arXiv:2601.13555v1 [math.SG] 20 Jan 2026

中岛箭图簇之间 Hecke 对应的镜像构造

SIU-CHEONG LAU 和谭炬

摘要。Nakajima 利用箭图簇之间的 Hecke 对应，构造了变形 Kac-Moody 李代数的几何表示。本文证明，对中岛箭图簇的乘积中的全纯拉格朗日子流形 Hecke 对应，可以通过对支撑在二维球面管状拼接核心上的成族带框拉格朗日膜之间的态射空间应用局部化镜像构造而得到。此外，对于非 ADE 箭图，我们证明局部化镜像函子是全忠实的。

目录

1. 引言 2 致谢 4 2. 中岛箭图簇简要回顾 5 2.1. 卷积代数 5 2.2. 中岛箭图簇 6 3. 拉格朗日膜模空间中的表示论 8 3.1. 与支撑在拉格朗日浸入上的膜模空间相关的算子 8 3.2. Maurer-Cartan 箭图代数 10 3.3. 拉格朗日 Floer 上同调与箭图表示 12 3.4. 拉格朗日浸入曲面的 Maurer-Cartan 空间上的全纯辛结构 15 4. 从拉格朗日 Floer 理论构造 Hecke 对应 16 4.1. 带框架的拉格朗日膜 16 4.2. Hecke 对应 18 4.3. 全纯拉格朗日子流形的构造 21 4.4. 与 Hecke 对应的结构类比 24 4.5. 修正箭图簇 25 5. ADE 曲面的局部同调镜像对称 27 5.1. 稳定性条件与拉格朗日 Floer 理论 27 5.2. 局部同调镜像对称 28 参考文献 33

日期：2026年1月21日。

1. 引言

有限 ADE 箭图的中岛箭图簇最初被引入为 ALE 空间上的反自对偶（ASD）瞬子的模空间，以及其紧化上的带框架无挠层的模空间 [KN90，Nak94，Nak07]。随后，人们发现，对于一般的带框双箭图，这些全纯辛簇在几何表示论中发挥着核心作用，并通过 Hecke 对应为实现变形 Kac–Moody 代数和量子仿射代数的表示提供了强有力的框架 [Nak98，Nak01]。

另一方面，对于辛流形 L 中的拉格朗日浸入 M，其非交换变形空间（作为 M 在L处的局部化镜像）被表述为箭图代数，见 [CHL17，CHL21]。受 SYZ 镜像对称和族 Floer 理论启发，自然会问 Nakajima 箭图簇是否属于这一框架 [SYZ96，Fuk02，Tu14，Abo17]。

我们此前的工作 [HLT24] 对此问题给出了肯定的回答：我们提出了带框拉格朗日脉冲体的概念，在维数为二的情形构造了显式例子，并计算了它们的稳定变形空间。通过分析 Floer 理论障碍，我们证明这些变形空间与中岛箭图簇同构。[1]

定理 1.1([HLT24])。设 D 为一个非有向图，Q 为其对应的双箭图。设$\mathcal{M}(\mathbf{v},\ \mathbf{w})$ 为与带框架箭图 Q^{fr}相关联的 *Nakajima* 箭图簇，其中 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 分别是 Q 及其框架的维数向量。

存在一个带框拉格朗日脉冲体 （$\mathbb{L}^{fr}$，$\mathcal{E}$），它位于辛流形 M 中，其中 $\mathbb{L}^{fr}$ 是一个带框架的拉格朗日浸入，$\mathcal{E}$ 分别由其紧分支和框架分量上的秩为$\mathbf{v}$ 和$\mathbf{w}$ 的平坦丛组成，使得其 *Maurer-Cartan* 变形空间 $\mathcal{MC}$（$\mathbb{L}^{fr}$，$\mathcal{E}$）同构于 *Nakajima*箭图簇：

$$\mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}) \cong \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}).$$

在上文中，$\mathcal{MC}$（$\mathbb{L}^{fr}$，$\mathcal{E}$）定义为 *Maurer–Cartan* 方程解空间关于与（$\mathbb{L}^{fr}$，$\mathcal{E}$）相关的规范群所作的几何不变理论商，其中稳定性条件 ζ 根据框架进行调整：框架分量上的几何不变理论特征为0，紧分支上的几何不变理论特征为1。拉格朗日浸入 $\mathbb{L}^{fr} \subset M$ 通过按照图 D 对 $T^*\mathbb{S}^2$ 进行管状拼接而构造。

上述结果是通过 Fukaya 范畴将 Kac-Moody代数的几何表示范畴化的第一步，即它实现了范畴asholomorphicsymplecticmanifolds中带框对象的模空间 MC(L^{fr},E)。

从这一视角出发，一个自然的下一步目标是理解中岛理论所编码的表示论结构如何在辛几何侧出现。更准确地说，在中岛理论中，Kac-Moody代数的模作用由傅里叶-穆凯变换实现，这些变换作用于 MC(L^{fr}，E) 中支撑在全纯拉格朗日子流形上的相干层的导出范畴。要在辛几何侧进行类似的范畴化，关键缺失的一环是与推动中岛构造的对应相对应的辛几何对象。这引出了以下核心问题：

在拉格朗日 *Floer* 理论中，*Nakajima* 箭图簇之间的 *Hecke* 对应所对应的结构是什么？

[1]更准确地说，为了保证 Floer 理论的收敛，我们需要在诺维科夫环 $\Lambda_{\geq 0}$ 上工作，并取形式参数 T。另一方面，我们将把对象识别为 M(v，w) 中仅关于 T 呈多项式依赖的对象，这样就可以令$T = e^{-1}$，从而回到复数域 C。

本文的主要结果之一是以下 Hecke 对应的辛构造，它在箭图簇的 Borel–Moore 同调上诱导映射。这些对应构成了几何上的关键输入，用以在箭图簇的 Borel–Moore 同调直和上构造 Kac-Moody代数的作用。下面的定理通过带框拉格朗日脉冲体之间的态射实现了这些对应。

定理*1.2*（定理 *4.7*）。假设 D 没有边环。考虑两个膜 (L^{fr}, E_j)，其中 $j = 1, 2$，且 E_j 是 L^{fr} 上的平凡丛，其秩为 (v^j, w)，对 $v^2 = v^1 + e^k$（这意味着 E_2 在第 k 个分量上的秩比 E_1 高一）。那么，由 *Floer* 上同调 $HF^2((L^{fr},E_2), (L^{fr},E_1))$ 构成的 $MC(L^{fr},E_2) \times MC(L^{fr},E_1)$ 上的层 H 的支撑是一个全纯拉格朗日子簇

$$\mathfrak{p}_k \subset \mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr}, \mathcal{E}_2) \times \mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr}, \mathcal{E}_1),$$

它与 $\mathcal{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})$ 中的 *Hecke* 对应同构。此外，

$$\mathcal{H} = \iota_* \mathcal{L}_{\mathfrak{p}_k}$$

where ι： $\mathfrak{p}_k \to \mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_2) \times \mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_1)$ 是包含映射，且 $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}_k}$ 是 $\mathfrak{p}_k$ 上的线丛 .

我们简要说明证明。根据定义，Hecke 对应是乘积空间 $M(v^1,w) \times M(v^2,w)$ 中的一个子簇，它参数化乘积中的表示对 $(V 1, V 2)$ 以及一个单射态射 $V 1 \hookrightarrow V 2$。我们考虑 Floer 复形 $CF^*((L^{fr}, E_2), (L^{fr}, E_1))$，据观察，它与 [HLT24] 中的 Nakajima广义单子复形 同构。对于固定的 b_1 和 b_2，$HF^2((L^{fr}, E_2,b_2), (L^{fr}, E_1,b_1))$ 与 $HF^0((L^{fr}, E_1,b_1), (L^{fr}, E_2,b_2))$ 对偶。此外，我们将证明，$HF^0((L^{fr}, E_1,b_1), (L^{fr}, E_2,b_2))$ 同构于相应带框架箭图表示的态射空间。HF^0 中的态射非零，当且仅当框架顶点之间的态射非平凡；此外，根据定理 1.1 中陈述的稳定性条件 ζ，非零态射是单射。因此，经过适当的坐标变换后，HF^0 （或等价地，其对偶 HF^2）的非零轨迹参数化了带框表示之间单射态射构成的空间，也就是 Hecke 对应。

接下来，我们考虑支撑在 $MC(L^{fr}, E)$ 中全纯拉格朗日子流形上的层。在稳定性条件 ζ下作为几何不变理论商，它具有一个射影态射

$$\pi : \mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}) \to \mathcal{MC}_0(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E})$$

其中，$MC_0(L^{fr}, E)$ 是具有平凡稳定性条件的几何不变理论商。根据定理 1.1 和 Nakajima 的结果，平凡表示 $\pi^{-1}([0])$ 的原像是一个全纯拉格朗日子簇。我们验证了，$\pi^{-1}([0])$ 可以由镜像函子作用于框架拉格朗日子流形 F 而产生，这在 ADE 情形下成立。

定理 1.3（定理 4.14，推论 4.15）。设 D 是一个图，F 是$\mathbb{L}^{fr}$ 的框架分量。对于$\mathcal{MC}$（$\mathbb{L}^{fr}$，$\mathcal{E}$）上纤维为HF^2（（$\mathbb{L}^{fr}$，$\mathcal{E}$，b），F）的层，其支撑在$\mathcal{MC}$（$\mathbb{L}^{fr}$，$\mathcal{E}$）中构成一个由 $i = 0$ 定义的子簇。

此外，如果 D 是 *ADE Dynkin* 图，

$$HF^2((\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}), F) \cong \iota_* \mathcal{O}_{L(\mathbf{v})}$$

其中 $L(\mathbf{v}) \subset \mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E})$ 是全纯拉格朗日子簇 $\pi^{-1}([0])$，而 $\iota : L(\mathbf{v}) \to \mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E})$ 是包含映射。

假设D 是一个 ADE Dynkin 图，这对于确保所得子簇是全纯拉格朗日子流形是必要的。对于一般的图，由$i = 0$ 定义的子簇可能具有更高的维数，参见 Example4.16。

此外，这项工作也融入了 Kontsevich 提出的同调镜像对称猜想的一般框架 [Kon95], 该猜想预言，辛流形的 Fukaya 范畴与其镜像上的相干层导出范畴等价。

在我们的设定中，通过应用局部化镜像函子，我们为泛 brane (L，b) 建立了局部同调镜像对称等价。

定理 1.4 (定理 5.5)。 设 M 是按照一个非 *Dynkin* 图 D 对余切丛 $T^*\mathbb{S}^2$ 进行管状拼接所得的流形，且 $\mathbb{L} \subset M$ 是零截面。那么，非交换变形空间 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 是一个 *2-Calabi-Yau* 代数，并且局部化镜像函子 $\mathscr{F}^{(\mathbb{L},\, b)}(\mathbb{L},\ b)$ 给出了$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 作为$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$-双模的自对偶投射分解。

此外，局部化镜像函子

$$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)} : \mathrm{Fuk}^{sub}(M) \to \mathrm{Perf}(\mathcal{A}_{\mathbb{L}})$$

诱导出一个拟等价，其中 $\mathrm{Fuk}^{sub}(M)$ 是由 $(\mathbb{L}, b)$ 分裂生成的 *Fukaya* 子范畴，而 $\mathrm{Perf}(\mathcal{A}_{\mathbb{L}})$ 是完美 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$-模的微分分次范畴。

这个拟等价可以视为 Kontsevich 的同调镜像对称猜想的一种局部实现：由泛 brane 生成的 Fukaya 子范畴对应于镜像的一个局部图，由非交换代数 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 表示。

此外，我们还得到了以下三维类比。

命题 1.5 (命题 5.12)。 设 $\mathbb{L}$ 是一个紧致、相对自旋、定向的 *3* 维拉格朗日浸入，$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 是其非交换变形空间。若$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 是一个 *3-Calabi-Yau* 代数，则局部化镜像函子 $\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}(\mathbb{L},b)$ 给出$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 作为$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$-双模的一个自对偶投射分解。

此外，局部化镜像函子

$$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)} : \mathrm{Fuk}^{sub}(M) \to \mathrm{Perf}(\mathcal{A}_{\mathbb{L}})$$

诱导出一个拟等价。

此外，在这两种情况下，非交换变形空间 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 是 Calabi-Yau，当且仅当局部化镜像函子 F $(\mathbb{L},\, b)(\mathrm{L},\ b)$ 给出 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 的一个自对偶投射 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$-双模解消。

