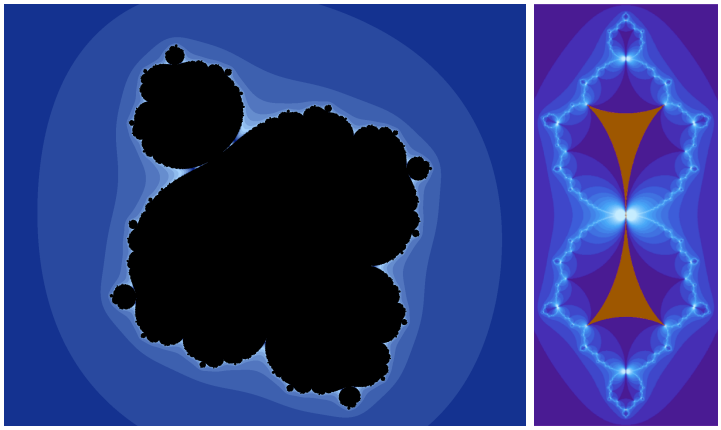

FIGURE 1.3. 左图：展示了多项式 $R(z)$ 的尖点Basilica Julia集。大的黑色有界 Fatou 分支的边界上有抛物不动点 1 和简单临界点 $1 - \frac{1}{4a}$。右图：展示了由有理映射 $f(z) = z + \frac{2}{3z} - \frac{1}{3z^3}$ 产生的 Σ_3^* 中某个施瓦茨反射的极限集。这两个集合拟共形同胚。

注 1.11。我们注意到，任意施瓦茨反射 $S \in \partial\Sigma_d^*$ 都是 $\bar{z}^d$与某个理想多边形反射群的 Bers 边界群的配对；在反射情形下，该群必然是几何有限的。

还有其他构造施瓦茨反射（或其全纯对应物，即 B-对合）的方法，其极限集是巴西利卡类。例如，可以考虑一个福克斯群与一个具有巴西利卡极限集的几何有限多项式（或一个具有连通、单连通抛物吸引盆的几何有限有理映射）之间的配对（参见 [LMM24、LLM24]），或者一个抛物 Blaschke 乘积与一个 Bers 边界群之间的配对 [LMMN25]。事实上，利用拟共形手术，可以证明 $\mathfrak{U}_{\text{anti-rat}}$（几何有限反有理映射的巴西利卡 Julia 集）和 $\mathfrak{U}_{\text{reflect}}$（克莱因

反射群的巴西利卡极限集）自然嵌入 $\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$ 的<style id='2'>施瓦西巴西利卡空间中。然而，定理 E 表明，由 $\partial\Sigma^*$ 仅相交于$\mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}}$ 中的施瓦西巴西利卡构成的集合是一个单点集，与 $[J(Q)]$不同。

在一般情形下，猜想 1.7 对所有这类巴西利卡类给出了拟共形分类猜想。然而，在此情形下，要明确陈述猜想 1.7 的类型保持条件则更为微妙。

三次多项式。令 $\mathrm{Per}_1(0) := \{z^3 + \frac{3a}{2}z^2 : a \in \mathbb{C}\}$为米尔诺的 $\mathrm{Per}_1(0)$曲线，并令 $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Per}_1(0)$ 为主双曲分支，即包含 z^3 的双曲连通分支（见图 1.6，参见 [米尔92]）。注意，在这个族中，0 是一个不动临界点，并且有一个自由临界点 $-a$。边界 $\partial\mathcal{H}$ 的拓扑已在 [Roe07], 中得到深入研究，文中证明了 $\partial\mathcal{H}$ 是一条若尔当曲线。任何几何有限多项式 $f_a \in \partial\mathcal{H}$ 都有一个 Basilica Julia 集，并且恰好属于以下两种类型之一（见图 1.4）：

- （抛物型）自由临界点 $-a$ 位于抛物吸引盆中，此时 $a \in \partial\mathcal{H}$ 对应一个尖点；
- （Julia 型）自由临界点 $-a$ 位于 Julia 集上。

这些位于 $\partial\mathcal{H}$ 上的几何有限参数，是 $\mathcal{H}$ 中有理内部射线的落点；这些射线的角在映射 $\sigma_2(t) = 2t$下是周期的或严格预周期的（更多细节请参见 [Roe07] ）。我们的方法给出了 $\partial\mathcal{H}$上几何有限多项式的分类。

定理 F。 设 f_a 是 $\partial\mathcal{H}$上的几何有限多项式。则以下情形恰有一种成立。

（1） f_a 是抛物型，且 $[J(f_a)] = [J(z^3 + 2iz^2)]$。（2） f_a 是 Julia 型，且 $[J(f_a)] = [J(z^2 - 1)]$。
证明见附录 A 中的定理 F。

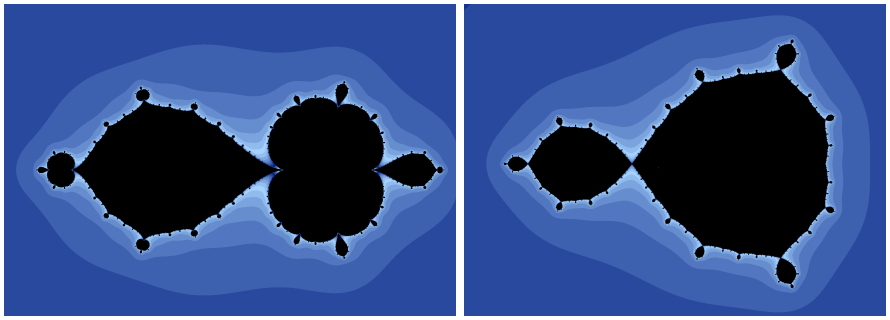

FIGURE 1.4. 米尔诺参数曲线 $_1(0)$ 的主双曲分支 $\mathcal{H}$ 边界上的两个三次巴西利卡 Julia 集。左侧多项式 $z^3 + 2iz^2$ 有一个抛物不动点，因此在抛物吸引盆中有一个临界点。右侧多项式 $z^3 + \frac{3}{2}z^2$ 的 Julia 临界点是一个严格预周期接触点，其 Julia 集与标准巴西利卡 $J(Q_{\mathrm{pcf}})$拟共形等价。$\partial\mathcal{H}$ 上的任何几何有限多项式都有巴西利卡 Julia 集，并且与这两个模型之一拟共形等价。

超越几何有限性。 许多几何无限有理映射都具有巴西利卡 Julia 集；例如，任何形如 $z^2 + e^{2\pi i\theta}z$ whereθ 的二次多项式，其中 θ 是有界型无理数（见图 1.7）。只需在临界值处放大观察，就很容易看出，它的 Julia 集与几何有限映射的巴西利卡 Julia 集并不拟共形等价。根据重整化理论，我们

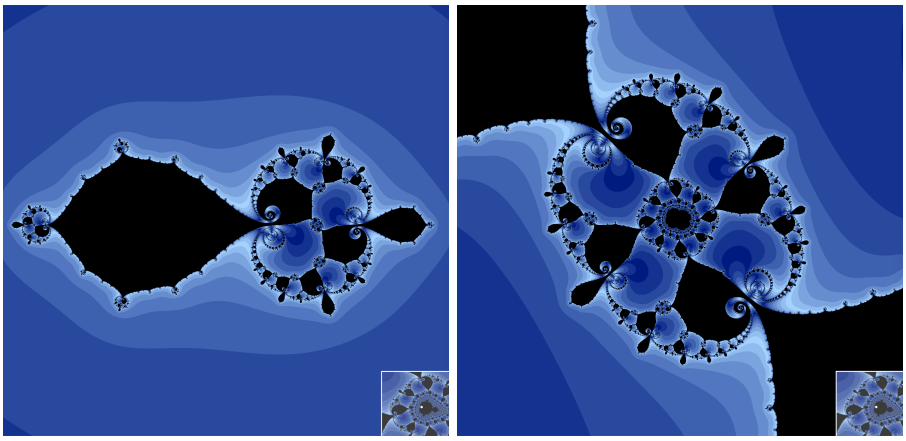

FIGURE 1.5. 一个位于 $\partial\mathcal{H}$ 上的几何有限 Basilica Julia 集，以及其放大图（缩放图，右侧）。由定理 F 可知，它与左侧图 1.4 中的 $J(z^3+2iz^2)$ 拟共形等价。该拟共形同胚将放大图中央的小型花椰菜 Fatou 分支映射到左侧图 1.4 中最显眼的花椰菜 Fatou 分支。这展示了定理 F 中所得到的拟共形映射所具有的灵活性。

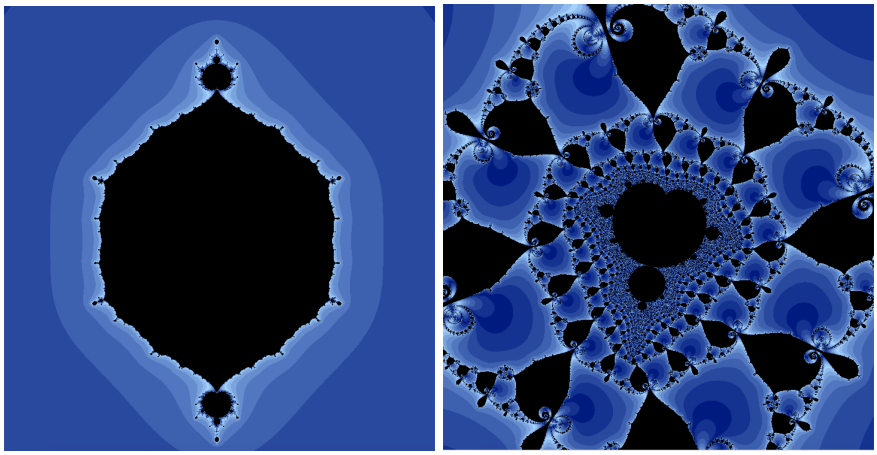

FIGURE 1.6. 主双曲分支 $\mathcal{H} \subset \mathrm{Per}_1(0)$ 及其边界附近的放大图（缩放图）。最显眼的曼德博集合的根对应于图 1.5 中的几何有限多项式。

预期旋转数 θ 的连分数展开的尾部会在识别拟共形类时发挥作用。同样，$\mathrm{Per}_1(0)$ 主双曲分支边界上的任何多项式都具有巴西利卡 Julia 集。

问题 1.12。 能否对曼德博集合主双曲分支边界上的 *Basilica Julia* 集，或$\mathrm{Per}_1(0)$边界上的 *Basilica Julia* 集进行分类?

模空间中的巴西利卡类。 巴西利卡类也自然地出现在有理映射的各种分岔轨迹中。以下猜想等价于 [DLS20] 中的分子猜想（见图 1.7）。

猜想 1.13. 设Mol 为二次族 $z^2 + cz$ 中的主分子。那么 $[\mathrm{Mol}] = [J(Q)]$。

巴西利卡作为焊接? 在 [McM26], 中，明可夫斯基问号函数的焊接被用作花椰菜类 $[J(z^2+\frac{1}{4})]$ 的普适对象。问号函数可以纯粹用数论术语来定义。我们很想知道，是否存在一个函数能在普适性类$[J(z^2-\frac{3}{4})]$中发挥类似的作用。

–

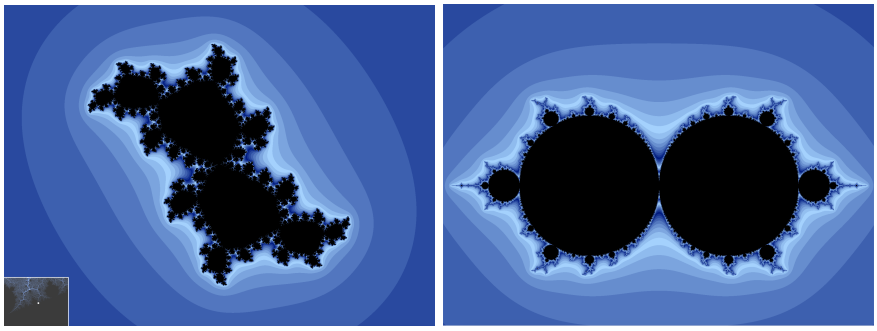

FIGURE 1.7. 左侧是 Siegel 多项式的一个 Basilica Julia 集。右侧是二次族 z^2+cz 的分岔轨迹。主分子是包含 z^2 和 z^2+2z的主双曲分支经过有限次分岔所得到的双曲分支之并的闭包。

1.4. 刚性与普适性。受我们的普适性结果启发，我们预期，极限集或 Julia 集之间的拟对称性存在两种不同的情形。

关于 Sierpi´nski 地毯的拟对称性的刚性已有大量研究，见 [BKM09、BM13、Mer14、BLM16]。设 K_i、$i\in\{1、2\}$分别为后临界有限有理映射的地毯 Julia 集，或凸余紧克莱因群的地毯极限集。若 K_1 与 K_2 拟对称等价，则事实上它们 Mö¨bius 等价：当两者都是极限集时，见 [Mer14，定理 1.1]；当其中一个 K_i 是 Julia 集时，见 [BLM16，推论 1.3、定理 1.4]。Mö¨bius 等价意味着相应的动力学必须是可公度的（见[LP97，定理 B]）。特别地，没有地毯 Julia 集与极限集拟共形等价（见 [BLM16，推论 1.3]），并且地毯集之间的任何拟对称性都必然源自底层动力学。

另一方面，当 Julia 集或极限集是若尔当曲线时，拟对称性非常丰富。自 Ahlfors 和 Bers 的工作以来，拟圆的情形便广为人知。最近，McMullen [McM26] 证明，Minkowski ?–映射的焊接，或者等价地，花椰菜 Julia 集 $J(z^2+\frac{1}{4})$，具有普适性（其适当意义将在下文更一般地表述于猜想中）。我们的主要结果部分受到这一成果的启发，并给出了超越若尔当曲线的普适性现象的首批实例。

我们的定理和方法促使我们针对一般共形维数为 1 的极限集提出以下猜想。

猜想 1.14 (拟共形普适性)。设 $K_i, i\in\{1,2\}$ 是某个双曲共形动力系统的极限集（例如，凸余紧克莱因群的极限集或双曲有理映射的 *Julia* 集）。假设 K_1, K_2 的共形维数为1 ，且它们同胚。那么K_1 与 K_2拟对称。

更一般地，设 K_i、$i\in\{1、2\}$ 是一个几何有限共形动力系统的极限集（例如，几何有限克莱因群的极限集，或几何有限有理映射的 *Julia* 集）。假设 K_1、K_2 具有

共形维数 1 ，并且它们通过某个保型映射同胚。那么， K_1 与 K_2 拟对称。

注 1.15. 我们列举猜想 *1.14* 的一些已知情形。

- 对于几何有限共形动力系统的若尔当曲线极限集 Λ ，众所周知，若诱导动力学在两个理想边界上都是双曲的，则 $[\Lambda] = [\mathbb{S}^1]$。最近有研究表明， [McM26] 若动力学在一个理想边界上是双曲的，而在另一个边界上有抛物点，则 $[\Lambda] = [J(z^2 + \frac{1}{4})]$。关于更一般的情形，参见 *§ 1.5.4* 的讨论。• 如果对应于 *I-* 丛书 *3-*流形的两个凸余紧克莱因群的极限集同胚，那么它们也拟共形同胚（参见 [CM17]）。• 如果两个海绵极限集同胚，那么它们也拟共形同胚（参见 [LZ23] ，更多讨论见 *§ 1.5.5*）。•曼德布罗集合的肢之间的 *Branner–Fagella* 同胚还在不同二次多项式的 *Julia* 集之间诱导出各种拟共形同胚（参见 [BF99]）。

1.5. 方法、证明要素与讨论。

1.5.1. 克莱因群、有理映射与施瓦茨反射产生的碎片化动力学。 本文所考察的所有分形都源自动力学，但其 underlying 动力系统并不共轭。我们证明这些分形之间拟共形等价性的策略，是充分利用动力学本身。具体而言，我们将一个碎片化动力系统与原动力系统联系起来；更确切地说，我们在克莱因群／有理映射／施瓦茨反射的极限集／Julia 集上构造一个分片共形的马尔可夫映射（通常是不连续的）。事实证明，尽管原动力系统存在显著差异，但与之关联的碎片化动力系统可以在极限集上共轭，而且实际上可以做到拟对称。这为处理各种彼此无关的保形动力系统之间的动力学不相容性，并构造其极限集之间的拟共形映射，提供了一种统一方法。例子包括以下几类。

(1) 有理映射的 Julia 集与克莱因群的极限集（定理 A、定理 D），(2) 非同构克莱因群的极限集（定理 A），(3) 次数不同和/或动力学行为不同的有理映射的 Julia 集（定理 B、定理 F），(4)（全局）有理映射的 Julia 集与（半全局）施瓦茨反射或 B-对合的极限集（定理 E），等等。

这在精神上类似于拟对称映射 $\phi\colon\ \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ 它将二进有理数集 $\{\frac{p}{2^n}\}$ 映到 $d-$ 进有理数集 $\{\frac{q}{d^m}\}$ （参见命题 3.4 ）。与福克斯群相关的碎片化动力系统中的一些特殊例子，历史上曾用于研究曲面上的测地流 [BS79], ，最近则被用于结合（反）多项式与福克斯亏格零群／反射群 [LLMM23a, LMM22, LMM24, MM23, LLM24, MM25, BLLM24, MV25], ，以及构造某些极限集与 Julia 集之间的（非拟对称）同胚 [LLMM23b, LLM22]。另见[McM98, MU03] ，其中通过有理映射和克莱因群构造共形马尔可夫映射，以计算 Julia 集／极限集的豪斯多夫维数；另见[LZ23, LN24b] ，其中通过圆填充上的重整化理论得到碎片化动力系统，并用以证明垫片 Julia 集的拟共形一致化。

1.5.2. 巴西利卡 *Bowen-Series* 映射。对于具有巴西利卡极限集的克莱因群 G，其在 $\Lambda(G)$上的相关碎片化动力系统的片段位于 G中。这类分段 M¨obius 映射的典型例子是*Bowen-Series* 映射，它们定义在福克斯群的极限集 $\mathbb{S}^1$ 上 [BS79]。我们定义巴西利卡极限集上的 Bowen-Series 映射类比，并称之为巴西利卡 *Bowen-Series* 映射。一方面，巴西利卡 Bowen-Series 映射在极限集 $\Lambda(G)$上的限制产生一个“实 1–维”马尔可夫动力系统；另一方面，它们向“拼图片”（即马尔可夫片段的适当捏合邻域，见 § 1.5.3）的共形延拓，为在有理映射的巴西利卡 Julia 集上构造碎片化动力系统提供指引。

1.5.3. 将两个世界的拼图拼合起来。 上述碎片化动力系统的定义域，自然源自文献中的若干先驱工作。

(1) 在标准多项式动力系统中，这类定义域由 Yoccoz拼图块给出（由射线和等势线切出）。(2) 对于克莱因反射群 [LLM22] 以及某些克莱因穿孔球面群 [MM23, § 3, § 7.3], ，Nielsen映射或 Bowen-Series 映射（视为碎片化动力系统）的共形延拓定义域，是由不连续域各连通分支中的双曲测地线切出的。请注意，由于存在额外的对称性，反射群的此类定义域会成为圆盘。

本文所用技术要求对上述各种类型的“拼图”涉及的共形延拓定义域进行混合构造。

(1) 对于 Basilica Bowen-Series 映射，共形延拓定义域由双曲测地线切出，这是对上述类型 (2) 的推广（见图 5.2）。(2) 对于与 Basilica Julia 集相关的碎片化动力系统，共形延拓定义域在无穷远吸引域中由射线和等势线切出，在有界 Fatou 分支中则由双曲测地线的对应物切出，从而将项目 (1) 和项目 (2) 的元素结合起来（见图4.1）。(3) 对于与群和多项式的 mat- ings 所形成的 Basilica 极限集相关的碎片化动力系统（例如施瓦茨反射），共形延拓定义域在极限集的“多项式一侧”由射线和等势线切出，在“群一侧”则由真正的双曲测地线切出（见图 B.4 ）。这一构造将有理动力学世界和克莱因群世界的拼图，原原本本地拼合在同一个动力平面中。（关于施瓦茨反射背景下此类混合拼图构造的先驱工作，见 [LLMM23a, §4.2]。）

1.5.4. 若尔当曲线 Julia 集与极限集。对于几何有限共形动力系统的若尔当曲线极限集 Λ，点 $x \in \Lambda$ 有四种可能的类型：(H, H)、(H, P)、(P, H) 和 (P, P)，这取决于两侧对应点处诱导动力学是双曲的还是抛物的。令$S \subseteq \{(H, H), (H, P), (P, H), (P, P)\}$，若 Λ 上的每个点 Λ的类型都属于 S，并且对于每种类型 $s \in S$，都存在一个类型为 s的点 $x \in \Lambda$，则称其类型为 S。显然，如果 Λ_1、Λ_2 具有相同的类型，那么它们之间存在一个类型保持同胚。

我们可以通过拓扑扩张的分段 M¨obius 映射实现 Λ 的所有可能类型（见第 2 节），并且恰好得到猜想 1.14 预测的五种不同拟共形类型（见图 1.8、[LMMN25、图 1.1、图 11.9]）：

- 拟圆：$\{(H, H)\}$、$\{(H, H), (P, P)\}$；
- 花椰菜：$\{(H, H), (H, P)\}$、$\{(H, H), (P, H)\}$；

• 双抛物花椰菜： $\{(H,H),(H,P),(P,P)\}$, $\{(H,H),(P,H),(P,P)\}$;• 松树： $\{(H,H),(H,P),(P,H)\}$;• 双抛物松树： $\{(H,H),(H,P),(P,H),(P,P)\}$。

本文所发展的方法应能为证明这一设定下的猜想铺平道路。我们将在未来的工作中对此进行研究。

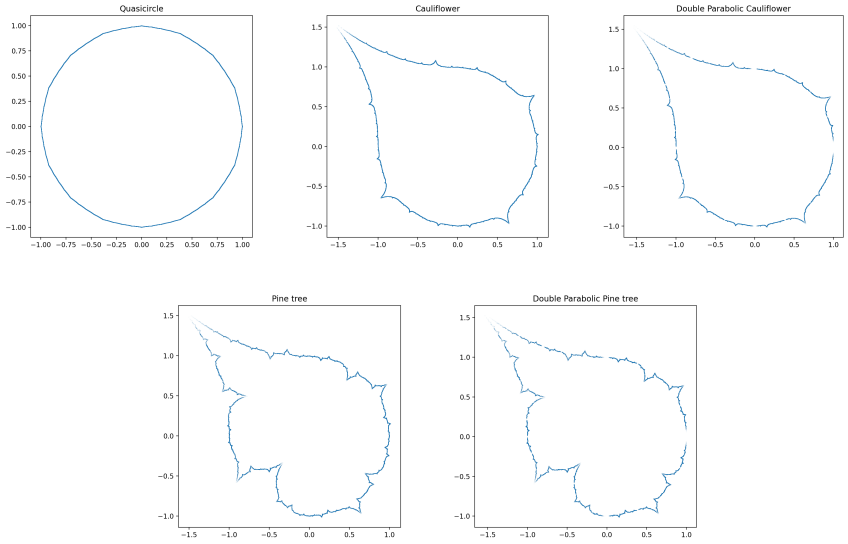

FIGURE 1.8. 约旦曲线极限集的五种不同拟共形类型。向内／向外尖点的存在使我们能够区分拟圆、花椰菜和松树。请注意，当我们在双抛物花椰菜或双抛物松树的一个 $(P,\ P)$ 点处缩放时，极限集在豪斯多夫拓扑下收敛到一条直线。另一方面，在花椰菜或松树的任意非尖点处，我们可以选取一个特定的缩放序列，使得极限集收敛到一条包含尖点的弧。这表明，花椰菜或松树与其双抛物对应物拟共形不同。

1.5.5. 垫片朱利亚集与极限集。垫片或圆填充是另一类重要的共形维数为 1 的分形集。这里，垫片是一个闭的$\hat{}$子集，满足 $\mathbb{C}$

(1) 每个补集分支都是若尔当域；(2) 任意两个补集分支至多在 1 个点处相接；(3) 不存在三个补集分支共享同一个边界点；(4) 通过为每个补集分支指定一个顶点，并在两个分支相接时连接一条边而得到的神经复形是连通的。

让我们在本文的框架下讨论垫片 Julia 集和极限集的一些近期结果。

如果两个几何有限的垫片极限集同胚，那么该同胚自动保持类型，因为秩一抛物元素恰好对应于不连续域中两个分支之间的接触点（见 [LZ23，命题 B.2] 或 [BO22，引理 11.2]）。由此可根据 [LZ23，定理 I]以及 [McM90] 得出，同胚的几何有限垫片极限集是拟共形等价的。这证明了猜想 1.14 对垫片极限集成立。

为将垫片极限集与 Julia 集进行比较，结合猜想 1.14 可知，垫片之间拟共形等价的主要障碍在于类型保持条件。这一关于局部动力学的条件实际上对垫片的神经复形施加了全局约束。 [LZ25] 利用这一全局组合约束，证明在若干情形下，垫片 Julia 集与垫片极限集拟共形不等价。另一方面， [LN24b]证明，垫片 Julia 集与极限集之间不存在妨碍拟共形等价的局部障碍，这再次为猜想 1.14 提供了佐证。

1.5.6. 配对的应用。我们还要提到 Basilica Bowen-Series 映射的一个特征（见 § 1.5.2），它将在本文后续论文中发挥核心作用[LMM26]。尽管 Basilica Bowen-Series 映射是为 Bers 边界群定义的，但它们会产生圆上的（可能不连续的）分片 M¨obius 马尔可夫映射，称为拉回 *Bowen-Series* 映射（见 § 5.5）。然而，借助加速技术（在 [LMM26] 中定义并详加阐述），拉回 Bowen-Series 映射通常可以转化为圆的覆盖映射，而这类覆盖映射在很大程度上保留了相关福克斯群的大轨道结构。这些结果可应用于将多项式动力系统与福克斯群进行配对的问题（此前这一问题仅对福克斯亏格零群实现过，见 [MM23、LLM24、MM25、LM26]）。总之，绕道 Teichm¨uller 空间的边界，为将福克斯闭曲面群与多项式进行配对带来了丰硕成果。

1.6. **本文结构**。 在第 2 节中，我们引入碎片化动力学系统的概念，或更正式地说，$(X,\ \mathscr{C})$–映射。这些是紧度量空间上的分段同胚，其各个片属于给定的类别 $\mathscr{C}$。定义在一定程度上受到流形上的 $(G,\ X)$ 结构的启发。在第 3 节中，我们研究($\mathbb{S}^1$, Conf)–映射（ $\mathbb{S}^1$上的分段共形映射），将其作为 $(X,\ \mathscr{C})$–映射中最简单的实例之一，并给出两个此类映射拟对称共轭的判据。

在第 4 节和第 5 节中，我们构造了另外一些特殊类别的 $(X,\ \mathscr{C})$–映射：与模型映射 $Q(z) = z^2 - \frac{3}{4}$相关联的 $(J,\ \Omega)$–映射，以及与几何有限 Bers 边界群 G相关联的 $(\Lambda,\ G)$–映射。这些映射源自有理映射和克莱因群的碎片化动力学，详见第 1.5.1 节。

主要定理（定理 A、定理 B 和定理 C）在第 6 节中通过对相应的碎片化动力学应用拟共形手术得到证明。

为了将上述技术推广到巴西利卡的其他普适性类，我们注意到两个关键的微妙之处：

（1）存在非接触抛物点；以及
（2）动力学可能会将接触点映射到非接触点。

为了解决这两个问题，我们将经过适当修改的碎片化动力学与所研究的有理映射或克莱因群相关联，从而引入适当的修改。借助这些修改，我们在第 7 节、附录 A 和附录 B 中证明了定理 D、定理 E 和定理 F。

致谢。 我们感谢 Curt McMullen，感谢他进行了许多富有洞见的讨论。

2. $(X, \mathscr{C})-$MAPS

本节将介绍一类定义在紧致可度量空间 X 上的分段映射。我们的目标是在尽可能广泛的框架下 formulate 这一定义。在第§3、§4和§5节中，我们将详细考察这类映射的三个具体族。

下面的定义 2.1 部分受到几何中出现的 (G, X) 结构这一概念的启发： X 是一个流形，而 G是 X 的一个微分同胚群。

流形 M 具有 (G,X) 结构，当且仅当它存在一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$，其中每个U_α 都同胚于 X 的一个开子集，且过渡函数来自 G。

定义 2.1。设 X 是一个紧致可度量空间。若有限集合 $\mathcal{A}=\{A_1, ...A_m\}$ 由 X 的子集组成，则称其为一个划分，如果

- A_i 闭且连通；
- $A_i \cap A_j$ 对于 $i \neq j$是一个有限集；
- $\bigcup A_i = X$。

我们将断点 集合定义为

$$\mathrm{bk}(\mathcal{A}) := \{x \in X : x \in A_i \cap A_j, i \neq j\}.$$

注意，根据构造，$\mathsf{bk}(\mathcal{A})$ 是一个有限集。

设 $\mathscr{C}$ 是由同胚 $f: A \longrightarrow B$组成的集合，其中 A, B 属于 X的闭且连通子集族。若有限集合的映射$\mathcal{F}=\{f_1, .., .f_m\}$ 满足存在 X的一个划分 $\mathcal{A}=\{A_1, ...A_m\}$，使得对于每个 i，映射 $f_i: A_i \longrightarrow B_i = f(A_i)$ 属于 $\mathscr{C}$，则称其为一个 $(X, \mathscr{C})$−映射 。

定义 2.1 中的第二个条件隐含地表明，我们关注的是 X 的拓扑维数为一的情形。如果关注高维中的动力学，这个条件可以放宽。

注 2.2. 我们不要求集合 $\mathcal{F}$ 在X上诱导出连续映射。换句话说，如果 $x \in A_i \cap A_j \subseteq \mathsf{bk}(\mathcal{A})$, 那么 $f_i(x)$ 可能不同于 $f_j(x)$。将 $\mathcal{F}$ 视为多值映射会比较方便。更确切地说，如果 $x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$对于某个子集 $\mathcal{I} \subseteq \{1,...,m\}$成立，那么 $\mathcal{F}(x) = \bigcup_{\mathcal{I}}\{f_i(x)\}$ 可以是多值的。

例 2.3. 我们给出一些重要且众所周知的 $(X, \mathscr{C})$−映射的例子。

(1) Let $X = I = [0,1]$ and let

$$\mathrm{PL} = \{(f : I_1 \longrightarrow I_2) : f(x) = ax + b\}.$$

那么 (I, PL)−映射是 $[0,1]$上的分段线性映射。

(2) 设 $X = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$ ，并设

$$\mathrm{PPSL}_2(\mathbb{Z}) = \{(f : I \longrightarrow J) : f(x) = (ax + b)/(cx + d), ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$

那么，$(\mathbb{S}^1\mathrm{PPSL}_2(\mathbb{Z}))$−映射是分段整数射影映射。

(3) 令 $X = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$ ，并令

$$\mathrm{PDyad} = \{(f : I \longrightarrow J) : f(x) = 2^a x + b, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}[1/2]\}.$$

那么，$(\mathbb{S}^1\mathrm{PDyad})$−映射是二进分段线性映射。这些映射与汤普森群 T 有关。

(4) 令 $X = J(F)$ 为有理映射 F 的 ***Julia*** 集，并令

$$\mathfrak{F} = \{(f : A \longrightarrow B) : f(x) = F^{-n} \circ F^m(x)\},$$

其中，$F^{-n} \circ F^m$ 是 A 上的一个同胚，由某次迭代 F^m 与某次迭代 F^n 的反分支复合而成。我们称这类映射为 $(J\mathfrak{F})-$ 映射。我们将在第 *4* 节详细讨论它们。施瓦茨反射映射的类似构造将在附录 *B* 中讨论。

(5) 令 $X = \Lambda(G)$ 为某个克莱因群的极限集，并令

$$\mathscr{C} = \{(f : A \longrightarrow B) : f(x) = gx, \textit{for some } g \in G\}.$$

我们称这样的映射为 (Λ, G)−映射。我们将在第 *5* 节详细讨论它们。

2.1. **马尔可夫性质**。

定义 2.4. 设 $\mathcal{F}=\{f_1,..,.f_m\}$ 是一个 $(X,\mathscr{C})$–映射。我们称 $\mathcal{F}$ 是 马尔可夫的，当且仅当对每个 i，都存在一个指标集 $\mathcal{J}_i\subseteq\{1,...,m\}$，使得

$$f_i(A_i)=\bigcup_{j\in\mathcal{J}_i}A_j,\ \text{and}\ f_i(A_i\cap \mathrm{bk}(\mathcal{A}))\subseteq \mathrm{bk}(\mathcal{A}).$$

划分 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的细化，如果对每个 $B\in\mathcal{B}$，都存在 $A\in\mathcal{A}$ 使得 $B\subseteq A$。给定一个马尔可夫 $(X,\ \mathscr{C})$–映射 $\mathcal{F}=\{f_1,..,.f_m\}$，可以定义拉回划分

$$\mathcal{A}^1=\mathcal{F}^*(\mathcal{A})=\{A_{ij}:=f_i^{-1}(A_j):f_i(A_i)\cap A_j\neq\varnothing\}.$$

我们称 $\mathcal{A}^0=\mathcal{A}$ （分别称 $\mathcal{A}^1$）为第 *0* 级（分别为第 *1* 级）马尔可夫划分。根据构造，

- （包含关系） $A_{ij}\subseteq A_i$，即 $\mathcal{A}^1$ 是 $\mathcal{A}^0$的细化；并且•
  （动力学） $f_i:A_{ij}\longrightarrow A_j$ 是一个同胚。

我们归纳地定义第 n 级马尔可夫划分，并将它们记为 $\mathcal{A}^n=\{A_w\}$，其中 w 是一个长度为 n 的字，由 $\{1,...,m\}$中的字母组成。若一个长度为 n 的字 w 满足 $A_w\in\mathcal{A}^n$，则称其为可容许的。

将马尔可夫 $(X,\ \mathscr{C})$–映射写成如下形式较为方便

$$\mathcal{F}:\mathcal{A}^1\longrightarrow\mathcal{A}^0.$$

注意，如果映射族 $\mathscr{C}$ 在限制下封闭，那么对于任意 n， $\mathcal{F}$ 都是相对于划分 $\mathcal{A}^n$ 的一个$(X,\ \mathscr{C})$–映射。

2.2.**组合与拓扑共轭**。设 $\mathcal{F}:\ \mathcal{A}^1\longrightarrow\mathcal{A}^0$ 是一个马尔可夫 $(X,\ \mathscr{C})$–映射。可以用一个 $m\times m$ 矩阵记录马尔可夫映射的组合结构，该矩阵称为马尔可夫矩阵 $M=M_{\mathcal{F}}$。更准确地说，

$$M_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } A_i\subseteq f_j(A_j)\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}.$$

注意，马尔可夫矩阵的构造需要对划分 $\mathcal{A}^0$中的元素进行排序。

定义 2.5（拓扑扩张）。设 $\mathcal{F}$是相对于划分 $\mathcal{A}=\{A_1,\ .....,\ A_m\}$的马尔可夫 $(X,\ \mathscr{C})$–映射。如果对于每个 $x\in X$，集合 $\{\mathrm{Int}\left(\bigcup_{x\in A_w\in\mathcal{A}^n}A_w\right):\ n\in\mathbb{N}\}$ 构成 x处开邻域的一个局部基，则称该映射是拓扑扩张的。

注意，这意味着
(1) 对每个由第 n 层马尔可夫片段构成的嵌套无穷序列， $\bigcap_{w_n}A_{w_n}$ 都是一个单点集；**(2)** 对于任意开集 $U\subseteq X$，存在 n ，使得对于任意 $j\in\{1,...,m\}$，$\mathcal{F}^n(U)$ 都不包含于A_j 中。

我们还指出，在以下假设下，条件 **(1)** 等价于拓扑扩张：

存在 N，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$，任意点 $x\in X$ 至多包含在N 个第 n 层马尔可夫片段中；换言之，任意给定层级中，超过 N 个马尔可夫片段的交集都是平凡交集。

定义 2.6（拓扑与组合共轭）。设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是分别相对于划分 $\mathcal{A}=\{A_1,...,A_m\}$ 和 $\mathcal{B}=\{B_1,...,B_m\}$ 的两个马尔可夫 $(X,\mathscr{C})$–映射。若存在一个同胚，我们称它们是拓扑共轭

$$H:X\longrightarrow X,\ \text{so that}$$

$$H \circ f_i(x) = g_i \circ H(x) \text{ for all } x \in A_i \text{ and } i \in \{1, ..., m\}. \tag{2.1}$$

为简化记号，我们将方程 (2.1) 简写为

$$H \circ \mathcal{F} = \mathcal{G} \circ H.$$

如果存在一个同胚，我们称它们是<style id='1'>组合共轭

$$H : X \longrightarrow X, \text{ so that}$$

- $H(A_i) = B_i$对所有 $i = 1,$ ....., m;
- 对每个断点 $x \in A_i \cap \mathbf{bk}(\mathcal{A})$,
- $M_{\mathcal{F}} = M_{\mathcal{G}}$。 $H \circ f_i(x) = g_i \circ H(x)$; and

根据标准的拉回论证，我们得到如下结论。

命题 2.7。设 $\mathcal{F}$: $\mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^0$和 $\mathcal{G}$: $\mathcal{B}^1 \longrightarrow \mathcal{B}^0$是两个马尔可夫 $(X, \mathscr{C})$−映射。假设它们是拓扑扩张的且组合共轭的。那么它们是拓扑共轭的。

证明。为完整起见，我们在此给出标准的拉回论证。由于两个马尔可夫矩阵相同，我们有

$$H \circ f_i(A_i) = H(\bigcup_{j \in \mathcal{J}_i} A_j) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}_i} H(A_j) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}_i} B_j = g_i(B_i).$$

因此，对于每个 $i \in \{1,...,m\}$，我们定义同胚 H^1: $A_i \longrightarrow B_i$ by$H^1 = g_i^{-1} \circ H \circ f_i$。

我们验证 H^1 : $X \longrightarrow X$ 是一个定义良好的同胚。为此，设 $x \in A_i \cap A_j$。注意 $H \circ f_i(x) = g_i \circ H(x)$ 和 $H \circ f_j(x) = g_j \circ H(x)$。由此可得

$$g_i^{-1} \circ H \circ f_i(x) = H(x) = g_j^{-1} \circ H \circ f_j(x).$$

因此， H^1 定义良好。根据粘贴引理， H^1 是一个同胚。注意，根据构造，我们有

$$H \circ \mathcal{F} = \mathcal{G} \circ H^1.$$

因此，对于任意长度为 2 的可容许词， $H^1(A_w) = B_w$。

现在，通过归纳，我们可以构造一列同胚 H^n: $X \longrightarrow X$，使得

$$H^{n-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{G} \circ H^n.$$

注意，根据构造，对于每个长度为 $\leqslant n+1$ 的可容许词，我们可得 $H^n(A_w) = B_w$。

我们首先证明 H^n 收敛。设 $x \in X$，并设 $U_n = \text{Int}\left(\bigcup_{x \in A_w \in \mathcal{A}^n} A_w\right)$ 和 $V_n = \text{Int}\left(\bigcup_{x \in A_w \in \mathcal{A}^n} H^n(A_w)\right)$。由于这些映射是拓扑扩张的，嵌套交集 $\bigcap V_n$ 是一个单点集。因此，序列 $H^n(x)$ 收敛到 $\bigcap V_n$中的唯一点。我们将此点记为 $H^\infty(x)$。由此定义了一个映射$H^\infty : X \to X$，它是 H^n的逐点极限。

现在我们证明 H^∞ 是连续的。设 x, U_n, V_n 如上所述。根据构造，我们有 $H^\infty(U_n) = V_n$。由于这些映射是拓扑扩张的， U_n和 V_n 分别构成 x 和 $H^\infty(x)$ 的开邻域的局部基。由此可知， H^∞ 在 x处连续。因此， H^∞ 连续。

通过对称的论证，可以构造出同胚 $(H^n)^{-1}$的连续逐点极限，并证明它是 H^∞ 的逆映射。因此， H^∞ 就是所需的拓扑共轭。□

2.3. **共形映射与拟共形映射**。 现在我们将讨论范围限定在$\widehat{}$情形，其中 X 是 $\mathbb{C}$的闭子集。这将作为本文余下部分的基本假设。

我们称映射 $f\colon A \longrightarrow B$ 为从X 的两个闭且连通子集之间的共形（或$M\ddot{}$ *öbius*或拟共形）映射，若存在 A在 $\mathbb{C}$ 中的开邻域$\curvearrowright N_A$ 和 N_B （分别），使得 f 可以延拓为 N_A 与 N_B之间的共形映射（或 M¨obius 映射或拟共形映射）。我们用以下记号表示这类映射的集合：

$$\begin{aligned}\mathrm{Conf} &:= \{(f : A \longrightarrow B) : f \text{ is conformal}\};\\ \mathrm{Mob} &:= \{(f : A \longrightarrow B) : f \text{ is Möbius}\};\\ \mathrm{QC} &:= \{(f : A \longrightarrow B) : f \text{ is quasiconformal}\}.\end{aligned}$$

注意，例 2.3 中的 $(J,\ \mathfrak{F})$–映射和 $(\Lambda,\ G)$–映射是 $(X,\ \mathsf{Conf})$–映射的自然例子。

在我们的设定中，马尔可夫分割通常由拼图片与 X的交集构成。这些拼图片是马尔可夫分割片的“捏合复邻域”；它们源自动力学，并满足自然的嵌套性质（见图4.1）。我们将在下面给出相关定义。

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$设 X 是 $\mathbb{C}$中的一个闭集。若子集 X 属于 $\mathbb{C}$，则称其为 X的捏合邻域$\widehat{}$，并在有限多个点 $x_1,\ \cdots,\ x_n \in \partial X$处发生捏合；若 $X \subset X$，则$\curvearrowright$ $\widehat{}$ $X - \{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$中的每个点都是 X的内部点，但没有任何 x_i是 X的内部点。

定义2.8 （拼图结构）。设 $X \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ 为闭集，且 $\mathcal{F}\colon \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^0$是一个马尔可夫 $(X,$ 共形$)$–映射。若存在 A_i的闭捏合邻域 P_i，在 $A_i \cap \mathsf{bk}(\mathcal{A})$ 中的点处捏合（其中bk $(\mathcal{A})$ 为断点集），使得对于每个一级马尔可夫片段 $A_{ij} \subseteq A_i$，都有

$$f_i : \operatorname{Int} P_{ij} = f_i^{-1}(\operatorname{Int} P_j) \longrightarrow \operatorname{Int} P_j$$

是共形的，并且$\mathsf{Int}\, P_{ij} \subseteq \mathsf{Int}\, P_i$。

注2.9。共形马尔可夫映射已在其他背景下被引入并研究，见 [McM98、MU03、LMMN25]。圆上的拟共形马尔可夫映射在 [LN24a], 中得到考察，而其在圆填充中的类似对象则在[LZ23、LN24b]中得到研究。

3. Conformal Markov maps on $\mathbb{S}^1$

本节沿用第 2 节的记号，研究满足马尔可夫性质的 $(\mathbb{S}^1,$ 共形$)$–映射。我们将这类映射称为 $\mathbb{S}^1$上的保角马尔可夫映射。主要结论陈述于命题 3.2和命题 3.5。

设 $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_m\}$ 是关于划分 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 的 $\mathbb{S}^1$ 上的共形马尔可夫映射，假设 $A_1, \dots, A_m$ 在圆上按逆时针方向排列并定向。因此，我们有如下结论。

- A_i 是一个闭区间；$\bullet\, \mathsf{Int}\, A_i \cap \mathsf{Int}$ $A_j = \varnothing$；$\bullet \bigcup A_i = \mathbb{S}^1$；对于每个 i，存在 j_i 和 l_i，使得

$$f_i : A_i \longrightarrow A_{j_i} \cup A_{j_i+1} \cup \ldots \cup A_{j_i+l_i}$$

  是一个同胚；
- f_i 可延拓为在 A_i 的一个邻域上的共形映射。

请回想，我们并不要求集合 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上诱导出连续全局映射，并且我们将 $\mathcal{F}$ 视为潜在的多值映射。

在 $\mathbb{S}^1$ 上的共形马尔可夫映射这一框架下，本文还通篇使用以下记号。

$$\mathcal{F}(x^+) = \lim_{t\to x^+} \mathcal{F}(t), \text{ and } \mathcal{F}(x^-) = \lim_{t\to x^-} \mathcal{F}(t).$$

类似地，我们记 $\mathcal{F}^n(x^\pm) := \lim_{t\to x^\pm} \mathcal{F}^n(t)$。采用这一记号，两个共形马尔可夫映射 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 拓扑共轭（见定义 2.6），当且仅当存在一个同胚 $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$，使得

$$\mathcal{F}(h(x)^\pm) = h(\mathcal{G}(x^\pm).$$

断点与李雅普诺夫指数。 设 $\mathcal{F}$ 是关于划分 $\mathcal{A}$ 拓扑扩张的共形马尔可夫映射。设 $x \in A_i \cap A_{i+1}$ 是 $\mathcal{F}$动力学的一个断点。记 $x_n^\pm$ 为 x的右轨道和左轨道，即

$$x_n^\pm = \mathcal{F}^n(x^\pm).$$

由于划分是有限的，我们注意到右轨道和左轨道都是预周期的。注意，它们最终可能映射到不同的周期轨道。我们分别用 $\lambda(x^+)$ 和 $\lambda(x^-)$ 表示右侧和左侧的李雅普诺夫指数，即

$$\lambda(x^\pm) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\mathcal{F}^n(x \pm \varepsilon) - x_n^\pm|}{\varepsilon}.$$

由于 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的，我们有 $\lambda(x^\pm) \geqslant 0$。如果 x^+（分别地，x^-）满足 $\lambda(x^+) = 0$（分别地，$\lambda(x^-) = 0$），则称其为抛物的。类似地，如果 x^+（分别地，x^-）满足 $\lambda(x^+) > 0$（分别地，$\lambda(x^-) > 0$），则称其为双曲。

由于 $x_n^\pm$ 最终是周期的，当且仅当序列 $x_n^\pm$ 的周期尾是一个抛物或双曲周期时，$x^\pm$ 是抛物的或双曲的。如果 $x^\pm$ 是抛物的，则将其抛物重数记为 $N(x^\pm)$，定义为它所映射到的周期的抛物重数（参见 [Mil06，§10]）。

如果断点 x 满足

- $\lambda(x^+) = \lambda(x^-)$，• 此外，如果 $x^\pm$ 是抛物的，那么 $N(x^+) = N(x^-)$。

请注意，在对称情形下，我们将断点 x 称为对称抛物型/双曲型。

现在我们回顾 David 同胚的概念。

定义 3.1。 若保向同胚 $H : U \to V$ between^黎曼球面中的域 $\mathbb{C}$ 是一个*David* 同胚，则其属于索博列夫类 $W^{1,\,1\,\mathrm{loc}}(U)$，并且存在常数 C，α，$\varepsilon_0 > 0$使得

$$\sigma(\{z \in U : |\mu_H(z)| \geqslant 1 - \varepsilon\}) \leqslant Ce^{-\alpha/\varepsilon}, \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

这里，σ 是球面测度，$\mu_H = \frac{\partial H/\partial z}{\partial H/\partial z}$ 是H的贝尔特拉米系数。关于 David 同胚的背景知识，我们请读者参阅 [AIM09，第 20], [LMMN25 章，第 §2] 节；其中包括 David 可积性定理、David 映射的可去性以及圆周同胚的 David 延拓。

在 [LMMN25, 定理 4.9]，中，在假设马尔可夫映射在适当条件下诱导出圆上的连续映射的基础上，证明了适当的马尔可夫映射之间存在拟对称或 David 共轭。另见 [LN24a, 定理 4.1]，其中给出了推广。现在我们将证明，即使去掉在整个圆上连续这一假设，同样的结果仍然成立。

命题 3.2。 设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是定义在 $\mathbb{S}^1$ 上、具有拼图结构的拓扑扩张共形马尔可夫映射。假设它们组合共轭，且 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的所有断点均对称。

(1) 如果该组合共轭是类型保持的，那么 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 准对称共轭。*(2)* 如果从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的组合共轭不会将 $\mathcal{F}$ 的抛物型断点映射到 $\mathcal{G}$的双曲型断点，那么 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ *David* 共轭。更确切地说，存在一个同胚 $H:\ \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$，将 $\mathcal{F}$ 共轭到 $\mathcal{G}$，并连续延拓为 $\mathbb{D}$上的 *David* 同胚。

我们简要讨论一下 [LMMN25, 定理 4.9] 和 [LN24a, 定理 4.1] 的证明。（参见 [McM26, 定理 1.4]。）

证明依靠利用动力学将两个相邻区间 $S = I \cup J$ 放大。我们指出，抛物点的存在使我们无法将弧 S 拟对称地放大为直径与 1 相当的大弧。

为克服这一障碍，我们首先通过某个迭代 m 将 S 放大，使区间 $S' = \mathcal{F}^m(S)$ 靠近断点 $a \in \mathrm{bk}(\mathcal{A}^0)$。这一过程称为（拟）共形电梯，借助我们的拼图假设并利用 Koebe 畸变定理（见 [LN24a, 引理 4.5]），可以拟对称地完成。

关于 a 断点，$S' = \mathcal{F}^m(S)$ 的构形存在一个基本的二分：要么 S' 仅位于 a 的一侧，要么 S' 包含点 a。

在第一种情况下，我们利用 a 处的局部动力学，将 $\mathcal{F}^m(I)$ 扩大为一个具有确定大小的区间。根据 $a^{\pm}$ 是双曲的还是抛物的，我们可以得到相邻区间直径的不同估计。

在第二种情况下，a 断点将区间 S' 分成两个区间，我们在每个区间上应用上述估计。

我们指出，在证明中，我们只在与 $\mathcal{A}^0$ 的断点不相交的区间上迭代应用 $\mathcal{F}$。在我们的设定中，这类迭代仍然是连续的。因此，命题 3.2 的证明与 [LMMN25，定理 4.9] 和 [LN24a，定理 4.1], 几乎完全相同，所以我们只给出证明概要。

证明。 根据命题 2.7，$\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 拓扑共轭。将共轭映射记为 h。

设 $I, J \subset S^1$ 是相邻的闭弧，且每段长度均为 $t \in (0, 1/2)$。我们将证明

$$\operatorname{diam} h(I) \simeq \operatorname{diam} h(J) \quad \text{under condition (1);} \tag{3.2}$$

并且

$$\max\left\{\frac{\operatorname{diam} h(I)}{\operatorname{diam} h(J)}, \frac{\operatorname{diam} h(J)}{\operatorname{diam} h(I)}\right\} \lesssim \log(1/t) \quad \text{under condition (2).} \tag{3.3}$$

上述估计结合 Beurling-Ahlfors 延拓定理 [BA56], （该定理给出了拟共形延拓），或结合 [Zak08, 定理 3.1] （参见 [CCH96, 定理 3], 该定理给出了 David 延拓），即可完成定理的证明。

设 $S = I \cup J$。则马尔可夫映射 $\mathcal{F}$ 存在一个可容许词 $w = (j_0, \dots, j_{l-1})$，满足 $S \subset A_w$，但 S 不包含在 A_w的任何子片段中，即不包含在任何包含于 A_w的第 $|w|+1$ 层马尔可夫片段中。我们称 w是与 S关联的词。设 $t \in \{0, \dots, l-1\}$，使得 t是 A_w各端点层级中的最小值。令 $v = (j_0, \dots, j_{t-1})$ 且 $u = (j_t, \dots, j_{l-1})$。我们称 (v, u) 为可容许词 w的规范分裂，并记作 $w = (v, u)$。注意，当 $t = 0$时，v 可以是空词，但 u 绝不是空词（见 [LN24a, §3.3]）。

首先，根据以下二分，我们将 $\mathcal{F}^m$ 应用于 S，迭代 m 次；该二分由 [LN24a、引理 4.4 和引理 4.5] 推出。

(A-i) 区间 S 包含一个第 $|w|+r+1$ 级马尔可夫区间，其中 r 是第 0 级马尔可夫区间的数量。于是存在连续的第$|w|+r+1$级马尔可夫区间 I_1、.....、I_p，满足

$$I_{i_0} \subset S \subset A_w = \bigcup_{i=1}^{p} I_i \quad \text{for some } i_0 \in \{2, \dots, p-1\}.$$

令 $w=(v,u)$ 为 w 的规范分裂，并令 $m=|v|$ 和 $n=|u|$。那么 A_u 以 $a \in \mathsf{bk}(\mathcal{A}^0)$ 为端点之一，并且

$$\mathcal{F}^m|_{A_w} \colon A_w \to A_u$$

是 η-拟对称的，其中 $\eta(t) \simeq t$。

（A-ii）区间 S 不包含任何层级为 $|w|+r+1$ 的马尔可夫区间。则存在互不重叠区间 S^-, S^+，使得 $S = S^- \cup S^+$。令 $m=|w|$。那么 $\mathcal{F}^m$ 将 S^- 和 S^+ 的公共端点映射到点 $a \in \mathsf{bk}(\mathcal{A}^0)$。此外，若 $w^\pm$ 是与 $S^\pm$ 相关联的字，则规范分裂的形式为 $w^\pm = (w, u^\pm)$，并且第一种情况（A-i）适用于每个 $S^\pm$。最后，$\mathcal{F}^m|_S$ 是拟对称的。

令 $S' = \mathcal{F}^m(S)$ 和 $I' = \mathcal{F}^m(I)$，$J' = \mathcal{F}^m(J)$，其中 $m=|v|$ 属于情形（A-i），而 $m=|w|$ 属于情形（A-ii）。令 $b=h(a)$，其中 h 是拓扑共轭。

假设情形（A-i）成立。不妨设 $S' \subseteq [a,\ w] \in \mathcal{A}^0$，并且在 $[a,\ w]$中，a比 J'更接近 I'。令 $s \in \mathbb{N}$为满足以下条件的最小值：J'不包含于以 a 为左端点的第 s 层马尔可夫区间中。我们将把区间 I' 放大，并通过 $\mathcal{F}^s$ 进一步放大 J'（详见 [LN24a, 第 4.3 节1] ）。注意，由于 w 是与 S相关联的字，区间 $\mathcal{F}^s(S')$ 具有确定的大小。

- 假设 $\lambda(a^+) > 0$（或 $\lambda(b^+) > 0$）。那么根据 [LN24a，引理 4.7],

$$\operatorname{diam} I' \simeq \operatorname{diam} J' \simeq \lambda(a^+)^{-s} \quad (\text{ or } \operatorname{diam} h(I') \simeq \operatorname{diam} h(J') \simeq \lambda(b^+)^{-s}). \tag{3.4}$$

- 假设 $\lambda(a^+) = 0$（或 $\lambda(b^+) = 0$）。令 $l \in \mathbb{N}$ 为最小值，使得 I'不与以 a 为左端点的第 $s+l$ 级马尔可夫区间相交。于是由 [LN24a，引理 4.7],

$$\begin{aligned} &\operatorname{diam} I' \simeq s^{-\alpha-1}\min\{l,s\} \quad \text{and} \quad \operatorname{diam} J' \simeq s^{-\alpha-1}\min\{1,s\}; \\ &(\text{or } \operatorname{diam} h(I') \simeq s^{-\beta-1}\min\{l,s\} \quad \text{and} \quad \operatorname{diam} h(J') \simeq s^{-\beta-1}\min\{1,s\}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

这里，$\alpha = 1/N(a^+)$且 $\beta = 1/N(b^+)$。

情形 H→H： 假设 a^+ 和 b^+ 是双曲的。那么

$$\operatorname{diam} h(I') \simeq \lambda(b^+)^{-s} \simeq \operatorname{diam} h(J').$$

因此，我们得出 (3.2) 成立，因为 $\mathcal{G}^m$ 在 $h(S) = h(I \cup J)$ 上是拟对称的。

情形 H→P： 假设 a^+ 是双曲的，且 b^+ 是抛物的。由 [LN24a，引理 4.5],，存在一个常数 γ，使得 $\operatorname{diam} I' \gtrsim (\operatorname{diam} I)^\gamma \simeq t^\gamma$。结合 (3.4)，我们得出 $\log(1/t) \gtrsim s$。由 (3.5) 以及 $\mathcal{F}^m$ 是 η-拟对称这一事实，我们得出

$$\max\left\{\frac{\operatorname{diam} h(I)}{\operatorname{diam} h(J)}, \frac{\operatorname{diam} h(J)}{\operatorname{diam} h(I)}\right\} \lesssim s \lesssim \log(1/t).$$

因此，我们得出结论，(3.3) 成立。

情形 P→P： 假设 a^+ 和 b^+ 是抛物的。令 $\alpha = 1/N(a^+)$ 和 $\beta = 1/N(b^+)$。由 (3.5)，我们得出

$$\frac{\operatorname{diam} h(J')}{\operatorname{diam} J'} \simeq s^{\alpha-\beta}, \quad \text{and} \quad \frac{\operatorname{diam} h(I')}{\operatorname{diam} I'} \simeq s^{\alpha-\beta}.$$

综上，由于直径 $I' \simeq$直径 J'，我们有直径 $h(I') \simeq$直径$h(J')$。 $\mathcal{G}^m|_{h(I\cup J)}$ 是拟对称这一事实蕴含关系式 (3.2)。

假设情形（A-ii）成立。不失一般性，假设$J' \subset [a,\ w] \in \mathcal{A}^0$和 $I' = I'_1 \cup I'_2$，其中 $I'_2 \subset [a,\ w]$和 $I'_1 \subset [w,\ a]$。注意到I'_1 和 $I'_2 \cup J'$ 满足情形（A-i）。因此，我们可以分别利用 a^- 和 a^+ 处的局部动力学放大区间 I'_1和 $I'_2 \cup J'$，以估计它们的直径。这些估计与情形（A-i）下的基本相同，详细计算请参见 [LN24a, §4.3.2] 。□

注 3.3. 我们指出，在对映射正则性的要求弱得多的假设下，命题 3.2 的结论仍然成立；这些假设在 [LN24a] 中表述为条件（M1）、（M2）、（M3）和（M3*）。不过，本文并不需要这个更一般的版本。

我们通过以下例子说明前述结果的一个应用。

命题 3.4。设 $d, e \geqslant 2$。存在一个拟对称映射 $\phi:\ \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}^1$，它将 $d-$进有理数集 $\{\frac{p}{d^n}\}$ 映到 $e-$进有理数集 $\{\frac{q}{e^m}\}$ 。

证明。我们证明 $d = 2$和 $e = 5$的情形。一般情形的证明类似。设 $A_1 = [0, \frac{1}{4}], A_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], A_3 = [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}], A_4 = [\frac{5}{8}, \frac{3}{4}], A_5 = [\frac{3}{4}, 1]$。令 $F_i,\ i \in \{1, \cdots, 5\}$ 为导数取值于 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 的线性映射，使得每个 $F_i:\ A_i \longrightarrow [0, 1]$ 都是同胚。注意，$\mathcal{F}$ 诱导出一个 $\mathbb{S}^1$ 的次数为 5 的拓扑扩张覆盖映射，并且每个断点都是对称双曲的。因此，根据命题 3.2（或根据 [LMMN25，定理 4.9] ，因为 $\mathcal{F}$ 是连续的），我们得出 $\mathcal{F}$ 与 $t \mapsto 5t$ 准对称共轭。将此共轭记作 ϕ。在 ϕ 后复合若干旋转后，我们假设 $\phi(0) = 0$。根据构造，0 的每个迭代原像都是二进有理数，而每个二进有理数在 $\mathcal{F}$ 下最终都会映到 0。因此，$\phi(\{\frac{p}{2^n}\}) = \{\frac{q}{5^m}\}$。□

有限个圆上的保角马尔可夫映射。令 $X = \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathbb{S}^1_s$ 为有限个圆的并。令 $\Phi:\ \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ 为指标集上的映射。令 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ 为 X 的一个划分，其中 $\mathcal{A}_s$ 是圆 $\mathbb{S}^1_s$的一个划分。令 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ 为关于划分 $\mathcal{A}$ 定义在 X 上的保角马尔可夫映射，使得对每个 $A_{s,i} \in \mathcal{A}_s$, $f_{s,i} \in \mathcal{F}_s$，都存在 j_i 和 l_i，使得

$$f_{s,i} : A_{s,i} \longrightarrow A_{\Phi(s),j_i} \cup A_{\Phi(s),j_i+1} \cup \ldots \cup A_{\Phi(s),l_i}$$

是一个同胚，并且可延拓为定义在 $A_{s,i}$ 的某个邻域上的共形映射。我们称这样的映射为定义在 $\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathbb{S}^1_s$ 上的保角马尔可夫映射（由 Φ 建模）。

李雅普诺夫指数以及对称双曲/抛物点的概念可以自然地推广到定义在有限个圆的并$\bigcup_{s\in\mathcal{I}} \mathbb{S}^1_s$上的保角马尔可夫映射 $\mathcal{F}$。命题 3.2 的证明可以很容易地调整以适用于这一情形，从而得到以下结果。

命题 3.5。设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是定义在 $\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathbb{S}^1_s$ 上的两个带有拼图结构的拓扑扩张共形马尔可夫映射。假设它们组合共轭，并且 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的所有断点都具有对称性。

(1) 如果组合共轭是类型保持的，那么 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 准对称共轭。*(2)* 如果从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的组合共轭不会将 $\mathcal{F}$ 的抛物型断点映到 $\mathcal{G}$的双曲型断点，那么 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ ***David*** 共轭。更准确地说，存在一个同胚 $H : \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathbb{S}^1_s \longrightarrow \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathbb{S}^1_s$，它将$\mathcal{F}$ 共轭到 $\mathcal{G}$，并且可连续延拓为$\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathbb{D}_s$的 ***David*** 同胚。

4. Basilica $\mathfrak{Q}-$maps

设 $Q(z) = z^2 - \frac{3}{4}$ 为胖 Basilica 二次多项式，其 Julia 集为$J = J(Q)$。映射 Q 恰有两个周期有界 Fatou 分支U_0，U_0'，它们构成一个 2–周期环（即抛物不动点$-\frac{1}{2}$的直接吸引盆）。我们对它们编号，使得 U_0包含临界点 0，并将 U_0称为中心分支。Q 的无界 Fatou 分支（即无穷远吸引域）记为 U_∞。

令 $\mathfrak{Q}$ 为形如 $Q^{-n} \circ Q^m$ 的局部共形映射的集合。本节沿用第 2 节的记号，并给出一类特殊的分片共形，$\mathfrak{Q})$–映射的显式构造。这种构造用途广泛，并且能够实现精确的几何控制。

我们首先构造围绕 Julia 集的拼图。拼图片通过以下方式切割 Julia 集而构造:

- 由外射线和等势线围成的“外部拼图片”；以及• 有界 Fatou 分支中的“内部拼图片”。

这类拼图称为***Basilica*** 拼图 （见定义 4.9）。接着，我们将一个分片共形马尔可夫映射与 Basilica 拼图相关联，称之为$Basilica$ $\mathfrak{Q}-$映射（见定义 4.16）。
Basilica $\mathfrak{Q}-$映射在适当 Fatou 分支的理想边界上的作用，会在圆的不交并上诱导出一个分片共形马尔可夫映射。定理 A 的证明需要分析这些圆映射的某些正则性，而这将在第 4.3 节中完成。事实证明，由有界 Fatou 分支诱导的圆映射本身已具备所需的正则性。然而，我们可能需要修改 Basilica$\mathfrak{Q}-$映射（同时不影响其在 Julia 集上的拓扑动力学），以确保由无界 Fatou 分支 U_∞ 诱导的圆映射也具有恰当的正则性（见定理 4.23）。

4.1. **Basilica 拼图**。

本节首先构造有界 Fatou 分支中的内部拼图块。随后，我们说明如何通过粘合对应的外部拼图片来构造 Basilica 拼图。

4.1.1. 内部角。

回忆一下，U_0 是Q的有界临界 Fatou 分支。首次回归映射 $Q^2 : U_0 \longrightarrow U_0$ 在 ∂U_0上诱导出一个拓扑扩张的二度覆盖。因此，存在唯一的拓扑共轭 $\phi = \phi_U : \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \partial U_0$，使得 $Q^2 \circ \phi(t) = \phi(\sigma_2(t))$，其中 $\sigma_2(t) = 2t$ 是角度加倍映射。这个共轭 ϕ 为 ∂U_0上的点提供组合坐标，我们称之为 U_0中的内部角。

设 U 是一个有界 Fatou 分支。那么，存在最小的 $l \geqslant 0$，使得$Q^l(U) = U_0$。注意，$Q^l : U \longrightarrow U_0$ 是共形的，并诱导出一个同胚$Q^l : \partial U \longrightarrow \partial U_0$。我们定义

$$\phi_U = (Q^l|_{\partial U})^{-1} \circ \phi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \partial U.$$

这样，我们便为任意有界 Fatou 分支 U定义内部角。

我们将 $\phi_U(t)$ 称为 ∂U 上内部角为 t的点。注意，当且仅当 t 是一个二进有理数，即对于某个 p，$n \in \mathbb{N}$时，$\phi_U(t)$恰好位于两个不同有界 Fatou 分支的边界上（因此是 $J(Q)$ 上价为 2 的接触点）。

我们用 $I_U[s,\ t]$表示 ∂U上内部角分别为 s和 t的两点之间的曲线。我们还定义 $I_U(s,\ t) = I_U[s,\ t] - \{I_U(s),\ I_U(t)\}$。

定义 4.1 （二进区间）。设 $[s,\ t] \subseteq \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是一个区间。我们称它为二进，如果

- 两者 s，t 都是二进的；并且

- $(s,\ t)$ 中的任意二进有理数，其分母都严格大于 s 和 t的分母（其中二进有理数均以既约形式表示）。我们称 $I_U[s,\ t])\subseteq\partial U$为 ∂U的一个二进线段，当且仅当 $[s,\ t]\subseteq\mathbb{S}^1$是二进的。

我们指出，二进区间恰好是形如 $[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}]$的区间。特别地，角 0 不属于任何二进区间。

引理 4.2. 设 $I_U[s,t]$ 为二进数。那么存在 m，使得 $Q^m\colon I_U(s,t)\longrightarrow I_{U_0}(0,1)$ 可延拓为 $I_U(s,t)$ 某个邻域上的共形映射。

证明。由于 s,t 是二进数，存在最小的 k，使得 $\sigma_2^k(s)=\sigma_2^k(t)=0$。由于 $[s,t]$ 是二进数，对于任意点 $x\in(s,t),\ \sigma_2^k(x)\neq 0$。因此，$\sigma_2^k$ 是 (s,t) 与 $(0,1)$之间的同胚。

现在令 l 为使得 $Q^l(U)=U_0$成立的最小非负整数。令 $m=k+l$。那么 $Q^m\colon I_U(s,t)\longrightarrow I_{U_0}(0,1)$ 是一个同胚。由于Q^m 的临界值与 Julia 集不相交，我们可以选取一个包含 $I_{U_0}(0,1)$ 且避开 Q^m 的临界值的单连通开集 Ω。通过 Q^m 将该开集 Ω 拉回，即得引理。□

推论 4.3。设 $I_U[s,t],I_{U'}[s',t']$ 为二进的。那么存在 n,m，使得$Q^{-n}\circ Q^m\colon\ I_U(s,t)\longrightarrow I_{U'}(s',t')$ 可延拓为$I_U(s,t)$某个邻域上的共形映射，其中 Q^{-n} 是 Q^n的一个适当的逆分支。

4.1.2. 内部拼图。本小节中，我们将首先为任意二进分段 $I_U(s,t)$规范地指定一个内部拼图块 $P_U[s,t]$。我们用它来定义内部拼图。

我们从 U_0 开始。回想一下，$Q^2\colon U_0\longrightarrow U_0$ 与抛物型二次 Blaschke 乘积 $B\colon\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$ 共形共轭（其归一化使临界点位于 0，抛物不动点位于 1）。由施瓦茨反射，B 延拓为定义在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的有理映射 $B(z)=\frac{3z^2+1}{z^2+3}$。令 PostCrit$(B)\subseteq\widehat{\mathbb{C}}$ 表示后临界集；即 B的临界值轨道的闭包。固定一个 $\varepsilon>0$，并令 N 为关于$\widehat{\mathbb{C}}-$PostCrit(B)上的双曲度量的 $\mathbb{S}^1-\{1\}$ 的一个 ε–邻域。令 $n\geqslant 0$，并令 N'为 $B^{-n}(N)$的任意一个连通分支。由于 B关于双曲度量是扩张的，我们得出 $N'\subseteq N$。

定义 4.4 (内部拼图块**)**。我们定义与之相关的内部拼图块

$$P_{U_0}[0,1]\subseteq\overline{U_0}$$

与 $I_{U_0}(0,1)$ 相关的内部拼图块定义为 $\overline{\Phi^{-1}(N\cap\mathbb{D})}$，其中 $\Phi\colon U_0\longrightarrow\mathbb{D}$ 是 Q^2 与 Blaschke 乘积 B之间的共形共轭。