本文组织如下。第 2 节回顾卷积代数和中岛箭图簇的必要背景。第 3 节构建一般的 Floer 理论框架，并介绍适用于高秩拉格朗日膜族的局部化镜像构造。第 4 节给出 Hecke 对应的 Floer 理论实现，并构造中岛箭图簇中的全纯拉格朗日子流形。第 5 节确立局部化镜像函子的完全忠实性，并说明这一构造如何融入局部同调镜像对称。

致谢。我们感谢 Hansol Hong 在波士顿大学休假期间，就代数消解、Koszul 对偶及其他相关主题与我们进行了极有价值的讨论。我们感谢 Naichung Conan Leung 和 Kwokwai Chan 的启发性讨论，以及他们邀请我们访问香港中文大学；也感谢 Helge Ruddat 在2024年11月举办的迈阿密镜像对称性研讨会。第一作者谨向 Hiroshi Iritani 和

Kaoru Ono 致谢，感谢他们举办2024年12月的京都研讨会，并就圆盘模空间和 Kuranishi 结构进行了有益的讨论。他感谢 Cheol-Hyun Cho 和 Yoosik Kim 邀请他于2024年夏季访问首尔国立大学，并在那里进行了十分有趣的讨论。他也感谢班夫国际研究站为2025年10月的镜像对称性研讨会提供支持。第二作者谨向 Sheel Ganatra 致谢；他关于稳定性条件的镜像对称对应所提出的问题，促使我们思考局部同调镜像对称。他也感谢 Ki Fung Chan、Eddie Lam 和 Yan Lung Leon Li 与他进行了许多富有启发性的 Hecke 对应讨论。

2. 中岛箭图簇简介

2.1. 卷积代数。 首先回顾 Borel–Moore 同调中的卷积乘积。关于卷积乘积的更多讨论可参见 [FM81，CG97]。

设 X 是一个拓扑空间，可嵌入为欧几里得空间$\mathbb{R}^m$的闭子空间。我们定义一种 Borel–Moore 同调群（其基本性质见 [Ful97] 附录 B），记作$H_*(X)$，定义如下：

$$H_i(X) := H^{m-i}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus X),$$

其中右侧是相对奇异上同调群。

该定义与嵌入的选择无关：若X 作为闭子空间嵌入定向光滑流形M，则存在一个典范同构

$$H_i(X) \cong H^{n-i}(M, M \setminus X),$$

其中n 是M的维数。若$f : X \to Y$ 是真映射，则存在一个推前同态：

$$f_* : H_i(X) \to H_i(Y).$$

若 $\iota : U \to Y$是开嵌入，则存在一个拉回同态：

$$\iota^* : H_i(Y) \to H_i(U).$$

若X 和Y 是M中的闭子集，且M是一个n维定向流形，则相对上同调群中有杯积

$$\cup : H^{n-i}(M, M \setminus X) \otimes H^{n-j}(M, M \setminus Y) \to H^{2n-i-j}(M, M \setminus (X \cap Y)).$$

根据前面介绍的典范同构，它诱导出 Borel-Moore 同调群中的帽积：

$$\cap : H_i(X) \otimes H_j(Y) \to H_{i+j-n}(X \cap Y).$$

注意，此乘积取决于环境空间M。

设M^1, M^2和M^3为定向光滑流形，且$p^{ij} : M^1 \times M^2 \times M^3 \to M^i \times M^j$为自然投影。设$Z \subset M^1 \times M^2$ 和$Z' \subset M^2 \times M^3$ 为闭子集。根据$M^1 \times M^2 \times M^3$, 中的帽积，我们有

$$\cap : H_{i+d_3}(p_{12}^{-1} Z) \otimes H_{j+d_1}(p_{23}^{-1} Z') \to H_{i+j-d_2}(p_{12}^{-1} Z \cap p_{23}^{-1} Z'),$$

其中d_i 是M^i的维数。

假设映射 $p_{13} : p_{12}^{-1} Z \cap p_{23}^{-1} Z' \to M^1 \times M^3$ 是适当的。其像记为 $Z \circ Z'$. 我们将卷积定义为

$$* : H_i(Z) \otimes H_j(Z') \to H_{i+j-d_2}(Z \circ Z'), \quad c * c' := (p_{13})_* (p_{12}^* c \cap p_{23}^* c'), \tag{2.1}$$

其中 $p_{12}^{*}c = c \times [M^3]$ 等等。这对于不连通流形也有意义 1.

2.2. Nakajima 箭图簇。本小节中，我们规定 Nakajima 箭图簇的记号。设 $D := (I,E)$ 是一个有限图，其中 I 是顶点集，E 是边集。设 A 为该图的邻接矩阵。则 C=2I-A 是一个（对称）Cartan 矩阵。

设 H 为由边及其定向构成的有序对集合。对于 $a \in H$，我们用 $h(a)$（分别用 $t(a)$）表示 a 的头顶点（分别为尾顶点）。对于 $a \in H$，我们用 $\bar{a}$ 表示与 a 对应的同一条边，但其定向为 $\bar{}$ $\bar{}$反向。图的一个定向 Ω 是 H 的子集，满足 $\Omega \subset H$，且 $\Omega \cup \bar{\Omega} = H, \Omega \cap \bar{\Omega} = \emptyset$. 该定向定义了一个函数 $\epsilon : H \to \{\pm 1\}$，其定义为 $\epsilon(a) = 1$ 当 $a \in \Omega$ 时，以及 $= -1$ 当 $a \in \Omega$.

设 $V = \oplus_{i \in I} V_i$ 是一个 I-分次向量空间。我们将其维数向量定义为

$$\mathbf{v} = \dim V := (\dim V_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{I}.$$

若 $V1, V^2$ 是 I-分次向量空间，我们引入向量空间

$$L(V^1, V^2) := \oplus_{i \in I} \mathrm{Hom}(V_i^1, V_i^2)$$

它是 同一组顶点上这些向量空间之间的线性映射空间。我们还引入

$$E(V^1, V^2) := \oplus_{a \in H} \mathrm{Hom}(V_{t(a)}^1, V_{h(a)}^2)$$

它是双箭图 Q 的表示，见下文定义。

定义 2.1. 图 $D := (I,E)$ 的双箭图 Q 是一个箭图，其顶点与 D 的顶点相同，定向边的集合为 H。

对于 $B = (B_a) \in E(V1, V^2), C = (C_a) \in E(V2, V^3)$, 我们定义 B 与 C 的乘法如下：

$$CB = \left(\sum_{h(a)=i} C_a B_{\bar{a}} \right)_i \in L(V^1, V^3). \tag{2.2}$$

类似地，定义 Ba, Ca 在 $a \in L(V1, V^2), B \in L(V2, V^3), C \in E(V2, V^3)$ 上的乘法。若 $a \in L(V1, V^1)$, 则其迹 $tr(a)$ 理解为 $\sum_k tr(a_k)$。

设 V 和 W 为 I 分次向量空间。定义

$$M(V,W) := E(V,V) \oplus L(V,W) \oplus L(W,V).$$

$M(V,W)$ 是带框架箭图 Q^{fr} 的表示空间，其中 D 是一个在每个顶点处带有框架的双。W 称为框架，其维数向量记为 w。双箭图的表示空间同构于双化前箭图表示空间的余切空间。有时，我们用 $M(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 代替 $M(V,W)$，以强调表示的维数。

$M(V,W)$ 中的元素记作（B,a,b）。该空间具有如下全纯辛形式：

$$\omega((B,a,b),(B',a',b')) := tr(\epsilon BB') + tr(ab' - a'b),$$

其中，ϵB 是 $E(V,V)$ 中的元素，由 $(\epsilon B)_a = \epsilon(a) B_a$. 定义。

令 $G := G_{\mathbf{v}}$ 为李群 $\prod_i GL(V_i)$。它通过以下方式作用于 $M(V,W)$：

$$g \cdot (B,a,b) \mapsto (gBg^{-1}, ag^{-1}, gb),$$

它保持辛形式。矩映射定义为

$$\mu(B,a,b) = \epsilon BB + ab \in L(V,V),$$

其中，G 的李代数的对偶通过迹与$L(V,V)$相识别，乘法的定义见方程 2.2。

令 $\zeta_{\mathbb{C}} = (\zeta_{\mathbb{C},\ i}) \in \mathbb{C}^I$。我们通过 $\oplus_i \zeta_{\mathbb{C},\ i} id_{V_i}$，在 Lie$(G)$ 的中心定义一个相应元素，其中当 $V_i = 0$ 时，删除与i 对应的直和项。令 $\mu^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ 为由 $\mu - \zeta_{\mathbb{C}}$ 的零点集定义的仿射代数簇（不一定不可约）。群 G 作用于 $\mu^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$。

现在我们定义稳定性条件和中岛箭图簇。

对于 $\zeta_{\mathbb{R}} = (\zeta_{\mathbb{R},\ i})_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$，令 $\zeta_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{v} := \sum i \zeta_{\mathbb{R},\ i} \mathbf{v}_i$。

定义 2. 2.点 $(B, a, b) \in M(V, W)$ 称为 $\zeta_{\mathbb{R}}$-半稳定的，如果满足以下两个条件：

(1) 若 V 的一个 I-分次子空间 S 包含于核 b 中且为 B-不变的，则 $\zeta_{\mathbb{R}} \cdot$维数$S \leq 0$。*(2)* 若 V 的一个 I-分次子空间 T 包含像 a 且为 B-不变的，则 $\zeta_{\mathbb{R}} \cdot$维数$T \leq \zeta_{\mathbb{R}} \cdot$维数$V$。

We say (B, a, b)称为 $\zeta_{\mathbb{R}}$-稳定的，若1、2 中的严格不等式成立，除非 $S = 0$、$T = V$.

注 2.3. 若 $\zeta_{\mathbb{R},i} > 0$ 对所有 i 均成立，则条件(2) 是多余的，而条件(1) 表示不存在非零的、包含于核 b 中的 B-不变 I-分次子空间 S。

令$H^s_{\zeta_{\mathbb{R}},\zeta_{\mathbb{C}}}$ （分别为$H^{ss}_{\zeta_{\mathbb{R}},\zeta_{\mathbb{C}}}$）表示 $\mu^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ 中 -稳定（分别为 -半稳定）点的集合。若两个 -半稳定点 $(B,a,b),(B',a',b')$ 的$G_{\mathbf{v}}$-轨道闭包在$H^{ss}_{\zeta_{\mathbb{R}},\zeta_{\mathbb{C}}}$中相交，则称它们为$S$-等价。为简洁起见，将这对 $(\zeta_{\mathbb{R}},\zeta_{\mathbb{C}})$ 记为 ζ。

定义 2.4. *Nakajima* 箭图簇定义为

$$\mathcal{M}_\zeta := \mathcal{M}_\zeta(\mathbf{v},\mathbf{w}) := H^{ss}_{\zeta_{\mathbb{R}},\zeta_{\mathbb{C}}} / \sim,$$

其中，$\sim$ 表示 S–等价关系。如果上下文中的稳定性条件明确，则记作 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$。正则部分定义为

$$\mathcal{M}^{reg}_\zeta := \mathcal{M}^{reg}_\zeta(\mathbf{v},\mathbf{w}) := H^s_{\zeta_{\mathbb{R}},\zeta_{\mathbb{C}}} / G_{\mathbf{v}}.$$

注记 2.5. 对于一般稳定性条件，$H^s_{\zeta_{\mathbb{R}},\zeta_{\mathbb{C}}}$ 是底空间为 $\mathcal{M}\zeta(\mathbf{v},\mathbf{w})$的主 $G_{\mathbf{v}}$-向量丛。由于 V_i 是 $G_{\mathbf{v}}$ 表示，因此可以构造 *tautological* 向量丛 $\mathcal{V}_i := H^s_{\zeta_{\mathbb{R}},\zeta_{\mathbb{C}}} \times_{G_{\mathbf{v}}} V_i$，它们定义在$\mathcal{M}\zeta(\mathbf{v},\mathbf{w})$上，每个顶点 i 对应一个丛。与向量空间类似，可以定义全纯向量丛 $L(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}^2)$和 $E(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}^2)$。我们也将使用这些记号来描述拉格朗日 *Floer* 复形。

接下来，我们按照 Nakajima [Nak98,§5].简要回顾 Hecke 对应的定义。

定义 2.6. 固定一个顶点 $k \in I$，并令 $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1 + \mathbf{e}^k$。*Hecke* 对应

$$\mathfrak{p}_k(\mathbf{v}^2,\mathbf{w}) \subset \mathcal{M}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathcal{M}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$$

定义为由满足条件的带框表示对组成的子簇

$$\big([B_1, i_1, j_1], [B_2, i_2, j_2]\big)$$

存在一个单射同态 $\xi:\ V^1 \hookrightarrow V^2$ 满足

$$B_2 \circ \xi = \xi \circ B_1, \qquad i_2 = \xi \circ i_1, \qquad j_1 = j_2 \circ \xi.$$

等价地，$\mathrm{P}_k(\mathrm{v}^2,\mathrm{w})$ 参数化了包含 $\mathrm{Im}(i_2)$、且满足 $\dim(\mathrm{V}^2/\mathrm{S}) = \mathrm{e}^k$ 的 B_2–不变子空间 $\mathrm{S} = \mathrm{Im}(\xi) \subset \mathrm{V}^2$。此外，Nakajima [Nak98] 证明了 $\mathrm{P}_k(\mathrm{v}^2,\mathrm{w})$ 是一个全纯拉格朗日子簇。其基本循环作为几何核，定义了箭图簇的 Borel–Moore 同调上的产生与湮灭算子。这给出了变形 Kac–Moody 代数的一个可积最高权表示 [Nak98, Thm. 10.3]。

3. 拉格朗日膜模空间中的表示论

3.1. 与支撑在拉格朗日浸入上的膜模空间相关的算子。设X是一个辛流形。我们假设X要么是紧致的，要么是凸的非紧致流形。

定义 3.1。 X中的拉格朗日膜是一个二元组$(\mathbb{L},\mathcal{E})$，其中$\mathbb{L} \subset X$是一个相对自旋定向分次拉格朗日浸入，而$\mathcal{E} \to \hat{\mathbb{L}}$是正规化$\hat{\mathbb{L}}$上的平坦向量丛，$\mathbb{L}$的正规化记为$\mathbb{L}$。

在适当选择扰动数据后，(L,E) 与一个A_∞代数相关联

$$\mathrm{CF}((\mathbb{L},\mathcal{E}),(\mathbb{L},\mathcal{E})) = C^*(\hat{\mathbb{L}},\mathrm{End}(\mathcal{E})) \oplus \bigoplus_a \left(C^*(S_a,\mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_{\iota_-(S_a)},\mathcal{E}|_{\iota_+(S_a)})) \oplus C^*(S_a,\mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_{\iota_+(S_a)},\mathcal{E}|_{\iota_-(S_a)})) \right) \tag{3.1}$$

通过拉格朗日 Floer 理论 [FOOO09b，AJ10，FOOO09a]，其中a标记S_a L 与 $\iota_\pm : S_a \to \hat{\mathbb{L}}$ 是到其正规化的嵌入。我们将浸入扇区贡献的分量记为

$$\mathrm{CF}_{\mathrm{imm}}((\mathbb{L},\mathcal{E}),(\mathbb{L},\mathcal{E})) = \bigoplus_a \left(C^*(S_a,\mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_{\iota_-(S_a)},\mathcal{E}|_{\iota_+(S_a)})) \oplus C^*(S_a,\mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_{\iota_+(S_a)},\mathcal{E}|_{\iota_-(S_a)})) \right).$$

本文中，我们将对 CF((𝕃,ℰ),(𝕃,ℰ)) 使用 Morse 模型 [OZ11，BC07，FOOO09a，HKL23]，并在 $\hat{\mathbb{L}}$ 的每个分支以及干净交S_a上固定一个 Morse函数。[2] 我们在此简要回顾相关设置。链是由 Morse 函数的临界点处 $\mathcal{E}$ 的同态线性组合构成的，而 m_k 则通过计数珍珠轨迹并以全纯传递贡献加权来定义。为确保收敛，我们取基域为 Novikov域 Λ (或取基环为 Λ_0)，其中

$$\Lambda_0 = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{A_i} \mid a_i \in \mathbb{C}, A_0 \geq 0 \text{ and } A_i \text{ is strictly increasing} \right\},$$

其极大理想

$$\Lambda_+ = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{A_i} \mid a_i \in \mathbb{C}, A_0 > 0 \text{ and } A_i \text{ is strictly increasing} \right\},$$

及其分式域

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{A_i} \mid a_i \in \mathbb{C}, A_i \text{ is strictly increasing} \right\}.$$

该范畴的 A_∞-运算 m_k 通过对由（L_0,L_1,...,L_k）围成的伪全纯多边形进行计数来定义，并以 T^AHol 加权，其中 A 表示多边形的辛面积，Hol $\in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_0|_p,\mathrm{E}_k|_p)$ 表示沿多边形逆时针边界的平坦向量丛的整体（并与输入角点处的同态复合），从输出交点 $p \in L_0 \cap L_k$ 返回其自身。对于单个拉格朗日子流形 L，$m_0^{\mathbb{L}}$称为 L 的障碍，它是 L 上向量丛曲率的 Floer 理论推广。

注记 3.2. 更明确地说，我们可以通过选取$\hat{\mathbb{L}}$ 各连通分支中的单连通开子集，使其包含这些连通分支中的所有临界点以及自干净交 S_a，并在每个这样的开子集上将平坦向量丛$\mathcal{E}$ 平凡化，从而将连通分支之间的同态写成矩阵

[2]也可以使用 de Rham模型 [FOOO20]，其中链是向量丛值微分形式，且 $m_1 = \nabla + \sum_{\beta \neq 0} m_{1,\beta}$，其中 ∇ 是由平坦联络诱导的微分算子，随后再通过代数方法转至有限维极小模型。为便于直观理解和计算，我们使用 Morse模型。

。于是，$\mathcal{E}$ 在所有临界点上的纤维都可以识别为$\mathbb{C}^d$，其中 d 为某个数。每个连通分支$\hat{\mathbb{L}}_i$ 中的开子集取为$\hat{\mathbb{L}}_i$上 *Morse*函数的所有次数为一的临界点的不稳定子流形之并集的补集。*Morse*模型的构造确保这些不稳定子流形与对 $_k$ 运算有贡献的伪全纯多边形横截。

我们考虑 $\hat{}$L 上平坦联络 E 的空间，以及 CF^1_{imm}((L，E)，(L，E)) 的浸入部分中系数取自 Λ_+ 的定界上链。

定义 3.3. 设 $\mathbb{L}$ 是一个相对自旋、定向的分次拉格朗日浸入，$\mathbf{v}$ 是 L 上平坦丛的维数向量。毛雷尔-卡当解MC($\mathbf{v}$)的集合定义为

$$\mathrm{MC}(\mathbf{v}) := \left\{ (A,b) : A \in \bigoplus_i \mathrm{Hom}(\pi_1(\hat{\mathbb{L}}_i), \mathrm{GL}_{\Lambda_{\geq 0}}(v_i)) \text{ and } b \in CF^1_{imm,\Lambda_+}((\mathbb{L},\mathcal{E}_A),(\mathbb{L},\mathcal{E}_A)) \text{ with } m_0^b = 0 \right\}$$

其中 $\hat{\mathbb{L}}_i$是 $\hat{\mathbb{L}}$ 的第 i 个分量，v_i 是 $\mathbf{v}$ 的第 i 个分量，即 $\mathcal{E}|_{\hat{\mathbb{L}}_i}$的秩。根据备注 *3.2* 中的平凡化，$b$ 可以用 $\mathrm{CF}^1_{imm,\ \Lambda_+}((\mathbb{L},\mathbf{v}),(\mathbb{L},\mathbf{v}))$中的矩阵组表示，因此

$$\mathrm{MC}(\mathbf{v}) \subset \left(\bigoplus_i \mathrm{Hom}(\pi_1(\hat{\mathbb{L}}_i), \mathrm{GL}_{\Lambda_{\geq 0}}(v_i)) \right) \times \mathrm{CF}^1_{imm,\Lambda_+}((\mathbb{L},\mathbf{v}),(\mathbb{L},\mathbf{v}))$$

是一个仿射簇。

我们在$\mathcal{G}$ 对MC($\mathbf{v}$)上的规范群对称性为$\mathcal{G}$= $\prod_i GL_{\Lambda_{\geq 0}}(v_i)$，其中它是一个约化群。*Maurer-Cartan* 空间定义为商栈

$$[\mathrm{MC}(\mathbf{v})/\mathcal{G}]$$

它参数化了由($\mathcal{E}$、b) 给出且支撑在$\mathbb{L}$上的一族拉格朗日膜。

为了使其更具几何性，我们可以固定一个几何不变理论稳定性条件 ζ，并定义几何不变理论商

$$\mathcal{MC}_\zeta(\mathbf{v}) := \mathrm{MC}(\mathbf{v}) /\!\!/_\zeta \mathcal{G}.$$

根据 [CHL17，定理 2。19], 我们有A_∞ 函子

$$\mathcal{F}^{(\mathbb{L},A,b)} : \mathrm{Fuk}(X) \to dg - Mod(\mathrm{MC}(\mathbf{v}))$$

该函子由A_∞ 运算$m^{(\mathbb{L},A,b)}$、–.....、$-_k$ 定义，其中dg –*Mod* 表示仿射簇 MC(v) 上模复形的 dg 范畴。由于$m^{(\mathbb{L},A,b)}$、–.....、$-_k$ 在规范群作用 G 对 MC(v) 的作用下严格等变，该函子下降到商 MCζ(v)。

定理3.4。 设 $\mathbb{L}$ 是相对自旋定向分次拉格朗日浸入。对于每个 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n_{>0}$，其中 n 是$\hat{}$L的连通分支数，存在一个 A_∞-函子

$$\mathcal{F}^{(\mathbb{L},A,b)} : \mathrm{Fuk}(X) \to \mathrm{Perf}_{dg}(\mathcal{MC}_\zeta(\mathbf{v}))$$

其中Perf^{dg} 表示$\mathcal{MC}\zeta$($\mathbf{v}$)上的完美复形 dg 范畴。

下面的框架化构造确保了稳定商。

定义 3.5。 对于一个相对自旋定向分次拉格朗日浸入，假设其正规化包含一个连通分支 F，且 F 不含 H^1 也不含 H^2。此外，我们假设对于每个连通分支 C，都至少存在一个从 C 到另一个连通分支的 次数 $= 1$ 态射。我们称分解$\mathbb{L} \cup F$ 为一个带框架的拉格朗日浸入$\mathbb{L}^{fr}$，其中$\mathbb{L}$ 是除 F 外所有连通分支的并。我们考虑的每个向量丛

$\mathcal{E}$ 在 $\mathbb{L}^{fr}$ 上都必须满足 $\mathcal{E}|_F = \mathbb{C}_F$，即平凡线丛，因此连通分支 F 的规范群是平凡的。此外，根据 $H^2(F) = 0$ 这一假设，框架分量 F 不会对障碍 $m_0^{\mathbb{L}^{fr}}$ 作出贡献。我们将 $\mathbb{L}^{fr}$ 的 *Maurer-Cartan* 空间记为 $\mathcal{MC}_\zeta(\mathbf{v},\mathbf{w})$。

在带框架情形中，环境空间 $\left(\bigoplus_i \mathrm{Hom}(\pi_1(\hat{\mathrm{L}}_i), \mathrm{GL}(d_i))\right) \times CF^1_{\mathrm{imm}}((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{v},\mathrm{w}),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{v},\mathrm{w}))$ 可识别为定义 2.2 所述情形中的箭图表示空间，其中维数向量 w 是 F 与第 i 个连通分支的交点数，而对应于 F 与 L_i 之间退化 $\neq 1$ 态射的框架分支 a_i 或 b_i 均设为零。利用注 2.3 中的稳定性条件，所有半稳定点都是稳定点。

定义 *3.6.* 设 L 是一个相对自旋定向分次拉格朗日浸入。对于两个不同的秩向量 v^1 和 v^2，，在 $MC_\zeta(v^1)\times MC_\zeta(v^2)$ 上有典范丛复形，它由 *Floer* 复形 $\left(CF^*((L,E_1),(L,E_2)), m_1^{b_1\ \ 2}\right), b$ 构成，并且在规范群作用下等变。*Hecke* 层 $H_\zeta(v^1,v^2)$ 定义为其在 $MC_\zeta(v^1)\times MC_\zeta(v^2)$ 上的上同调层。该层作为导出 *Fourier-Mukai* 变换的核，此变换给出从 $MC_\zeta(v^1)$ 的导出范畴到 $MC_\zeta(v^2)$ 的导出范畴的函子。

类似地，对于带框架的拉格朗日浸入 $\mathbb{L}^{fr} = \mathbb{L} \cup F$，我们在 $\mathcal{MC}_\zeta(\mathbf{v}^1,\mathbf{w}) \times \mathcal{MC}_\zeta(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$ 上有 *Hecke* 层 $\mathcal{H}_\zeta(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\mathbf{w})$。