设 $I_U(s,t)$ 为二进的。我们将相应的内部拼图块

$$P_U[s,t]\subseteq\overline{U}$$

定义为在将$I_U(s,t)$ 映到 $I_{U_0}(0,1)$的 Q^m 的共形限制下，对 $P_{U_0}[0,1]$ 作拉回。更准确地说，$P_U[s,t]$ 是$(Q^m)^{-1}$(Int$(P_{U_0}[0,1])$) 中满足 $I_U(s,t)$ 位于其边界上的那个连通分支的闭包。

注意，抛物不动点 $-\frac{1}{2}$ 必然位于包含在 U_0中的两个内部拼图块的边界上。我们还要指出，这些内部拼图块的内边界起到标准多项式拼图块中外射线与等势线并集的作用。特别地，我们有如下嵌套性质。

引理 4.5. 设 $I_U[s、\ t]$、$I_U[s'、\ t']$ 均为二进数。假设 $I_U(s、\ t)\subseteq I_U(s'、\ t')$。那么 $P_U[s、\ t]\subseteq P_U[s'、\ t']$。

证明. 令 l 为满足 $Q^l(U) = U_0$ 的最小非负整数。那么 $Q^l(P_U[s,t]) = P_{U_0}[s,t]$ 且 $Q^l(P_U[s', t']) = P_{U_0}[s',t']$。将 U 上的首次回归映射 Q^2 共轭为抛物 Blaschke 乘积，可知 $P_{U_0}[s,t] \subseteq P_{U_0}[s',t']$。因此， $P_U[s,t] \subseteq P_U[s',t']$，因为 $Q^l\colon\ U \to U_0$ 是一个同胚。□

我们如下定义内部拼图：它们是满足特定连通性条件的内部拼图块集合。

定义 4.6（内部拼图）。设 $U_0, U_1, \dots, U_r$ 是一个有界 Fatou 分支的集合，其中包含中心分支 U_0，且 $\bigcup U_i$ 连通。设 $I_{U_i}[s_{i,j}, s_{i,j+1}]$ 是 ∂U_i 的一组划分，使得每个拼图片都是二进的。设 $P_{U_i}[s_{i,j}, s_{i,j+1}]$ 为相应的内部拼图块。我们将以这种方式得到的任意有限内部拼图块集合称为内部拼图（见图4.1），并记作

$$(\{U_i\}, P_{U_i}[s_{i,j}, s_{i,j+1}]).$$

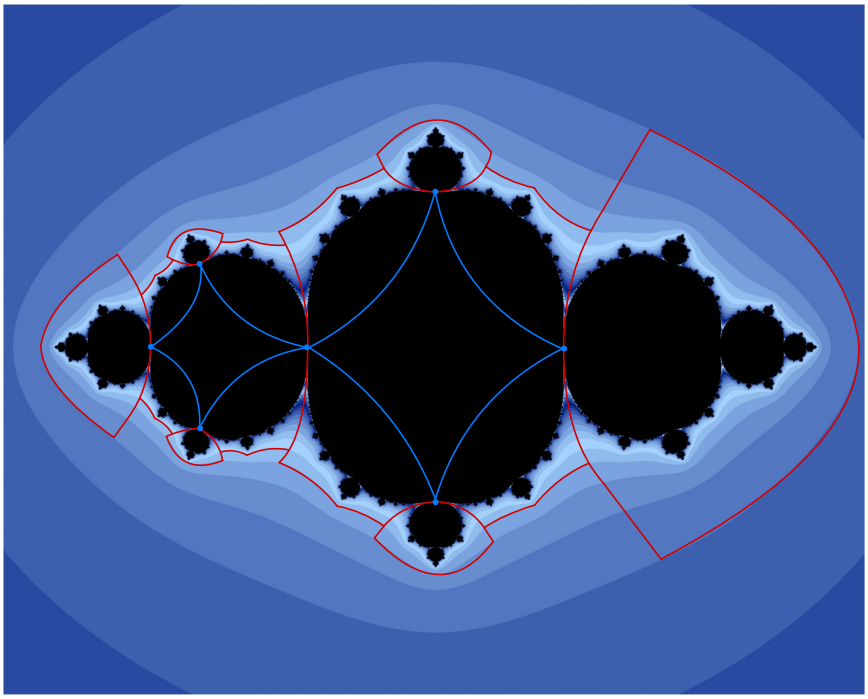

FIGURE 4.1. Basilica 拼图示意图。蓝色弧对应内部拼图块的内部边界。外部等势线根据引理 4.7 选取。例如，最右侧肢型拼图块的等势线级别为$_{1\ 2}$。红色曲线由等势线和外射线的部分组成。Basilica 拼图块是由蓝色曲线与红色曲线的并集截出的闭有界区域。

4.1.3. 从内部拼图到巴西利卡拼图。 在本小节中，我们将定义并构造一个巴西利卡拼图，使其来自一个内部拼图。

回忆一下， U_∞ 是 Q的无界 Fatou 分支。那么，存在一个共形映射 $\phi_\infty\colon \mathbb{D} \to U_\infty$，将 z^2 共轭到 Q。由于 $\partial U_\infty = J(Q)$ 局部连通，Carath´eodory 定理表明， ϕ_∞ 可延拓为一个连续的半共轭 $\phi_\infty\colon \mathbb{S}^1 \to J(Q)$，连接 z^2 与 Q。通过黎曼一致化ϕ_∞， U_∞ 的理想边界 $\partial^I U_\infty$ （即 U_∞的素端集合）可与

外角集合 $\mathbb{S}^1$相对应。 $\mathbb{D}$ 中角度为 t的径向线在共形映射 ϕ_∞ 下的像称为角度为 t 的外射线，记作 $R_\infty(t)$。我们称 $\phi_\infty(t)$ （ R_t的落点）为 $J(Q)$ 上外角为 t的点。我们也用 $I_\infty[s,\ t]$ 表示 $\partial^I U_\infty$ 上 s 与 t之间的区间。

设 $(\{U_i\},\ P_{U_i}[s_{i,\ j},\ s_{i,\ j+1}])$ 为一个内部拼图。设 $\{t_k\}$ 为落在 $\phi_{U_i}(s_{i,\ j})$ 上的外角集合，其中 $i,\ j$。我们称集合 $\{t_k\}$ 为对应于 $(\{U_i\},\ P_{U_i}[s_{i,\ j},\ s_{i,\ j+1}])$ 的外角。由于 $s_{i,\ j}$是二进的，恰有两条 Q 的外射线落在 $\phi_{U_i}(s_{i,\ j})$上。

外射线 $R_\infty(\frac{1}{3})$和 $R_{\overline{\infty}}(\frac{2}{3})$落在$Q$的抛物不动点 $-\frac{1}{2}$上。角$1\ 3$，$2\ 3$ 属于集合 $\{t_k\}$。记 W_0 为$\mathbb{C}-\Big(R_\infty(\frac{1}{3})\cup R_\infty(\frac{2}{3})\Big)$中包含临界点 0 的连通分支。

引理 4.7。设 $(\{U_i\}$、$P_{U_i}[s_{i,\ j}$、$s_{i,\ j+1}])$ 为一个内部拼图，其对应外角为 $\{t_k\}$。设 $R_\infty(t_k)$ 和 $R_\infty(t_{k+1})$ 为两条相邻外射线。

假设 $R_\infty(t_k)$、$R_\infty(t_{k+1})$ 在同一点着陆。令 W 为 $\mathbb{C}-\Big(R_\infty(t_k)\cup R_\infty(t_{k+1})\Big)$ 中与 U_0、.....、U_r不相交的连通分支。则存在唯一的整数 $m\geqslant 0$，使得

$$Q^m : W \longrightarrow W_0$$

是共形的。

假设 $R_\infty(t_k)$、$R_\infty(t_{k+1})$ 在 ∂U_i 上的两个不同点着陆。令 W 为 $\mathbb{C}-\Big(R_\infty(t_k)\cup R_\infty(t_{k+1})\cup U_i\Big)$ 中与 U_0、.....、U_r不相交的连通分支。则存在唯一的整数 $m\geqslant 0$，使得

$$Q^m : W \longrightarrow W_0 - \overline{U_0}$$

是共形的。

注记 4.8。由于 $J(Q)$ 的每个接触点最终都会映射到抛物不动点 $-\frac{1}{2}$，并且在 $-\frac{1}{2}$ 着陆的外射线 $R_\infty(\frac{1}{3})$、$R_\infty(\frac{2}{3})$参与构成集合 $\{R_\infty(t_k)\}$，因此，引理 4.7 中讨论的两种可能性涵盖了全部情形。

证明。假设 $R_\infty(t_k)$ 与 $R_\infty(t_{k+1})$ 落在同一点。则区间 $(t_k,t_{k+1})\subseteq\mathbb{S}^1$ 包含 W中所有外射线的角。于是存在m，使得 σ_2^m: $(t_k,t_{k+1})\longrightarrow(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$是一个同胚。因此，相应的映射 $Q^m:\ W\longrightarrow W_0$ 是共形的。

假设 $R_\infty(t_k)$ 与 $R_\infty(t_{k+1})$ 落在 ∂U_i上两个不同的点。则 $R_\infty(t_k)$ 与 $R_\infty(t_{k+1})$ 的落点界定一个二进分段 $I_{U_i}[s,t]\subseteq\partial U_i$。由引理 4.2，存在 m，使得Q^m: $I_{U_i}(s,\ t)\longrightarrow I_{U_0}(0,1)$ 是一个同胚。由此观察易知 $Q^m:\ W\longrightarrow W_0-\overline{U_0}$ 是共形的。□

现在，我们定义一种将内部拼图规范地延伸到填充 Julia 集外部的方法。

令 E_k 为等势线在高度 $\frac{1}{2^m}$、位于相邻外射线 $R_\infty(t_k)$ 和 $R_\infty(t_{k+1})$之间的部分，其中 m 是引理 4.7 中唯一的整数。我们将 E_k 称为位于 $R_\infty(t_k)$ 和 $R_\infty(t_{k+1})$ 之间的典范等势线。我们称其并集

$$\Gamma:=\bigcup_k\overline{R_\infty(t_k)}\cup\bigcup_k E_k\cup\bigcup_{i,j}(\partial P_{U_i}[s_{i,j},s_{i,j+1}])\cap U_i)$$

$(\{U_i\}$、$P_{U_i}[s_i$、$_j$、s_i、$_{j+1}])$的<sty le id='1'>典范延拓图。注意，Γ 将$\widehat{}$黎曼球面 $\mathbb{C}$ 分割成有限个部分。（见图4.1，其中外射线 $R_\infty(t_k)$ 和 $R_\infty(t_{k+1})$ 仅绘制至等势线层级 $\frac{1}{2^m}$）。

定义 4.9（巴西利卡拼图）。设 $(\{U_i\}、P_{U_i}[s_{i、\ j}、\ s_{i、\ j+1}])$ 为一个内部拼图，其对应的外角为 $\{t_k\}$，典范延拓图为 Γ。

我们将 Γ 的一个补连通分支与 Julia 集相交时的闭包称为一个***Basilica*** 拼图块。我们将所有 Basilica 拼图块组成的集族称为一个***Basilica*** 拼图（由 $(\{U_i\}、P_{U_i}[s_{i、\ j}、\ s_{i、\ j+1}])$ 诱导），记作 $\{P_i\}_{i\in\mathcal{I}}$，其中 $\mathcal{I}$ 是某个指标集。

设 P_i 是一个 Basilica 拼图块。若 Int P_i 与列表 $U_0,\ldots,U_r$ 中的任意有界 Fatou 分支都不相交，则称其为枝型，或称为枝型拼图块。否则，称其为躯干型，或称为躯干型拼图块。若它与 U_j 相交，则称其对于 U_j 为躯干型。

注 4.10。*1)* 我们将并集 $\bigcup_{i=0}^{r}U_i$ 视为填充 ***Julia*** 集的“躯干”。其他相连的 ***Fatou*** 分支则被视为“肢”。因此，“躯干型／枝型”这一命名说明了一个拼图片是否与填充 ***Julia*** 集的躯干相交。

2) 若 ***Basilica*** 拼图块 P 属于枝型，则 $\partial P\cap J(Q)$ 只包含一个点。否则，P 属于某个有界 ***Fatou*** 分支 U_j的躯干型，且 $\partial P\cap J(Q)$ 恰好包含 ∂U_j上的两个点。

根据我们对等势线的选取，可得到如下动力学相容性。

引理 4.11（拼图块之间的典范映射）。设 $\mathfrak{P}=\{P_i\}_{i\in\mathcal{I}}$、$\mathfrak{S}=\{S_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ 是两个 ***Basilica*** 拼图。假设 P_i 和 S_j 属于同一类型。那么存在唯一的 m、$n\geqslant 0$，使得 $F_{i,\ j}=Q^{-n}\circ Q^m:\ \mathrm{Int}\ S_j\longrightarrow \mathrm{Int}\ P_i$ 是共形的。

注 4.12。我们称 $F_{i,\ j}$ 为 P_i，S_j之间的典范映射 。

证明。假设 S 是一个枝型拼图块。那么 S 由两条外射线 $R_\infty(s)$，$R_\infty(t)$ 以及典范等势线围成。令 P_{limb} 为由 $R_\infty(1/3),R_\infty(2/3)$ 和 1 级等势线围成、且包含 U_0的连通分支的闭包。由引理 4.7，存在 m，使得 $Q^m:\ \mathrm{Int}(S)\longrightarrow\mathrm{Int}(P_{limb})$ 是共形的。类似地，存在 n，使得 $Q^n:\ \mathrm{Int}(P)\longrightarrow\mathrm{Int}(P_{limb})$ 是共形的，在这种情况下，引理得证。

假设 S 是一个躯干型拼图块。那么 ∂S 与 Julia 集相交于两点，这两点界定了一个二进分段 $I_{U_i}[s,\ t]$，其中 U_i 是某个有界 Fatou 分支。令 $P_{imm}:=(P_{limb}-U_0)\cup P_{U_0}[0,\ 1]$。那么根据引理 4.7 和内部拼图的定义（定义 4.4），存在 m，使得 $Q^m:\mathrm{Int}(S)\longrightarrow\mathrm{Int}(P_{imm})$ 是共形的。同理，存在 n，使得 $Q^n:\mathrm{Int}(P)\longrightarrow\mathrm{Int}(P_{imm})$ 是共形的；在这种情况下，引理同样得证。□

4.2. **嵌套拼图与共形马尔可夫映射**。在本小节中，我们介绍 Basilica 拼图的特殊类型细化，并自然地提取与此类 Basilica 拼图相关的共形马尔可夫映射。

定义 4.13（Basilica 拼图的（马尔可夫）细化）。设 $\mathfrak{P}=\{P_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 和 $\mathfrak{S}=\{S_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ 是两个 Basilica 拼图。若对于每个 $i\in\mathcal{I}$，都存在一个子集 $\mathcal{J}_i\subseteq\mathcal{J}$，使得

$$P_i\cap J(Q)=\bigcup_{j\in\mathcal{J}_i}S_j\cap J(Q).$$

我们称映射 $\Psi:\mathcal{J}\longrightarrow\mathcal{I}$（指标集之间）是保持类型 的，如果对于所有 $j\in\mathcal{J}$，S_j和 $P_{\Psi(j)}$ 具有相同类型。我们称细化 $\mathfrak{S}$（$\mathfrak{P}$ 的细化）连同保持类型的映射 Ψ: $\mathcal{J}\longrightarrow\mathcal{I}$，是 $\mathfrak{P}$ 的马尔可夫细分 。

注 4.14. 根据构造，如果两个 Basilica 拼图块满足 $S\cap J(Q)\subseteq P\cap J(Q)$，那么 $S\subseteq P$。因此，如果 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{P}$ 的细化，那么每个拼图片S_j，$j\in\mathcal{J}$ 都包含于某个 $i=i(j)\in\mathcal{I}$ 中。

我们还要指出，使用以下记号来记录马尔可夫细化的一个子类很方便。

设 $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^0$ 和 $\mathfrak{P}^1$ 是两个 Basilica 拼图，其指标集分别为 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}^1 \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{I}$（称为长度为 2 的可容许字集），对应于 $\mathfrak{P}^0$ 和 $\mathfrak{P}^1$，并且对每个 $(ij) \in \mathcal{I}^1$，都有

- （嵌套的） $P_{ij} \subseteq P_i$；
- （类型保持） P_{ij} 和 P_j 属于同一类型。

那么，$\mathfrak{P}^1$ 是 $\mathfrak{P}^0$ 的马尔可夫细分；事实上，在这种情况下，保持类型的映射 $\Psi\colon \mathcal{I}^1 \longrightarrow \mathcal{I}$ 将 (ij) 映射到 j。

上述“马尔可夫细分”和“可容许字”这两个名称，因以下结果而得以成立：该结果允许将分段共形马尔可夫映射 $\mathcal{F}$ 与这一对 $(\mathfrak{P}^1, \mathfrak{P}^0)$ 联系起来，使得 $\mathfrak{P}^0$，$\mathfrak{P}^1$ 成为 $\mathcal{F}$ 的 0 级和 1 级拼图（参见第 2.1 节）。

命题 4.15. 设 $\mathfrak{P} = \{P_i\}_{i\in\mathcal{I}}$，并设 $\mathfrak{P}^1 = \{P_{ij}\}_{(ij)\in\mathcal{I}^1}$ 是 $\mathfrak{P}$ 的马尔可夫细分。那么对于每个 $(ij) \in \mathcal{I}^1$，都存在一个诱导同胚 F_{ij}，其中

$$F_{ij} = Q^{-n} \circ Q^m : P_{ij} \longrightarrow P_j$$

对于某些 $n = n(i, j)$、$m = m(i, j)$，使得 F_{ij} 在内部是共形的。

证明。这是引理 4.11 的直接推论。 □

定义 4.16（巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射）。设 $\mathfrak{P} = \{P_i\}_{i\in\mathcal{I}}$，并设 $\mathfrak{P}^1 = \{P_{ij}\}_{(ij)\in\mathcal{I}^1}$ 是 $\mathfrak{P}$ 的马尔可夫细分。我们将命题 4.15 中映射 $\mathcal{F} = \{F_{ij} : (ij) \in \mathcal{I}^1\}$ 的集合称为巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射，并记作

$$\mathcal{F} : \mathfrak{P}^1 \to \mathfrak{P}.$$

我们将 $\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{P}^1$ 分别称为 0 级和 1 级拼图。通过用 $\mathcal{F}^n$ 拉回 $\mathfrak{P}$，可以定义 n 级拼图，并将其记为 $\mathfrak{P}^n = \{P_w\}_{w\in\mathcal{I}^n}$，其中 $\mathcal{I}^n$ 由长度为 $n+1$ 的可容许词组成。注意

$$\mathcal{F}^n : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}^0 = \mathfrak{P}$$

也是一个巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射。

注 4.17. 我们指出，巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射 $\mathcal{F}$ 是第 *2* 节意义下的马尔可夫 $(J, \mathfrak{Q})$–映射，并具有拼图结构。

回想一下，如果一个巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射作为马尔可夫 $(J, \mathfrak{Q})$–映射是拓扑扩张的，那么它就是拓扑扩张的。容易验证，当且仅当每个嵌套交集 $\bigcap_w P_w$ 都是单点集时，这一条件成立。

在下一小节中，我们将适当地调整 Basilica 拼图的马尔可夫细分及其相关的巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射，以确保它们在 C^1 周期断点处。为使阐述更简洁，我们将在下文形式化说明这些调整步骤。第一步（细化）只改变拼图，不改变映射。另一方面，第二步（修改）不改变 0 级拼图，只改变 1 级拼图及其相关的巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射。

定义 4.18。令 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{P}^1 \to \mathfrak{P}$ 和 $\widehat{\mathcal{F}}\colon \widehat{\mathfrak{P}}^1 \to \widehat{\mathfrak{P}}$ 为巴西利卡 $\mathfrak{Q}$– 映射。我们称 $\widehat{\ }\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 的细化，如果

- $\widehat{\mathfrak{P}}^1$ 和 $\widehat{\mathfrak{P}}$ 分别是 $\mathfrak{P}^1$ 和 $\mathfrak{P}$ 的细化；并且对于每个拼图片 $P \in \widehat{\mathfrak{P}}^1$，都有 $\widehat{\mathcal{F}}|_P = \mathcal{F}|_P$。

我们称 $\widehat{\ }\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 的修改，如果

- $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$；并且
- $\mathcal{F}$ 在 Julia 集上与 $\mathcal{F}$ 拓扑共轭。

我们称 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 的修正细化，如果

- $\widehat{\mathfrak{P}}^1$ 和 $\widehat{\mathfrak{P}}$ 分别是 $\mathfrak{P}^1$ 和 $\mathfrak{P}$ 的细化；并且
- $\mathcal{F}$ 在 Julia 集上与 $\mathcal{F}$ 拓扑共轭。

注 4.19。我们指出，可以通过细化和修改从 $\mathcal{F}$得到修正细化 $\mathcal{F}$。还要注意，上述概念可以自然地推广到任意 $(X, \mathscr{C})$ 马尔可夫映射。

4.3. 理想边界上的诱导马尔可夫映射。在本小节中，我们研究 Fatou 分支理想边界上的诱导马尔可夫映射，并证明关于巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射的关键定理（定理 4.23）。

引理 4.20。设 $\mathcal{F}\colon\ \mathfrak{P}^1 \to \mathfrak{P}$ 是一个巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射。设 U_0、.....、U_r 是与 $\mathfrak{P}$相关联的有界 *Fatou* 分支链，并设 U_∞ 是无界 *Fatou* 分支。那么，$\mathcal{F}$ 诱导出一个共形马尔可夫映射

$$\bigcup_{s\in\{0,\dots,r,\infty\}} \mathcal{F}_s : \bigcup_{s\in\{0,\dots,r,\infty\}} \partial^I U_s \longrightarrow \bigcup_{s\in\{0,\dots,r,\infty\}} \partial^I U_s$$

具有拼图结构，其中 $\partial^I U_s \cong \mathbb{S}^1$ 是 U_s的理想边界。

此外，如果 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的，那么 $\bigcup_s \mathcal{F}_s$ 也是拓扑扩张的。

注 4.21. 我们指出，此处的映射定义在有限个互不相交的圆的并上，我们可以将其视为 $\mathbb{C}$的某个（不连通的）闭子集。共形性、拓扑扩张以及拼图结构（在第 2 节中引入）的概念都可以自然地推广到有限个圆的并上的映射。

证明。令 $\Phi_s : \mathbb{D} \longrightarrow U_s$ 为一致化映射。于是，对于每个 Basilica 拼图片 $P_i \in \mathfrak{P}$ 或 $P_{ij} \in \mathfrak{P}^1$，我们可以通过一致化映射 Φ_s拉回 $P_i \cap U_s$ 或 $P_{ij} \cap U_s$。因此，$\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{P}^1$ 在 $\bigcup_s \partial^I U_s$ 上诱导出两个划分，分别记为 $\mathcal{A}_s$ 和 $\mathcal{A}_s^1$。巴西利卡 $\mathfrak{Q}-$ 映射 $\mathcal{F}$ 经由 Φ_s 共轭为 $\bigcup_s \partial^I U_s$上的一个马尔可夫映射。通过施瓦茨反射，诱导映射可以延拓为 $\mathcal{A}_s^1$中每个区间邻域上的共形映射。它具有拼图结构这一事实，源于 $\mathfrak{P}^1$ 是 $\mathfrak{P}$的细化以及命题 4.15。此外，如果 $\bigcap_w P_w$ 是单点集，那么 $\mathcal{A}_s^n$ 中相应的马尔可夫块的嵌套交集也是单点集；这说明了此外部分。□

容易看出，圆的并集上的诱导的马尔可夫映射可分解为两部分：

$$\mathcal{F}_{\mathrm{bdd}} := \bigcup_{s\in\{0,\dots,r\}} \mathcal{F}_s : \bigcup_{s\in\{0,\dots,r\}} \partial^I U_s \longrightarrow \bigcup_{s\in\{0,\dots,r\}} \partial^I U_s, \text{ and} \tag{4.1}$$

$$\mathcal{F}_\infty : \partial^I U_\infty \longrightarrow \partial^I U_\infty. \tag{4.2}$$

我们将在第 4.3.1 节和第 4.3.2 节研究这两个映射的断点。

4.3.1. 有界 *Fatou* 分支。

命题 4.22. 假设 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的。那么，(4.1) 中的诱导的马尔可夫映射 $\mathcal{F}_{\mathrm{bdd}}$ 的所有断点都是对称抛物的。

证明。设 a 是 $\mathcal{F}_{\mathrm{bdd}}$的一个断点。我们将证明 $\lambda(a^\pm) = 0$ 和 $N(a^\pm) = 2$。假设轨道 a_n^+ 的尾部由一个周期轨道组成。为简洁起见，我们假设这个周期轨道是不动点，记作 x。设 $I^+ \subseteq \bigcup_{s\in\{0,\dots,r\}} \partial^I U_s$ 为马尔可夫区间，它的边界上有 x，且位于 x 右侧；再设 S 为 I^+对应的一级 Basilica 拼图块。设 $p \in \partial S$ 为与 x相关联的点。注意，对某个 $m, n \geqslant 0$，有 $\mathcal{F}|_S = Q^{-m} \circ Q^n$。由于 p 是不动点且 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的，$n > m$ 和$\mathcal{F}|_S = Q^{-m} \circ Q^{n-m} \circ Q^m$，其中 Q^{-m} 是将 $Q^m|_S$ 限制在

$Q^m(S)$上时的逆映射。此外， $Q^m(p)$ 是 Q的抛物不动点。因此， $\mathcal{F}|_S$ 在 p附近与 Q^{n-m} 共轭。因此，诱导映射 $\mathcal{F}_{\mathrm{bdd}}$限制在 I^+上时，在 x 处有一个重数为 2 的抛物不动点。因此，$\lambda(a^+)=0$ 和 $N(a^+)=2$。 a_n^-也同样如此。由此可知，所有断点都是对称抛物型的。□

4.3.2. 无界 *Fatou* 分支。 以下结果是证明我们主要拟共形等价定理（定理 A）的关键技术要素之一。

定理 4.23。 假设 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的。那么存在一个修正细化 $\widetilde{\mathcal{F}}\colon \widetilde{\mathfrak{P}}^1 \to \widetilde{\mathfrak{P}}$，它是 $\mathcal{F}:\mathfrak{P}^1\to\mathfrak{P}$ 的修正细化（定义 *4.18* 意义下）$\widetilde{\ }$，其诱导的马尔可夫映射 $\mathcal{F}_\infty$ 是对称双曲的。特别要注意，$\backsim\mathcal{F}$ 在 *Julia* 集上与 $\mathcal{F}$ 拓扑共轭。

本节余下部分将证明上述定理。我们固定一个拓扑扩张的巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{P}^1\to\mathfrak{P}$。令

$$\mathcal{F}_\infty:\mathbb{S}^1\cong\partial^I U_\infty \longrightarrow \mathbb{S}^1\cong\partial^I U_\infty$$

为 $\partial^I U_\infty$上的诱导马尔可夫映射。每个拼图片 $P_i\in\mathfrak{P}$ （或 $P_{ij}\in\mathfrak{P}^1$）在 $\mathbb{S}^1\cong\partial^I U_\infty$上诱导出一个闭区间，分别记作 A_i （或 A_{ij}）。将 $\mathbb{S}^1$ 针对 $\mathfrak{P}$ 的对应划分记为 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_\infty=\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$，针对 $\mathfrak{P}^1$ 的对应划分记为 $\mathcal{A}^1=\mathcal{A}^1_\infty=\{A_{ij}\}_{(ij)\in\mathcal{I}^1}$。如果对应的拼图片是肢型或躯干型，我们就称 A_i （或 A_{ij}）为肢型或躯干型。类似地，将 $\mathfrak{P}^n$ 对应的诱导划分记为 $\mathcal{A}^n$。

我们注意到，对于任意 $A_{ij}\in\mathcal{A}^1$ 及其对应的拼图片 P_{ij}，有 $\mathcal{F}|_{P_{ij}}=F_{ij}=Q^{-n}\circ Q^m$，其中某个 m， $n\geqslant 0$。我们将这个差记为

$$N(A_{ij})=N(P_{ij})=m-n.$$

那么导数

$$D\mathcal{F}_\infty|_{A_{ij}}=2^{N(A_{ij})}.$$

由于诱导映射 $\mathcal{F}_\infty$ 将断点映到断点，每个断点都是预周期的，而周期断点包含在 $\bigcup_{i\in\mathcal{I}}\partial A_i$中。我们首先证明，肢型马尔可夫片段 $A\in\mathcal{A}$ 的边界点从不具有周期性。

引理 4.24. 设 $A=[x,y]\in\mathcal{A}$ 为肢型。那么 x_n^+ 的右轨道x 和 y_n^- 的左轨道 y 都是严格预周期的。

证明. 设 x 的右轨道是周期轨道，周期为 p。令 $B\in\mathcal{A}^p$ 为包含 x 于其边界上且位于 x右侧的划分片段。那么 $\mathcal{F}^p_\infty|_B$固定 x。由于 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的， $B\subsetneq A$。注意，由命题 4.15 及构造可知， $\mathcal{F}_\infty$ 将 $\mathcal{A}^1$ 的一个区间映到 $\mathcal{A}$的一个区间。因此， $\mathcal{F}^p_\infty:B\longrightarrow A$ 是一个同胚。特别地， B 是肢型。但这是不可能的，因为 $\bigcup_n\mathcal{A}^n$ 中唯一一个边界包含x的肢型马尔可夫片段是 A。同样的论证也适用于 y的左轨道，于是引理得证。□

现在我们转而讨论躯干拼图块。

引理 4.25。 设 $A_i=[x、\ y]\in\mathcal{A}$ 为躯干型，且右轨道 x_n^+ 是周期为 q 的周期轨道。则对于某个 $k\in\mathbb{N}$，有 $D\mathcal{F}^q_\infty(x^+)=2^{2k}$。

证明。 设 $P_w\in\mathfrak{P}^q$ 和 $P_i\in\mathfrak{P}$ 分别为边界上含有 x 且位于 x 右侧的 q 级和 0 级拼图块。则

$$F_w=\mathcal{F}^q|_{P_w}=Q^{-n}\circ Q^m:P_w\longrightarrow P_i.$$

假设对于有界 Fatou 分支 U， P_w， P_i均为躯干型，且$P_w\cap U=P_U[a,\ b]$, $P_i\cap U=P_U[a,\ c]$。令 $k\in\mathbb{N}$，使得 $2^k=|[a,\ c]|/|[a,b]|$。那么

$m-n=2k$，其中因子 2 源于U_0 的首次回归映射的周期为 2（即， ∂U_0 上的弧在 Q^2下其角宽加倍）。因此， $D\mathcal{F}_\infty^q(x^+)=2^{2k}$。□

引理 4.26。设 P 是一个躯干型 *Basilica* 拼图块。设 S_1、S_2 是 U 的两个躯干型 *Basilica* 拼图块，且它们在 $\mathcal{F}$ 下都映射到 P。记 $S_i\cap U=P_U[s_i、t_i]$。假设 $|[s_1、t_1]|=2^k|[s_2、t_2]|$。则

$$N(S_2)-N(S_1)=2k.$$

证明。设 $F_i=Q^{-n_i}\circ Q^{m_i}\colon S_i\longrightarrow P$ 为典范映射。则 $N(S_i)=m_i-n_i$。根据典范映射的构造， $Q^{m_i}(I_U(s_i,\ t_i)=I_{U_0}(0,\ 1)$，并且$n_1=n_2$。若 $|[s_1,\ t_1]|=2^k|[s_2,\ t_2]|$，则 $m_2=m_1+2k$。注意，对于 k，有一个因子 2，因为 U_0 的首次回归映射的周期为 2。因此，$N(S_2)-N(S_1)=2k$。□

我们需要以下组合引理 .

引理 4.27. 设 $A=[s,t]$ 是一个二进区间。假设它被分解为 $M\geqslant 2$ 个二进区间 $A=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_M$。那么

$$|B_1|/|A|\in\{\frac{1}{2^j}:j=1,\ldots,M-1\}.$$

此外，对于任意 $a\in\{\frac{1}{2^j}\div\ j=1,\ldots,M-1\}$，存在一个分解 $A=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_M$，其中每个 B_i 都是二进的，且 $|B_1|/|A|=a$。

证明. 证明采用归纳法（见图 4.2）。由于 A 和每个 B_i 都是二进的，我们得出中点 $(s+t)/2$ 必定是某个 B_i 的边界点。

当 $M=2$ 时，基本情形显然成立，因为此时 $B_1=[s,(s+t)/2]$ 和 $B_2=[(s+t)/2,t]$。

对于归纳步骤，设 $A'=[s,(s+t)/2]$。那么 A' 是二进的，并且被分解为某个 $M'<M$ 对应的 $A'=B_1\cup\ldots\cup B_{M'}$。如果 $M'=1$，那么$|B_1|/|A|=\frac{1}{2}$。否则，根据归纳假设，我们得出 $|B_1|/|A'|\in\{\frac{1}{2^j}:\ j=1,\ldots\ldots,\ M'-1\}$，并且这个列表中的任意数都可以通过某种分解实现。也很容易看出，任意数 $M'\in\{1,\ \ldots\ldots,\ M-1\}$ 也都可以实现。因此，引理得证。□

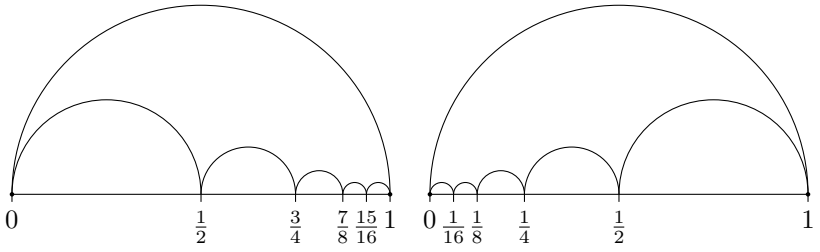

FIGURE 4.2. 经过适当次数的二倍映射迭代，二进区间 A 与 $[0,1]$同胚。左图和右图分别给出了 $B_1,\ldots,B_5$ 在情形 $M=5$下的两种极端构型：左侧为 $|B_1|/|A|=\frac{1}{2}$，右侧为 $|B_1|/|A|=\frac{1}{2^{5-1}}$。

回顾一下，拼图片 $A_{ij}\in\mathcal{A}^1$ 上的导数为 $D\mathcal{F}_\infty|_{A_{ij}}=2^{N(A_{ij})}$。下面的引理允许我们修改该导数。

引理 4.28。设 $P\in\mathfrak{P}$ 是 *Fatou* 分支 U对应的躯干型 *Basilica* 拼图块，其中 $P\cap J(Q)=(S_1\cup\ldots\cup S_K)\cap J(Q)$，$S_j\in\mathfrak{P}^1$，并选取指标使得 S_1与 P共享一个边界点。假设拼图片 $S_1,\ldots,S_K$中有 M个属于 U的躯干型。那么存在

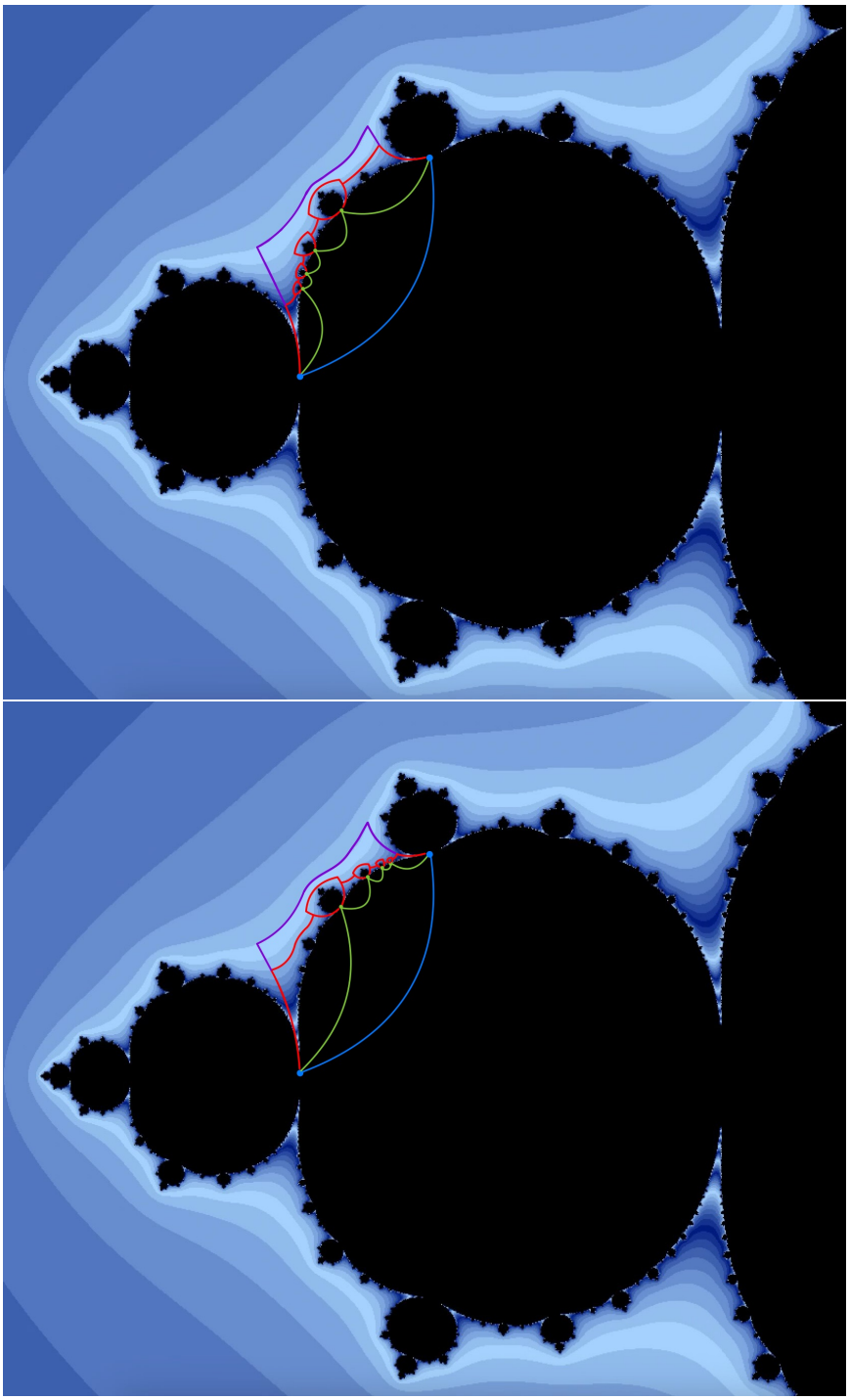

FIGURE 4.3. 引理 4.28 中对一个躯干型 Basilica 拼图块所作修改的示意图：P $\mathcal{G}$ 在顶部，$\mathcal{G}'$ 在底部。它包含 9 个 $\mathcal{G}$的拼图片，其中 5 个为躯干型。该修改与图 4.2 中的两个极端情形类似，并得到$N(S_1') - N(S_1) = 2 \times 3$。

• 一个整数 L，并且• 对于 [0中的任意整数 l， $M-1]$，都存在 P的一个细化，由 S'_1、.....、S'_K构成，使得以下结论成立。

• $N(S_1) \in [L,\ L+2(M-2)]$。• 若 $\widetilde{\mathfrak{P}}^1$ 是将 $S_j \in \mathfrak{P}^1$ 替换为 S'_j后得到的拼图，且若 $\mathcal{F}'$： $\widetilde{\mathfrak{P}}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$定义为

$$\mathcal{F}'|_S = \mathcal{F}|_S, \quad if \quad S \notin \{S'_1, \dots, S'_K\}, \quad and$$
$$\mathcal{F}' : S'_j \longrightarrow \mathcal{F}(S_j) \quad is\ the\ canonical\ map\ of\ Lemma\ 4.11;$$

then

(1) $\mathcal{F}'$： $\widetilde{\mathfrak{P}}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$ 在 $J(Q)$上与 $\mathcal{F}$： $\mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$ 拓扑共轭；也就是说，$\mathcal{F}'$ 是根据定义 ***4.18*** 对 $\mathcal{F}$ 所作的修改；并且 ***(2)*** $N(S'_1) = L + 2l$。

证明。 由于 P是躯干型，我们可以为它关联一个二进分段 $I_U[s,\ t]$。令 $I_U[s,\ s_1]$为 S_1对应的二进分段。根据引理 4.27,

$$\frac{|s_1 - s|}{|t - s|} \in \left\{ \frac{1}{2^j} : j = 1, \dots, M-1 \right\},$$

并且，我们可以将 $I_U[s,t]$ 分解为 M 个二进分段，使得比值 $|s'_1 - s|/|t - s|$ 可以取遍 $\{\frac{1}{2^j}\colon\ j = 1, \dots, M-1\}$ 中的任意值，其中 $I_U[s, s'_1]$ 是分解中的第一个分段（见图 4.3）。注意，任何这样的分解都会为 U 给出一组 M 个躯干型 Basilica 拼图块 $\{S'_1, \cdots, S'_K\}$。若 $|s'_1 - s|/|s_1 - s| = 2^k$,，则由引理 4.26 可得 $N(S'_1) = N(S_1) + 2k$。因此，存在 L 使得 $N(S_1) \in [L, L+2(M-2)]$；通过对 $I_U[s,t]$, $N(S'_1)$ 采用不同的分解，可以使其取遍 $L + 2l$ 中的任意值，其中 $l \in [0, M-1]$。不难将这组用于 U 的 M 个躯干型 Basilica 拼图块扩展到 $\{S'_1, \dots, S'_K\}$，使得 $\mathcal{F}'$ 与 $\mathcal{F}$ 组合共轭。因此，根据命题 2.7，性质 1 得以满足。引理得证。□

设 $P \in \mathfrak{P}^n$。如果至少有一个点 $x \in \partial P \cap J(Q)$ 在 $\mathcal{F}|_P$ 下是周期点，我们就称其为边界周期。如果恰好有一个点 $x \in \partial P \cap J(Q)$ 是周期点，我们就称其为单侧边界周期。注意，根据引理 4.24，如果 P 是边界周期的，那么它属于躯干型。最后，如果 P 对于 U 属于躯干型，则称其为与 相关的边界周期。

引理 4.29。 存在 n，使得下述结论成立。若 $S \in \mathfrak{P}^n$ 是边界周期的，周期为 q，且与某个有界 *Fatou* 分支 U 相关，则

• S 是单侧边界周期的；并且• $\mathcal{F}^q(S) \in \mathfrak{P}^{n-q}$ 至少包含一个属于 $\mathfrak{P}^n$（对于 U）的躯干型 ***Basilica*** 拼图块，该拼图块不是边界周期的。

证明。 令 n 为一个整数，严格大于 0 级拼图块边界点的周期的最小公倍数。由于每个 n 级拼图块的边界点最终都会映射到某个 0 级拼图块的边界点，因此我们得出， $\partial S \cap J(Q)$ 中的周期点是某些 0 级拼图块的边界点。假设 $\partial S \cap J(Q)$ 中的两个点都是周期点。令 L 为它们周期的最小公倍数。于是 $L \leqslant n$。因此， $\mathcal{F}^L$： $S \longrightarrow \mathcal{F}^L(S)$ 是一个同胚，并固定这两个边界点。因此， $\mathcal{F}^L(S) = S$，这与 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的事实矛盾。

对于第二个断言，我们注意到，由于 $\mathcal{F}$ 在拓扑上扩张， $\mathcal{F}^q(S) \in \mathfrak{P}^{n-q}$ 必须包含另一个关于 $P \in \mathfrak{P}^n$ 的 U 躯干型 Basilica 拼图块。如果 P 不是边界周期的，那么结论即得。否则，我们应用以下回拉论证。设 $S' \in \mathfrak{P}^{n+q}$ 包含于 S 中，并共享周期性边界

点。则 $\mathcal{F}^q(S')=S$ 必须在 $\mathfrak{P}^{n+q}$ 中包含某个非边界周期 Basilica 拼图块，该拼图块在 $\mathcal{F}^q$ 下映射到 P。因此，将常数 n 增大为 $2n$ 后，引理得证。□

引理 4.30。对于任意 $M>1$，存在 $\mathcal{F}$ 的一个细化 $\widehat{\mathcal{F}}:\ \widehat{\mathfrak{P}}^1\to\widehat{\mathfrak{P}}:\ \mathfrak{P}^1\to\mathfrak{P}$（定义 *4.18* 意义下），使得以下结论成立。

(1) 每个边界周期 *Basilica* 拼图片 $P\in\mathfrak{P}$ 都是单侧边界周期的。*(2)* 对于与某个有界 *Fatou* 分支 U 相关联的每个边界周期 *Basilica* 拼图片 $P\in\mathfrak{P}$，至少存在 M 个属于 U 躯干型的 *Basilica* 拼图块 $S\in\widehat{\mathfrak{P}}^1$，且满足 $S\subseteq P$。

证明。给定 $M>1$。我们通过一系列细化构造 $\widehat{\mathfrak{P}}$ 和 $\widehat{\mathfrak{P}}^1$。

首先，根据引理 4.29，我们取足够大的 n，使得每个边界周期 Basilica 拼图片 $P\in\mathfrak{P}^n$ 都是单侧边界周期的。我们考虑 $\mathcal{F}:\mathfrak{P}^{n+1}\longrightarrow\mathfrak{P}^n$，它在 Julia 集上与 $\mathcal{F}:\ \mathfrak{P}^1\longrightarrow\mathfrak{P}$ 拓扑共轭。

令 $(\mathfrak{P}^n)'\subset\mathfrak{P}^n$ 为单侧边界周期 Basilica 拼图片的集合。令 $P\in\mathfrak{P}^n-(\mathfrak{P}^n)'$。令 $N\in\mathbb{N}$。我们用 $\mathfrak{P}^n_N(P)$ 表示 $\mathfrak{P}^{n+N}$ 中包含于 P的 Basilica 拼图片集合。我们定义

$$\widehat{\mathfrak{P}}^n_N=(\mathfrak{P}^n)'\cup\bigcup_{P\in\mathfrak{P}^n-(\mathfrak{P}^n)'}\mathfrak{P}^n_N(P).$$

由于 $\mathfrak{P}^{n+1}$ 中的单侧边界周期 Basilica 拼图片经 $\mathcal{F}$映射后，会映射到 $\mathfrak{P}^n$中的单侧边界周期拼图片，因此我们得出

$$\mathcal{F}:\widehat{\mathfrak{P}}^{n+1}_N\longrightarrow\widehat{\mathfrak{P}}^n_N$$

是 $\mathcal{F}$的细化：$\mathfrak{P}^1\longrightarrow\mathfrak{P}$。

令 $P\in(\mathfrak{P}^n)'\subset\widehat{\mathfrak{P}}^n_N$ 是周期为 q 的边界周期拼图片，关联于某个有界 Fatou 分支 U。我们断言，对于 U，$\widehat{\mathfrak{P}}^{n+1}_N$ 中躯干型的 Basilica 拼图片中包含于 P 的数量会随着 $N\to\infty$趋于无穷。为此，根据引理 4.29，$\mathcal{F}^q(P)$ 必须包含至少一个 $\mathfrak{P}^n-(\mathfrak{P}^n)'$ 中针对 U的躯干型 Basilica 拼图片 S。由于 $S\notin(\mathfrak{P}^n)'$，S 中针对 U 的躯干型 Basilica 拼图片 $\widehat{\mathfrak{P}}^n_N$的数量，与 $\widehat{\mathfrak{P}}^{n+N}$中对应拼图片的数量相同，而后者会随着 $N\to\infty$趋于无穷。通过在 $\mathcal{F}^q$下回拉，我们得出所述断言。

通过为某个足够大的 N 选取 $\widehat{\mathfrak{P}}=\widehat{\mathfrak{P}}^n_N$ 和 $\widehat{\mathfrak{P}}^1=\widehat{\mathfrak{P}}^{n+1}_N$，即可得到该引理。□

定理 *4.23* 的证明。令 $N\geqslant$ 为所有边界周期 $S\in\mathfrak{P}^1$ 中 $N(S)$ 的最大值，且该最大值取为偶整数。令 $M\geqslant 2N$。令 $\widehat{\mathcal{F}}:\ \widehat{\mathfrak{P}}^1\longrightarrow\widehat{\mathfrak{P}}$ 为引理 4.30 中常数为 M 的巴西利卡 $\mathfrak{Q}-$映射。根据引理 4.28，我们可以局部地修改 $\mathfrak{P}$ 的每个边界周期 Basilica 拼图片的细化，从而得到 $\widetilde{\mathcal{F}}:\ \widetilde{\mathfrak{P}}^1\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{P}}=\widehat{\mathfrak{P}}$，使其在 Julia 集上与 $\widehat{\mathcal{F}}:\ \widehat{\mathfrak{P}}^1\longrightarrow\widehat{\mathfrak{P}}$ 拓扑共轭；并且，如果断点 x 的右 / 左轨道 $x^{\pm}_n$ 在诱导映射 $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ 下的周期为 $q^{\pm}$，那么我们有

$$D\widetilde{\mathcal{F}}^{q^{\pm}}_\infty(x^{\pm})=2^{Nq^{\pm}}.$$

根据引理 4.25，这是可能的，因为导数始终是 2 的偶次幂，并且对于每个 $j\in\{0,1,\ldots\ldots q^{\pm}-1\}$，我们可以根据引理 4.28（性质 2）选择导数 $D\widetilde{\mathcal{F}}_\infty(\widetilde{\mathcal{F}}^j_\infty(x^{\pm}))\in\{2^{N-1},\ 2^N,\ 2^{N+1}\}$。这意味着，在任意断点处，诱导映射 $\mathcal{F}_\infty$ 的 Lyapunov 指数为 $N>0$，定理得证。□

5. Basilica Bowen-Series maps

在本节中，我们为任意几何有限 Bers 边界群 G阐明一种自然的 Markov $(\Lambda,\ G)$–映射构造。我们将这种映射称为 ***Basilica Bowen-Series*** 映射，并研究该映射的一些基本性质。

5.1. 几何有限 Bers 边界群。 设 Σ 是一个具有 签名 $(g,n;\nu_1,\ldots,\nu_n)$ 的二维轨形，其中 g为亏格， n 为尖点和扭点的数量，而 $\nu_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 2}\cup\{\infty\}$ 为第 i 个扭点的扭点阶。若轨形欧拉示性数为负、零或正，则它分别是双曲、抛物的 或椭圆 的。

$$\chi(\Sigma)=2-2g-n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\nu_i}$$

分别为负、零或正。注意，当且仅当$\nu_1,\ldots,\nu_n\neq\infty$时， Σ 是紧的。姑且宽泛地使用这一术语，我们将 Σ简称为曲面。

设 Σ是一个双曲曲面。设 $\mathcal{C}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k_0}\}$是 Σ上一组非空的、彼此不相交且两两非同伦的简单闭曲线。我们称这样一组简单闭曲线为挤压多曲线。若 $\mathcal{C}$ 中的每条曲线都将曲面分离，则称其为严格分离的。

将集合 $\mathcal{C}$ 中的简单闭曲线挤压成节点后，原曲面退化为有限个紧的（连通）曲面 $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_{j_0}$，它们沿结点奇点粘合在一起（见 [Mas70, §6]）。我们将 Σ_i 记为对应于 $\Sigma-\mathcal{C}$各分支的非紧曲面，并将 Σ_i 记为 Σ_i 与其上所有结点奇点的并。注意， Σ_i 可能不是紧的，因为 Σ_i 可能包含原曲面 Σ的尖点。因此， Σ_i 的尖点对应于Σ_i 的结点奇点与 Σ_i上 Σ 的尖点之并。我们将退化曲面写作

$$(\Sigma,\mathcal{C})=\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_{j_0}.$$

注意， $\mathcal{C}$ 严格分离，当且仅当 $j_0=k_0+1$。

我们称 Σ_i 为 (Σ的节点分支$\mathcal{C}$)，。将节点分支 Σ_i的签名记为 $(g_i,\ n_i;\ \nu_{i,\ 1},\ldots,\nu_{i,\ n_i})$。根据构造，节点分支 Σ_i 与 $\Sigma-\bigcup_i\alpha_i$ 的连通分支一一对应。因此，每个分支 Σ_i 都非紧。此外， Σ_i 要么是双曲的，要么是抛物的。在后一种情形下， Σ_i的签名必为 $(0,\ 3;\ 2,\ 2,\ \infty)$。因此， Σ_i是抛物的，当且仅当存在一条曲线 $\alpha_i\in\mathcal{C}$ ，恰好围住两个阶为2的轨形点。抛物型节点分支 Σ_i 恰好对应于由这条曲线围成的区域。

为了描述极限集的拓扑结构，我们引入一个概念，用来表示各双曲节点分支之间的邻接关系。设 Σ_{i_1} 和Σ_{i_2} 为两个（可能相同的）双曲节点分支。若简单闭曲线 α_i 是 Σ_{i_1} 与 Σ_{i_2} 之间的连接曲线，则

- 要么 α_i 在 Σ中的两侧分别对应 Σ_{i_1} 和 Σ_{i_2} （其中 i_1 可能等于 i_2）；要么
- $\Sigma_{i_1}=\Sigma_{i_2}$ ，且 α_i 在 Σ 中的两侧分别对应 $\Sigma_{i_1}(=\Sigma_{i_2})$ 和一个抛物型节点分支。

以下结构性结果由 [Mas70，定理 5, 6]推出。

命题 5.1. 设 Σ 是一个具有 $\chi(\Sigma)<0$ 的曲面，且 $\mathcal{C}$ 是一个挤压多曲线，其中 $(\Sigma,\mathcal{C})=\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_{l_0}+\Sigma_{l_0+1}+\ldots+\Sigma_{j_0}$， Σ_1、……、Σ_{l_0}为双曲的，而 Σ_{l_0+1}、……、Σ_{j_0}为抛物的（因此签名为 $(0,\ 3;2,\ 2,\ \infty)$）。

设 $\sigma\in\mathrm{Teich}(\Sigma)$ 和 $\sigma_i\in\mathrm{Teich}(\Sigma_i)$，$i\in\{1,\ldots,l_0\}$，其对应的黎曼曲面为 S_σ 和 S_{σ_i}，$i\in\{1,\ldots,l_0\}$。那么存在一个几何有限克莱因群 G ，位于 ***Bers*** 边界 $\partial\mathrm{Ber}_\sigma(\Sigma)$ 上，使得以下结论成立。

• 存在 $\Omega(G)$ 的一个 G–不变分支 Δ_∞，使得 Δ_∞/G 与 S_σ 共形等价。• 对每个 $\alpha_i \in \mathcal{C}$，存在一条弧 $\widetilde{\alpha}_i \subseteq \Delta_\infty$，其在 G 中的稳定子是由一个偶然抛物元 g_i 生成的无限循环群 $< g_i >$。此外，$\widetilde{\alpha}_i$ 在 S_σ 中的投影是曲线α_i 的测地线代表，而弧 $\widetilde{\alpha}_i$ 的两个端点都聚向 g_i 的（唯一抛物）不动点。• 商空间 $(\Omega(G) - \Delta_\infty)/G$ 与不交并 $S_{\sigma_1} \sqcup \ldots \sqcup S_{\sigma_l}$ 共形等价。$(G) - \Delta_\infty$ Ω Δ 的每个连通分支都是一个若尔当域，并且 Δ/G_Δ 与某个 $i \in \{1, \ldots, l_0\}$ 共形等价。（此处，G_Δ 表示 Δ 在 G 中的稳定子。）• 对于 $\Omega(G) - \Delta_\infty$ 的任意两个不同连通分支 Δ、Δ'，它们的闭包要么互不相交，要么恰好交于一点。后一种情况下，若 Δ、Δ' 分别对应于 Σ_i 和 $\Sigma_{i'}$，则 $\partial\Delta \cap \partial\Delta'$ 是与曲线 α_m 相关联的抛物不动点，而该曲线是连接 Σ_i 与 $\Sigma_{i'}$ 的连接曲线

此外，任何几何有限 *Bers* 边界群 $G \in \partial\mathrm{Ber}_\sigma(\Sigma)$ 都可通过这种方式得到。

5.2. **非余紧福克斯群的核心多边形**。在本小节中，我们为每个非余紧福克斯群关联一个特殊的理想多边形。稍后在 § 5.3 中，将利用这个多边形为任意几何有限 Bers 边界群构造一个捏缩多边形。

设 Σ 是一个签名为 $(g, n; \nu_1, \ldots, \nu_n)$ 的非紧双曲曲面。令其满足 $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_k = \infty$，且 $\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n < \infty$。由于 Σ 非紧，我们有 $k \geqslant 1$。

设 G 是一个具有给定签名的福克斯群。这意味着商空间 $S = \mathbb{D}/G$ 是一个与 Σ 同胚的双曲曲面。我们如下定义 G 的核心多边形 $\mathcal{P}$（见图 5.1）。对于 $x, y \in \mathbb{S}^1$，我们将连接 x, y 的 $\mathbb{D}$ 中的双曲测地线记为 $\widehat{x}, y$。

• $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{D}$中的一个理想双曲 N–边形，其中$N = 4g+2(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}(\nu_i-1)$。• 将 $\mathcal{P}$的顶点记为 a_0、.....、$a_{N-1} \in \mathbb{S}^1$。于是每条边 γ_i、$i \in$\{0、.....、$N-1$\}都是 $\mathbb{D}$中的双曲测地线，端点为 a_i、a_{i+1}（指标模 N）。• （g柄）存在 $2g$双曲型元 A_i、$B_i \in G$、$i \in \{0$、.....、$g-1\}$，使得对于 $i \in \{0$、$\cdots$、$g-1\}$，

$$A_i(\widehat{a}_{4i}, a_{4i+1}) = \widehat{a}_{4i+3}, a_{4i+2}, \text{ and } B_i(\widehat{a}_{4i+3}, a_{4i+4}) = \widehat{a}_{4i+2}, a_{4i+1}.$$

• （k尖点）存在 $k-1$元 P_0、.....、$P_{k-2} \in G$，使得

$$P_i(\widehat{a}_{4g+i}, a_{4g+i+1}) = \widehat{a}_{4g+2(k-1)-i}, a_{4g+2(k-1)-i-1}.$$

此外，如果 $k \geqslant 4$，那么 $P_1, \ldots, P_{k-3}$是双曲型的，而 P_{k-2}是抛物的。若 $(g, n) = (0, k)$，则元素 P_0是抛物的；也就是说，若曲面是带穿孔球面，则该元素是抛物的，否则是双曲型的。对于 $i \in \{0, \ldots, k-3\}$，群元素$P_{i+1}^{-1} \circ P_i$是抛物的。（情况 $k \in \{1, 2, 3\}$ 也可以类似地描述。）

• （$n-k$个轨形点）存在 $n-k$椭圆元素 $R_0, \ldots, R_{n-k-1} \in G$，使得对于 $i \in \{0, \ldots, n-k-1\}$，有 $R_i^{\nu_{k+1+i}} = \mathrm{id}$，且

$$R_i(\widehat{a}_{i,j}, a_{i,j+1}) = \widehat{a}_{i,j+1}, a_{i,j+2},$$

其中 $j \in \{0, \ldots, \nu_{k+1+i} - 1\}$ (模 ν_{k+1+i})。这里，

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_{4g+2(k-1)+\sum_{s=k+1}^{k+i}(\nu_s-1)+j} & \text{for } i \geqslant 1, \\ a_{4g+2(k-1)+j} & \text{for } i = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

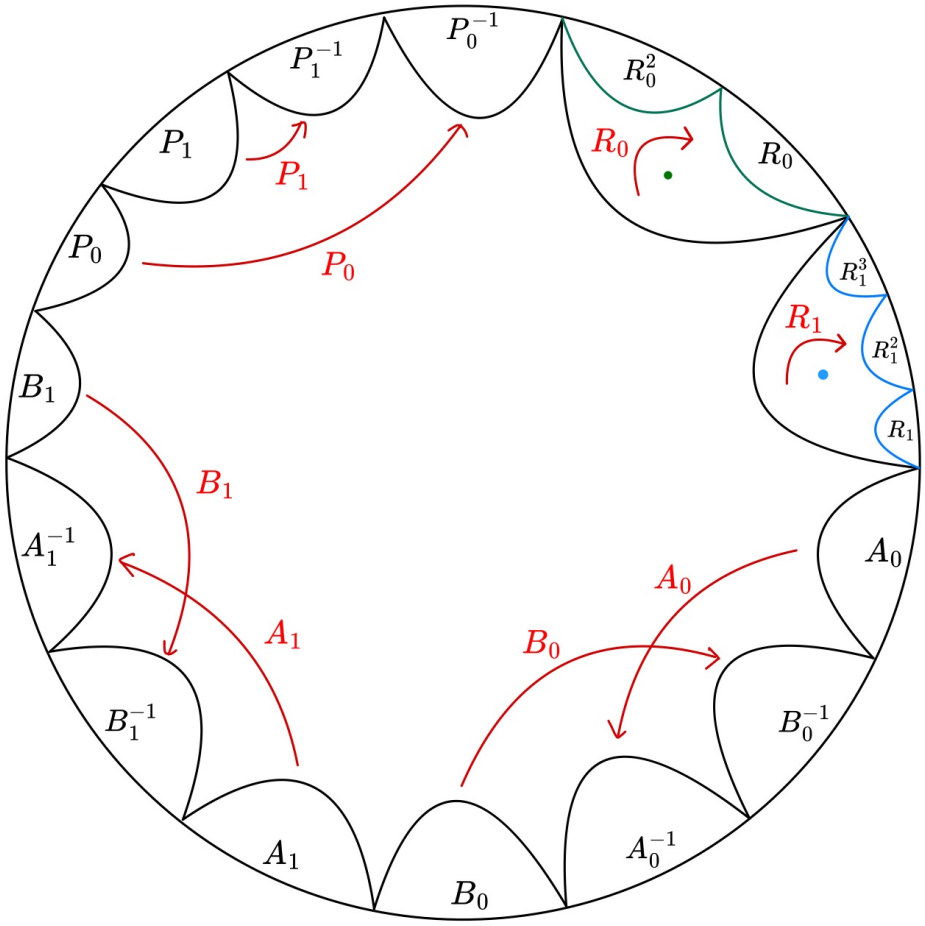

FIGURE 5.1.类型为(2、5；8、8、8、3、4)的福克斯群的 Bowen–Series 映射。

注意，如果 G 是无挠的，那么 $\mathcal{P}$ 是G在 $\mathbb{D}$上的作用的基本多边形。

顶点集诱导出一个划分 $\mathcal{A}=\{[a_i:\ a_{i+1}]:\ i\in\{0、\ldots\ldots、\ N-1\}\}$ 的 $\mathbb{S}^1$。我们定义与核心多边形 $\mathcal{P}$ 相关联的鲍恩-系列马尔可夫映射，使其成为关于划分 $\mathcal{A}$ 的马尔可夫映射：

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_{G,\mathcal{P}}=\{F_i:=\mathcal{F}|_{[a_i,a_{i+1}]}:i\in\{0,\ldots,N-1\}\},$$

其中$\mathcal{F}|_{[a_i,a_{i+1}]}$ 定义如下（见图 5.1，参见 [BS79]）。

- For $i\in\{0,\ldots,g-1\}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}|_{[a_{4i},a_{4i+1}]}&=A_i,\\ \mathcal{F}|_{[a_{4i+1},a_{4i+2}]}&=B_i^{-1},\\ \mathcal{F}|_{[a_{4i+2},a_{4i+3}]}&=A_i^{-1},\\ \mathcal{F}|_{[a_{4i+3},a_{4i+4}]}&=B_i.\end{aligned}$$

- For $i\in\{0,\ldots,k-1\}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}|_{[a_{4g+i},a_{4g+i+1}]}&=P_i,\\ \mathcal{F}|_{[a_{4g+2(k-1)-i-1},a_{4g+2(k-1)-i}]}&=P_i^{-1}.\end{aligned}$$

- For $i \in \{0, \dots, n-k-1\}$, $j \in \{0, 1, \dots, \nu_{k+1+i} - 2\}$,
$$\mathcal{F}|_{[a_{i,j}, a_{i,j+1}]} = R_i^{\nu_{k+1+i}-1-j}$$
where $a_{i,j}$ is defined by Formula (5.1).