定义 3.7. 设 $\mathbb{L}$ 是一个相对自旋定向分次拉格朗日浸入。固定一个特征向量 $\zeta \in \mathbb{C}^n$，其中 n 是 $\mathbb{L}$ 的连通分支数。令

$$\mathcal{D} := \bigoplus_{\mathbf{v}} D^b(\mathcal{MC}_\zeta(\mathbf{v})).$$

创造函子 $D \to D$ 定义为从 $D^b(MC_\zeta(v))$ 到 $D^b(MC_\zeta(v+e^i))$ 的 *Fourier-Mukai* 变换，其中对所有 v，e^i 是秩向量，在第 i 个连通分支上取 *1*，其他位置取 *0*。类似地，湮灭函子 $D \to D$ 定义为从 $D^b(MC_\zeta(v))$ 到 $D^b(MC_\zeta(v-e^i))$ 的 *Fourier-Mukai* 变换。（$D^b(MC_\zeta(v)) := 0$ 如果 v 有负分量。）

类似地，对于带框架的拉格朗日浸入 $\mathbb{L}^{fr}$，我们有 $\mathcal{D}^{fr} := \bigoplus_{\mathbf{v}} D^b(\mathcal{MC}_\zeta(\mathbf{v},\mathbf{w}))$，以及相应的创造函子和湮灭函子 $\mathcal{D}^{fr} \to \mathcal{D}^{fr}$。

当人们考察由这些自函子生成的代数及其在同调或 K 理论不变量上的诱导作用时，便会产生丰富而有趣的几何表示论。在 [HLT24] 以及本文后文中，X 取为非紧致的精确锥形辛四维流形。框架 F 在拓扑上是 $\mathbb{R}^2$，而 $\mathbb{L}$ 是球面的并。特别地，当 X 是由 $T^*\mathbb{S}^2$ 管状拼接而成的，并且 $\mathbb{L}^{\mathrm{fr}}$ 是带框架的拉格朗日浸入时，我们将看到这些操作能够恢复赫克对应代数。

3.2. Maurer-Cartan 箭图代数。 为了同时处理所有维数向量 $\mathbf{v}$，我们将采用箭图表述。带箭图的非交换镜像函子见[CHL21]。受非交换几何观点的启发（在这种观点中，空间由代数取代，并通过其表示加以研究），交换的 Maurer–Cartan 空间可以解释为非交换局部化镜像的表示模空间，参见本节末尾的讨论。

对一般秩的平坦丛和边界变形进行建模的箭图表述如下。如注记 3.2 所述，我们固定了 $\hat{\mathrm{L}}$ 和浸入扇区 S_a 的局部平凡化，使得联络和边界变形可以写成矩阵。我们使用可逆环

箭图顶点处的箭以及箭图不同ff顶点之间的箭Q 来表示它们。（这与 [CHL21]略有不同：我们在此处纳入平坦联络，并引入可逆箭作为其整体单值变量。这取决于我们所选取的 Morse函数。）下面给出构造 Maurer-Cartan 箭图代数 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 的步骤。

（1）我们选取的 $\hat{\mathrm{L}}$ 的每个连通分支上的 Morse函数都要求具有唯一的最大点（我们采用的莫尔斯流遵循下降约定）。此外，我们取一次临界点的稳定子流形作为群$\prod_i \pi_1(\hat{\mathrm{L}}_i)$ 的生成元。我们为 L 关联一个箭图 Q，其顶点与 L 的连通分支一一对应。 $\pi_1(\hat{\mathrm{L}}_i)$ 的每个生成元对应于第i个顶点处的两个环箭头（往返各一）； $\mathrm{CF}^1_{\mathrm{imm}}(\mathrm{L})$ 的每个生成元（即浸入扇区上 Morse函数的临界点）对应于相应顶点之间的一条箭头。

（2）令 $\Lambda_0 Q$ 为在诺维科夫环上的Q 的自由路径代数。Q 中的每条箭a 都关联一个诺维科夫赋值，使得 $\mathrm{val}(a) > 0$。该赋值在 $\Lambda_0 Q$ 上诱导出一个滤过。取关于此滤过的 $\Lambda_0 Q$ 的完备化。为方便起见，我们仍将该完备化记作 $\Lambda_0 Q$。

(3) 将 L 上的福柯亚代数扩张到路径代数 $\Lambda_0 Q$ 上，并得到一个非交换A_∞-代数

$$\tilde{A}^{\mathbb{L}} = \Lambda_0 Q \otimes \bigoplus_i \mathrm{CF}(\mathbb{L}),$$

其单位元为 $\mathbf{1}_{\mathbb{L}} = \sum \mathbf{1}_{\mathbb{L}_i}$。 $\Lambda_0^{\oplus} \subset \Lambda_0 Q$表示$\bigoplus_i \Lambda_0 \cdot e_i$，其中$e_i$是$Q$各顶点处的平凡路径。纤维张量积是指，只有当$a$的尾端与$X$的源相对应时，元素$a \otimes X$ 才非零。A_∞-运算定义如下：

$$m_k(f_1 X_1, \ldots, f_k X_k) := f_k \ldots f_1 \, m_k(X_1, \ldots, X_k) \tag{3.2}$$

其中X_l ∈属于 CF(L)，而$f_l \in \Lambda_0$属于Q。

(4) 将定界上链的形式体系 [FOOO09b] 扩展到 $\Lambda_0 Q$上，也就是说，我们取

$$\mathbf{A} = (a_\gamma), \boldsymbol{b} = \sum_l b_l X_l \tag{3.3}$$

其中 γ 是 $\pi_1(\hat{\mathrm{L}}_i)$的生成元，$\mathrm{a}_\gamma$ 是 Q 中对应的自箭头，X_l 是 $\mathrm{CF}^1(\mathrm{L})$ 的浸入生成元，而 b_l 是 Q 中对应的箭头。然后按照 [FOOO09b] 以及公式（3.2）定义变形后的 A_∞-结构 $\mathrm{m}^{\mathbf{A},\boldsymbol{b}}$ k。为简化记号，我们将 (A,b) 仅记作 b。

(5) 将箭图代数除以由障碍项 $m_0^{\boldsymbol{b}}$ 的系数生成的双边理想 R， 以及对于与 $\pi_1(\hat{\mathrm{L}}_i)$ 的一个生成元相关联的每一对往返环箭头 x,y，对应的 $xy - e_i$，和对应于 $\pi_1(\hat{\mathrm{L}}_i)$ 的关系的那些元素所生成的双边理想。

$$\mathcal{A}_{\mathbb{L}} := \Lambda_0 Q / R.$$

(6) 将 Fukaya 范畴扩张到 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 上，并通过纳入对象的非交换族 $(\mathrm{L}, \boldsymbol{b})$ 来扩充 Fukaya 范畴，其中 (3.3) 中的 $\boldsymbol{b}$ 现在定义在 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 上。这意味着，对于原 Fukaya 范畴中的 L_1, L_2， 其态射空间现在扩张为 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}} \otimes \mathrm{CF}(L_1, L_2)$。 $(\mathrm{L}, \boldsymbol{b})$ 与 L 之间的态射空间扩充为 $\mathrm{CF}((\mathrm{L}, \boldsymbol{b}), L) := \mathrm{A}^{\mathbb{L}} \otimes_{\Lambda_0^{\oplus}} \mathrm{CF}(\mathrm{L}, L)$（$\mathrm{CF}(L, (\mathrm{L}, \boldsymbol{b}))$ 也类似）。在步骤 2 中，我们已经有了 $\mathrm{CF}((\mathrm{L}, \boldsymbol{b}), (\mathrm{L}, \boldsymbol{b}))$（区别仅在于 $\Lambda_0 Q$ 被 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 替换）。m_k 运算以类似于 (3.2) 的方式扩张。

定理 3.8([CHL21])。 考虑 L 的边界变形。存在一个良定义的 A_∞- 函子

$$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)} : \mathrm{Fuk}(X) \to \mathrm{MF}(\mathcal{A}_{\mathbb{L}}, W).$$

注 3.9. $m_0^b = W \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{L}}$ 的次数为2。因此，若进一步假设$\mathbb{L}$ 是分次的，并且我们讨论的是$\mathbb{Z}$-分次情形，则 $W = 0$，且上述$\mathrm{MF}(\mathcal{A}_{\mathbb{L}}, W)$ 退化为由$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$-模构成的复形的微分分次范畴。

直观而言，非交换变形空间$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 可通过 *Strominger-Yau-Zaslow* 猜想 *[SYZ96]*, 来理解。该猜想预言，镜像空间可构造为（特殊）拉格朗日子流形的模空间（另见 *[Aur07]*）。粗略地说，拉格朗日子流形 $\mathbb{L}$对应于镜像上的一个点，而其变形空间$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 构成该点的一个邻域。因此，$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 也称为局部化镜像或非交换变形空间。

非交换变形空间 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 与 Maurer-Cartan 空间 $\mathrm{MC}\zeta(\mathbf{v})$ 之间的联系如下。

命题 3.10。 *Maurer-Cartan* 空间 $\mathcal{MC}\zeta(\mathbf{v})$ 等于箭图代数$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$的 ζ-半稳定表示的模空间。

证明。 根据备注 3.2，我们取局部平凡化，分别用矩阵A_D 和 B_X 来表示 $(A,b) \in \mathrm{MC}(\mathbf{v})$，其中$D$ 是 $\mathbb{L}$ 的连通分支的次数为一的临界点，而X 是次数为一的浸入生成元。因此，$(A^{\pm 1},b)$可以视为 Q的箭的一个表示。(A,b)的障碍方程 $m_0^{(A,b)} = 0$ 与箭图版本$m_0^{\boldsymbol{b}} = 0$ 完全相同，这是通过 (A,b)对$\boldsymbol{b}$ 的箭图表示得到的。此外，$MC(\mathbf{v})$的规范群 G 等于箭图表示的自同构群。因此，Maurer-Cartan 空间 $\mathrm{MC}\zeta(\mathbf{v})$可以被识别为 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$的 ζ-半稳定表示的模空间。□

3.3. 拉格朗日 Floer 上同调与箭图表示。本小节将建立箭图表示与拉格朗日 Floer 理论之间的一些一般关系。

在前面的小节中，我们介绍了模空间 $\mathrm{MC}\zeta(\mathbf{v})$，它由支撑在 L 上、秩为 $\mathbf{v}$ 且带有平坦联络的拉格朗日膜构成。在本小节中，我们将$\widehat{\ }$使用一个略有不同的模空间 $\mathrm{MC}\zeta(\mathbf{v})$，其中以一次边界变形取代平坦联络。当 L 的所有连通分支都是单连通时（后面的$\widehat{\ }$小节正是这种情况），不存在非平凡的平坦联络，因此 $\mathrm{MC}\zeta(\mathbf{v}) = \mathrm{MC}\zeta(\mathbf{v})$。

$\widehat{\ }$粗略地说，$\mathrm{MC}\zeta(\mathbf{v})$ 与 $\mathrm{MC}\zeta(\mathbf{v})$ 之间的关系类似于李代数 $\mathfrak{gl}(n)$ 与李群 $\mathrm{GL}(n)$ 之间的关系。然而，这种精确关系较为微妙，因为 $\pi_1(\mathrm{L})$ 具有非交换关系，而这些关系与由 m_0^b 通过边界变形 b 产生的关系并无直接联系。对于下面的命题，我们需要使用 m_0^b 与m_1^b 之间的关系，该关系$\widehat{\ }$仅适用于 $\mathrm{MC}\zeta(\mathbf{v})$，而不适用于其乘法版本 $\mathrm{MC}\zeta(\mathbf{v})$。

定义 3.11。 设 $\mathbb{L}$ 是一个相对自旋定向分次拉格朗日浸入，并配备了$\widehat{\ }$秩为 $\mathbf{v}$ 的平凡丛。*Maurer-Cartan* 解的集合 $\mathrm{MC}(\mathbf{v})$ 定义为仿射簇

$$\widehat{\mathrm{MC}}(\mathbf{v}) := \left\{ b \in CF^1_{\Lambda_+}((\mathbb{L},\mathbf{v}),(\mathbb{L},\mathbf{v})) : m_0^b = 0 \right\}.$$

$\widehat{\ }$在$\mathrm{MC}(\mathbf{v})$上存在规范群对称性$\mathscr{G}$，其中$G = \prod_i GL_{\Lambda_{\geq 0}}(d_i)$ 是一个约化群。我们固定一个几何不变理论稳定性条件 ζ，并定义几何不变理论商

$$\widehat{\mathcal{MC}}_\zeta(\mathbf{v}) := \widehat{\mathrm{MC}}(\mathbf{v}) /\!\!/_\zeta \mathscr{G}.$$