我们指出，按照 § 3 中的定义， $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{S}^1$ 上的共形马尔可夫映射。当且仅当 Σ 的签名为 $(0, n; 8, \cdots, \infty)$ 或$(0, n; 8, \cdots, 8, 2)$时，它才会诱导一个圆上的连续映射；也就是说，该曲面是一个带穿孔球面，且可能含有一个二阶轨形点（参见 [MM23, §3]）。

由构造可知，我们有如下结论。

引理 5.2. 鲍恩-系列马尔可夫映射 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{G,\ \mathcal{P}}$ 在拓扑上是扩张的、共形的，并具有自然拼图结构：对于每个马尔可夫区间$[a_i, a_{i+1}] \in \mathcal{A}$，相应的 *0* 级拼图 P_i 是由一个圆盘构成，其边界是与 $\mathbb{S}^1$ 正交相交于 a_i, a_{i+1}的圆。

此外，每个断点都是对称抛物型的。更准确地说，设 a为一个周期断点。那么，a在 G中的稳定子由一个抛物元素 $g \in G$ 生成，使得 g 在圆弧 $[a, a+\varepsilon]$ 上是排斥的，而在$[a-\varepsilon, a]$上是吸引的。此外，若 $q^{\pm}$ 分别是右/左轨道 $a_n^{\pm}$的周期，则对所有充分小的 ε，都有$\mathcal{F}^{q^{\pm}}|_{[a,\ a\pm\varepsilon]} = g^{\pm 1}$ 。

5.3. **压缩核心多边形与拼图**。 在本小节中，我们给出任意几何有限 Bers 边界群极限集的自然拼图结构。

如同 § 5.1，设 Σ 是带有 $\chi(\Sigma) < 0$ 的曲面，并设 $\mathcal{C}$ 是挤压多曲线，其中 $(\Sigma, \mathcal{C}) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_{j_0}$。为表述简便，我们首先假设所有节点分支都是双曲的。我们将在最后讨论处理抛物结点分支所需的必要修改。

设 G 是与 $(\Sigma, \mathcal{C})$ 相关联的几何有限 Bers 边界群。设 Δ_1是 $\Omega(G) - \Delta_\infty$ 的一个连通分支，其中 Δ_∞ 是 G–不变分支。则 Δ_1对应于某个双曲的连通分支 Σ_i 。不失一般性，我们假设 Δ_1 对应于 Σ_1。

由于 Σ_1 非紧的，我们可以按照 § 5.2 构造一个核心多边形 $\mathcal{P}_1 \subseteq \Delta_1$ 。设 $G_{\Delta_1} \subseteq G$ 为 Δ_1的稳定子。注意，理想顶点的 $\mathcal{P}_1$ 轨道与 Σ_1的尖点一一对应。因此，如果$j_0 > 1$，则至少存在一个连通分支 $\Delta_2 \,(\neq \Delta_1)$ 属于 $\Omega(G) - \Delta_\infty$，它与 $\{\Sigma_2, \dots, \Sigma_{j_0}\}$ 中某个曲面相关联，并且在 $\mathcal{P}_1$的某个顶点处与 Δ_1 相邻。不失一般性，我们假设 Δ_2 对应于曲面 Σ_2。设 $\mathcal{P}_2 \subseteq \Delta_2$为一个核心多边形。归纳地，我们可以构造

- 一个分支树 $\Delta_1, \dots, \Delta_{j_0}$，分别对应于 $S_1, \dots, S_{j_0}$，使得 $\bigcup_{i=1}^{j_0} \Delta_i$ 连通，并且
- 一组核心多边形 $\overline{\mathcal{P}_1}, \dots, \mathcal{P}_{j_0}$，使得 $\mathcal{P}_i \subseteq \Delta_i$ 和 $\bigcup_{i=1}^{j_0} \mathcal{P}_i$ 连通。

我们将这组 $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{j_0}\}$ 称为 G 的压缩核心多边形（见图 5.2）。我们指出，压缩核心多边形所起的作用与定义 4.6 中的内部拼图类似。

我们指出，若 G 是无挠的，则可以将这组理想多边形实现为Σ的福克斯模型 G_0 的某个基本多边形的极限。具体而言，在 Σ 上挤压相应的多曲线 $\mathcal{C}$ ，会得到 G_0 的一列拟福克斯变形，并且该列退化至 G。

回忆一下，我们用 $\partial^I \Delta_\infty$表示 Δ_∞ 的理想边界。 $\mathcal{P}_i$的每个顶点 x 都对应于 Σ_i 的一个尖点，而该尖点要么是 Σ_i 的一个节点奇点，要么是由原曲面 Σ产生的 $\overline{\Sigma_i}$ 的一个尖点。在前一种情况下， x 对应于 Δ_∞的两个理想边界点，并且有一个 $\Omega(G) - \Delta_\infty$ 的连通分支附着在 x处的 Δ_i上。在后一种情况下， x 对应于 Δ_∞的唯一一个理想边界点。我们

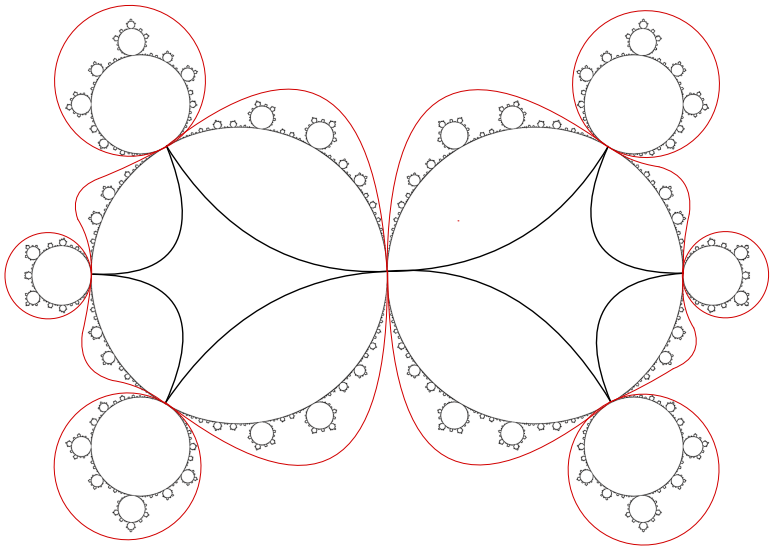

FIGURE 5.2. 亏格 2 Bers 边界群的拼图结构。两个黑色理想四边形 $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ 的并集是 G的压缩核心多边形。相关的理想多边形 $\mathcal{P}_\infty \subseteq \Delta_\infty$ 由红色测地边的并集围成。 $\widehat{\mathbb{C}} - (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_\infty)$的连通分支的闭包构成 0 级拼图块。肢型拼图块由一条红边围成，而躯干型拼图块则由一条黑边和一条红边的并集围成。

考虑理想多边形 $\mathcal{P}_\infty \subseteq \Delta_\infty$ ，其顶点是与 $\bigcup_{i=1}^{j_0} \mathcal{P}_i$的顶点相关联的理想边界点（对于 Δ_∞）。(在图 5.2 中，Δ_∞ 中的多边形 $\mathcal{P}_\infty$ 以红色显示。这里， Σ是一个亏格 2 的紧曲面，而多重曲线$\mathcal{C}$ 只有一个连通分支；因此，挤压 $\mathcal{C}$ 会产生两个亏格 1 曲面 Σ_1 和Σ_2 ，每个曲面都有一个唯一的节点，且没有其他尖点。多边形$\mathcal{P}_\infty$ 的边是曲线 $\mathcal{C}$的提升。特别是，上文讨论的第二种可能性在这个例子中不会出现。)

补集 $\widehat{\mathbb{C}} - \left(\bigcup_{i=1}^{j_0} \mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_\infty\right)$由有限个若尔当域组成，其闭包记为 P_1、……、P_r。我们将它们称为 0 级拼图块，并将这类拼图块的集合记为

$$\mathfrak{P}^0 := \{P_1, \ldots, P_r\}.$$

注意，拼图片有两种类型。若拼图片 P_i 的内部为 $\operatorname{Int} P_i \cap \bigcup_{i=1}^{j_0} \Delta_i = \varnothing$，则称其为肢型；否则称其为躯干型。我们指出，目前的设置与 Basilica 拼图的设置类似，参见定义 4.9。若P_i 为肢型，则它由某条测地线 $\widetilde{\alpha}_i \subseteq \Delta_\infty$ 及其聚点围成，其中该聚点是G中某个偶然抛物元素的不动点。若 P_i 为躯干型，则它由两条测地线及其聚点围成，其中一条测地线位于 Δ_∞中，另一条位于 Δ_s 中，对于某个 $s \in \{1, \ldots\ldots, j_0\}$（见图 5.2）。

5.3.1. 抛物结点分支的修改。假设

$$(\Sigma, \mathcal{C}) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_{l_0} + \Sigma_{l_0+1} + \ldots + \Sigma_{j_0},$$

其中， Σ_i 在 $i \leqslant l_0$ 处是双曲的，在 $i \geqslant l_0 + 1$处是抛物的。注意，每个抛物结点分支都通过一个节点奇点附着于唯一的双曲节点分量。这些抛物结点分支不对应不连续域中的任何分支。因此，同样的构造会得到一个连通的压缩核心多边形

$$\overline{\mathcal{P}_1} \cup \overline{\mathcal{P}_2} \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{P}_{l_0}},$$

其中 $\mathcal{P}_i \subseteq \Delta_i$ 是与 Σ_i相关联的核心多边形。0 级拼图块$\mathfrak{P}^0 = \{P_1、\ldots\ldots、P_r\}$ 的构造方式与分支闭包的构造方式完全相同$\widehat{\mathbb{C}} - \big(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_{l_0} \cup \mathcal{P}_\infty\big)$。

5.4. **Basilica Bowen–Series 映射的构造**。本节将解释 § 5.3 中构造的自然拼图如何诱导出一个马尔可夫 $(G\,\Lambda(G))$–映射。

令 $\mathfrak{P}^0 = \{P_1、\ldots\ldots、P_r\}$ 为与压缩核心多边形$\{\mathcal{P}_1、\ldots\ldots、\mathcal{P}_{j_0}\}$相关联的 0 级拼图。对于每个 $\mathcal{P}_i$，我们从 $\mathcal{P}_i$的顶点集中选取一个子集 $\mathcal{PV}_i$，使其在 $\mathcal{P}_i$每个顶点的 G_{Δ_i}–轨道中恰好包含一个元素，其中 G_{Δ_i}是 Δ_i的稳定子。我们称 $\mathcal{PV}_i$ 为代表顶点集。

我们将定义一组映射

$$\mathcal{F} = \{f_i : i \in \{1, \ldots, r\}\}$$

$\widehat{}$其中 $f_i : P_i \longrightarrow \mathbb{C}$。

假设 P_i 是肢型。令 a 为 $\partial P_i \cap \Lambda(G)$中的唯一点，并令$\Delta \subseteq P_i$为 $\Omega(G) - \Delta_\infty$ 中满足 $a \in \partial\Delta$的连通分支。于是 Δ对应于某个双曲节点分量，记为 Σ_s。令 Δ_s 为与 Σ_s 相关联的 $\Omega(G)$ 的连通分支，该分支在压缩核心多边形中包含 $\mathcal{P}_s$ 。令 $g \in G$ 为一个元素，使得$\widehat{}$ $g(\Delta) = \Delta_s$ 且 $g(a) \in \mathcal{PV}_s$。我们将映射 f_i : $P_i \longrightarrow \mathbb{C}$ 定义为 $f_i(x) = gx$。需要指出的是，元素 g 的选取并不唯一：任意两个选取之间相差一个与 $g(a)$的稳定子中的元素作后复合，而该稳定子与 $\mathbb{Z}$同构。注意，该群由一个（本原）意外抛物元素生成，其不动点为 $g(a)$。

假设 P_i 是躯干型。令 $s \in \{1、\ldots\ldots、j_0\}$ 为满足 $\operatorname{Int} P_i \cap \Delta_s \neq \varnothing$ 的唯一指标。注意， $\mathcal{P}_s$ 是 § 5.2 中定义的 Σ_s 对应的核心多边形，因此， $P_i \cap \partial\Delta_s$ 是与 § 5.2 中定义的 $\mathcal{P}_s$ 相关联的 Δ_s 上的 Bowen-Series 马尔可夫映射的某个马尔可夫片段 $[a,\ b]$ 。该 Bowen-Series 映射由 $[a,\ b]$ 上的某个 $h \in G_{\Delta_s} \subseteq G$ 定义为$\widehat{}$。我们将映射 f_i : $P_i \longrightarrow \mathbb{C}$ 定义为 $f_i(x) = hx$。

定义 5.3。设 G 是一个几何有限 Bers 边界群，其压缩核心多边形为 $\{\mathcal{P}_1、\ldots\ldots、\mathcal{P}_{j_0}\}$，代表顶点集为 $\mathcal{PV}_i$。设 $\mathfrak{P}^0 = \{P_1、\ldots\ldots、P_r\}$ 为对应的 0 级拼图。我们将上文构造的 $\mathcal{F} = \{f_1、\ldots\ldots、f_r\}$ 称为 G 的一个***Basilica Bowen-Series*** 映射 。

注 5.4. 正如我们将在下一节看到的，Basilica Bowen–Series 映射与巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射密切相关（见定义 4.16）。

注 5.5. Basilica Bowen–Series 映射的构造并非唯一确定的，其中有几个步骤需要作出选择。

(1) 压缩核心多边形 $\{\mathcal{P}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathcal{P}_{j_0}\}$ 需要作出选择。请注意，0 级拼图仅取决于这样的选择。(2) $\mathcal{P}_i$ 的顶点集的子集 $\mathcal{PV}_i$ 需要从顶点集的 G_{Δ_i}–轨道中选取代表元。(3) 最后，肢型拼图片上的映射需要选择对应点稳定子中的元素。

5.4.1. 马尔可夫结构。

命题 5.6。 *Basilica Bowen-Series* 映射 $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots\ldots, f_r\}$ 在极限集 $\Lambda(G)$上诱导出一个马尔可夫(Λ, G)–映射。更确切地说，对每个 i，都存在一个子集$I_i \subseteq \{1, \ldots\ldots, r\}$，使得

$$f_i(P_i \cap \Lambda(G)) = \bigcup_{j \in I_i} P_j \cap \Lambda(G).$$

此外， $\bigcup_{j\in I_i} P_j \subseteq f_i(P_i)$。

证明。 $\mathcal{F}$ 是一个 (Λ, G)–映射这一事实可直接由构造得出。还需验证它具有马尔可夫性质。

假设 P_i 是肢型。令 a 为 $\partial P_i \cap \Lambda(G)$中的唯一点。根据构造，
$f_i(P_i \cap \Lambda(G))$ 是 $\Lambda(G) - \{f_i(a)\}$的两个连通分支之一的闭包。由于 $f_i(a)$ 是某个 s 的 $\mathcal{P}_s$ 顶点，我们有一个分解$\{1, \ldots, r\} = A \sqcup B$，使得 $\bigcup_{j\in A} P_j \cap \Lambda(G)$ 和 $\bigcup_{j\in B} P_j \cap \Lambda(G)$ 分别对应于 $\Lambda(G) - \{f_i(a)\}$的两个连通分支的闭包。因此，对于某个指标集 $I_i \subset \{1, \ldots, r\}$，有 $f_i(P_i \cap \Lambda(G)) = \bigcup_{j\in I_i} P_i \cap \Lambda(G)$。

假设 P_i 是躯干型。设 a， b 为 $\partial P_i \cap \Lambda(G)$中的两个点。注意，$\Lambda(G) - \{f_i(a), f_i(b)\}$ 至多包含 4 个连通分支。连通分支的数量取决于 $f_i(a)$ （或 $f_i(b)$）对应于 Σ的一个尖点，还是节点分支上的一个节点奇点。根据构造， $f_i(P_i \cap \Lambda(G))$ 是 $\Lambda(G) - \{f_i(a), f_i(b)\}$的一个连通分支的闭包。由于对于某个$s$， $f_i(a)$， $f_i(b)$ 都是 $\mathcal{P}_s$ 的顶点，因此 $\Lambda(G) - \{f_i(a), f_i(b)\}$ 的每个连通分支的闭包，都是 $\Lambda(G)$ 与若干个 0 级拼图片之并的交集。因此，对于某个指标集 $I_i \subset \{1, \ldots, r\}$，有 $f_i(P_i \cap \Lambda(G)) = \bigcup_{j\in I_i} P_j \cap \Lambda(G)$。

此外部分可由以下事实推出： $\partial P_i \cap \Delta_i$ 是 Δ_i的双曲测地线，且每个 $h \in G_{\Delta_i}$ 都是 Δ_i的双曲等距变换。□

根据命题 5.6，我们用归纳法定义第 n 层拼图片

$$\mathfrak{P}^n = \{P_w\}_{w\in\mathcal{I}^n}$$

方法是对第 $n-1$ 层拼图片进行拉回。以下引理由命题 5.6 通过归纳法得出。

引理 5.7。 设 $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_r\}$ 是一个 *Basilica Bowen-Series* 映射。对每个$P_w \in \mathfrak{P}^n$，存在 $P_{w'} \in \mathfrak{P}^{n-1}$ 使得 $P_w \subseteq P_{w'}$。

设 $P_w \in \mathfrak{P}^n$ 满足 $P_w \subseteq P_s \in \mathfrak{P}^0$。存在 $P_{w''} \in \mathfrak{P}^{n-1}$ 使得

$$f_s : P_w \longrightarrow P_{w''}$$

是一个同胚，并且在其内部共形。

5.4.2. 拓扑扩张。

引理 5.8. 巴西利卡 *Bowen-Series* 映射 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的。更确切地说，设 $(P_w)_w$ 是一列嵌套的、层级为 n 的拼图片。则

$$\bigcap_w P_w$$

是一个单点集。

证明。令 a为 $\Lambda(G)$的一个接触点；也就是说，它是 $\Omega(G) - \Delta_\infty$中两个连通分支边界的交点。于是存在某个 $n \geqslant 0$和某个层级为 n 的拼图片 $P_w \in \mathfrak{P}^n$，使得 $a \in \partial P_w$。事实上，假设 a 位于某个 Δ_i的边界上，其中 $i = 1, \ldots, J$。那么，根据构造， a最终会映射到 $\mathcal{P}_i$的某个顶点。否则，很容易验证， a 最终会映射到某个 i的 $\partial\Delta_i$。

由于所有这类接触点在 $\Lambda(G)$上稠密，我们可以得出，每个交集 $\bigcap_{n=0}^{\infty} P_w \cap \Lambda(G)$ 都是一个单点集。另一方面，由于所有拼图片都由 $\Omega(G)$各连通分支中的双曲测地线及其聚点围成， $\bigcap_w P_w \cap \Lambda(G)$ 缩至点这一事实意味着 $\bigcap_w P_w \cap \Omega(G)$ 为空集。引理得证。□

5.5. 在 $\partial^I \Delta_s$上的诱导马尔可夫映射与回拉鲍恩-谢里斯映射。与 $(\Sigma$相关联的 *Basilica Bowen-Series* 映射 $\mathcal{F}\ \mathcal{C})$ 在 $\Omega(G)$ 的连通分支 Δ_s 的理想边界上诱导出分片共形的马尔可夫映射。本节将研究这些马尔可夫映射的某些正则性。为简洁起见，我们假设所有节点分支 Σ_i 都不是抛物的；即 $l_0 = j_0$。利用 § 5.3.1 中的讨论，可将结果推广到一般情形。

设 $s \in \{1, \ldots\ldots, j_0\} \cup \{\infty\}$。设 $\Phi_s \colon \mathbb{D} \longrightarrow \Delta_s$ 为一个黎曼一致化。设 $\mathcal{F}|_{\Delta_s}$ 为 Basilica Bowen-Series 映射在 Δ_s 上的限制（回想一下，严格来说， $\mathcal{F}$ 仅在 Δ_s 的一个子集上有定义），并设 $\mathcal{F}_s = \{f_{1,\ s}, \ldots\ldots, f_{r_s,\ s}\}$ 为 $\mathcal{F}|_{\Delta_s}$ 经 Φ_s 共轭所得的映射。根据施瓦茨反射原理， $\mathcal{F}_s$ 可延拓为 $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$ 上的共形马尔可夫映射（见 § 3）。

注意， $\mathbb{S}^1$ 与理想边界 $\partial^I\Delta_s$相对应。若 $s \neq \infty$，则 Δ_s 是一个若尔当域，因此在这种情况下， $\partial^I\Delta_s$ 可以与 $\partial\Delta_s$ 相对应。我们将 $\mathbb{S}^1$ 上的诱导马尔可夫映射称为 $\mathcal{F}_s = \{f_{1、\ s}、\ldots\ldots、 f_{r_s,\ s}\}$。

若 $s = \infty$，我们会为诱导的马尔可夫映射赋予一个专门名称，并将 $\partial^I\Delta_\infty$ 上的 $\mathcal{F}_\infty$ 称为回拉鲍恩-谢里斯映射。在后续论文中，这个映射将在我们的配对结果中发挥重要作用。

命题 5.9。设 $\mathcal{F}$ 是几何有限 *Bers* 边界群的 *Basilica Bowen-Series* 映射。设 $s \in \{1、\ldots\ldots、 j_0\} \cup \{\infty\}$，并设 $\partial^I\Delta_s \cong \mathbb{S}^1$上的诱导马尔可夫映射为 $\mathcal{F}_s = \{f_{1、\ s}、\ldots\ldots、 f_{r_s、\ s}\}$。则 $\mathcal{F}_s$ 是拓扑扩张的、共形的，并且具有拼图结构。

此外，所有断点都是对称的。更确切地说，我们有如下结论。

- 若 $s \in \{1, \ldots, j_0\}$，则任意断点都是对称抛物型。
- 若 $s = \infty$，则当断点对应于曲面 Σ上的一个尖点时，它是对称抛物型；否则，它是对称双曲型。

特别地，若 Σ 是紧的，则 $\mathcal{F}_\infty$ 的任意断点都是对称双曲型。

证明。由引理 5.8， $\mathcal{F}$是拓扑扩张的。因此，对于每个 $s \in \{1, \ldots, j_0\} \cup \{\infty\}$，诱导的马尔可夫映射 $\mathcal{F}_s$ 也是拓扑扩张的。

取 $\mathfrak{P}^0$ 中的 0 级拼图块与 Δ_s的交集，并通过黎曼一致化 $\Phi_s : \mathbb{D} \to \Delta_s$ 将它们拉回，得到集合$\widetilde{P}_{1,s}, \ldots, \widetilde{P}_{r_s,s}$。令 $r \colon \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$为关于单位圆 $\mathbb{S}^1$的反射，并令 $P_{i,s} := \sim P_{i,s} \cup r(P_{i,s})$。根据施瓦茨反射原理，$f_{i,s}$ 可延拓为定义在 $\mathrm{Int}(P_{i,\ s})$ 上的共形映射。因此， $\mathcal{F}_s$ 是共形的。

集合 $\{P_{1,\ s}, \ldots\ldots, P_{r_s,\ s}\}$ 构成了 $\mathcal{F}_s$ 的 0 级拼图片。根据命题 5.6， $P_{i,\ s}$ 的原像包含在某些 0 级拼图片中。因此，$\mathcal{F}_s$ 具有拼图结构。

最后一部分，注意若 $s \in \{1, \ldots\ldots, j_0\}$，则 $\mathcal{F}_s$ 是与核心多边形 $\Phi_s^{-1}(\mathcal{P}_s)$ 相关联的鲍恩-系列马尔可夫映射。因此，根据引理 5.2，每个断点都是对称抛物型。

现在考虑 $s = \infty$ 的情形。设 a 是一个周期断点，$q^{\pm}$ 是右/左轨道 $a_n^{\pm}$ 在诱导映射 $\mathcal{F}_\infty$ 下的周期。此外，设 $I_{a^{\pm},\ n} \subseteq \mathbb{S}^1$ 是与右/左轨道 $a_n^{\pm}$ 相关的 $\mathcal{F}_\infty$ 的第 n 级马尔可夫区间。注意， $\mathcal{F}_\infty^{q^{\pm}}(I_{a^{\pm},\ q^{\pm}}) = I_{a^{\pm},\ 0}$。

注意， $\Phi_\infty(a) \in \Lambda(G)$ 是压缩核心多边形的一个顶点。设 $P_{a^\pm,\ n} \in \mathfrak{P}^n$ 是与 $I_{a^\pm,\ n}$ 相关的第 n 级拼图片。设 $t^\pm \in \{1,\ \ldots,\ j_0\}$ 满足 $\Phi_\infty(a) \in \partial\Delta_{t^\pm}$，且 $P_{a^\pm,\ 0} \cap \Delta_{t^\pm} \neq \varnothing$。设 $I^{t^\pm}_{a^\pm,\ n} \subseteq \partial^I \Delta_{t^\pm}$ 是对应于 $\mathcal{F}_{t^\pm}$ 的马尔可夫区间。根据引理 5.2，限制 $\mathcal{F}^{q^\pm}_{t^\pm}|_{I^{t^\pm}_{a^\pm},\ q^\pm}$ 在 $\Phi^{-1}_{t^\pm}(\Phi_\infty(a))$ 的对应边上是排斥的，并生成福克斯群 $\Phi^{-1}_{t^\pm}\ G_{\Delta_{t^\pm}}\ \Phi_{t^\pm}$ 中 $\Phi^{-1}_{t^\pm}(\Phi_\infty(a))$ 的稳定子，其中 $G_{\Delta_{t^\pm}}$ 是 G 中 $\Delta_{t^\pm}$ 的稳定子子群。因此，每个限制 $\mathcal{F}^{q^+}|_{P_{a^+,\ q^+}}$ 和 $\mathcal{F}^{q^-}|_{P_{a^-,\ q^-}}$ 在 $\Phi_\infty(a)$ 处都是排斥的，并生成子群

$$H = \{g \in G_{\Delta_{t^\pm}} : g(\Phi_\infty(a)) = \Phi_\infty(a)\} \subseteq G.$$

特别地，这些 M¨obius 映射是 G中的本原元素。注意，如果不存在抛物型节点分支，那么 H 就是 $\Phi_\infty(a)$（在 G中）的稳定子。否则， $\Phi_\infty(a)$ 的稳定子可能同构于 $H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$，其中因子 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 来自这样一个群元素：它交换 $\Omega(G) - \Delta_\infty$ 中附着于 $\Phi_\infty(a)$的两个连通分支。因此，存在 $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，使得

$$\mathcal{F}^{q^\pm}_\infty|_{I_{a^\pm,q^\pm}} = \begin{cases} \gamma^{\pm 1} & \text{if } \Phi_\infty(a) \text{ corresponds to a cusp of the surface } \Sigma, \\ \gamma & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在前一种情况下， a 是对称抛物型的；在后一种情况下， a 是 $\mathcal{F}_\infty$的对称双曲周期点。命题得证。□

6. Quasiconformal model for limit set and Julia set

本节将证明关于极限集和 Julia 集的拟共形几何的主要结果（定理 A、定理 B 和定理 C）。

在第 6.1 节中，我们首先证明，对于任意 Bers 边界群 G 的 Basilica Bowen-Series 映射 $\mathcal{F}_G$ （或具有胖 Basilica Julia 集的有理映射），我们都可以构造一个 Basilica Ω-映射 $\mathcal{F}$，使其在 Julia 集上与 $\mathcal{F}_G$ 拓扑共轭。在第 6.2 节中，我们证明可以通过定理 4.23 修改 $\mathcal{F}$，并得到一个新的 Basilica Ω-映射 $\mathcal{F}$，使其与 $\mathcal{F}_G$ 拟共形共轭。在第 6.3 节中，我们引入拟共形不变量，用于区分各种 Basilica 极限集和 Julia 集。最后，我们在第 6.4 节中整合这些要素，证明主要定理。

6.1. 拓扑共轭。

回顾一下，在第 4 节中，我们介绍了与胖 Basilica 多项式 $Q(z) = z^2 - \frac{3}{4}$ 相关的 Basilica Ω–映射；在第 5 节中，我们在克莱因群世界中定义了类似的对象，称为 Basilica Bowen-Series 映射。下面，我们构造作为拓扑模型的 Basilica Ω–映射，分别适用于 Basilica Bowen–Series 映射以及 Julia 集为胖 Basilica 的任意多项式。

6.1.1. 紧巴西利卡 *Bowen-Series* 映射的拓扑模型。

我们采用 § 5 中的记号，并假设没有节点分支 Σ_i 是抛物的。如 § 5.3.1 所述，就相关巴西利卡 Bowen-Series 映射的作用而言，这并不失一般性。

命题 6.1。 设 Σ 是双曲紧曲面， G 是与 $(\Sigma, \mathcal{C})$ 相关的几何有限 *Bers* 边界群。设 $\mathcal{F}_G$ 是巴西利卡 *Bowen-Series* 映射。那么存在一个巴西利卡 Ω–映射 $\mathcal{F} : \mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$，其在 $J(Q)$ 上的限制与 $\mathcal{F}_G$ 在 $\Lambda(G)$上的限制拓扑共轭。

证明。 沿用第 5.3 节的记号，设 $\{\mathcal{P}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathcal{P}_{j_0}\}$ 是 G 的一个压缩核心多边形，并设 $\Delta_1,\ \ldots\ldots,\ \Delta_{j_0}$ 是不连续域中与 $\mathcal{P}_i \subseteq \Delta_i$ 对应的连通分支。设 $\mathcal{P}_\infty$ 是 Δ_∞ 中对应的理想多边形，

其中 Δ_∞ 表示 G–不变分支。设 $\mathcal{F}_G$ 是与该压缩核心多边形相关联的一个巴西利卡 Bowen–Series 映射。回顾一下，$\mathcal{P}_\infty \cup \bigcup_i \mathcal{P}_i$ 的补集分支的闭包是 0 级拼图块，记为 $\{P_1, \ldots\ldots, P_r\}$。我们将第 1 级拼图片记为 $\{S_1, \ldots\ldots, S_s\}$，从而对于每个 S_i，存在某个 $P_{\sigma(i)} \in \{P_1, \ldots\ldots, P_r\}$，使得

$$\mathcal{F}_G : \mathrm{Int}(S_i) \longrightarrow \mathrm{Int}(P_{\sigma(i)})$$

一个共形同构。注意，1 级拼图片并集的补集分支在 $\Omega(G)$ 中构成一组理想多边形，我们将它们记为 $\{\mathcal{S}_\infty、\ \mathcal{S}_1、\ldots\ldots、\ \mathcal{S}_{j_0}、\ \mathcal{S}_{j_0+1}、\ \ldots \mathcal{S}_{j_1}\}$。由于 Σ 是紧的，$\{\mathcal{P}_1、\ldots\ldots、\ \mathcal{P}_{j_0}\}$ 的每个顶点都是 $\Omega(G) - \Delta_\infty$ 中两个分支的接触点（因为 G 的所有抛物元都是偶然的）。

我们可以如下在 $J(Q)$ 上构造 Basilica 拼图 $\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{P}^1$，使其分别与 $\mathcal{F}_G$ 的 0 级和 1 级拼图同胚。从 $\mathcal{P}_1 \subseteq \Delta_1$ 的顶点 v_1 开始。令 U_0 为包含临界点的 Q 的 Fatou 分支（参见 §4）。我们将对应点 x_1 定义为 ∂U_0 上 Q 的不动点。

归纳地，设 $v_1, \ldots, v_n$ 是一组顶点；加入 $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{j_0}$ 的所有开边后，它们构成一个连通集。假设对应的顶点 $x_1, \ldots, x_n$ 已按如下性质构造：若 $x_i, x_j \in \partial U_m$ 是一对点，且弧 $(x_i, x_j) \subseteq \partial U_m$ 与 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 不相交，则 $[x_i, x_j]$ 是二进的。

设 v_{n+1} 是 G 的压缩核心多边形上的一个顶点，它与 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 中的一个顶点相邻。假设 $v_{n+1} \in \partial\Delta_m$。设 $v_{i_1}, v_{i_2} \in \{v_1, \ldots, v_n\} \cap \partial\Delta_m$ 分别是沿逆时针和顺时针方向离 v_{n+1} 最近的顶点。注意，v_{i_1} 可能与 v_{i_2} 相同。我们可以选择 $x_{n+1} \in \partial U_m$，使连接 x_{i_1}, x_{n+1} 和 x_{i_2}, x_{n+1} 的弧为二进的。这是可行的，因为 x_{i_1} 与 x_{i_2} 之间的弧是二进的。

这组点诱导出一个 Basilica 拼图 $\mathfrak{P}$。$\mathfrak{P}^1$ 的构造类似。注意，$\mathcal{F}_G$ 诱导了一个从 $\mathfrak{P}^1$ 的指标集到 $\mathfrak{P}$的指标集的映射，由此得到一个 Basilica $\mathfrak{Q}$–映射 $\mathcal{F} : \mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$。由于根据引理 5.8，Basilica Bowen-Series 映射是拓扑扩张的，根据命题 2.7，我们得出 $\mathcal{F}_G$ 和 $\mathcal{F}$ 在极限集与 Julia 集之间拓扑共轭。

□

6.1.2. 胖*Basilica Julia*集的多项式拓扑模型。回顾一下，有理映射 g 的 Julia 集 $J(g)$ 称为$Basilica$，如果它与 $J(Q)$ 同胚，其中$Q(z) = z^2 - \frac{3}{4}$。经过适当的共轭，并通过一个 M¨obius 映射，我们可以假设 g 唯一的非 Jordan Fatou 分支是无界的。若 Julia 集$J(g)$ 是Basilica，且

(1) 每个有界 Fatou 分支都是拟圆盘；并且

(2) 如果任意两个有界 Fatou 分支相接，则它们相切地相接。

这里，如果存在 $\theta_0 \in [0,\ 2\pi)$ 使得对于每个 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$，满足 $\{z_0 + re^{i(\theta_0+\theta)} : r \in (0,\ \delta),\ |\theta| < \pi/2 - \varepsilon\} \subset U$以及 $\{z_0 + re^{i(\theta_0+\theta)} :\ r \in (-\delta,\ 0),\ |\theta| < \pi/2 - \varepsilon\} \subset V$，则称两个不相交的若尔当域 $U,\ V \subset \mathbb{C}$ 在一点处彼此相切 $z_0 \in \partial U \cap \partial V$。

容易看出

引理 6.2。设 g 是一个有理映射，其 *Julia* 集是一个巴西利卡。则无界 *Fatou* 分支 U_∞ 在 g下是不变的。

引理 6.3。（参见 [LZ25，引理 3。2]）设 g 是一个 *Julia* 集为胖 *Basilica* 的有理映射。那么 $J(g)$ 不包含任何临界点。

证明。容易看出，$J(g)$ 的非接触点 x 不可能是临界点，因为该映射在局部的次数为 (x) : 1，并且 Julia 集在 g下是完全不变的。

同样容易看出，根据条件 (1) 和 (2)，有界 Fatou 分支的边界不可能包含临界点。□

由引理 6.3，我们得出存在一个双曲后临界有限多项式 g_0，它在 g 的 Julia 集上与其拓扑共轭（参见 [LMMN25，推论 9.7]）。令 T_0 为 g_0的 Hubbard 树。那么，$g_0 : T_0 \longrightarrow T_0$ 的动力学是单纯的，即 g_0 将 T_0 的一条边映到 T_0的一条边。

回顾一下，接触点是两个不同有界 Fatou 分支的交点。

引理 6.4。（参见 [LZ25，引理 3。4]）设 g 是一个 *Julia* 集为胖 *Basilica* 的有理映射。那么，每个接触点最终都会映到一个唯一的不动点，该不动点为抛物的，重数为 3。

证明。由于 Julia 集上没有临界点，接触点都是预周期的。由条件（2），每个周期接触点都是抛物的，重数为 3。

现在假设有两个周期接触点 a，b。令 $g_0 : T_0 \longrightarrow T_0$ 为 Hubbard 树上的相应单纯映射。经过若干次迭代后，a，b 对应于 T_0 上 g_0^k 的两个不动点。由于 g_0 在 T_0 上是单纯的，连接 a，b 的弧在 g_0^k 作用下保持不变。因此，存在一条有界 Fatou 分支链 V_1，V_2，.....，V_s，它们在 g^k 作用下保持不变。记 $v_0 = a \in \partial V_1$ 和 $v_s = b \in \partial V_s$，并令 $v_i = \partial V_i \cap \partial V_{i+1}$。那么 v_i 是重数 3 的抛物的。这意味着 V_1 同时是 v_0 和 v_1 的吸引盆，这就产生了矛盾。引理得证。□

命题 6.5。设 g 是一个有理映射，其 *Julia* 集是胖 *Basilica*。那么存在一个 *Basilica* $\mathfrak{Q}-$ 映射 $\mathcal{F}$： $\mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$，它与 $J(Q)$ 上的 g 拓扑共轭。

证明。设 $(V_i, X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 为一个有限集合，使得

- 每个 V_i 都是 g的一个有界 Fatou 分支；
- $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} V_i$ 是连通的，在 g 作用下不变，并包含临界值；
- $X_i \subseteq \partial V_i$ 由 ∂V_i上的有限个接触点组成；
- $|X_i| \geqslant 2$ 对于每个 i；
- $\partial V_i \cap \partial V_j \subseteq X_i \cap X_j$ 对于 $i \neq j$；并且
- $\bigcup X_i$ 在 g作用下不变。

设 $(W_j, Y_j)_{j\in\mathcal{J}}$为 $(V_i, X_i)_{i\in\mathcal{I}}$在 g下的拉回。根据构造，$J(g) - \bigcup_j Y_j$ 的每个连通分支在 g 作用下都同胚地映射到 $J(g) - \bigcup_i X_i$的一个连通分支。现在，仿照命题 6.1 的证明，我们可以根据数据 (V_i, X_i) 和 (W_j, Y_j)构造 $\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{P}^1$，以及一个巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射 $\mathcal{F} : \mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$，它在 Julia 集上与 g 拓扑共轭。□

6.2. **拟共形共轭**。在命题 6.1 和命题 6.5 中，我们分别构造了 Basilica $\mathfrak{Q}$–映射，用来模拟与紧曲面及具有胖Basilica Julia集的多项式相关联的 Basilica Bowen-Series 映射。在本小节中，我们首先应用定理 4.23，获得这些 Basilica $\mathfrak{Q}$–映射的修正细化，然后采用拟共形手术证明所得的拓扑共轭是拟对称的。

6.2.1. 拟共形可去性与 *David* 可去性。我们需要以下引理来讨论 Julia 集的拟共形可去性和 David 可去性。

引理 6.6。

(1)（拟共形可去性）设 $J \subset \mathbb{C}$ 是一个几何有限多项式的 *Julia* 集。假设 J 是连通的。令 $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为一个同胚。若 ψ 在 $\mathbb{C} - J$ 上是拟共形的，则 ψ 在 $\mathbb{C}$ 上是拟共形的。*(2)*（*David* 可去性）设 $J \subset \mathbb{C}$ 是双曲多项式 p 的 *Julia* 集。假设 J 是连通的。令 $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为一个同胚。若 ψ 在 $\mathbb{C} - J$ 上是 *David* 映射，则 ψ 在 $\mathbb{C}$ 上是 *David* 映射。

证明。 第一部分由以下事实得出：几何有限多项式的连通朱利亚集是共形可去的（参见 [LMMN25，定理 9.2]）。对于第二部分，我们注意到 p 的无穷远吸引域是一个约翰区域，因此 $J(p)$ 是 $W^{1,1}$–可去的（参见 [Jon95]，[JS00，定理 4]）。根据[LMMN25，引理 2.9]，此类集合对于 David 映射是可去的。□

6.2.2. 拟共形手术。

命题 6.7。 设 Σ 是一个双曲紧曲面，且 G 是与 $(\Sigma、\mathcal{C})$ 相关联的几何有限 *Bers* 边界群。设 $\mathcal{F}_G$ 是一个 *Basilica Bowen-Series* 映射。那么存在一个 *Basilica* $\mathfrak{Q}$–映射 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$，它在相应的朱利亚集和极限集上与 $\mathcal{F}_G$ 拟共形共轭。更确切地说，这意味着存在一个拟共形映射 $H\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$，使得

$$H \circ \mathcal{F}(z) = \mathcal{F}_G \circ H(z)$$

对所有 $z \in J(Q)$。

类似地，设 g 是一个 *Julia* 集为胖 *Basilica* 的有理映射。假设无界 *Fatou* 分支 U_∞ 是吸引的或超吸引的。那么存在一个 *Basilica* $\mathfrak{Q}$–映射 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$ 它在各自的 *Julia* 集上与 g拟共形共轭。

证明。 我们给出 Basilica Bowen-Series 映射的证明。Julia 集为胖 Basilica 的有理映射的情形，可类似地利用命题 6.5 证明。

设 $\mathcal{F}_G$ 是一个 Basilica Bowen-Series 映射。设 Δ_s、$s \in \{1, \ldots\ldots, j_0\} \cup \{\infty\}$ 是与压缩核心多边形相关的 $\Omega(G)$ 的分支，并设 Δ_s、$s \in \{j_0+1, \ldots\ldots, j_1\}$ 是 $\Omega(G)$ 的其他分支，它们与经由 $\mathcal{F}_G$拉回压缩核心多边形所得的集合相关。它们由以下性质刻画。

- Δ_s，$s \in \{1, \ldots\ldots, j_0\} \cup \{\infty\}$是 $\Omega(G)$ 中与至少两个 0 级拼图块相交的连通分支；
- Δ_s，$s \in \{1, \ldots\ldots, j_0, j_0+1, \ldots\ldots, j_1\} \cup \{\infty\}$是 $\Omega(G)$ 中与至少两个第 1 级拼图片相交的连通分支。

将理想边界上的诱导的马尔可夫映射记为

$$(\mathcal{F}_G)_{\mathrm{bdd}} : \bigcup_{s=1}^{j_1} \partial^I \Delta_s \longrightarrow \bigcup_{s=1}^{j_1} \partial^I \Delta_s, \text{ and}$$
$$(\mathcal{F}_G)_\infty : \partial^I \Delta_\infty \longrightarrow \partial^I \Delta_\infty.$$

注意，由命题 5.9，$(\mathcal{F}_G)_s$ 的所有断点在 $s \neq \infty$ 时都是对称抛物型，在 $s = \infty$时都是对称双曲。

由命题 6.1，存在一个巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射 $\widetilde{\mathcal{F}}\colon \widetilde{\mathfrak{P}}^1 \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{P}}$，其在 $J(Q)$ 上的限制与 $\mathcal{F}_G|_{\Lambda(G)}$拓扑共轭。注意，由于引理 5.8 保证巴西利卡 Bowen–Series 映射是拓扑扩张的，因此映射 $\mathcal{F}$ 也拓扑扩张。由定理 4.23，存在一个巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射$\mathcal{F}\colon \mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$，使得

- $\mathcal{F}|_{J(Q)}$ 与 $\mathcal{F}|_{J(Q)}$ 拓扑共轭（因此也与 $\mathcal{F}_G|_{\Lambda(G)}$拓扑共轭）；并且
- 诱导的马尔可夫映射 $\mathcal{F}_\infty$ 是对称双曲的。

根据命题 4.22，诱导的马尔可夫映射的所有断点

$$\mathcal{F}_{\mathrm{bdd}} : \bigcup_{s=1}^{j_1} \partial^I U_s \longrightarrow \bigcup_{s=1}^{j_1} \partial^I U_s$$

是对称抛物型的，其中 U_s 是与 Δ_s 对应的 Q Fatou 分支。

将 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}_G$ 之间的拓扑共轭记为 H。注意，对于每个 $s \in \{1, \ldots, j_0\} \cup \{\infty\}$，$(\mathcal{F}_G)_s$ 都与 $\mathcal{F}_s$ 拓扑共轭。根据命题 3.5，它们准对称共轭。因此，存在 $K > 0$，使得我们可以将 $H|_{\partial U_s}$ $K-$拟共形地延拓至 $H|_{U_s}$：$U_s \longrightarrow \Delta_s$。

设 U 是包含在某个 1 级拼图片中的有界 Fatou 分支。那么，存在最小整数 n，使得对于某个 $s \in \{1, \ldots, j_1\}$，有 $\mathcal{F}^n(U) = U_s$。注意，$H \circ \mathcal{F}^n = \mathcal{F}_G^n \circ H$ 在 ∂U 上。由于 $\mathcal{F}_G$ 在 U 中是共形的，我们可以通过拉回 $H|_{\mathcal{F}^n(U)}$，将 $H|_{\partial U}$ 延拓至 U，使其成为一个同胚。

上述构造得到一个 $\mathbb{C}$ 的同胚 H，其在 $\mathbb{C} - J(Q)$上是 K–拟共形的，并将 $\mathcal{F}|_{J(Q)}$ 共轭为 $\mathcal{F}_G|_{\Lambda(G)}$。根据引理 6.6，同胚 H 在 $\mathbb{C}$上是拟共形的。□

6.3. **拟共形不变量**。在本小节中，我们引入某些组合不变量，以便在拟共形意义下区分 Basilica 极限集或 Julia 集。

6.3.1. 纯偶然抛物型与持续抛物分支。设 G是与 $(\Sigma, \mathcal{C})$相关的一个几何有限 Bers 边界群。设 Δ 是与节点分支 Σ_i相关的 $\Omega(G) - \Delta_\infty$ 的一个连通分支。若 Δ 不包含 Σ的任何尖点，则称其为纯偶然抛物型；否则称其为持续抛物型。

命题 6.8。设 G_i、$i \in \{1、2\}$ 是几何有限的 *Bers* 边界群。设 Δ_i 是 $\Omega(G_i) - \Delta_\infty(G_i)$ 的一个连通分支。假设 Δ_1 是纯偶然抛物型，而 Δ_2 是持续抛物型。那么不存在拟共形映射 $\curvearrowright$ $\curvearrowright\Phi$：$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$，使得 $\Phi(\Lambda(G_1)) = \Lambda(G_2)$ 且 $\Phi(\Delta_1) = \Delta_2$。

换言之，拟共形映射将纯偶然抛物型分支映射为纯偶然抛物型分支，将持续抛物型分支映射为持续抛物型分支。

证明。证明是对 [McM26，定理 1.8] 的改写。反设存在这样的拟共形映射 Φ。

对每个 $z \in \Lambda(G_i)$，令 $K(z)$ 表示所有可能极限的集合；这些极限是在 $\hat{\mathbb{C}}$ 的闭子集所构成的豪斯多夫拓扑下，放大极限 $\frac{1}{r}(\Lambda(G_i) - z)$ 当 $r \to 0$ 时得到的。注意，每个集合 $A \in K(z)$ 都是包含 0 的闭集。

设 $a \in \partial\Delta_2$ 是 $g \in G_2$ 的一个抛物不动点，使得 a 不是接触点。由于 Δ_2 是持续抛物型的，这样的点必然存在。根据构造，每个 $A \in K(a)$ 都是一条直线，因为在局部范围内，极限集 $\Lambda(G_2)$ 包含于两条相切抛物线所围成的区域内（见图 1.2）。

设 $b = \Phi^{-1}(a)$。设 P^n 为包含 b 的 n 级拼图片。由于 b 不是接触点且 Δ_1 是纯偶然抛物型，$b \in \mathrm{Int}(P^n)$。对于每个 0 级拼图 P_i，我们可以选择 $X_i \subseteq P_i$，使得 $\mathrm{Int}(P_i) - X_i$ 是一个环带，并且 b 的轨道会无穷多次经过 $\bigcup \mathrm{Int}(X_i)$。事实上，由于 $\mathcal{F}_{G_1}$ 的拓扑扩张性，我们可以将 X_i 选得足够大，使得 $\bigcup(P_i - X_i)$ 中唯一的非逃逸点是边界点 $\bigcup \partial P_i \cap \Lambda(G_1)$；也就是说，其他所有点在 $\mathcal{F}_{G_1}$ 的迭代作用下都会逃出这些环带。令 n_k 表示满足如下条件的序列：$\mathcal{F}_{G_1}^{n_k} : P^{n_k} \longrightarrow P_{i(n_k)}$ 将 b 映入 $X_{i(n_k)}$。存在一个 $\varepsilon_0 > 0$，使得在 $\mathcal{F}_{G_1}^{n_k}(b)$ 附近，极限集不包含于由两条直线形成的锥中，这两条直线

相交于（在 $\mathcal{F}_{G_1}^{n_k}(b)$ 处），夹角为 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0)$。将 Koebe 畸变定理应用于 $(\mathcal{F}_{G_1}^{n_k})^{-1}$ 在 $X_{i(n_k)}$ 上的情形，我们看到，$(\mathcal{F}_{G_1}^{n_k})^{-1}$ 只会轻微地扭曲极限集和这两条直线。这意味着，一个极限 $B \in K(b)$ 包含巴西利卡的肢的副本，因此不是拓扑弧。

由拟共形映射的紧性可知，对于每个 $B \in K(b)$，都存在某个 $A \in K(a)$，它与 B 之间存在一个固定 0 的 $\mathbb{C}$ 拟共形同胚。但这与 A 和 B 不同胚相矛盾。□

类似的证明还可以得到以下结论。

命题 6.9。

(1) 设 Σ 是一个双曲非紧曲面，G 是与 $(\Sigma$ 相关的一个几何有限 *Bers* 边界群，$\mathcal{C})$。那么 $\Lambda(G)$ 与 $J(Q)$ 不拟共形同胚。*(2)* 设 g 是一个具有胖*Basilica Julia* 集的有理映射。假设无界 *Fatou* 分支 $U_\infty(g)$ 既非吸引的也非超吸引的。那么 $J(g)$ 与 $J(Q)$ 不拟共形同胚。此外，对于任意几何有限 *Bers* 边界群，$J(g)$ 与 $\Lambda(G)$ 均不拟共形同胚。

证明。 1）设 U 是 Q 的一个有界 Fatou 分支，且 $a \in \partial U$ 是一个非接触点。那么，对于无穷多个 n，有 $d(Q^n(a),\ \mathbb{R}) \asymp 1$。由于后临界集包含在 $\mathbb{R}$ 中，我们可以对 a 的一个邻域进行放大，使其在无穷多个 n 下达到一个确定的尺寸，同时保持畸变有界。随后，采用与命题 6.8 相同的证明，可以证明不存在将 U 映射到 $\Omega(G)-\Delta_\infty$ 的一个持续抛物分支 Δ 的全局拟共形同胚。

由于 Σ 非紧，$\Omega(G)-\Delta_\infty$ 至少有一个连通分支是持续抛物型。因此，$\Lambda(G)$ 与 $J(Q)$ 不拟共形同胚。

2） $J(g)$ 的一个非接触点要么位于 g 的某个唯一有界 Fatou 分支的边界上，要么不位于任何有界 Fatou 分支的边界上。$J(g)$ 中后一类非接触点称为尖点。

根据引理 6.3，Julia 集 $J(g)$ 不包含临界点。由于 $U_\infty(g)$ 既不是吸引的，也不是超吸引的，$U_\infty(g)$ 必为抛物的。由条件（1）和（2）可知，相应的抛物不动点 a 不可能位于任何有界 Fatou 分支的边界上。因此，a 必为 $J(g)$的尖点。设$A \in K(a)$ 是 Julia 集在豪斯多夫拓扑下于 a 附近的放大极限的一个聚点。则 A 是一条射线。

另一方面，设 $b \in J(Q)$ 是一个尖点。由与前一种情形相同的论证，存在某个 $B \in K(b)$，它在拓扑上不是一条射线。因此，$J(g)$ 不与 $J(Q)$拟共形等价。

同样的论证适用于几何有限的 Bers 边界群 G的极限集 $\Lambda(G)$ 的任意尖点。事实上，$\Lambda(G)$ 的尖点 b对于 G中的任何元素都不是抛物不动点，因此，通过选择 $\Lambda(G)$ 在 b附近的适当放大，我们得到某个 $B \in K(b)$，它在拓扑上不是一条射线。因此，$J(g)$不与 $\Lambda(G)$拟共形同胚。□

6.3.2.巴西利卡极限集的双色接触树。设 G 是一个 Bers 边界群，$\Lambda(G)$ 是其极限集。设 $\mathcal{T}$为 $\Omega(G)-\Delta_\infty$ 各连通分支的接触图；也就是说，$\mathcal{T}$的顶点与 $\Omega(G)-\Delta_\infty$ 的连通分支相对应，若两个对应的连通分支相接，则在这两个顶点之间连一条边。注意，$\mathcal{T}$是一棵每个顶点的度数都为无限的树。$\Lambda(G)$ 的平面结构赋予 $\mathcal{T}$一种带状结构，即与每个顶点相邻的边具有循环次序。

我们根据对应的连通分支是否为纯偶然抛物型，分别将每个顶点着为黑色或白色。我们将无限树 $\mathcal{T}$及其顶点集 $\mathcal{V}=\mathcal{B}\sqcup\mathcal{W}$ 的划分合称为 G的双色接触树。若两个双色接触树之间存在保持着色和带状结构的同胚，则称它们等价。

根据命题 6.8，双色接触树是一个拟共形不变量；也就是说，两个拟共形等价的 Basilica 极限集具有等价的双色接触树。显然，对于两个 Basilica 极限集，它们之间存在保类型的同胚，当且仅当它们的双色接触树等价。因此，在此情形下，猜想 1.14 等价于以下命题。

猜想 6.10. 对于几何有限 *Bers* 边界群的极限集，双色接触树是一个完备的拟共形不变量；也就是说，两个 *Basilica* 极限集拟共形等价，当且仅当它们的双色接触树同构。

用这种表述方式，定理 A，或者更准确地说，命题 6.7 表明，两个所有顶点均为黑色的 Basilica 极限集拟共形等价。

可以如下构造无穷多个互不等价的双色接触树。设 Σ 是一个带有 2 个尖点的亏格为 g 的曲面。设 $\mathcal{C}$ 是一个严格分离的多重曲线，使得

$$\Sigma=\Sigma_1+\ldots+\Sigma_g$$

其中每个 Σ_i 都是一个二次穿孔环面，因此它们构成一个结点曲面链。 Σ 的两个尖点分别包含于 Σ_1 和 Σ_g中，并且对于 $i\in\{2,\ldots\ldots,\ g-1\}$，结点曲面 Σ_i 通过Σ_i 上的两个结点奇点分别与 Σ_{i-1} 和 Σ_{i+1} 相连。因此，我们有一个覆盖映射，将与 $\widehat{\ }$相关联的双色接触树 $\mathcal{T}$覆盖到由 g 个顶点 $v_1-v_2-v_3-\cdots-v_g$组成的双色链树 $\mathcal{T}$ 上，其中$\backsim v_1$，v_g为白色顶点，而 $v_2,\ \cdots,\ v_{g-1}$为黑色顶点。我们将 $\mathcal{T}$视为空间图的底层树。本质路径是空间图中的一条边路径，它对应于一个标准形中的字。注意，链树 $\mathcal{T}$中的任意本质路径（可能包含$\widehat{\ }$回溯）都可以提升为 $\mathcal{T}$中的一条不含回溯的路径。设 $g\geqslant 4$ 为偶数。则根据构造， $\mathcal{T}$的两个白色顶点之间的距离（相对于边度量）或者是偶数，或者是一个奇数 $\geqslant g-1$。此外，这两种可能性都能实现。这一性质（更准确地说，是最小的奇距离 $g-1$）显然是双色接触树等价类的不变的量。因此，我们得到如下命题。

引理 6.11. 存在无穷多个拟共形不等价的巴西利卡极限集，即 $\mathfrak{B}$ 中存在无穷多个克莱因点。

6.3.3. 巴西利卡 *Julia* 集的双色接触树。 要完整描述巴西利卡 Julia 集在保型同胚下的分类（如猜想 1.14 所述），要复杂得多。这里不提供完全拟共形不变量，而是考察以下粗略不变量；它们已足以说明存在无穷多个拟共形不等价的巴西利卡 Julia 集。

设 g 是一个具有 Basilica Julia 集的有理映射， $\mathcal{T}$ 是它的接触树。我们根据相应的连通分支是否为拟圆盘，将顶点染成黑色或白色。下面很容易构造出无穷多个彼此不等价的双色接触树。令 g_0 为一个次数为 $2d+1$ 的临界点固定多项式，使得每个临界点的局部次数均为 3，且相应的不变 Fatou 分支 U_1、……、U_d 构成一条长度为 d 的链。这里，对每个 $i\in\{2\cdots,\ d-1\}$，连通分支 U_i 在两个排斥不动点处分别与 U_{i-1} 和 U_{i+1} 接触。注意， ∂U_1 （以及 ∂U_d）上有两个排斥不动点，但只有

其中一个是接触点。令 g 为由 g_0 经过一次简单钳合得到的抛物多项式，使得 U_i、$i \in \{2、\ldots\ldots、d-1\}$ 仍为超吸引的，而 U_1、U_d 则变为抛物的，其轨道位于 U_1、U_d 中，并收敛到这些连通分支上的非接触不动点。假设 $d \geqslant 4$ 为偶数。那么，按照 § 6.3.2 中的说明，根据构造，$\mathcal{T}$ 的两个白色顶点之间的距离（按边度量计算）要么是偶整数，要么是奇整数 $\geqslant d-1$。因此，我们得到如下结论。

引理 6.12. 存在无穷多个彼此拟共形不等价的 *Basilica Julia* 集，即在 $\mathfrak{B}$ 中存在无穷多个有理点。

6.4. **定理 A、定理 B 和定理 C 的证明。** 现在我们汇集这些要素，证明三个主要定理。

定理 *A* 的证明。假设 $\Omega(G)$ 由两个分支组成。那么 G 是拟 Fuchsian 的，且 $\Lambda(G)$ 是一个拟圆。

否则，G 是一个几何有限 Bers 边界群。根据命题 5.1 和 § 5.4，我们可以为 G 构造一个 Basilica Bowen-Series 映射 $\mathcal{F}_G$。

假设 $\Sigma = \Delta_\infty/G$ 是紧的。根据命题 6.7，极限集 $\Lambda(G)$ 与 $J(Q)$ 拟共形等价。

假设 Σ 不是紧的。反设 $\Lambda(G)$ 与某个有理映射 $J(g)$ 拟共形等价。由于 g是胖 Basilica，$\Lambda(G)$ 也是胖 Basilica。

如果 U_∞ 是吸引的或超吸引的，那么根据命题 6.7，$J(g)$与 $J(Q)$拟共形等价。因此，$\Lambda(G)$ 与 $J(Q)$拟共形等价。这与命题 6.9 (1) 矛盾。

如果 U_∞ 既不是吸引的也不是超吸引的，那么根据命题 6.9 (2)，$J(g)$与 $\Lambda(G)$ 不拟共形等价，这就产生了矛盾。因此，$\Lambda(G)$ 不与任何 Julia 集拟共形等价。□

定理 *B* 的证明。“若”方向由命题 6.7 得出，“唯若”方向由命题 6.9 (2) 得出。□

定理 *C* 的证明。该定理由引理 6.11 和引理 6.12 推出。 □

7. David Hierarchy

本节将通过证明后临界有限二次多项式 z^2-1 的 Julia 集位于 David 层级之巅，来确立定理 D；也就是说，$J(z^2-1)$ 是几何有限共形动力系统所产生的巴西利卡世界中的拱形巴西利卡。

7.1. **广义巴西利卡 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}$–映射。**我们先讨论一些微妙之处，这些问题使我们无法使用巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射来为非紧曲面上的巴西利卡 Bowen–Series 映射建模，然后说明如何修改这一构造以解决这些问题。非紧曲面上的巴西利卡 Bowen–Series 映射将称为非紧巴西利卡 *Bowen–Series* 映射。

7.1.1. 持久抛物元素。设 G是与 $(\Sigma, \mathcal{C})$相关的几何有限 Bers 边界群。回顾一下，不连续域 $\Omega(G)$ 中唯一的非 Jordan 连通分支记作 Δ_∞。还要回顾 § 5 中 Basilica Bowen-Series 映射 $\mathcal{F}_G$ 的构造。如果曲面 Σ是非紧的，那么拼图片 P 的边界与极限集 $\Lambda(G)$ 的交点可能不是接触点（见 § 5.3）。具体而言，表示 $\rho\colon \pi_1(\Sigma) \to G$ 将与 Σ 的尖点自由同伦的曲线同伦类映为 G的抛物元素，而 $\partial P \cap \Lambda(G)$ 中不是 $\Lambda(G)$ 接触点的点对应于群 G的这类持续抛物型元素。

另一方面，Basilica 映射 $\mathfrak{Q}$–对应的每个 Basilica 拼图块都在接触点处与 Julia 集 $J(Q)$ 相交。因此，为了将非紧的 Basilica Bowen-Series 映射作为 $(J, \mathfrak{Q})$–映射来建模，我们需要扩展拼图片的定义。

7.1.2. 广义二进区间。 我们从定义 4.1 中给出的二进区间的一种推广开始。

定义 7.1 （广义二进区间）。 设 $I = [s, t] \subseteq \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是一个区间。若存在一个整数 m，以及集合 $\{(0,1), (0, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, 1)\}$ 中的一个区间 J，使得 σ_2^m 是 Int $I = (s, t)$ 与 J 之间的同胚，则称该区间为广义二进区间。

注意，区间 $[0, \frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3}, 1]$ 也是广义二进区间，因为它们的内部在 σ_2 下分别映射到 $(0, \frac{2}{3})$ 和 $(\frac{1}{3}, 1)$。因此，$[0, 1]$ 中端点属于 $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ 的任意闭区间都是广义二进区间。更一般地，根据定义可得以下刻画。

引理 7.2. 区间 I 是广义二进区间，当且仅当存在非负整数 p、n，使得 $\partial I \subseteq \{\frac{p}{2^n}、\frac{p+\frac{1}{3}}{2^n}、\frac{p+\frac{2}{3}}{2^n}、\frac{p+1}{2^n}\}$。

如果点 $\mathbb{S}^1$ 最终映射到 0，我们就将它标为红色；如果它最终映射到周期 $\frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{2}{3}$，则标为蓝色。因此，广义二进区间$I$ 的边界点会被标为红色或蓝色。我们分别将它们称为二进边界点或非二进边界点。这些端点分别对应于 $\Omega(G) - \Delta_\infty$ 的连通分支边界上的接触点或尖点。采用定义 7.1 中的记号，我们称像 J 为广义二进区间 I的类型。根据定义，二进区间是类型为 $[0, 1]$的广义二进区间。对于两个类型相同的广义二进区间 I_1, I_2，存在 m, n，使得 $\sigma_2^{-n} \circ \sigma_2^m$是 I_1 与 I_2之间的同胚。

注 7.3。 注意，广义二进区间的四种类型对应于对 I 端点进行着色的四种不同方式。

广义二进区间具有二进区间的一些良好性质。其中一个重要特征如下的分解性质。

引理 7.4。 设 $I = [s、t]$ 是广义二进区间。则有以下结论。

- 存在一个将 $I = [s、x] \cup [x、t]$ 分解为广义二进区间的分解，使得 x 的颜色为红色。• 存在一个将 $I = [s、x] \cup [x、t]$ 分解为广义二进区间的分解，使得 x 的颜色为蓝色，前提是 $s、t$ 中至少有一个的颜色为红色。

证明。 我们利用 σ_2^m 将区间 I 放大为列表中的某个区间

$$\left\{[0,1], [0, \frac{2}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{1}{3}, 1]\right\}.$$

我们可以对四个区间中的每一个逐一明确验证该陈述；例如，其中一个具有分解 $[0、\frac{2}{3}] = [0、\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}、\frac{2}{3}]$ 以及 $[\frac{1}{3}、\frac{2}{3}] = [\frac{1}{3}、\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}、\frac{2}{3}]$，使得中间点的颜色为红色。□

通过归纳应用引理 7.4，我们可以构造一个广义二进分解，实现给定的颜色序列。

推论 7.5。 设 $(c_i)_{i=1}^N$ 是一个序列，其中每个 $c_i \in \{blue、red\}$，以及至少一个 c_i 都是红色。那么存在一个分解，使得

$$\mathbb{S}^1 = [s_1, s_2] \cup ... \cup [s_N, s_1],$$

使得每个区间 $[s_i, s_{i+1}]$ 都是广义二进的，且 s_i 具有颜色 c_i。

7.1.3. 巴西利卡 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}$–映射。令 $Q_{\mathrm{pcf}}(z)=z^2-1$为具有巴西利卡 Julia 集的二次后临界有限多项式。令 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}$ 为形如$Q^{-n}{}_{\mathrm{pcf}}\circ Q_{\mathrm{pcf}}^m$的共形映射集合。§ 4 中巴西利卡 $\mathfrak{Q}$–映射的构造可直接推广，从而得到巴西利卡 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}$–映射。

令 U_0 为包含 0 的 Q_{pcf} Fatou 分支。注意，$Q_{\mathrm{pcf}}^2|_{U_0}$ 与 $z^2|_{\mathbb{D}}$共形共轭—由于 z^2 在 $\mathbb{S}^1$上是扩张的，我们可以像 § 4.1.2 中那样，定义与弧 $I_{U_0}[0,\ 1]$、$I_{U_0}[0,\ \frac{2}{3}]$、$I_{U_0}[\frac{1}{3},\ 1]$、$I_{U_0}[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}]\subset\partial U_0$ 对应的内部拼图块。有了这些内部拼图块，我们便可完全按照定义 4.4 中的方法，为任意有界 Fatou 分支 U 定义广义二进分段 $I_U[s,\ t]$ 以及广义内部拼图块 $P_U[s,\ t]$。根据以上观察，对于任意两个内部拼图块 $P_{U_i}[s_i,\ t_i]$、$i\in\{1,\ 2\}$，若$[s_i,\ t_i]$属于同一类型，则存在 m、n，使得Q^{-m} pcf $\circ Q_{\mathrm{pcf}}^n$：$P_{U_1}[s_1,\ t_1]\longrightarrow P_{U_2}[s_2,\ t_2]$ 是一个同胚。

广义内部拼图的定义

$$(\{U_i\},P_{U_i}[s_{i,j},s_{i,j+1}])\,;i\in\{0,\cdots,r\},\ j\in\{1,\cdots,n_i\},$$

与定义 4.6 相同，只需将二进分段替换为广义二进分段。它会导出一个广义 ***Basilica*** 拼图 $(P_i)_{i\in\mathcal{I}}$，如定义 4.9 和 § 4.1.3 所述。

设 P_i 是一个广义 Basilica 拼图片。那么它要么属于肢型，要么属于躯干型。若属于躯干型，则 P_i 与某个有界 Fatou 分支U相交于一个广义内部拼图片 $P_U[s,\ t]$ 其中 $[s$是某个广义二进区间，$t]$。注意，若 s 不是二进的，则 $\partial P_i\cap J(Q_{\mathrm{pcf}})$ 中对应的点不是接触点。注意，在这种情形下，拼图片共有 5 种类型：一种肢型，以及四种不同的躯干型，具体取决于相应广义二进区间端点的颜色（参见注 7.3）。给定两个属于同一类型的拼图片 $P_i,\ P_j$存在一个典范映射 $F=Q^{-m}{}_{\mathrm{pcf}}\circ Q_{\mathrm{pcf}}^n$，它是从 P_i 到 P_j的同胚。按照这种类型约定，定义 4.13 中马尔可夫细分的定义也自然适用于广义 Basilica 拼图。

定义 7.6（参见定义 4.16）。设 $\mathfrak{P}=\{P_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是一个广义 Basilica 拼图，$\mathfrak{P}^1=\{P_{ij}\}_{(ij)\in\mathcal{I}^1}$ 是 $\mathfrak{P}$ 的一个马尔可夫细分。我们将典范映射 $\mathcal{F}=\{F_{ij}:P_{ij}\longrightarrow P_j\}_{(ij)\in\mathcal{I}^1}$ 的集合称为一个广义 ***Basilica*** $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}$–映射，并记作

$$\mathcal{F}:\mathfrak{P}^1\to\mathfrak{P}.$$

由于映射 Q_{pcf} 没有抛物不动点，类似的论证可得定理 4.23 和命题 4.22 的以下对应结果（其中修改使用引理 7.4 和推论 7.5）。

定理 7.7。设 $\mathcal{F}\colon\mathfrak{P}^1\to\mathfrak{P}$ 是一个广义 ***Basilica*** $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}-$ 映射。假设 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的。那么存在一个修正细化 $\widetilde{\mathcal{F}}\colon\widetilde{\mathfrak{P}}^1\to\widetilde{\mathfrak{P}}$，它特别地在 ***Julia*** 集上与 $\mathcal{F}\colon\mathfrak{P}^1\to\mathfrak{P}$ 拓扑共轭，并且

- *the induced Markov map* $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ *is symmetrically hyperbolic;*
- *the induced Markov map* $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathrm{bdd}}$ *on* $\bigcup_{s\in\{0,\ldots,r\}}\partial^I U_s$ *is symmetrically hyperbolic.*

7.2. **一般 Basilica Bowen-Series 映射的模型**。现在，我们通过适当的广义 Basilica 映射 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}-$，为与几何有限 Bers 边界群 G 相关联的（可能非紧的）Basilica Bowen-Series 映射 $\mathcal{F}_G$ 建立模型。这将产生一个 David 同胚，将 $J(Q_{\mathrm{pcf}})$ 映到 $\Lambda(G)$，正如定理 D 所承诺的那样。

命题 7.8。设 Σ为一个双曲曲面，设 G 为与 $(\Sigma$、$\mathcal{C})$相关联的几何有限 *Bers* 边界群。设 $\mathcal{F}_G$ 为一个 *Basilica Bowen-Series* 映射。那么，存在一个广义 *Basilica* 映射 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}-$ $\mathcal{F}$： $\mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$ ，它在 $J(Q_{\mathrm{pcf}})$上与 $\mathcal{F}_G$ *David* 共轭。更确切地说，这意味着存在一个 *David*$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$映射 H： $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ，使得

$$H \circ \mathcal{F}(z) = \mathcal{F}_G \circ H(z)$$

对所有 $z \in J(Q_{\mathrm{pcf}})$。

证明。 与命题 6.7 的证明相同，设 $\Delta_s, s \in \{1, ..., j_0\} \cup \{\infty\}$是与压缩核心多边形相关的 $\Omega(G)$ 的连通分支，并设 Δ_s, $s \in \{j_0 + 1, ..., j_1\}$是 $\Omega(G)$ 中与经由 $\mathcal{F}_G$ 拉回压缩核心多边形相关的额外连通分支。它们由以下性质刻画。

- $\Delta_s, s \in \{1, ..., j_0\} \cup \{\infty\}$ 是 $\Omega(G)$ 中与至少两个 0 级拼图块相交的连通分支；
- $\Delta_s, s \in \{1,..., j_0, j_0 + 1, ..., j_1\} \cup \{\infty\}$ 是 $\Omega(G)$ 中与至少两个第 1 级拼图片相交的连通分支。

将诱导的马尔可夫映射记为

$$(\mathcal{F}_G)_{\mathrm{bdd}} : \bigcup_{s=1}^{j_1} \partial^I \Delta_s \longrightarrow \bigcup_{s=1}^{j_1} \partial^I \Delta_s, \text{ and}$$
$$(\mathcal{F}_G)_\infty : \partial^I \Delta_\infty \longrightarrow \partial^I \Delta_\infty.$$

（诱导的马尔可夫映射 $(\mathcal{F}_G)_s$ 的定义见 § 5.5。）注意，根据命题 5.9,

- 对于 $s \neq \infty$, $(\mathcal{F}_G)_s$ 的任一断点都是对称抛物型；• 对于 $s = \infty$, 断点对应于曲面 Σ 的尖点时是对称抛物型，否则则是对称双曲型。

通过与命题 6.1 类似的构造，我们得到一个广义巴西利卡 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}-$ 映射 $\widetilde{\mathcal{F}}$: $\widetilde{\mathfrak{P}}^1 \to \widetilde{\mathfrak{P}}$，它在 $J(Q_{\mathrm{pcf}})$ 上与 $\mathcal{F}_G$ 在 $\Lambda(G)$ 上的限制拓扑共轭。

因此，根据定理 7.7，存在一个广义巴西利卡 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}-$ 映射 $\mathcal{F}$： $\mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$，使得

~• $\mathcal{F}|_{J(Q_{\mathrm{pcf}})}$ 与 $\mathcal{F}|_{J(Q_{\mathrm{pcf}})}$ （因而也与 $\mathcal{F}_G|_{\Lambda(G)}$）拓扑共轭；• 诱导的马尔可夫映射 $\mathcal{F}_\infty$ 是对称双曲的；并且• 在 $\bigcup_{s\in\{0,...,r\}} \partial^I U_s$ 上的诱导马尔可夫映射 $\mathcal{F}_{\mathrm{bdd}}$ 是对称双曲的。

令 H： $J(Q_{\mathrm{pcf}}) \to \Lambda(G)$ 为共轭 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}_G$ 的同胚。注意，对每个 $s \in \{1,..., j_1\} \cup \{\infty\}$，映射 H 都诱导一个圆周同胚，将 $\mathcal{F}_s$ 共轭到 $(\mathcal{F}_G)_s$。由于此共轭不会将抛物型映到双曲型，根据命题 3.5，它可延拓为圆盘上的 David 同胚。将此 David 映射与 U_s 和 Δ_s 的黎曼映射复合，可得到 $H|_{\partial U_s}$： $\partial U_s \to \partial \Delta_s$ 的 David 延拓 $H|_{U_s}$： $U_s \longrightarrow \Delta_s$ 。我们注意到，圆盘上的 David 映射与 U_s, Δ_s 的黎曼映射复合后仍是 David 同胚，因为 U_s 是约翰区域（参见 [LMMN25, 命题 2.5]）。