$\widehat{\mathrm{MC}}_\zeta(\mathbf{v})$ 是具有一般稳定性条件 ζ的箭图簇。 $[b]\in\mathrm{MC}_\zeta(\mathbf{v})$ 是等价的箭图表示类，或者等价地说，是箭图代数 $A=A_{\mathbb{L}}$ 的一个有限维模。我们用 $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(b_1,b_2)$ 表示这类模之间的 Ext群。于是

命题 3.12. 设 $b_k\in\mathcal{MC}_\zeta(\mathbf{v}_k)$ 对 $k=1,2$成立，并假设 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 是可容许的（也就是说，定义箭图关系中的每条路径长度至少为二）。那么存在同构

$$\mathrm{HF}^0((\mathbb{L},b_1),(\mathbb{L},b_2))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(b_1,b_2); \tag{3.4}$$

$$\mathrm{HF}^1((\mathbb{L},b_1),(\mathbb{L},b_2))\cong\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(b_1,b_2). \tag{3.5}$$

证明。考虑 $(CF^*((L,E_1),(L,E_2)),m^{b_1,b_2})$，其中 E_k是 L 上秩为 v_k的平凡丛。设 $M_i\in CF^0(L,L)$ 是 Morse 函数在第 i 个不可约分支上的唯一极大点，它代表 L_i的单位元。更确切地说，我们沿用 Morse 模型 [FOOO09b, CW22, KLZ23], 中的同伦单位构造，该构造给出单位元 $\mathbf{1}_i$，它是一个 0 次上链；并给出同伦元素 h_i，它是一个次数为 (−1) 的上链，且其微分 $dh_i=\mathbf{1}_i-M_i$。然后我们取截断上链复形（其上同调相同），其 0 次部分取为 h_i的像的余核。记 $(CF^*((L,E_1),(L,E_2)),m^{b_1,b_2}):=(\oplus_p\mathrm{Hom}(E_1|_{t(p)},E_2|_{h(p)})X_p,m^{b_1,b_2})$。

记 (L,E_k) 的变形参数为 $b^k=\sum_a B_a^kX_a$，其中 $k=1,2$。令 $V^1=\bigoplus_i E_1|_{M_i}$ 和 $V^2=\bigoplus_i E_2|_{M_i}$。则 (V^1,b_1) 和 (V^2,b_2) 给出 A 的表示。下文将证明 $\mathrm{HF}^0((L,E_1,b_1),(L,E_2,b_2))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V^1,V^2)$，且 $\mathrm{HF}^1((L,E_1,b_1),(L,E_2,b_2))=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(V^1,V^2)$。

利用 $\sum_i M_i$ 的含幺性质，我们有

$$\begin{aligned}
m_1^{b_1,b_2}\Big(\sum_i\xi_iM_i\Big)&=m_2\Big(b_1,\sum_i\xi_iM_i\Big)+m_2\Big(\sum_i\xi_iM_i,b_2\Big)\\
&=\sum_i\left(\sum_{t(a)=i}(B_a^2\xi_i)X_a-\sum_{h(c)=i}(\xi_iB_c^1)X_c\right)\\
&=\sum_a\left(B_a^2\xi_{t(a)}-\xi_{h(a)}B_a^1\right)X_a
\end{aligned}$$

其中 $\xi_i\in\mathrm{Hom}(E_1|_{M_i},E_2|_{M_i})$ 和 X_a 是 $CF^1(L,L)$ 的生成元。因此，$\mathrm{HF}^0((L,E_1),(L,E_2))$ 由满足 $B_a^2\xi_{t(a)}=\xi_{h(a)}B_a^1$ 的线性映射 (ξ_i) 构成，这正是态射空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(b_1,b_2)$。这证明了 (3.4)。

复形 $(CF^*((L,E_1),(L,E_2)),m^{b_1,b_2})$ 是通过将 $CF^*((L,\boldsymbol{b}),(L,\boldsymbol{b}))$ 与相应的 A-模张量化得到的，即 $CF^*((L,E_1),(L,E_2))\cong(V^1)^*\otimes_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}CF^*((L,\boldsymbol{b}),(L,\boldsymbol{b}))\otimes_{\mathcal{A}}V^2$。注意，

$$m_1^{b_1,b_2}(\xi X_a)=\sum m_k(b_1,\dots,b_1,\xi X_a,b_2,\dots,b_2)=\iota_\xi^{b_1,b_2}\partial_{x_a}m_0^{\boldsymbol{b}},$$

其中，$X_a\in CF^1((L,b),(L,b))$，x_a是相应的箭，$\partial_{x_a}m_0^{\boldsymbol{b}}$和 ι^{b_1,b_2}_ξ定义如下。令 P^{ij}为所有顶点 i、j 对应的双模 $Ae_i\otimes e_jA$。接着定义算子 $\partial_{x_a}:kQ\to P^{h(a)t(a)}$，它按照莱布尼茨法则，以张量符号 $\otimes$代入 x_a。然后，通过将右侧的 A 替换为 $b=b_1$、将左侧的 A 替换为 $b=b_2$，并将张量符号替换为 ξ，定义 $\iota^{b_1,b_2}_\xi:Ae_i\otimes e_jA\to\mathrm{Hom}(V^1i,V^2j)$。

为了计算 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(b_1,b_2)$，我们可以使用以下容许路径代数的双模分解 $\mathcal{A}$，例如参见 [Ber07]:

$$P_\bullet := [\cdots \to \bigoplus_R P_{h(R)t(R)} \xrightarrow{g} \bigoplus_a P_{h(a)t(a)} \xrightarrow{f} \bigoplus_i P_{ii}] \twoheadrightarrow \mathcal{A} \to 0,$$

其中，R 是 A 的关系。这里，$f_a : P_{h(a)t(a)} \to \bigoplus_i P_{ii}$ 将 $e_{h(a)} \otimes e_{t(a)} \mapsto a \otimes e_{t(a)} - e_{h(a)} \otimes a$ 映射为 $f = \sum_a f_a$，而 $g_R : P_{h(R)t(R)} \to \bigoplus_a P_{h(a)t(a)}$ 将 $e_{h(R)} \otimes e_{t(R)} \mapsto \sum_a \partial_a R$ 映射为 $g = \sum_R g_R$。

给定任意左 A-模 M，复形 $P_\bullet \otimes_{\mathcal{A}} M$ 给出了 M 的一个投射分解。直接比较可知，$\mathrm{RHom}_{\mathcal{A}}(V_1, V_2)$ 的诱导微分的前两项与 $(CF^*((\mathbb{L},E_1),(\mathbb{L},E_2)), m_1^{b_1,b_2})$ 的前两项一致。因此，结论成立。□

注3.13. 从几何角度看，$\mathcal{A}$ 的容许性条件要求单边形和双边形对 m_0^b 的贡献之和为零。该条件仅用于证明(3.5)，而不用于(3.4)。

注 3.14. 若以$\widehat{\mathcal{MC}}(\mathbf{v})$ 代替$\widehat{\mathcal{MC}}(\mathbf{v})$，则利用单位元性质，仍可证明一个类似于(3.4) 的同构：

$$\mathrm{HF}^0((\mathbb{L},A_1,b_1),(\mathbb{L},A_2,b_2)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}((A_1,b_1),(A_2,b_2)).$$

在本小节余下部分中，我们只使用 (3.4)，因此可以选用 $\widehat{\mathrm{MC}}(\mathbf{v})$ 或 $\mathrm{MC}(\mathbf{v})$。为方便起见，我们只对 $\mathrm{MC}(\mathbf{v})$ 作出陈述。以下结论可直接由 Maurer-Cartan 空间上的A_∞-运算得到。

推论 3.15. 令 $b_k \in \mathrm{MC}(\mathbf{v}_k)$ 对于 $k = 1, 2, 3$。

$$m_2^{b_1,b_2,b_3} : \mathrm{HF}^0((\mathbb{L},b_1),(\mathbb{L},b_2)) \otimes \mathrm{HF}^0((\mathbb{L},b_2),(\mathbb{L},b_3)) \to \mathrm{HF}^0((\mathbb{L},b_1),(\mathbb{L},b_3))$$

与箭图代数$\mathcal{A}$中$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(b_i, b_{i+1})$ 内态射的复合相一致。

回想一下，在构造上同调 Hall 代数时， [KS11], 一个关键要素是扩张的模堆（或模空间）。满足以下假设后，拉格朗日 Floer 理论也具有类似的结构。我们将看到，由二维球面经管状拼接构造的带框架的拉格朗日子流形正符合这一情形。

假设。对所有秩向量 v，存在 $\zeta_{\mathbf{v}}$ $MC(v)$ 的稳定性条件，使得对于任意 $b_i \in \widehat{MC}^{\zeta_{\mathbf{v}_i}}(v_i)$ $(i = 1, 2)$，$HF^0((L,v_1,b_1),(L,v_2,b_2)) \cong Hom_{\mathcal{A}}(b_1,b_2)$ 中的每个非零同态，在 $v_1 \le v_2$，时都是单射，在 $v_1 \ge v_2$ 时都是满射。

命题 3.16。设 $(\mathbb{L},b_k)$ 是一个秩为 $\mathbf{v}^k$ 的拉格朗日膜族，其中 $k = 1, 2, 3$，且 $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^3$。在上述假设下，逐纤维核

$$m_2 : \mathrm{HF}^0((\mathbb{L},b_1),(\mathbb{L},b_2)) \otimes \mathrm{HF}^0((\mathbb{L},b_2),(\mathbb{L},b_3)) \to \mathrm{HF}^0((\mathbb{L},b_1),(\mathbb{L},b_3)),$$

作为 $\prod_{k=1}^3 \widehat{\mathcal{MC}}(\mathbf{v}^k)$ 上的一个层，支撑在由满足以下条件的(b_1,b_2,b_3) 组成的轨迹上：

$$0 \to b_1 \hookrightarrow b_2 \twoheadrightarrow b_3 \to 0$$

构成一个$\mathcal{A}_L$-模的短正合序列。换言之，对于任意固定的 b_1 和 b_3，，逐纤维核恰好支撑在 b_3 的 b_1 扩张上。

证明。 在上述假设下，任意非零元素f和g，其中

$$(f,g) \in \mathrm{HF}^0((\mathbb{L},\mathcal{E}_1,b_1),(\mathbb{L},\mathcal{E}_2,b_2)) \otimes \mathrm{HF}^0((\mathbb{L},\mathcal{E}_2,b_2),(\mathbb{L},\mathcal{E}_3,b_3)),$$

确定一个 A_L-模序列$b_1 \xrightarrow{f} b_2 \xrightarrow{g} b_3$。只需证明$g \circ f = 0$且 $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$，这由条件$m^{b_1,b_2}_2(f,g) = 0$ 以及维数约束可得。□

3.4. 拉格朗日浸入超曲面的 Maurer-Cartan 空间上的全纯辛结构。现在，让我们聚焦于 $\dim L = 2$。对于亏格为 g 的紧致黎曼曲面，$G = \mathrm{GL}(n, C)$-平坦联络的模空间称为特征簇，它具有典范的全纯辛结构 [AB82, Gol84]。其基本群可写为 $a_1, \ldots, a_g, a'_1, \ldots, a'_g/(\prod_{i=1}^g a_i a'_i a_i^{-1}(a'_i)^{-1})$，因此平坦联络的模空间由满足关系 $\prod_{i=1}^g A_i A'_i A_i^{-1}(A'_i)^{-1} = \mathrm{Id}$ 的矩阵组 $A = (A_i, A'_i : i = 1, \ldots, g) \in G^{2g}$ 构成，并对共轭作用取商 $gAg^{-1} = (gA_ig^{-1}, gA'_ig^{-1} : i = 1, \ldots, g)$。为与之前的设定相符，我们可以固定一个完美莫尔斯函数，使其临界点中指标为 $\deg = 1$ 的不稳定子流形正是这些圈 a_i, a'_i。

模空间上的辛结构，可以通过 [AMM98] 针对紧致群提出的拟哈密顿流形与群值矩映射的优美理论来理解；而对于非紧致李群， [BC05、ABM09] 则利用 Dirac 结构给出了相关理论。下面我们作一个非常简短的回顾。

对于李群 G，双 $D(G) = G \times G$ 配备了如下二形式

$$\omega_{\mathbf{D}(G)} = \frac{1}{2}\left(a^*\theta^L \cdot b^*\theta^R + a^*\theta^R \cdot b^*\theta^L + (ab)^*\theta^L \cdot (a^{-1}b^{-1})^*\theta^R\right)$$

其中 θ^L， θ^R 分别是 G 的左不变和右不变 Maurer-Cartan g 值一形式，点乘由 g 的基林形式诱导，而 $a,b : D(G) \to G$ 分别是到左因子和右因子的投影。于是， $\Phi : D(G) \to G$ 定义为 $\Phi(a,b) = aba^{-1}b^{-1}$ ，满足相对于$\omega_{\mathbf{D}(G)}$的群值矩映射条件。

乘积 $(D(G))^g$ 上的拟哈密顿结构由融合积构造。对于两个拟哈密顿流形 (M_i, ω_i, Φ_i)，它们的融合定义为

$$(M_1 \times M_2, \omega_1 + \omega_2 + \frac{1}{2}\Phi_1^*\theta^L \cdot \Phi_2^*\theta^R, \Phi_1\Phi_2).$$

对于拟哈密顿流形 $(D(G)^g, \omega, \Phi)$，几何不变理论商 $\Phi^{-1}\{\mathrm{Id}\} /\!\!/_\zeta G$给出了作为全纯辛簇的 $G = \mathrm{GL}(n,C)$-平坦联络模空间。

接下来，我们考虑定义 3.11 中的节点浸入拉格朗日子流形，其正规化是黎曼曲面的并。我们在每个分支上取一个如上所述的完美莫尔斯函数。为讨论本小节的内容，我们在 $C = \Lambda_{\geq 0}/T^{>0}$ 上工作；换言之，我们只考虑m_k^b 中常值多边形的贡献，其系数取为b的矩阵系数中的形式幂级数。我们将所得的A_∞ 运算记为$m_{k,0}^b$。

利用 [FOOO17] 的结果，并按照 [HKL23，对于每个结点处常值多边形的模空间，HLT24]，我们选取了与结点附近的局部反辛对合相容的 Kuranishi 扰动，因此$m_{2k,0}(U,V,\ldots,U,V)$中的圆盘与$m_{2k,0}(V,U,\ldots,V,U)$中的圆盘相差一个负号。

命题 3.17. $\omega(X,Y) := \mathrm{tr}(m^b_{2,0}(X,Y),\mathbf{1})$ 在 $CF^1((\mathbb{L},\mathbf{v}),(\mathbb{L},\mathbf{v}))$上给出一个形式辛形式（取值于形式幂级数）。此外，$\mu = (m^b_{0,0},\mathbf{1})$ 给出一个矩映射，因此 $\widehat{\mathcal{MC}}_\zeta(\mathbf{v})$ 具有一个（形式）辛结构。

证明。 根据局部反辛对合的对称性，以及当两个相邻输入相等时 $m_{k,0}(X_1,\ldots,X_k) = 0$（对于某个 i，$(X_i = X_{i+1})$），我们有 $\omega(X,Y) = \omega(Y,X)$。此外，

浸入扇区 X 和 Y 在结点处对 $(m_0^b,1)$ 的贡献具有如下形式

$$\left(\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}a_i(XY)^i\right)XY-\left(1+\sum_{1}^{\infty}a_i(YX)^i\right)YX\right)$$

对于某个 $a_i \in Q$。通过坐标变换，我们可以将 $(m_0^b,0,1)$ 化简为 $\sum a(\tilde{X}_a\tilde{Y}_a-\tilde{Y}_a\tilde{X}_a)$（其中$\tilde{X}_a$、$\tilde{Y}_a$是以结点 a 为指标的矩阵）。由于 $m_2^b,0(X,Y)$ 是 $m_0^b,0$ 的形式二阶导数，因此 $\mathrm{tr}(m_2^b,0(X,Y),1)$ 成为标准辛形式 $\sum a\,\mathrm{tr}(d\tilde{X}_a\wedge d\tilde{Y}_a)$。因此，$\omega$ 是闭且非退化的。该坐标变换由矩阵的形式级数表示，因此是规范等变的。在这样的标准坐标下，显然 $\mu=(m_0^b,0,1)$ 是$\widehat{\ }$矩映射。于是，$MC_\zeta(v)$ 具有商辛结构。□

注记3.18。 尽管哈密顿结构是无坐标的，但如果 *Floer* 理论被构造为满足循环对称性 *[Fuk10]*, 那么$(m_{0,0}^b,\mathbf{1})$和$\mathrm{tr}(m_{2,0}^b(X,Y),\mathbf{1})$将具有标准形式。

现在我们考虑模空间 $MC_\zeta(v)$，它同时参数化浸入扇区中的平坦联络和 Maurer-Cartan元。利用拟哈密顿约化，我们可以证明以下结论。

定理3.19。 存在一个开子集$\mathcal{MC}_\zeta^\circ(\mathbf{v})\subset\mathcal{MC}_\zeta(\mathbf{v})$，包含所有平坦联络和零 *Maurer-Cartan*元，并且该子集具有全纯辛结构。

证明。 这是将子簇 $(\prod_i G^{2g_i})\times \mathrm{CF}^1_{\mathrm{imm}}((L,v),(L,v))$ 按 $\prod_i GL(d_i,C)$ 取商所得，该子簇由以下方程定义：$\prod_{p=1}^{g_i}A_pA'_pA_p^{-1}(A'_p)^{-1}=\mathrm{Id}$，适用于连通分支 L_i，以及$\mu(b)=(m_{0,0}^b,1)=0$。

为应用拟哈密顿约化过程，我们将μ与指数映射复合，得到群值矩映射 $\exp\circ\mu$，其中 $\mathrm{CF}^1_{\mathrm{imm}}((L,v),(L,v))$ 配备了二形式 $\omega+\mu^*\tau$，其中 ω 按上述方式由 $m_{2,0}^b$ 定义，而 τ 是 $g\cong g$ 上满足 Cartan 三形式条件 $d\tau=\exp^*\eta$ 的原始二形式。$\exp\circ\mu$ 是邻域 $U\ni 0$ 内的群值矩映射，该邻域位于 $\mathrm{CF}^1_{\mathrm{imm}}((L,v),(L,v))$ 中；其在 μ 下的像位于 $g^\natural\subset g$ 这一开子集上，在该子集上 exp 是局部微分同胚。

通过拟哈密顿流形的融合积，我们在 $\prod_i G^{2g_i}\times U$ 上得到拟哈密顿结构，其群值矩映射由各个矩映射的乘积给出。随后在单位元处进行拟哈密顿约化，便在商 $MC_\zeta^\circ(v)$ 上得到辛结构。□

4. 从拉格朗日 Floer 理论构造 Hecke 对应

建立了一般框架后，我们现在聚焦于由凸的非紧致辛四维簇中的拉格朗日膜所产生的 Nakajima 箭图簇。我们将通过镜像对称构造 Hecke 对应和全纯拉格朗日子流形。

4.1. 带框架的拉格朗日膜。 在本小节中，我们简要回顾在 [HLT24] 中引入的凸非紧致辛流形中带框拉格朗日子流形的定义。主要结论是，所有 Nakajima 箭图簇都是某些带框拉格朗日膜的 Maurer-Cartan 变形空间。

设 (M,ω) 是一个维数为 $2n$ 的（非紧致）凸辛流形（例如参见[Sei08, (7b)] 的精确情形，以及 [RS17, 第 3] 节的单调情形）。换言之，假设 M在无穷远处呈锥形：存在一个紧致子集 $M_c\subset M$ 使得其补集

可通过一个辛同胚与无穷锥等同

$$\phi : (M \setminus M_c^\circ, \omega) \cong (\partial M_c \times [1,\infty), d(r\alpha))$$

其中，M_c°是M_c的内部，$(\partial M_c, \alpha)$是一个接触流形，而r是 $[1,\infty$的坐标）。此外，

(1) Liouville向量场Z 满足 $\omega(Z,\cdot) = \theta$，并沿着 ∂M_c严格向外。(2) ϕ 由Z 的流经过时间 log$r$诱导。(3) 在紧集M_c之外，辛形式是恰当的： $\omega = d\theta$，其中 $\theta = \phi^*(r\alpha)$。

取一个锥形几乎复结构J，它是M 上的一个 ω-相容几乎复结构，并满足：当r 充分大时，$J^*\theta = dr$。

回顾一下，我们在定义 3.5 中定义了带框架的拉格朗日浸入，它是紧拉格朗日浸入 L 与框架 F 的并。在凸设置中，我们对框架F 作如下进一步假设。

定义 4.1（锥形框架拉格朗日子流形）。 凸辛流形 M 中的锥形框架拉格朗日子流形是一个拉格朗日子流形 $F \subset M$，与$\mathbb{R}^n$ 微分同胚，配备一个恰有一个极大点且没有其他临界点的 $Morse$函数 f_F，并且 F 具有如下形式：$F = F_c \cup_{\partial F_c} (\partial F_c \times [1,\infty))$ 其中

(1) $F_c := F \cap M_c$ 与 ∂M_c 横截相交；*(2)* $\theta|_{F-F_c}$ 在边界 $\partial F_c := \partial M_c \cap F_c$附近消失。特别地，补集 $F - F_c$ 是一个原函数为常数的恰当拉格朗日子流形。

定义 4.2。 带框架的凸辛流形是一个元组 $(M,\mathbf{F})$，其中 M 是一个凸辛流形，$\mathbf{F}$ 是由彼此不相交的框架拉格朗日子流形组成的集合。我们用 $|\mathbf{F}|$表示框架集合的基数。

例 4.3。 回顾恰当辛流形的拼接构造 [Abo11，第 2 节。3], 该构造自动得到一个 Liouville 域，其完备化是一个凸辛流形。它通过对两个圆盘丛 D^*S^1 和D^*S^2 施加辛同胚进行粘合而成；该辛同胚将纤维与底空间沿相反方向对应。

设 M_1, M_2 是紧致黎曼流形，并考虑它们的圆盘余切丛 D^*M_1, D^*M_2的全空间。考虑开球 $B_i \subset D_i$，使得对于 $i = 1、2$，圆盘丛 $D^*B_i \subset D^*M_i$在映射 $(x_1, y_1) \mapsto (-y_2, x_2)$ 下辛同胚，其中 x_i、y_i分别表示底空间坐标和纤维坐标。粘合流形经过圆角化后可完备化为一个 Liouville 流形。此外，M_i 嵌入为恰当拉格朗日子流形。在所得的 Liouville 流形中，取 M_i 的一个余切纤维作为框架拉格朗日子流形；于是 M_i 与余切纤维的并构成一个带框架的拉格朗日浸入。

我们将特别关注以下情形：M 是根据图 T^*S^2 构造的管状邻域空间 D。

定理 *4.4. [HLT24，定理 5.2]* 设 M 是根据图 $D := (I,E)$ 对 T^*S^2 进行管状拼接所得的管状邻域空间，且 $L^{fr} = L \cup_{v \in I} F_v$ 是由零截面 L 与位于顶点 v 所索引分支中的余切纤维 F_v 共同给出的带框拉格朗日子流形。则与 L（分别与 L^{fr}）相关联的箭图是 D 的（分别是带框）双箭图。此外，L（分别与 L^{fr}）的非交换变形空间 A_L （分别为 $A_{L^{fr}}$）同构于 D 的（分别是带框）预投射代数。

一个关键要素是 [HKL23，引理 3.4]，中引入的局部对合对称性，它使得可以进行坐标变换，将障碍方程 $m_0^{\boldsymbol{b}} = 0$ 与预投射关系对应。因此，$\mathcal{A}_L$ 与预投射代数同构。

推论 4.5。 取上述的 M 和 $\mathbb{L}^{fr}$ 。令 $\mathcal{E}$ 为平凡向量丛，其上配备平凡联络；在$\mathbb{L}^{fr}$的紧分支（分别为框架分支）上，其秩为$\mathbf{v}$（分别为$\mathbf{w}$）。那么，将其限制到由 $\mathbb{L}^{fr}$生成的 *Fukaya* 子范畴后，带框拉格朗日膜$\mathcal{MC}(L^{fr},\mathcal{E})$ 的 *Maurer-Cartan* 空间同构于 *Nakajima* 箭图簇 $\mathcal{MC}(\mathbf{v},\mathbf{w})$。