利用动力学，我们将映射 $H|_{U_s}$ 提升到 Q_{pcf} 的所有有界 Fatou 分支$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$上，从而得到一个同胚 H： $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$。根据 [LMMN25，命题 2.5]，，映射 H 在 Fatou 集上是 David 同胚。因此，引理 6.6 表明 H 是一个全局 David 同胚。□

7.3. **Basilica Julia 集的模型**。 现在假设 g 是一个具有 Basilica Julia 集的几何有限有理映射。那么，唯一的非 Jordan 圆盘 Fatou 分支 U_∞ 在 g下是全不变的。因此，存在一个后临界有限

多项式 g_0，它在 Julia 集上与 g 拓扑共轭（参见 [LMMN25，推论 9.7]）。

引理 7.9. 存在一个 *David* 同胚 $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得 $H(J(g_0)) = H(J(g))$。

证明。 若 g 是一个多项式，则所需 David 同胚的存在性可由 [LMMN25, 定理 9.2] 的证明推出。现在设 $g|_{U_\infty}$ 与一个次数为 d 的抛物 Blaschke 乘积 B共形共轭。此时，除了 [LMMN25, 定理 9.2]，中所实施的手术外，还需要将g_0 在其无穷远吸引域上的作用（该吸引域可由 $z^d|_{\mathbb{D}}$共形建模）替换为 Blaschke 乘积 B。这一步也可以通过 David 手术完成，具体如下

（1）将 z^d 共轭到 B 的圆周同胚可延拓为圆盘上的 David 同胚（参见 [LN24a, 定理 1.5]），并且（2）后临界有限多项式的无穷远吸引域是一个约翰区域。综合这两点，即可得到所需的全局David映射，将 $J(g_0)$ 映到 $J(g)$。□

我们继续研究上述后临界有限多项式 g_0。注意，与多项式 $z^2 - 1$不同，映射 g_0 可能在 Julia 集上含有临界点。然而， g_0 的任何 Julia 临界点必定严格预周期。在这种情形下，产生接触点有一种新的机制： $J(g_0)$ 的接触点可以是一个严格预周期的简单临界点（或其某个迭代原像），它最终映到一个非接触的 Julia 点上（见图 1.4）。另一方面，（广义）巴西利卡 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}$–映射会保持接触点。因此，一般来说，不可能构造一个广义巴西利卡 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}$–映射，使其在 Julia 集上与 g_0 共轭。我们分两步克服这一困难。

- 首先，我们为 g_0关联一个拓扑扩张的 $(J(g_0),\ \mathfrak{G}_0)$–映射，其中 $\mathfrak{G}_0$是形如 $g_0^{-m} \circ g_0^n$的局部保形映射的集合。构造方式是，使得与该 $(J(g_0),\ \mathfrak{G}_0)$–映射关联的任意内部拼图块的边界都只由 $J(g_0)$的接触点构成。•然后，我们在适当选取的巴西利卡$\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}$–映射与上述 $(J(g_0),\ \mathfrak{G}_0)$–映射之间构造一个共轭。下面的引理对于上述第一步至关重要。

引理 7.10。 令 $\sigma_d :\ \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ 为映射 $\sigma_d(t) = dt$。令 X 为在 σ_d下不变的有限集，即 $\sigma_d(X) \subseteq X$。令 $X' \subsetneq X$ 为一个真不变子集。令 N 为 X中周期点的周期的一个充分大的公倍数。

则存在 Y^0、$Y^1 \subseteq \mathbb{S}^1$，使得 $X - X' \subseteq Y^0 \subseteq Y^1$，其中 $X' \cap Y^0 = \varnothing$，并且满足以下条件。集合 Y^0、Y^1 确定一个马尔可夫映射

$$\mathcal{F} : \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^0,$$

其中， $\mathcal{A}^i$ 由 $\mathbb{S}^1 - Y^i$ 的各连通分支的闭包组成，使得对每个 $I \in \mathcal{A}^1$，存在满足以下条件的 $J \in \mathcal{A}^0$ 。

（*1*）存在 n、m，使得

$$F_I := \sigma_d^{-n} \circ \sigma_d^m : I \longrightarrow J$$

是一个同胚；（*2*） $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的；以及（*3*）每个断点都是对称的。

注意，由于 X' 是不变的， $X' \cap Y^1 = \varnothing$。

证明。 令 k 充分大，并选择会导出划分 $\mathcal{A}^0$ 的 $X - X' \subseteq Y^0 \subseteq \sigma_d^{-k}(X) - X'$，使得

• 对于 $a \in Y^0 - X$, $\sigma_d(a) \in Y^0$; • 对于 $A \in \mathcal{A}^0$, $|\partial A \cap (X - X')| \leqslant 1$; 若 $\partial A = \{a, b\} \cap (X - X') \neq \varnothing$, 比如 $a \in X - X'$, 则存在某个$1 \leqslant n \leqslant k$使得 $\sigma_d^n(b) = a$; 若 $\partial A \cap (X - X') = \varnothing$, 则 σ_d 在 A上是单射。

设 $A \in \mathcal{A}^0$。情况（1）：假设 $\partial A \cap (X - X') = \varnothing$。则 σ_d： $A \longrightarrow \mathbb{S}^1$是单射，且 $\sigma_d(\partial A) \subseteq Y^0$。我们将 $Y^1 \cap A = (\sigma_d\colon\ A \to \sigma_d(A))^{-1}(Y^0)$ 定义为 Y^0 在 σ_d 下的拉回。

情况（2）：假设 $\partial A \cap (X - X') \neq \varnothing$。设 $A = [a、\ b]$ 和 $a \in X - X'$。令 n_a 为 a 的预周期（即， n_a 是使 $\sigma_d^{n_a}(a)$ 成为周期的最小整数），并令 $N \gg k$。将 σ_d 的动力学 $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ 提升到万有覆盖 $\widetilde{\sigma_d}\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$。由于对于某些 $j \in \{1、\ \cdots、\ k\}$ 和 $N \gg k$，有 $\sigma_d^j(b) = a$，因此$\widetilde{\sigma_d}^{n_a+N}[a,\ b]$是一个长度可整除 d^{n_a}的区间。考虑反分支 $\widetilde{\sigma}_d^{-n_a}$的一个提升，使得 $\widetilde{\sigma}_d^{-n_a} \circ \widetilde{\sigma}_d^{n_a+N}$ 固定 a。注意，区间$\widetilde{\sigma}_d^{-n_a} \circ \widetilde{\sigma}_d^{n_a+N}([a、\ b])$的长度是一个整数，并且投影 $\sigma_d^{-n_a} \circ \sigma_d^{n_a+N}$将 a、b映射到 a。注意， $[a、\ b]$ 的像可能会绕圆多圈。我们将 $Y^1 \cap A$ 定义为 Y^0 在 $\sigma_d^{-n_a} \circ \sigma_d^{n_a+N}$ 下的拉回。

这就构造出了马尔可夫映射 $\mathcal{F}\colon\ \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^0$，其中，根据区间 $I \in \mathcal{A}^1$ 是在第一种还是第二种情形下构造的，该映射要么是 σ_d，要么是$\sigma_d^{-n} \circ \sigma_d^{n+N}$，对于某个 n。按照构造，每个周期断点都是不动点，且其左右导数为 d^N，因此每个断点都是对称的。映射 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的，因为导数至少为 $d > 1$。□

现在，我们将仿照命题 6.5，构造一个巴西利卡 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}$–映射，使其在拓扑上模拟与具有巴西利卡 Julia 集的后临界有限多项式 g_0相关联的一个 $(J(g_0),\ \mathfrak{G}_0)$–映射。这将导出它们在 Julia 集上的作用之间的拟共形共轭。

我们将在稍微一般化的情形下进行构造。

命题 7.11。设 $\tilde{g}$ 是一个具有巴西利卡 *Julia* 集的次双曲有理映射（即，每个 *Fatou* 临界点都收敛到一个吸引周期，且每个 *Julia* 临界点都严格预周期）。那么，存在一个拓扑扩张的 $(J(\tilde{g})、\ \widetilde{\mathfrak{G}})-$ 映射 $\mathcal{G}$，以及一个巴西利卡 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}-$映射 $\mathcal{F}\colon\ \mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$，使得 $\mathcal{F}$ 在 $J(Q_{\mathrm{pcf}})$ 上与 $\mathcal{G}$ 拟共形共轭。

证明。令 $(V_i,\ X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 为一个有限集合，使得

• 每个 V_i 都是 $\tilde{g}$的一个有界 Fatou 分支; • $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} V_i$ 是连通的，在 $\tilde{g}$ 下不变且包含临界点; • $X_i \subseteq \partial V_i$ 由 ∂V_i上的有限个点组成，而 $X_i' \subseteq X_i$ 由 X_i 中的非接触点组成; • $2 \leqslant |X_i|$; 对于 $i \neq j$; 并且• $\bigcup X_i$ 和 $\bigcup X_i'$ 都在 $\tilde{g}$ 下不变。

注意，映射 $\tilde{g}\colon \bigcup \partial^I V_i \longrightarrow \bigcup \partial^I V_i$是有限个圆的并上的拓扑扩张覆盖映射。因此，由引理 7.10，我们得到 $(V_i,\ Y_i^0)_{i\in\mathcal{I}}$和 $(V_i,\ Y_i^1)_{i\in\mathcal{I}}$以及相应的马尔可夫映射 $\mathcal{G}_{\mathrm{bdd}}\colon \bigcup \partial^I V_i \longrightarrow \bigcup \partial^I V_i$。由引理 7.10 (3)，该映射是对称双曲的。现在，仿照 § 4 中巴西利卡$\backsim\mathfrak{Q}$–映射的构造，我们构造出一个拓扑扩张的 $(J(\tilde{g}),\ \mathfrak{G})$–映射 $\mathcal{G}$，它来自映射 $\mathcal{G}_{\mathrm{bdd}}$。

最后，类似于命题 6.1 的证明，我们可以根据数据 $(V_i,\ Y_i^0)_{i\in\mathcal{I}}$和 $(V_i,\ Y_i^1)_{i\in\mathcal{I}}$构造 $\mathfrak{P}$ 和 $\mathfrak{P}^1$，以及一个巴西利卡 $\mathfrak{Q}_{\mathrm{pcf}}$–映射 $\mathcal{F}\colon\mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$，它在 Julia 集上与 $\mathcal{G}$ 拓扑共轭。可能还需要

转而采用修正细化（定义 4.18），这样我们可以假设 $\mathcal{F}$ 的每个断点都是对称双曲的（参见定理 4.23）。因此，所需的 $\mathbb{C}$的拟共形同胚 $\widehat{}$可以通过应用命题 6.7 的论证得到，它将 $\mathcal{F}|_{J(Q_{\mathrm{pcf}})}$ 与 $\mathcal{G}|_{J(\tilde{g})}$ 共轭。□

7.4. **定理 D 的证明**。如果 $[K]$ 是克莱因的，那么根据命题 7.8，我们有 $[J(Q_{\mathrm{pcf}})] \geq [K]$。

现在设 $[K]$ 是有理的；也就是说，对于某个几何有限有理映射，有 $[K] = [J(g)]$ 。所需的 David 同胚由引理 7.9 中的 David 同胚（将 $J(g_0)$ 映到 $J(g)$）与命题 7.11 中的拟共形同胚（选取 $\tilde{g} = g_0$，此时拟共形映射将 $J(Q_{\mathrm{pcf}})$ 映到 $J(g_0)$）复合而成。因此， $[J(Q_{\mathrm{pcf}})] \geq [K]$。

最后，如果 $[K] = [J(g)]$，且 g 没有抛物周期，那么 g 是次双曲的。在这种情况下，等式 $[J(Q_{\mathrm{pcf}})] = [K]$ 正是命题 7.11 的内容。□

注 7.12。构造一个将 $J(Q_{\mathrm{pcf}})$ 映到巴西利卡 Julia 集/极限集的 David 映射，关键在于无穷远吸引域的 John 性质以及$_{W^{1,\,1}}$$- Q_{\mathrm{pcf}}$的 Julia 集的可去性。包含抛物元的巴西利卡 Julia 集/极限集不具备这些性质。为了证明 $\geq$ 是一个偏序（即，抛物巴西利卡可以通过 David 同胚转变为一个“更抛物的”巴西利卡的可能性），需要克服这一问题。

Appendix A. Cubic polynomials

本节将说明如何修改碎片化动力系统的构造，以实现定理 F。

回顾 $\mathrm{Per}_1(0) := \{f_a(z) = z^3 + \frac{3a}{2}z^2 \div a \in \mathbb{C}\}$。令 $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Per}_1(0)$ 为主双曲分支，即包含 z^3的双曲分支。边界 $\partial\mathcal{H}$ 是一条若尔当曲线（见 [Roe07]）。任意几何有限多项式$f_a \in \partial\mathcal{H}$ 都有一个巴西利卡 Julia 集，并且属于以下两种类型之一（见图 1.4）：

- （抛物型）自由临界点 $-a$ 位于抛物吸引盆中，此时 $a \in \partial\mathcal{H}$ 对应于一个尖点；• （Julia型）自由临界点 $-a$ 位于 Julia 集 $J(f_a)$上。

定理 *F* 的证明。如果 f_a 是 Julia 型，那么 f_a 没有抛物周期。因此根据命题 7.11，有 $[J(f_a)] = [J(Q_{\mathrm{pcf}})]$。

为了构造抛物型映射的模型，我们考虑 $F(z) = z^3+2iz^2$。注意， F在 $-i$ 处有一个抛物不动点（见图 1.4，其中图形旋转了 90 度）。令 U_0， U_1为 F的超吸引 Fatou 分支和抛物 Fatou 分支。注意， U_0 和 U_1 都是不动的，并且任何有界 Fatou 分支最终都会被映射到 U_0或 U_1。对于每个 $i \in \{0,\ 1\}$，映射 $F|_{\partial U_i}$与 $\sigma_2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ 拓扑共轭。因此，我们可以像对 $Q(z) = z^2 - \frac{3}{4}$的内部拼图那样，利用二进区间为 U_0 和 U_1定义内部拼图，并通过 F 将它们拉回，从而为每个有界 Fatou 分支 o

f

F。因此，在当前情形下可以原样进行巴西利卡 $\mathfrak{Q}$-映射的构造，从而得到巴西利卡 $\mathfrak{F}$-映射（回忆例 2.3(4)，此类映射是分片共形的，其分片具有 $F^{-n} \circ F^m$ 的形式）。$\tilde{}$与命题 6.5 类似，我们可以构造一个巴西利卡 $\mathfrak{F}$-映射 $\mathcal{F}$，它在 $J(F)$ 上与 f_a 拓扑共轭。根据命题 6.7 的证明，在可能对 $\mathcal{F}$ 进行修正细化之后，我们得到一个巴西利卡 $\mathfrak{F}$-映射 $\mathcal{F}$，它在 $J(F)$ 上与 f_a 拟对称共轭。这证明了 $[J(f_a)] = [J(F)]$。□

Appendix B. Schwarz reflections

现在我们描述如何从一个施瓦茨反射映射构造碎片化动力系统，并由此证明定理 E。

B.1. 这一族 Σ^*。 我们先回顾一下实现 $\bar{z}^d$ 与所谓的项链反射群 配对的施瓦茨反射空间（详情见 [LMM22] ）。考虑以下次数为 $d+1$ 的有理映射族:

$$\Sigma_d^* := \left\{ f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \cdots - \frac{1}{dz^d} : f|_{\widehat{\mathbb{C}}-\overline{\mathbb{D}}} \text{ is univalent} \right\}.$$

对于 $f \in \Sigma_d^*$，设 $\Omega = \overline{f}(\mathbb{C}-\mathbb{D})$。那么，与 f 相关联的施瓦茨反射映射定义为

$$S \equiv S_f : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$
$$z \mapsto f \circ \eta \circ (f|_{\widehat{\mathbb{C}}-\overline{\mathbb{D}}})^{-1}(z),$$

其中 $\eta(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ 是沿单位圆的反射。这里稍微滥用一下记号，我们也称 $S \in \Sigma_d^*$。注意， S 在 Ω ∂ 上连续延拓为恒等映射。

B.1.1. 施瓦茨动力平面的不变划分。 由 Σ_d^* 导出的施瓦茨反射映射 S 的动力平面自然分裂为两个不变子集。 S 的无穷远吸引域 定义为

$$\mathcal{B}_\infty(S) = \{z \in \overline{\Omega} : S^n(z) \to \infty\},$$

且 S 的极限集是

$$\Lambda(S) = \partial\mathcal{B}_\infty(S).$$

水滴定义为 $T(S) = \mathbb{C} - \Omega$，而去奇异化液滴/基本瓦片 $T^0(S)$ 由 $T(S)$ 删去 $\partial T(S) = f(\mathbb{S}^1)$上的有限个奇异点（共形尖点或双重点）得到。无穷远吸引域（的闭包）的补集构成铺砌集

$$\mathcal{T}_\infty(S) = \widehat{\mathbb{C}} - \overline{\mathcal{B}_\infty(S)} = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : S^n(z) \in T^0 \text{ for some } n\}.$$

请注意，铺砌集具有层级结构。

B.1.2. 项链反射群。 如果克莱因反射群 G可由下列（定向）圆 C_1，...， C_d 上的反射生成，且这些圆围成闭圆盘 D_1，...， D_d，并满足以下条件，则称其为项链反射群:

(1) 圆盘 D_i 的内部两两不相交；(2) 每个圆 C_i 都与 C_{i+1} 相切（模 $i+1$ d）；且 (3) 无界分支 $\mathbb{C} - \bigcup C_i$ 的边界与每个 C_i相交。

（这等价于说，圆堆积 $\{C_i\}$ 的神经复形 2–是连通的且为外平面；参见图 B.1，并参见 [LLM22]。）数 d称为G的秩。 G 的 Bowen–Series 映射定义为

$$\mathcal{F} : \bigcup_{i=1}^{d} D_i \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$
$$z \mapsto r_i(z) \text{ if } z \in D_i,$$

其中 r_i 是沿圆 C_i的反射。

如果若尔当域 V是一个理想 n–边形，则 ∂V由 n 条非奇异解析弧组成，且相邻两弧相切地相交，形成 V的向外尖点。我们称 ∂V 上的尖点为 V的理想顶点。

设 G 为一个项链反射群。我们将圆 C_i的切触点集合记为 $\mathfrak{s}$。设 $\mathcal{P}_\infty(G)$ 为 $\widehat{\mathbb{C}} - \left(\bigcup \text{Int } D_i \cup \mathfrak{s}\right)$的无界分支。

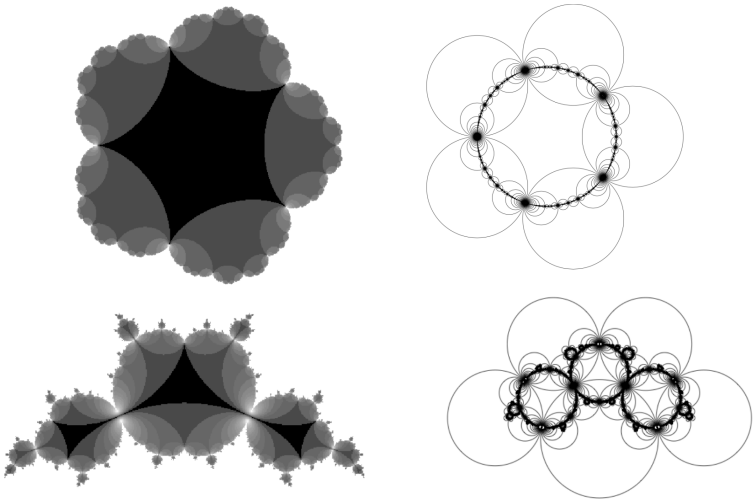

FIGURE B.1. 图中展示了 Σ_4^*（左）的两个施瓦茨反射的极限集，以及相应项链反射群的极限集（右）。

注意， $\mathcal{P}_\infty(G)$ 是 G–作用于 Δ_∞的一个基本域，其中 Δ_∞ 是不连续域 $\Omega(G)$ 中的无界分支，$\Omega(G)$ 是 G的不连续域。设 $T^0(G)$ 为 $\widehat{\mathbb{C}} - \left(\bigcup \text{Int } D_i \cup \mathfrak{s}\right)$的有界分支之并。注意，Int $T^0(G)$是理想多边形之并。我们称 $T^0(G)$为 G的 基本瓦片。事实上， $T^0(G)$是 G–作用于 G的 铺砌集 $\mathcal{T}_\infty(G)$ 上的一个基本域，其定义为

$$\mathcal{T}_\infty(G) = \Omega(G) - \Delta_\infty.$$

（见图 B.1。）

如果 $T^0(G)$ 是连通的，那么 G 是一个拟福克斯反射群，且其极限集是一个拟圆。否则， G是一个 Bers 边界反射群，其极限集是一个巴西利卡。

B.1.3. 作为配对的施瓦茨反射。以下结果表明，由 Σ_d^* 产生的施瓦茨反射，恰好是秩为 $d+1$ 的项链反射群与反多项式 z^d之间的共形交配。

命题 B.1。 [LMM22，定理 A] 设 $S \in \Sigma_d^*$。那么存在一个秩为 $d+1$ 的项链反射群 G，使得 S是 z^d与 G的配对。更准确地说，

(1) $S|_{\mathcal{B}_\infty(S)}$ 与 $\overline{z}^d|_{\mathbb{D}}$共形共轭；并且 *(2)* S 在 $\mathcal{T}_\infty(S)$上的限制与 $\mathcal{F}_G$ 在 $\mathcal{T}_\infty(G)$上的限制共形共轭。

特别地，如果 $S \in \text{Int } \Sigma_d^*$，则极限集是一条若尔当曲线。如果 $S \in \partial\Sigma_d^*$，则极限集是一个巴西利卡。

反过来，对于任意秩为 $d+1$ 的项链反射群 G，存在 $S \in \Sigma_d^*$，使得 S 是 $\overline{z}^d$ 与 G的配对。

B.1.4. 施瓦茨铺砌集的几何，以及施瓦茨巴西利卡类的无穷性。设$S \in \partial\Sigma_d^*$ 是 $\overline{z}^d$ 与 Bers 边界反射群 G的配对。若 $\mathcal{T}_\infty(S)$的连通分支 U 对应于 $\Omega(G)$ 的连通分支 Δ，且后者具有该性质（参见 § 6.3.1），则称其为纯偶然抛物型或持续抛物型。等价地，若连通分支 U与 $\partial T(S)$的共形尖点的迭代原像集不相交，则称其为纯偶然抛物型。

回想一下，若尔当域 U， $V \subset \mathbb{C}$ 称为在一点处彼此相切 $z_0 \in \partial U \cap \partial V$，如果存在 $\theta_0 \in [0,\ 2\pi)$ 使得对每个 $\varepsilon > 0$ 都有

存在 $\delta > 0$ 具有如下性质：$\{z_0 + re^{i(\theta_0+\theta)} : \ r \in (0, \ \delta), \ \ |\theta| < \pi/2 - \varepsilon\} \subset U$且 $\{z_0 + re^{i(\theta_0+\theta)} : \ r \in (-\delta, \ 0), \ \ |\theta| < \pi/2 - \varepsilon\} \subset V$。利用拟共形手术，我们得到以下关于有界$\widehat{}$连通分支 $\mathcal{T}_\infty(S) = \mathbb{C} - \Lambda(S)$ 边界几何的命题（参见 [LN24a，定理 1.7]）。

命题 B.2. 设 $S \in \partial\Sigma_d^*$。设 U, V 是 $\mathcal{T}_\infty(S)$ 的两个有界分支。则以下结论成立。

(1) 若 $\partial U \cap \partial V \neq \varnothing$，则它们相切。 *(2)* 若 U 是纯偶然抛物型，则边界 ∂U 是拟圆。 *(3)* 若 U 持续抛物型，则边界 ∂U 与花椰菜 $J(z^2 + \frac{1}{4})$ 拟共形等价。

证明概要。 若 $\mathcal{T}_\infty(S)$ 的一个分支与 $T(S)$ 相交，我们称之为主 分支，否则称为非主分支。若 U 是 $\mathcal{T}_\infty(S)$ 的一个非主分支，则存在 S 的某次迭代，将 U 的一个开邻域共形地映到 U_0 的一个开邻域，其中 U_0 是某个主分支。此外， $\Lambda(S)$ 的每个接触点在 S 的某次迭代下都会映到 $\partial T(S)$ 上的一个双重点（见 [LMM22，命题 48]）。因此，为证明该命题，我们可以假设 U， V 是 $\mathcal{T}_\infty(S)$ 的主分支，且 $\partial U \cap \partial V$ 是 $\partial T(S)$ 上的一个双重点。

1. 根据我们的假设， ∂U 与 ∂V 在 $\partial T(S)$的一个双重点 p 相交。更准确地说， $\partial T(S)$ 的两条局部非奇异弧在 p 相交，接触阶为 1（参见[LMM21，命题 2.10]）。特别地，这两条非奇异弧在 p具有共同切线。该共同切线的两个法向方向 $\ell^{\pm}$ 是 S 的排斥方向。关于 S 在一个（接触阶为 1 的）双重点附近的局部抛物动力学的标准论证表明，在 p附近的局部区域内， $K(S)$ 的非逃逸集$= \mathbb{C} - \mathcal{T}_\infty(S)$ 包含于两个任意小角度且包含 $\ell^{\pm}$ 的扇形中（见图 B.1，参见 [MR25，第 3.2] 节）。因此，每个连通分支 U、 V 在 p都包含一个角度任意接近 π 的扇形；也就是说，它们相切地接触。

2. 和 3. 注意，对于 $\mathcal{T}_\infty(S)$ 的主分支 U，我们有 $S(\partial U) = \partial U$。映射 S 分别在理想边界 $\partial^I U \cong \mathbb{S}^1$ 和 $\partial^I(\widehat{\mathbb{C}} - U) \cong \mathbb{S}^1$ 上诱导出两个拓扑扩张的、 C^1 的共形马尔可夫映射 g_{in} 和 g_{out}。这些映射具有拼图结构，并且通过圆周同胚 h 拓扑共轭；该同胚是若尔当曲线∂U的焊接同胚。这些理想边界映射 g_{in}、 g_{out} 的周期断点来自 ∂U 上的双重点或共形尖点（属于 $\partial T(S)$）。我们还作出以下补充观察。

- 如果 $g_{\text{in/out}}$ 的一个周期断点来自 $\partial T(S)$ 的一个双重点，那么 S 在双重点附近的局部抛物动力学意味着，该断点对于$g_{\text{in/out}}$而言是对称抛物型的。• $\partial T(S)$ 的共形尖点属于类型 $(3, \ 2)$（参见 [LMM21，命题 2.10]）。如果 $g_{\text{in/out}}$ 的一个周期断点来自 $\partial T(S)$ 的一个尖点，那么 S 在类型为 $(3, \ 2)$的共形尖点附近的局部抛物动力学意味着，该断点对于 g_{in}而言是对称抛物型的，但对于 g_{out} 而言是对称双曲型的（参见 [LMM24，命题 A.3], [LLMM23a，第 4.2.1 节。]）。

如果 U 是纯偶然抛物型的，那么 $\partial T(S)$ 在 ∂U 上的所有奇异点都是双重点。因此在这种情况下， g_{in}， g_{out} 的所有周期断点都是对称抛物的。根据命题 3.2，共轭 h是拟对称的，因此焊接曲线 ∂U 是拟圆。（也可以将 [CJY94 的论证与定理 6.1], 结合起来，再利用 U 在每个双重点处都包含一个角度任意接近 π 的扇形这一事实，证明 ∂U 是拟圆。）

另一方面，如果 U 是持续抛物型的，那么 ∂U 上的 $\partial T(S)$ 至少有一个奇异点是尖点。因此，在这种情况下，共轭映射 h （从 g_{out} 到 g_{in}）

会将某个双曲不动点映到一个抛物点，但绝不会反过来。根据 [McM26], , 与 h相关的焊接曲线 ∂U 与$J(z^2+\frac{1}{4})$拟共形等价。□

我们可以为 $S \in \partial\Sigma_d^*$ 构造一棵双色接触树：顶点对应于$\widehat{\mathbb{C}} - \Lambda(S)$的有界分支；如果两个相应的分支相接，则在这两个顶点之间连一条边。若顶点对应的分支是纯粹意外抛物的，则将该顶点标为黑色，否则标为白色。根据命题 B.2，这棵双色接触树是一个拟共形不变量。按照 § 6.3.2 中的方法，很容易构造出无穷多个 Bers 边界反射群，使其双色接触树两两非同构。根据命题 B.1，我们得到无穷多个$\Sigma^* = \bigcup_d \Sigma_d^*$ 中的施瓦茨反射，其双色接触树两两非同构。因此，我们有以下引理。回想一下，$\mathfrak{U}_{\partial\Sigma^*} \subseteq \mathfrak{B}$ 是由 $\partial\Sigma^*$中的施瓦茨反射的极限集所产生的巴西利卡的拟共形类的集合。

引理 B.3. 对于施瓦茨反射 $S \in \partial\Sigma^*$，存在无穷多个拟共形不等价的 ***Basilica*** 极限集，即 $\mathfrak{U}_{\partial\Sigma^*}$ 是一个无限集。

推论 B.4. 交集 $\mathfrak{U}_{\partial\Sigma^*} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Klein}} = \varnothing$。

证明。令 $S \in \partial\Sigma^*$。注意，对于 S，总存在一个持续抛物分支。由命题 B.2 可知，这个持续抛物分支不是拟圆。由于几何有限克莱因群的 Basilica 极限集的每个若尔当域补连通分支都是拟圆盘，结论得证。□

B.2. **尖点 Basilica**。本小节将分析$\mathfrak{U}_{\partial\Sigma^*} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Klein}}$的交集。回顾一下，

$$R(z) = az^4 + \frac{1-4a}{3}z^3 + \frac{2+a}{3} \tag{B.1}$$

这是四次多项式，其中选择 $a = \frac{1}{12} + \frac{i\sqrt{2}}{24}$使得临界点$1 - \frac{1}{4a}$ 被映到抛物不动点 1。它的 Julia 集是一个尖点 Basilica，见图 1.3。接下来，我们将证明 $\mathfrak{U}_{\partial\Sigma^*} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}} = [J(R)]$。

B.2.1. 拟共形等价的必要条件。我们先给出 Basilica Julia 集落在交集 $\mathfrak{U}_{\partial\Sigma^*} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}}$ 中的一个必要判据。

引理 B.5。设 g 是一个几何有限有理映射，其 ***Basilica Julia*** 集满足以下性质：

- 每个若尔当域法图连通分支的边界要么是拟圆，要么与花椰菜拟共形等价；并且
- 任意两个相邻的若尔当域法图连通分支都相切。

如果 g 的某个 ***Fatou*** 分支是拟圆盘，那么 g 的每个若尔当域法图连通分支都是拟圆盘，即 $J(g)$ 是胖 ***Basilica***。

证明。设 U 是一个拟圆盘 Fatou 分支。注意，根据我们的假设，它的像也是拟圆盘（因为它不可能是花椰菜）。因此，经过迭代后，我们可以假设它在 g 下是不变的。反设存在一个非拟圆盘 Fatou 分支 V。那么，经过同样的推理并迭代后，我们可以假设 V 是不变的。设 b 是 ∂V 上的抛物不动点。

证明的其余部分与引理 6.4 的证明类似。令 $U_0 = U$，U_1，……，$U_k = V$为连接 U 与 V的 Fatou 分支链。于是，对所有 i，g 都固定 U_i 。记 $v_i = \partial U_i \cap \partial U_{i+1}$，并令 $v_k = b$。那么 v_i 是重数 3 的抛物的。这意味着 U_1 同时是 v_0 和 v_1的吸引盆，这就产生了矛盾。引理得证。□

推论 B.6。 设 $S \in \partial\Sigma_d^*$。假设 $\Lambda(S)$ 与某个几何有限有理映射 g的 *Julia* 集拟共形等价。那么 $\mathcal{T}_\infty(S)$的每个连通分支都是持续抛物型的。

证明。 设 g 是一个几何有限有理映射，其 Julia 集与 $\Lambda(S)$ 拟共形等价。根据命题 B.2， g 满足引理 B.5 的假设。注意到 S 至少有一个持续抛物分支。（事实上， $T^0(S)$ 的一个外围连通分支在其边界上有一个保角尖点，因此 $\mathcal{T}_\infty(S)$ 中相应的主分支是持续抛物型。）因此， g 至少有一个不是拟圆盘的约旦域法图连通分支。于是，根据引理 B.5，没有约旦域法图连通分支是拟圆盘，推论得证。□

B.2.2. $R-$区间。 现在我们将定义 $R-$区间，作为当前设定中二进区间（见定义 4.1）和广义二进区间（见定义 7.1）的类似物。作这些修改，是因为抛物不动点 R 的大轨道中同时存在尖点和接触点。 $R-$ 区间的概念及其依据端点着色（用以标记尖点和接触点）进行的分类，见定义 B.7 和定义 B.11。随后，我们在引理 B.12 中研究 $R-$区间的适当分解，以及相关子区间长度的比值；该引理是当前设定下引理 4.27 的对应结果。

令 U_0 为 R的唯一不变有界 Fatou 分支。注意， $R:\partial U_0 \longrightarrow \partial U_0$ 在 $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 上与 σ_3 拓扑共轭，其中我们选择共轭，使抛物不动点对应于角 0。此外，对于任意有界 Fatou 分支 U，存在 $l \geqslant 1$，使得 R^l 将 U 共形映射到 U_0。借助这个共形映射，我们可以用内部角对有界 Fatou 分支的边界进行参数化。注意，如果 $U \neq U_0$，那么

- ∂U 上的接触点对应于
$$\left\{ \frac{p}{3^n} \mod 1 : p \equiv 1 \mod 3,\ n \geqslant 1 \right\} \cup \{0\};\ \text{and}$$
- ∂U 的尖点对应于
$$\left\{ \frac{p}{3^n} \mod 1 : p \equiv 2 \mod 3,\ n \geqslant 1 \right\}.$$

另一方面，

- ∂U_0 上的接触点对应于 $\{\frac{p}{3^n}$ 模 1： $p \equiv 1$ 模 3， $n \geqslant 1\}$；
- ∂U_0 的尖点对应于 $\{\frac{p}{3^n}$ 模 1： $p \equiv 2$ 模 3， $n \geqslant 1\} \cup \{0\}$。

我们根据一个非零 3进有理数是$p \equiv 1$ 模 3 还是 $p \equiv 2$ 模 3，将其标为 $t = \frac{p}{3^n}$ 红色 或蓝色 。为简单起见，在下文中，假设 0 是蓝色的。这对应于 Fatou 分支 U_0 的情形。0 为红色的情形类似，只需进行常规的修改。

定义 B.7。 如果存在 $n \geqslant 0$，使得 σ_3^n将区间 $I = [s,t] \subseteq \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 同胚地映射到 $(0,1)$、 $(0,\frac{2}{3})$ 或$(\frac{1}{3},1)$，则称区间 $I = [s,t] \subseteq \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为一个 $R-$区间 。我们称唯一满足 $\sigma_3^n(x_I) = \frac{1}{2}$的点 $x_I \in (s,t)$为 $R-$区间 I的标记点 。根据一个 $R-$区间被映射到 $[0,1], [0,\frac{2}{3}]$ 还是 $[\frac{1}{3},1]$，我们称其为 A、B 或 C 型。

Note that $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},1]$ are also $R-$intervals.