由于坐标变换的存在，MC(v,w)中的对象仅对T呈多项式依赖。因此，可以进行特化以得到复数值理论，从而将这些构造归约到复数域上。

在接下来的各节中，我们将采用相同的策略：将局部化镜像函子限制到不存在收敛性问题的子范畴，并在复数域上进行研究。

最后，我们指出，在 [HLT24]，中，作者计算了带框拉格朗日膜 $(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E},b_0)$ 在局部化镜像函子 $\mathrm{F}(\mathbb{L},b)(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E},b_0)$下的像；在仿射$ADE$ 情形中，该像同构于复数域 C^2/Γ 上的无扭层的单子复形。

定理 4.6. *[HLT24, 定理 5.13]* $\mathscr{G}^{(\mathbb{L},b)}$ 将带框架的拉格朗日膜$(L^{fr},\mathcal{E},b_0)$ 变换为以下复形：

$$(\mathscr{G}^{(\mathbb{L},\boldsymbol{b})}(L^{fr},\mathcal{E},b_0), m_1^{\boldsymbol{b},b_0}) : L^0((\mathbb{L},\boldsymbol{b}),(L,\mathcal{E})) \to E((\mathbb{L},\boldsymbol{b}),(L,\mathcal{E})) \oplus L^1((\mathbb{L},\boldsymbol{b}),(F,\mathcal{E})) \to L^2((\mathbb{L},\boldsymbol{b}),(L,\mathcal{E})), \tag{4.1}$$

这与 *Nakajima [Nak07]* 代数构造的单子一致。该复形采用注记 *2.5* 中引入的记号，其各项由以下元素张成：*Floer* 生成元 $M_v \in L^0((L,b),(L,E))$、$P_v \in L^2((L,b),(L,E))$，以及对于 Q 的所有顶点 v 和箭头 a，由浸入扇区 $J_v \in L^1((L,b),(F,E))$、$X_a \in E((L,b),(L,E))$ 张成的项。这里，M_v、P_v 分别是 *Morse* 函数 f_v 在 S_v^2 上的极大点和极小点，而 $X_a \in CF^1(S^2\ t(a), S^2\ h(a))$ 和 $J_v \in CF^1(L_v,F_v)$ 是 *1* 次浸入扇区。此外，第一个微分的形式为

$$m_1^{\boldsymbol{b},b_0}(\eta M_v) = \sum_{t(\bar{a})=v} (B_{\bar{a}}\eta) X_{\bar{a}} + \sum_{h(a)=v} (\eta x_a) X_a + j_v \eta J_v,$$

第二个是

$$m_1^{\boldsymbol{b},b_0}(\eta' X_a) = \eta' x_{\bar{a}} P_{h(a)} + B_{\bar{a}}\eta' P_{t(a)};\ m_1^{\boldsymbol{b}}(\eta'' J_v) = i_v \eta'' P_v.$$

此外，这个复形的上同调同构于$\mathbb{C}^2/\Gamma$上的一个无挠层，该层可扩张为$\mathbb{P}^2/\Gamma$上的一个带框架无扭层。

在下一小节中，我们将使用更一般的单子复形 $\left(\mathrm{CF}^*((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2)), m_1^{b_1\ \ 2}\right)_{,b}$来构造 Hecke 对应。

4.2. Hecke 对应。 Hecke 对应在几何表示论中发挥着重要作用，它作为 Fourier-Mukai 型变换的核，用于定义产生与湮灭算子 [Nak98, Nak01]。在本小节中，我们将实现其拉格朗日 Floer 理论类比。

在下文中，我们始终假设D 是一个没有自环的图，即不存在头尾位于同一顶点的箭头。这一技术性假设确保相应的

子簇具有正确的维数。我们用Q表示D的双箭图，并用Q^{fr}表示其带框双箭图。

设 L^{fr} 为带框架的拉格朗日浸入。取维数向量 w、v^1 和 v^2。设 $(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_m)$ 为秩为 $(\mathrm{v}^m,\mathrm{w})$、变形参数为$b_m := \sum B_{ma}X_a + \sum i_{mv}I_v + \sum j_{mv}J_v$、对应于 $m = 1,2$ 的稳定带框拉格朗日膜。这里的B_m,i_m,j_m应视为 Nakajima 箭图簇的数据，它们自然地作为变形参数中的系数出现。

回顾一下，在适当的稳定性条件下，带框拉格朗日膜 $(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E})$ 的 Maurer-Cartan 空间同构于 Nakajima 箭图簇 $\mathrm{M}_\zeta(\mathrm{v},\mathrm{w})$。下文中，我们将始终采用注 2.3 中所述的稳定性条件，并将 Maurer-Cartan 空间记为 $\mathrm{MC}(\mathrm{v},\mathrm{w})$ 或 $\mathrm{M}(\mathrm{v},\mathrm{w})$。此外，简便起见，我们常将变形参数写作$b_m := [B_m,i_m,j_m]$，因为 $b_m \in \mathrm{MC}(\mathrm{v}^m,\mathrm{w})$ 是箭图表示的一个等价类，参见第 3.1 节。

我们考虑 $\mathrm{MC}((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1)) \times \mathrm{MC}((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2))$ 上的向量丛复形 $(\mathrm{CF}^*((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2)), \mathfrak{m}^{b_1},\mathfrak{b}_1{}^2)$。注意，此处我们将采用与 [HLT24] 中不同的关于框架拉格朗日子流形和局部化镜像函子的约定，以便更好地与 Nakajima 的工作相一致。经过额外的工作，也可以遵循 [HLT24]，中的约定，所得结果仍然成立。在本文中，我们将使框架拉格朗日子流形始终具有秩 1，并与拉格朗日浸入的定义域中所有连通紧分支（球面）相交。该框架拉格朗日子流形可按如下方式构造：

构造。 给定一个图D，我们首先添加一个额外的顶点，使其连接到D的所有顶点。然后我们对$T^*\mathbb{S}^2$按照新图进行拼接构造，从而得到一个 *Liouville* 流形 M 以及拉格朗日浸入 L。令 $T \subset M$ 为对应于新添加顶点的连通分支处的一条余切纤维。带框架的拉格朗日浸入通过对 L 与 T 在结点 $L \cap T$ 处进行拉格朗日手术而得到。该手术在结点附近局部进行，并不影响拉格朗日子流形的其余部分。手术的局部模型在 *[Sei00，第 2e 节]*，中有所描述，综述例如可见于 *[PW26，第 2 节1]*。

除非另有说明，直到第4节结束，我们都将采用这一概念。

回想一下，我们在 $\hat{\mathrm{L}}$ 的每个连通分支上都选取了完美莫尔斯函数。因此，在 $\mathrm{MC}(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_1) \times \mathrm{MC}(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_2)$ 上，$\mathrm{CF}^*((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_1,\mathfrak{b}_1), (\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_2,\mathfrak{b}_2))$ 与 $\mathrm{CF}^{2-*}((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_2,\mathfrak{b}_2), (\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_1,\mathfrak{b}_1))$ 之间存在纤维逐点对偶，其中 $(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2) \in \mathrm{MC}(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_1) \times \mathrm{MC}(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_2)$。这种对偶性使我们能够分析秩相近的膜之间的 Floer 上同调的支撑，从而得到以下与 Hecke 对应的同一识别。

定理 *4.7.* 假设 D 没有边环。考虑两个膜 (L^{fr}, E_i)，其中 $j = 1, 2$，且 E_j 是 L^{fr} 上秩为 (v^j, w) 的平凡丛，其中 $v^2 = v^1 + e^k$（这意味着 E_2 在第 k 个分支上的秩比 E_1 高一）。那么 *Floer* 上同调 $HF^2((L^{fr},E_2),(L^{fr},E_1))$ 的支撑是 $MC(L^{fr},E_2) \times MC(L^{fr},E_1)$ 中的一个全纯拉格朗日子簇 $S_k \subset$。此外，在 $MC(L^{fr},E_2) \times MC(L^{fr},E_1)$ 上进行坐标变换，并对 $CF((L^{fr},E_2),(L^{fr},E_1))$ 进行基变换后，S_k 可与 $M(v^2, w) \times M(v^1,w)$ 中的 *Hecke* 对应 $P_k(v_2,w)$ 识别。

Fu 此外，$\mathrm{HF}^2((\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_2), (\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_1))$ 是 *Hecke* 对应 $\mathfrak{p}_k(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}$上的线丛).

证明。在此证明中，我们考虑 $\mathrm{CF}^*((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2))$，它是 $\mathrm{CF}^*((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2), (\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_1))$ 的纤维逐点对偶。设 $\mathfrak{b}_1 := [\mathrm{B}_1,\mathrm{i}_1,\mathrm{j}_1]$（分别设 $\mathfrak{b}_2 := [\mathrm{B}_2,\mathrm{i}_2,\mathrm{j}_2]$）为 $(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1)$（分别为 $(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2)$）的 Maurer-Cartan元。Morse模型给出如下拉格朗日Floer复形 $\mathrm{CF}^*((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2))$，其系数取自

$\mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_1)\times\mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_2)$，可按照 [HLT24，定理 513]:

$$L^0((\mathbb{L},\mathcal{E}_1),(\mathbb{L},\mathcal{E}_2))\oplus L^0(F,F)\xrightarrow{\sigma}E((\mathbb{L},\mathcal{E}_1),(\mathbb{L},\mathcal{E}_2))\oplus L^1(F,(\mathbb{L},\mathcal{E}_2))\oplus L^1((\mathbb{L},\mathcal{E}_1),F)\xrightarrow{\tau}L^2((\mathbb{L},\mathcal{E}_1),(\mathbb{L},\mathcal{E}_2)),\tag{4.2}$$

其中，记号 L(V 1, V 2) 和 E(V 1, V 2) 定义于注记 2.5； $\sigma(\xi, d) := m^{b_1}, b_1^2(\xi M, dM_F) = (B_2\xi - \xi B_1) \oplus (j_2\xi - dj_1) \oplus (\xi i_1 - i_2 d)$，而在坐标变换之前， τ 更为复杂。更确切地说，我们用 $\tau(\eta, a, b)$ 表示 $m^{b_1}, b_1^2(\eta X, aI, bJ)$，并且

$$\tau(\eta,a,b)=((1+\sum_j c_j(B_{\bar{2}}B_2)^j)B_{\bar{2}}\eta-\eta(1+\sum_j c_j(B_{\bar{1}}B_1)^j)B_{\bar{1}})+a(1+\sum_k d_k(j_1i_1)^k)j_1-(1+\sum_n e_n(i_2j_2)^n)i_2b,$$

其中 c_j、d_k 和 e_n 均为常数，$B_{\bar{1}}, B_{\bar{2}}$ 表示B_1, B_2对应的反向箭头。注意，第一个微分源自基本类的含幺性质，而第二个微分具有如下形式 $\iota^{b_1,b_\xi}2\partial_{x_a}m_0^{\boldsymbol{b}}$，其定义见命题 3.12。

回顾使用Morse模型时，$m_0^{\boldsymbol{b}}$ 统计输出为球面极小点的珍珠轨迹。由于浸入拉格朗日是精确的，且原函数为常数，这些珍珠轨迹对应于映射到浸入点并在极小点的稳定流形上取值的常值$2n$-边形，在方程中贡献$c_j(B_{\bar{1}}B_1)^jB_{\bar{1}}$等项。

此外，由于局部对合对称性（例如参见 [HKL23，引理3.4]），$(B_{\bar{2}}B_2)^j$ 和$(B_{\bar{1}}B_1)^j$ 的系数相同，这使我们能够按照[HLT24，定理5.2]进行坐标变换。坐标变换后， τ可简化为 $\tau(\eta,a,b) = B_2\eta - \eta B_1 + aj_1 - i_2 b$，而$CF((L^{fr},E_1),(L^{fr},E_2))$则成为$M(v^1,w)\times M(v^2,w)$上的向量丛复形。

注意，借助纤维逐点对偶， $\sigma^\vee$ 的余核支撑与 σ的逐纤维核重合。此外，根据命题 3.12， $\sigma(\xi, d)|_{(b_1,b_2)} = 0$ 当且仅当 (ξ,d) 定义了从 b_1 到 b_2 的箭图表示同态。因此，$HF^2((L^{fr},E_2),(L^{fr},E_1)) \cong \mathrm{Coker}(\sigma^\vee)$，作为 $MC(L^{fr},E_2)\times MC(L^{fr},E_1)$ 上的层，其在 (b_2,b_1) 处的纤维是从 b_1 到 b_2的同态的对偶空间。为简便起见，我们将在对偶空间上进行研究。

注意，在固定的稳定性条件下，对于任意非零元素 (ξ,d)，都有 $d \neq 0$。这些元素属于 σ 的核。否则，我们有 $j_2\xi = 0$，这意味着 Im (ξ) 构成 $[B_2, i_2, j_2]$ 的子表示，并且 Im $(\xi) \subset$ Ker (j_2)。稳定性条件意味着 Im $(\xi) = 0$，这迫使 $(\xi, d) = (0, 0)$。