注 B.8. 1）请注意，与定义 7.1 中引入的广义二进区间不同，一个 $R-$区间的类型并非仅由其端点的着色决定（参见注 7.3）。例如，A 型

区间 $[0,\ 1]$ 的两个端点都是蓝色；但对于 A 型区间 $[0,\ -\frac{1}{3}]$，左端点是蓝色，而右端点是红色。

2) x_I 处的标记点对于在 § B.2.3 中定义不同拼图片之间的典范映射很重要。

与引理 7.4 类似，对于一个 R–区间，我们有以下较弱的分解性质。

引理 B.9. 设 $I=[s,t]$ 为一个 R–区间。给定两种不同颜色 $\{c_1,c_2\}=\{blue,red\}$，存在一个分解 $I=[s,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup[x_2,t]$，将其分为若干 R–区间，使得 x_i 为红色 c_i。

证明。设 $m\geqslant 0$，使得 $\sigma_3^m(I)$ 是列表中的一个区间

$$[0,1],[0,\frac{2}{3}],[\frac{1}{3},1].$$

对于这些区间，我们有所需的分解：

$$[0,1]=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\cup[\frac{2}{3},1],\quad [0,1]=[0,\frac{2}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{7}{9},1],$$
$$[0,\frac{2}{3}]=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},\frac{5}{9}]\cup[\frac{5}{9},\frac{2}{3}],\quad [0,\frac{2}{3}]=[0,\frac{2}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},\frac{2}{3}],$$
$$[\frac{1}{3},1]=[\frac{1}{3},\frac{4}{9}]\cup[\frac{4}{9},\frac{2}{3}]\cup[\frac{2}{3},1],\quad [\frac{1}{3},1]=[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{7}{9},1].$$

由于 σ_3^m 是 Int I 中 3– 进有理数上的保色映射，我们可以通过 σ_3^m 拉回上述分解，从而得到所需的 I 的分解。□

由归纳法可得如下结论。

推论 B.10. 设 $(c_i)_{i=1}^{2N}$ 是由蓝色和红色组成的交替颜色序列（指标按模 N 计算）。则存在一个分解

$$\mathbb{S}^1=[s_1,s_2]\cup[s_2,s_3]\cup\ldots\cup[s_{2N},s_1],$$

使得每个区间 $[s_i,s_{i+1}]$ 都是一个 $R-$ 区间，且 s_i 的颜色为 c_i。

定义 B.11. 如果一个 $R-$ 区间 I 的两个端点颜色不同，我们称其为交替的。我们将交替 R–区间的子类型定义如下。

- $A1$，如果 I 属于类型 A，且左端点为红色；
- $A2$，如果 I 属于类型 A，且左端点为蓝色；
- B，如果 I 属于类型 B，此时右端点必为蓝色（因此左端点必为红色）；
- C，如果 I 属于类型 C，此时左端点必为红色。

令 $I=[s,t]$ 为一个交替 R–区间。若每个 J_i 都是交替 R–区间，且它们按线性顺序排列，则称 $I=J_1\cup J_2\cup\ldots\cup J_{2M+1}$ 为一个交替分解。若存在 J_i，使得 J_i 的标记点 x_{J_i} 与 I 的标记点 x_I 相等，且 J_i 与 I属于相同类型，则称交替分解 $I=J_1\cup J_2\cup\ldots\cup J_{2M+1}$是可容许的。注意，我们允许它们具有不同的子类型。

Let

$$\mathcal{N}^+(I,M):=\{|J_1|/|I|:I=J_1\cup\ldots\cup J_{2M+1}\text{ is an alternating decomposition}\}.$$

类似地，我们定义

$$\mathcal{N}^-(I,\ M):=\{|J_{2M+1}|/|I|:\ I=J_1\cup\ldots\cup J_{2M+1}\text{是一个交替分解}\}.$$

我们还定义

$$\mathcal{N}_o^+(I,M) := \{|J_1|/|I| : I = J_1 \cup \ldots \cup J_{2M+1} \text{ is an admissible alternating decomposition}\};$$

and

$$\mathcal{N}_o^-(I,M) := \{|J_{2M+1}|/|I| : I = J_1 \cup \ldots \cup J_{2M+1} \text{ is an admissible alternating decomposition}\}.$$

下面的引理展示了构造交替分解和可容许交替分解时的灵活性（关于二进分解，参见引理 4.27）。

引理 B.12. 设 $I = [s,t]$ 是一个交替 R–区间。设 $M \geqslant 2$。则有以下结论。

- 若 I 是类型 $A1$，则

$$\mathcal{N}^{\pm}(I,M) = \mathcal{N}_o^{\pm}(I,M) \sqcup \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3^{M+1}}\right\} = \left\{\frac{2}{3^j} : j \in \{1,\ldots,M+1\}\right\}.$$

- 若 I 是类型 $A2$，则

$$\mathcal{N}^{\pm}(I,M) = \mathcal{N}_o^{\pm}(I,M) = \left\{\frac{1}{3^j} : j \in \{1,\ldots,M\}\right\};$$

- 若 I 是类型 B，则

$$\mathcal{N}^{+}(I,M) = \mathcal{N}_o^{+}(I,M) \sqcup \left\{\frac{1}{3^M}\right\} = \left\{\frac{1}{3^j} : j \in \{1,\ldots,M\}\right\};$$

$$\mathcal{N}^{-}(I,M) = \mathcal{N}_o^{-}(I,M) \sqcup \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{1}{3^j} : j \in \{1,\ldots,M\}\right\}.$$

- 如果 I 是类型 C，那么

$$\mathcal{N}^{+}(I,M) = \mathcal{N}_o^{+}(I,M) \sqcup \{\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{1}{3^j} : j \in \{1,\ldots,M\}\right\};$$

$$\mathcal{N}^{-}(I,M) = \mathcal{N}_o^{-}(I,M) \sqcup \left\{\frac{1}{3^M}\right\} = \left\{\frac{1}{3^j} : j \in \{1,\ldots,M\}\right\}.$$

特别是，如果 $M \geqslant 2$，那么存在可容许交替分解。

证明。我们可以先通过 σ_3 的某次迭代，将 I 扩张到列表 $\{[0、\ 1]、\ [0、\ \frac{2}{3}]、\ [\frac{1}{3}、\ 0]\}$ 中的某个区间。-所有包含 $M = 1$ 的可能交替分解都列于图 B.2 中。集合 $\mathcal{N}^{\pm}(I、\ M)$ 可以通过对某个交替区间进行归纳分解，简单地计算得出，分解为交替的 R–区间。

$\mathcal{N}_o^{\pm}(I、\ M)$ 的计算类似，最小的可容许交替分解列于图 B.
3 □中

B.2.3. 典范映射。我们的下一个目标是对保色马尔可夫映射进行建模。根据注 B.8，我们需要考虑不同类型的 R–区间之间的映射。可以通过在 σ_3 的不动点 1
2 的某个迭代原像处引入一个额外的断点，按如下方式构造此类映射。

设 $q^+ \colon [0, -\frac{2}{3}] \longrightarrow [0,\ 1]$ 为映射

$$q^+(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \sigma_3(x) & \text{if } x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]. \end{cases}$$

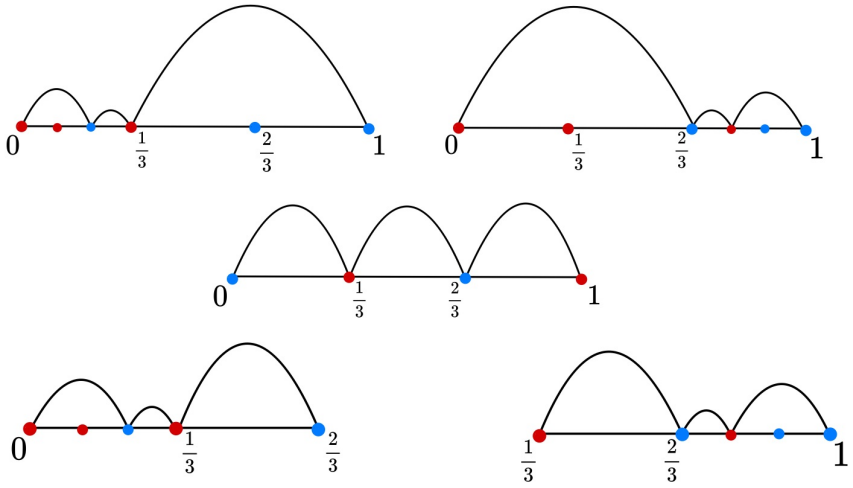

FIGURE B.2. 所有可能的、带有 $M = 1$ 的交替分解列表。最上面的两个对应于子类型$A1$的两种不同交替分解。中间的一个对应于子类型 $A2$，最下面的两个分别对应类型 B 和类型 C。

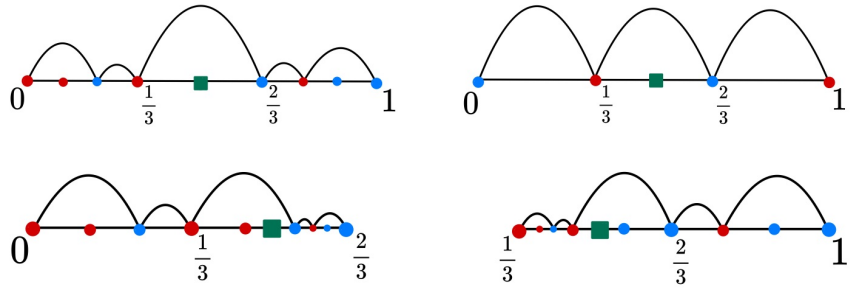

FIGURE B.3. 四种不同子类型的最小可容许交替分解列表。绿色顶点对应于标记点 1 2。

类似地，设 $q^-\colon [\frac{1}{3},\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$ 为映射

$$q^-(x) = \begin{cases} \sigma_3(x) & \text{if } x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ x & \text{if } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

由我们的构造可知，任意两个 R–区间都可以通过 σ_3、$q^{\pm}$ 的迭代及其逆映射相互关联。我们将此总结如下。

引理 B.13。设 $I_1 = [s_1, t_1]$、$I_2 = [s_2, t_2]$ 是两个 R–区间。

- 如果它们属于同一类型，那么存在 n、m，使得 $\sigma_3^{-n} \circ \sigma_3^m$ 是 I_1 与 I_2 之间的同胚。
- 如果 I_1 属于类型 B，且 I_2 属于类型 A，那么存在 n、m，使得 $\sigma_3^{-n} \circ q^+ \circ \sigma_3^m$ 是 I_1 与 I_2 之间的同胚。
- 如果 I_1 属于类型 C，且 I_2 属于类型 A，那么存在 n、m，使得 $\sigma_3^{-n} \circ q^- \circ \sigma_3^m$ 是 I_1 与 I_2 之间的同胚。
- 如果 I_1 属于类型 B，且 I_2 属于类型 C，那么存在 n、m，使得 $\sigma_3^{-n} \circ (q^-)^{-1} \circ q^+ \circ \sigma_3^m$ 是 I_1 与 I_2 之间的同胚。

我们称上述映射（或其逆映射）为两个 R–区间之间的典范映射。注意，典范映射将标记点 x_{I_1} 映射到标记点 x_{I_2}。

注意，典范映射在标记点处可能存在断点。然而，如果 I_1， I_2 属于同一类型，那么典范映射在标记点处是光滑的。这一观察启发了上述定义 B.11 中可容许分解的定义，并将在下文定理 B.14 的证明中用到。

B.2.4. 巴西利卡 $\mathfrak{R}$–映射。设 $R(z)$ 如 (B.1) 中所定义。设 $\mathfrak{R}$为形如 $R^{-n}\circ R^m$ 的共形映射族。

回想一下， R 的唯一不变有界 Fatou 分支记为 U_0。为了考虑每个 R–区间中的标记点，我们将对应于 $I_{U_0}[0,1]$ 的 0 级内部拼图块定义为 ∂U_0在 U_0 中的一个适当的捏合邻域，该邻域在 R 于 ∂U_0 上的两个不动点处被捏合（参见 § 4.1.2）。因此，Int $P_{U_0}[0,1]$ 是两个拓扑圆盘的并集，它们在内部角为 0 的抛物不动点和内部角为$1\ 2$ 的排斥不动点处相接（后者对应于 R–区间 $[0,1]$的标记点）。内部 R–拼图块 $P_{U_0}[0,\frac{2}{3}]$和 $P_{U_0}[\frac{1}{3},1]$的定义类似，在相应的标记点处进行挤压。通过在 R下反复迭代取原像，我们得到任意有界 Fatou 分支 U和 R–区间$[s,t]$对应的内部R–拼图块 $P_U[s,t]$（参见定义 4.4）。我们将这些标记点视为额外的断点。

设 P_i, P_j 是两个内部 R–拼图片。根据引理 B.13，存在一个典范映射 F，它是从 P_i到 P_j的同胚。此外，该典范映射在 P_i的两个连通分支上分别具有形式 $Q^{-m}{}_{\text{pcf}}\circ Q^n_{\text{pcf}}$。

内部 R–拼图的定义

$$(\{U_i\}, P_{U_i}[s_{i,j}, s_{i,j+1}])\,; i\in\{0,\cdots,r\},\ j\in\{1,\cdots,n_i\}$$

与定义 4.6 相同，只需将二进分段替换为 R–分段，并附加假设：分解

$$\partial U_i = \bigcup_j I_{U_i}[s_{i,j}, s_{i,j+1}]$$

是交替的（见定义 B.11）。它按照定义 4.9 和 § 4.1.3 诱导出一个巴西利卡 R–拼图 $(P_i)_{i\in\mathcal{I}}$。

定义 4.13 中马尔可夫细化的定义推广到此情形时，需附加假设：相应的$I_{U_i}[s_{i,j},s_{i,j+1}]\subseteq\partial U_i$ 交替分解是可容许的（见定义 B.11）。

设 $\mathcal{F}\colon\mathfrak{P}^1\to\mathfrak{P}$ 是一个巴西利卡 $\mathfrak{R}$–映射。则有诱导的马尔可夫映射

$$\mathcal{F}_\infty : \partial^I U_\infty \longrightarrow \partial^I U_\infty \text{ and } \mathcal{F}_{\text{bdd}} : \bigcup \partial^I U_i \longrightarrow \bigcup \partial^I U_i.$$

注意，诱导的马尔可夫映射的断点由相应 R–区间的边界点和标记点组成。我们指出，根据容许条件（见定义 B.11）， R–区间的每个标记点最终都是不动点。因此，根据引理 B.13，任何不动标记点都是光滑点，因为包含该不动标记点的 1 级和 0 级拼图片的类型相同。

经过上述准备，并使用推论 B.10 和引理 B.12 代替引理 4.27，我们得到定理 4.23 和命题 4.22 的以下对应结论。

定理 B.14。设 $\mathcal{F}$： $\mathfrak{P}^1\to\mathfrak{P}$是一个巴西利卡 $\mathfrak{R}$–映射。假设 $\mathcal{F}$ 是拓扑扩张的。那么存在一个修正细化 $\widetilde{\mathcal{F}}$： $\widetilde{\mathfrak{P}}^1\to\widetilde{\mathfrak{P}}$，特别地，它在 *Julia* 集上与 $\mathcal{F}$： $\mathfrak{P}^1\to\mathfrak{P}$ 拓扑共轭，并且

~• 诱导的马尔可夫映射 $\mathcal{F}_\infty$ 是对称双曲的；并且• 对于定义在 $\bigcup_{s\in\{0\ldots,r\}}\partial U_s$ 上的诱导的马尔可夫映射 $\widetilde{\mathcal{F}}_{\text{bdd}}$，

–对应R–区间中标记点的断点是对称双曲的；– 对应R–区间中边界点的断点是对称抛物型的。

B.2.5. 拟共形等价的充分条件。

命题 B.15。 设 $S \in \partial\Sigma_d^*$。假设 $\mathcal{T}_\infty(S)$ 的每个连通分支都是持久抛物的。那么 $\Lambda(S)$ 与 $J(R)$拟共形等价。

证明。 证明与定理 A、定理 B 和命题 7.8 类似。我们讨论必要的修改。

设 Δ 是 $\mathcal{T}_\infty(S)$ 的一个连通分支，并且与水滴 $T^0(S)$ 有非平凡交集（即，按照命题 B.2 中的记号， Δ是 $\mathcal{T}_\infty(S)$的主分支）。设$T_\Delta = T^0(S) \cap \Delta$。则 T_Δ 是一个理想多边形。我们将T_Δ 的理想顶点标记为红色或蓝色，具体取决于该顶点是 $\Lambda(S)$ 的接触点还是 $\partial\Delta$的尖点。设 $T_\Delta^1 \subseteq \Delta$ 是 T_Δ 在 S下的拉回。则， T_Δ^1 也是一个理想多边形；我们根据 S是否将其映射到 T_Δ的红色或蓝色理想顶点，把 T_Δ^1 的每个理想顶点标记为红色或蓝色。注意，由于 S 在$\Lambda(S)$上没有临界点， T_Δ^1 的红色（分别为蓝色）顶点是 $\Lambda(S)$ 的接触点（分别是 $\partial\Delta$的尖点）。现在我们将修改多边形 T_Δ ，以确保其顶点具有交替颜色。

为此，令 $V^0 \subseteq V^1 \subseteq \partial\Delta$ 为 T_Δ 和 T_Δ^1 的理想顶点集合。由于 Δ 持续抛物型，两种颜色都会出现在 V^0 和 V^1 中。我们选择一个集合 $\widetilde{V}$，使得

- $V^0 \subseteq \widetilde{V} \subseteq V^1$；并且~• V 中顶点的着色相对于 $\partial\Delta$ 上的循环次序交替排列。

注意，这是可行的，因为 S 将 $\partial\Delta$ 中由 V^0 的两个相邻顶点界定的弧映到其在 $\partial\Delta$ 中的补集（见图 B.4）。这一交替条件至关重要，因为我们将应用推论 B.10 和引理 B.12，为 R 构造相应的内部拼图。

令 $\widetilde{T}_\Delta$ 为 $\widetilde{V}$ 的凸包。令 $\widetilde{T}_\Delta^1$ 为 S^2 下的拉回。这里，我们使用S^2 ，使映射保向。注意， $\widetilde{T}_\Delta^1$ 的理想顶点着色也是交替的。如有必要，通过对 S^2 进行更高次迭代，~我们可以假设， $\partial\Delta$ 中由 V 的两个相邻顶点界定的每条弧都被分解为至少 5 条弧，从而可以应用引理 B.12。

~ ~令 $T = \bigcup_\Delta T_\Delta$，其中并集取遍 $\mathcal{T}_\infty(S)$的所有主分支。我们~将 T 称为 S的压缩核心多边形。

通过与命题 6.1 类似的构造，我们得到一个巴西利卡 $\mathfrak{R}$–映射$\widetilde{\mathcal{F}}$： $\widetilde{\mathfrak{P}}^1 \to \widetilde{\mathfrak{P}}$ ，使得 $\widetilde{\mathcal{F}}|_{J(R)}$ 与 $S|_{\Lambda(S)}$拓扑共轭。因此，根据定理 B.14，存在一个巴西利卡 $\mathfrak{R}$–映射 $\mathcal{F}$： $\mathfrak{P}^1 \longrightarrow \mathfrak{P}$ ，使得

~• $\mathcal{F}$ 在 $J(R)$上与 $\mathcal{F}$ （因而也与 S）拓扑共轭；• 诱导的马尔可夫映射 $\mathcal{F}_\infty$ 是对称双曲的；并且• 对于 $\bigcup_{s\in\{0\ \dots,,r\}} \partial^I U_s$ 上的诱导马尔可夫映射 $\mathcal{F}_{\mathrm{bdd}}$，– 对应区间的标记点所关联的断点是对称双曲的；– 对应区间的边界点所关联的断点是对称抛物型的。

将 $\mathcal{F}$ 与 S 之间的拓扑共轭记为 H。注意，对于 $\mathcal{T}_\infty$ 的每个主分支 Δ_s ，以及无界分支 $\Delta_\infty = \mathcal{B}_\infty(S)$，其限制 $S|_{\Delta_s}$ 均与 $\mathcal{F}_s$拓扑共轭。由于该共轭

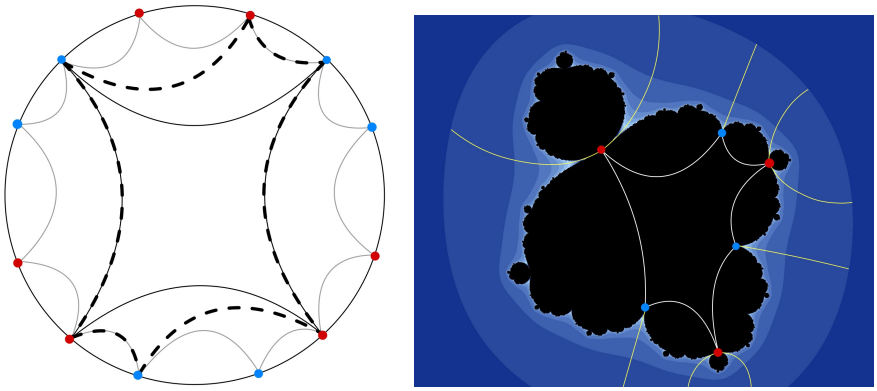

FIGURE B.4. 左：图示为对 T_Δ 的修改，使得后者的顶点具有交替颜色。右：动力平面上相应的 R–拼图片的示意图，其中动力平面对应于 R。为简便起见，我们未显示标记点处的额外挤压。

是类型保持的，命题 3.2 为共轭 $H|_{\partial U_s}$提供了一个拟共形延拓$H|_{U_s} : U_s \longrightarrow \Delta_s$。

通过利用动力学回拉映射 $H|_{U_s}$，我们得到一个同胚 H：$\widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$，它在 $J(R)$ 之外是拟共形的。由于根据引理 6.6，$J(R)$ 是拟共形地可去的，H 是 $\mathbb{C}$的拟共形映射。□

定理 E 的证明。$\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}} \subset \mathfrak{B}$是无限集这一事实，是引理 B.3 的内容。根据推论 B.4，集合 $\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$ 和 $\mathfrak{U}_{\mathrm{Klein}}$ 不相交。

让我们选择 $S_0 \in \Sigma_d^*$ $(d \geqslant 3)$，使得 $\partial T(S_0)$ 具有唯一的双重点（参见 [LMM21, 定理 4.14]）。于是，$T^0(S_0)$ 的每个连通分支在其边界上都有一个保角尖点，因此 $\mathcal{T}_\infty(S_0)$ 的每个连通分支都是持续抛物型的。根据命题 B.15，极限集 $\Lambda(S_0)$ 与 $J(R)$拟共形等价。因此，$[J(R)] \in \mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}}$。反之，若对于某个 $S_1 \in \Sigma_d^*$有 $[\Lambda(S_1)] \in \mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}}$，则根据推论 B.6，$\mathcal{T}_\infty(S_1)$ 的每个连通分支都是持续抛物型的。再次应用命题 B.15 可得，$[\Lambda(S_1)] = [J(R)]$。因此，$\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}} \cap \mathfrak{U}_{\mathrm{Rat}} = \{[J(R)]\}$。□

REFERENCES

[AIM09] K. Astala、T. Iwaniec 和 G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane* 148 *Princeton Mathematical Series* ，第 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009年。[Ber60] L. Bers。同时一致化。 *Bull. Amer. Math. Soc.*，66：94–97，1960年。[BCM12] J. F. Brock、R. D. Canary、Y. N. Minsky。克莱因曲面群的分类，II：端层猜想。 *Ann. of Math. (2) 176*，第1期，1–149，2012年。[BS79] R. Bowen 和 C. Series。与福克斯群相关的马尔可夫映射。 *Inst. HautesÉtudes Sci. Publ. Math.*，50：153–170，1979年。[BA56] A. Beurling 和 L. Ahlfors。拟共形映射下的边界对应。 *Acta Math.*，96：125–142，1956年。[BF99] B. Branner 和 N. Fagella。曼德布罗集合的肢之间的同胚。

J. ， ： –390，

Geom. Anal. 9 327
1999年。[BF25] J. Belk 和 B. Forrest。有限分歧朱利亚集的拟对称。 *Math. Ann.*，393 3 4 1683(–): – 1740，2025年。[BKM09] M. Bonk、B. Kleiner 和 S. Merenkov。肖特基集的刚性。 *Amer. J. Math.*，131(2)：409–443，2009年。[BLLM24] S. Bullett、L. Lomonaco、M. Lyubich 和 S. Mukherjee。抛物有理映射与海克群的配对。 https://arxiv.org/abs/2407.14780，2024年。[BLM16] M. Bonk、M. Lyubich 和 S. Merenkov。谢尔宾斯基地毯朱利亚集的拟对称。 *Adv. Math.*，301：383–422，2016年。

[BM13] M. Bonk 和 S. Merenkov。方形谢尔宾斯基地毯的拟对称刚性。
´ *Ann.* nski 地毯。，：–。
of Math. (2) 177 591 643, 2013
[BO22] Y. Benoist 和 H. Oh。几何有限无柱流形中的测地平面。*Ergodic Theory Dynam. Systems*, 42：514–553，2022年。[CCH96] J. Chen、Z. Chen 和 C. He。 $\mu(z)$-同胚下的边界对应。*Michigan Math. J.*，43：211–220，1996年。[CJY94] L. Carleson、P. W. Jones 和 J.-C. Yoccoz。Julia 与 John。
Bol. Soc. Brasil. Mat. ，：–。[
(N.S.) 25 1 30, 1994
CM17] C. Cashen 和 A. Martin。具有双端分裂的群之间的拟等距。
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.，162(2)：249–291，2017年。[DLS20] D. Dudko、M. Lyubich 和 N. Selinger。吃豆人重整化与 Siegel 参数附近曼德博集合的自相似性。
J. Amer. Math. Soc.，33：653–733，2020年。[EMM04] D. Epstein、A. Marden 和 V. Markovic。拟共形同胚与凸包边界。 *Ann. of Math.*，159(1)：205–336，2004年。[Jon95] P. Jones。关于平面上索伯列夫空间的可去集。载于 *Essays on Fourier Analysis in Honor of Elias M. Stein* 1991 250 267 （新泽西州普林斯顿，），页码–。普林斯顿数学丛书，第42卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1995年。[JS00] P. Jones 和 S. Smirnov。索伯列夫函数与拟共形映射的可去性定理。 *Ark. Mat.*，38(2)：263–279，2000年。[Kah98] J. Kahn。朱利亚集的全纯可去性。https://arxiv.org/abs/math/9812164 1998 ，。[
LLM22] R. Lodge、Y. Luo 和 S. Mukherjee。圆填充、相切反射群与临界固定反有理映射。
Forum Math. Sigma，第10卷，论文编号 e3，38页，2022年。[LLMM23a] S.-Y. Lee、M. Lyubich、N. G. Makarov 和 S. Mukherjee。施瓦茨反射动力学：配对现象。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 56 1881，2023 1825：–。[LLMM23b] R. Lodge、M. Lyubich、S. Merenkov 和 S. Mukherjee。关于由有理映射、克莱因群和施瓦茨反射生成的动力学镶嵌。 *Conform. Geom.Dyn.*，27：1–54，2023年。[LLM24] Y. Luo、M. Lyubich 和 S. Mukherjee。退化（反）多项式型映射、施瓦茨反射与边界对合。 https://arxiv.org/abs/2408.00204，2024年。[LM18] M. Lyubich 和 S. Merenkov。巴西利卡与汤普森群的拟对称。 *Geom. Funct. Anal.* 28：727–754，2018年。[LMM21] K. Lazebnik、N. G. Makarov 和 S. Mukherjee。单叶多项式与 Hubbard 树。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，374(7)：4839–4893，2021年。[LMM22] K. Lazebnik、N. G. Makarov 和 S. Mukherjee。单叶映射族中的 Bers 切片。 *Math. Z.*，300：2771–2808，2022年。[LMM24] M. Lyubich、J. Mazor 和 S. Mukherjee。反全纯对应与配对 I：实现定理。 *Commun. Am. Math. Soc.*，4：495–547，2024年。[LM25a] M. Lyubich 和 S. Mukherjee。共形动力学的镜像：反有理映射、反射群、施瓦茨反射与对应之间的相互作用。 https://arxiv.org/abs/2310.03316 *Algebraic Complex and Arithmetic Dynamics* 2025 ，即将发表于，由 M. Jonsson 和 L. DeMarco 编，西蒙斯专题研讨会，施普林格，。[LM26] L. Lomonaco 和 S. Mukherjee。代数对应与施瓦茨反射：有理动力学与克莱因群的交汇。
https://arxiv.org/abs/2511.08408，即将发表于 *Proceedings of the ICM 2026*。[LMM26] Y. Luo、M. Mj 和 S. Mukherjee。加速 Bowen–Series 映射与配对。准备中，2026年。[LMMN25] M. Lyubich、S. Merenkov、S. Mukherjee 和 D. Ntalampekos。圆周同胚的 David 延拓、焊接、配对与可去性。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，第313卷，第1588期，第v+110页，2025年。[LN24a] Y. Luo 和 D. Ntalampekos。单位圆的分段拟共形动力系统。 https://arxiv.org/abs/2411.14203，2024 年。[LN24b] Y. Luo 和 D. Ntalampekos。垫片朱利亚集的一致化。 https://arxiv.org/abs/2411.17227 2024 ，。[LP
97] G. Levin 和 F. Przytycki。两个有理函数何时具有相同的朱利亚集？ *Proc. Amer. Math. Soc.*，125(7)：2179–2190，1997年。[LZ23] Y. Luo 和 Y. Zhang。圆填充、重整化与细分规则。https://arxiv.org/abs/2308.13151 2023 ，。[LZ
25] Y. Luo 和 Y. Zhang。关于垫片朱利亚集与极限集的拟共形非等价性。
Ergodic Theory Dynam. Systems，45(11)：3465–3489，2025年。[Mar06] V. Markovic。拟对称群。*J. Amer. Math. Soc.*，19，第3期，673–715，2006年。

[Mas70] B. Maskit. 关于 Teichm
¨ *Ann. of* üller 空间的边 *Math.* 91 607 639, 1970
界与克莱因群：II , : - .[McM84] C. McMullen. Blaschke 乘积的同时一致化。预印本， https: //people.math.harvard.edu/~ctm/papers/home/text/papers/simunif/simunif.pdf，1984年。[McM90] C. McMullen. Teichm¨üller 空间上的迭代。 *Invent. Math.*，99(2):425–454，1990年。[McM98] C. McMullen. 豪斯多夫维数与共形动力学。III：维数的计算。 *Amer. J. Math.*，120(4):691–721，1998年。[McM26] C. McMullen. 问号函数、焊接与复动力系统。
Invent. , , *Math.* 2026
https://doi.org/10.1007/s00222-026-01405-9。[McS98] C. McMullen 和 D. Sullivan. 拟共形同胚与动力学。III. 全纯动力系统的 Teichm¨üller 空间。 *Adv. Math.*，135:351–395，1998年。[Mer14] S. Merenkov. 具有谢尔宾斯基地毯边界的双曲群的局部刚性。*Compos. Math.*，150(11):1928–1938，2014年。[Mil92] J. Milnor. 关于迭代三次映射的评述。 *Experiment. Math.*，1:5–24，1992年。[Mil06] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable* 160 *Annals of Mathematics* , 第 卷。普林 *Studies* 2006
斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，第三版，。[Mj14] M. Mj 终结层叠与 Cannon-Thurston映射。附有 Shubh ahbrata Das 和 Mj 撰写的附录。 *Geom. Funct. Anal. 24*，第1期，297–321，2014年。[MM23] M. Mj 和 S. Mukherjee. 通过轨道等价结合有理映射与克莱因群。 *Proc. Lond. Math. Soc (3)*，126:1740–1809，2023年。[MM25] M. Mj 和 S. Mukherjee. 配对、全纯对应与 Bers切片。 *J.Éc. polytech. Math.*，12:1445–1502，2025年。[MV25] S. Mukherjee 和 S. Viswanathan. 超椭圆曲面上的对应、组合定理与 Hurwitz空间。 https://arxiv.org/abs/2508.18711，2025年。[MR25] S. Mukherjee 和 Rashmita. 求积区域的拓扑与奇点。https://arxiv.org/abs/2509.21468，2025年。[MU03] R. Mauldin 和 M. Urba
´ *Graph Directed Markov Systems: Geometry and Dynam-* nski. 。剑桥数 *ics of Limit Sets* 148
学论丛。剑桥大学出版社，2003年。[Nta24] D. Ntalampekos. 拟共形性的度量定义与例外集。
Math. , ( ): – 。[Nta *Ann.* 389 3 3231 3253 2024
25] D. Ntalampekos. 肖特基集的拟共形刻画。 https://arxiv.org/ abs/2507.22658 2025
, 。[Roe07] P. Roesch. *Hyperbolic components of polynomials with a fixed critical point of maximalorder*。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* 40:901-949，2007年。[Sul78] D. Sullivan，关于任意离散双曲运动群在无穷远处的遍历理论 *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference* 465 496, 1978
，第 – 页。[Zak08] S. Zakeri. 关于圆盘上超拟共形映射的边界同胚。*Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*，33:241–260，2008年。

Department of Mathematics, Cornell University, 212 Garden Ave, Ithaca, NY 14853, USA
Email address: yl3769@cornell.edu, yusheng.s.luo@gmail.com

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, 1 Homi Bhabha Road, Mumbai 400005, India*Email address*: mahan@math.tifr.res.in, mahan.mj@gmail.com

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, 1 Homi Bhabha Road, Mumbai 400005, India
Email address: sabya@math.tifr.res.in, mukherjee.sabya86@gmail.com