此外，对于 σ 的核中的任意非零元素 (ξ,d)，我们还有 Ker $(\xi) = 0$。换言之，任意非零同态 (ξ,d) 都是单射。事实上，可以验证 Ker (ξ) 是 Ker (j_1) 的 B_1-不变子空间。因此，根据稳定性条件，Ker $(\xi) = 0$。

因此，经过坐标变换后，支撑 S_k 可识别为一组子集：由满足以下条件的配对 $(b_2,b_1) \in M(v^2,w)\times M(v^1,w)$ 构成，即它们之间存在一个单射同态 (ξ,d)，其中 $d \neq 0$。由于 σ 在 (ξ,d) 中是齐次的，这一条件等价于它们之间存在一个单射带框同态 $(\xi/d, 1)$。这与 Nakajima 定义的 Hecke 对应 $P_k(v_2,w)$ 一致，参见 [Nak98]，中的定义 5.6。根据 [Nak98] 中的定理 5.7，它是 $M(v^1,w)\times M(v^2,w)$ 的全纯拉格朗日子簇。

最后，设 (ξ_1,d) 和 (ξ_2,d) 是 Hecke 对应中任意 (b_2,b_1) 所对应的 Ker $\sigma|_{(b_1,b_2)}$ 中的元素。于是 $\sigma(\xi_1 - \xi_2, 0)$ 等于 0，因此根据前面的讨论可得 $\xi_1 = \xi_2$。所以，$HF^2((L^{fr},E_2),(L^{fr},E_1))$ 的每个纤维都是一维的，这表明它在 Hecke 对应上构成一个线丛。□

推论 4.8. 假设与定理 *4.7* 相同。令 $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1 + r\mathbf{e}^k$，其中 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。那么在 $\mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_2)\times\mathcal{MC}(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_1)$ 上存在一个坐标变换，并且在 $CF((\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_2),(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_1))$上存在一个基变换

使得 $\mathrm{HF}^2((\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_2),(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_1))$ 的上同调支撑与$\mathcal{MC}(\mathbf{v}^2,\mathbf{w})\times\mathcal{MC}(\mathbf{v}^1,\mathbf{w})$中的广义 *Hecke* 对应相对应。

*M*此外，$\mathrm{HF}^2((\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_2),(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_1))$是广义 *Hecke* 对应上的一个线丛。

证明。 计算与定理 4.7 中的计算类似。可以看出，经过坐标变换后，$\mathrm{HF}^2((\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_2),(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_1))$ 的支撑可以与 Nak01] 中第 5.3 节引入的广义 Hecke 对应等同起来。 □

注 *4.9*。一般而言，设 L 是一个维数为 n 的紧拉格朗日浸入，且 E_1 和 E_2 是秩分别为 $v^1\le v^2$的平凡丛。假设存在一个稳定性条件，使得任意两个维数分别为 v^1 和 v^2 的 A_L-表示之间的非零态射都是单射。那么，最高次数的 *Floer* 上同调 $HF^n((L,E_2),(L,E_1))$ 在 $MC(v^1)\times MC(v^2)$ 中的 *Hecke* 型子簇 P 上构成一个层。换言之，$P\subset MC(v^1)\times MC(v^2)$ 定义为由 A_L-表示对 (V^1,V^2) 组成的子簇，其中存在一个单射同态 $\xi: V^1\hookrightarrow V^2$。这由纤维逐点对偶和命题 *3.12* 得出，可视为定理 *4.7* 的高维类比。

根据证明，框架拉格朗日子流形的最大点在 Hecke 对应中发挥着重要作用，因此我们将其表述为以下推论。

推论 4.10. 设 $\mathbf{v}^1\le\mathbf{v}^2$。对于$\mathrm{HF}^2((\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_2),(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_1))$中的任意非零类，每个上循环代表在框架拉格朗日子流形的最大点处的系数均非零。

此外，我们观察到，纤维上同调的支撑呈现出一种由 A_∞-乘积诱导的结构，类似于 Borel–Moore 同调上的卷积乘积。更准确地说，对于 $\mathrm{v}^1\le\mathrm{v}^2\le\mathrm{v}^3$,，$A_\infty$-乘积的支撑为 $\mathrm{p}_{13}(\mathrm{p}_{12}^{-1}(\mathrm{Z}(\mathrm{v}^1,\mathrm{v}^2))\cap\mathrm{p}_{23}^{-1}(\mathrm{Z}(\mathrm{v}^2,\mathrm{v}^3)))$，其中 p^{kj}表示从 $\mathrm{M}(\mathrm{v}^1,\mathrm{w})\times\mathrm{M}(\mathrm{v}^2,\mathrm{w})\times\mathrm{M}(\mathrm{v}^3,\mathrm{w})$ 到 $\mathrm{M}(\mathrm{v}^k,\mathrm{w})\times\mathrm{M}(\mathrm{v}^j,\mathrm{w})$ 的投影，而 $\mathrm{Z}(\mathrm{v}^k,\mathrm{v}^j)$ 表示纤维上同调 $\mathrm{HF}^0((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_k),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}j))$ 的支撑。这是因为

$$m_2^{b_1,b_2,b_3}:\mathrm{HF}^0((\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_1),(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_2,b_2))\otimes\mathrm{HF}^0((\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_2,b_2'),(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_3))\to\mathrm{HF}^0((\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_1),(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_3))$$

当 $b_2\neq b_2'$ 时为零。因此，输出的支撑包含于 $p_{13}(p_{12}^{-1}(Z(\mathrm{v}^1,\mathrm{v}^2))\cap p_{23}^{-1}(Z(\mathrm{v}^2,\mathrm{v}^3)))$。还需证明支撑就是整个集合。

根据Morse模型，零次生成元是 L^{fr} 的正规化中各不可约分支的最大点。我们将球面的最大点记为 $\mathrm{M}^{ij}\in\mathrm{HF}^0((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_i),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}j))$，并将框架拉格朗日子流形记为 $\mathrm{M}^{F_{ij}}$for i, j $=1,2,3$。设 $\sum\xi_1\mathrm{M}_{12}+\mathrm{d}_1\mathrm{M}^{F_{12}}$ 和 $\sum\xi_2\mathrm{M}_{23}+\mathrm{d}_2\mathrm{M}^{F_{23}}$ 分别是 $\mathrm{HF}^0((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2))$ 和 $\mathrm{HF}^0((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_3))$ 中任意非零元素。考虑 m^{b_1},b2, 32 b $(\sum\xi_1\mathrm{M}_{12}+\mathrm{d}_1\mathrm{M}^{F_{12}},\sum\xi_2\mathrm{M}_{23}+\mathrm{d}_2\mathrm{M}^{F_{23}})$ 在 $\mathrm{M}^{F_{13}}$ 处的输出。注意，$\mathrm{M}^{F_{ij}}$ 是框架拉格朗日子流形的最大点。因此，唯一的贡献来自 m^{b_1},b2, 32 b $(\mathrm{d}_1\mathrm{M}^{F_{12}},\mathrm{d}_2\mathrm{M}^{F_{23}})=\mathrm{d}_2\mathrm{d}_1\mathrm{M}^{F_{13}}$，根据推论 4.10，该项非零。

因此，支撑为 $\mathrm{p}_{13}(\mathrm{p}_{12}^{-1}(\mathrm{Z}(\mathrm{v}^1,\mathrm{v}^2))\cap\mathrm{p}_{23}^{-1}(\mathrm{Z}(\mathrm{v}^2,\mathrm{v}^3)))$，这与 $\bigoplus\mathrm{H}_*(\mathrm{Supp}\ \mathrm{HF}^0((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}1),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}2)))$ 上的卷积乘积类似，其中 H_* 是 Borel–Moore 同调。$\mathrm{v}^1,\mathrm{v}^2$

4.3. 全纯拉格朗日子流形的构造。 本小节将利用框架拉格朗日膜的拉格朗日 Floer 理论，构造 Nakajima 在 ADE 情形中引入的全纯拉格朗日子簇，例见 [Nak94]和 [Nak98], 。更确切地说，假设 D 是一个无圈的有限图。Nakajima 证明了 $\pi^{-1}(0)$ 是$\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的全纯拉格朗日子簇，其中 $\pi:\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\to\mathcal{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 是 Nakajima 箭图簇之间的自然射影态射，由改变稳定性条件而来。

首先，让我们利用拉格朗日 Floer 理论，在 MC(v,w) 上重新构造一个滤过。在某些特殊情形下，它给出 MC(v,w) 中全纯拉格朗日子流形的一个不可约分支。

引理 4.11. *Floer*上同调 $\mathrm{HF}^2(\mathbb{S}_k,(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}))$ 为 $\mathbb{S}_k$ 在$\mathbb{L}^{fr}$的正规化中的每个不可约球面给出 $\mathcal{MC}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的一个滤过。

证明。 与公式 4.2 类似，可以计算

$$\mathrm{CF}^*(\mathbb{S}_k,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E})):0\to V_k\xrightarrow{\sigma}\bigoplus_{a:t(a)=k}V_{h(a)}\oplus W_k\xrightarrow{\tau}V_k\to 0, \tag{4.3}$$

其中， σ 和 τ 与公式 4.2 类似， V_j （分别为 W_k）表示 MC(v,w) 上与第 $j-$ 个顶点（第 k 个框架顶点）相关联的典范丛。

根据稳定性条件， σ 是单射；否则，存在一个包含于j的核中的真子表示。一般而言，$\mathrm{HF}^2(\mathbb{S}_k,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))$ = 余核 τ 的维数随纤维逐点变化，这会根据维数在 MC(v,w) 上诱导一个滤过。更准确地说，我们可以定义 MC(v,w) 的以下子集：

$$\begin{aligned}\mathcal{MC}_{k,r}(\mathbf{v},\mathbf{w}):=&\{b_0=[B,i,j]\in\mathcal{MC}(\mathbf{v},\mathbf{w})\mid \mathrm{HF}^2(\mathbb{S}_k,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},E,b_0))=r\},\\ \mathcal{MC}_{k,\le r}(\mathbf{v},\mathbf{w}):=&\bigcup_{s\le r}\mathcal{MC}_{k,s}(\mathbf{v},\mathbf{w}).\end{aligned} \tag{4.4}$$

特别地，$\mathrm{MC}_{k,\le r}(\mathrm{v},\mathrm{w})$ 是 $\mathrm{MC}(\mathrm{v},\mathrm{w})$ 的一个开子集。 □

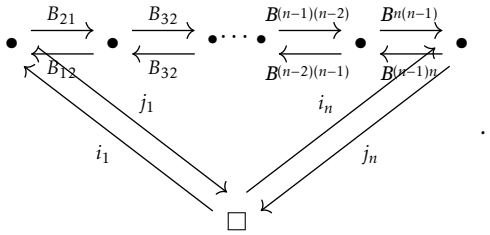
特别地，$\mathrm{MC}_{k,\ \ge v_k}(\mathrm{v},\ \mathrm{w})$ 是一个闭子簇。我们将利用这一观察来构造带框 A_n 情形中的全纯拉格朗日子流形的一个不可约分支。设 D 为 A_nDynkin图。接着，我们添加一个与第一个和最后一个顶点相交的顶点，并执行第 4.2 节中描述的构造，由此得到带框拉格朗日子流形 L^{fr}。

命题 4.12。 设 $\mathbb{L}^{fr}$ 为上述构造的带框拉格朗日子流形，并配备一个秩为 $(\vec{\delta},1)$ 的平凡向量丛 E，其中 $\vec{\delta}=(1,\dots,1)$。那么

$$\mathrm{HF}^2(\mathbb{S}_k,(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}))\cong\iota_*\mathcal{L},$$

其中 $\mathcal{L}$ 是 $\pi:\mathcal{MC}(\vec{\delta},1)\to\mathcal{MC}_0(\vec{\delta},1)$ 的第 k 个例外因子上的线丛，而 ι 表示包含映射。

证明。 根据构造，与 L^{fr} 相关联的箭图Q^{fr} 如下：



根据引理 4.11，我们有

$$\tau(\eta_{(k-1)k},\eta_{(k+1)k},0)=B_{k(k-1)}\eta_{(k-1)k}+B_{k(k+1)}\eta_{(k+1)k}$$

对于所有的 $(\eta_{(k-1)k},\eta_{(k+1)k},0)\in E(\mathbb{S}_k,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))\oplus L(\mathbb{S}_k,F)$，以及 $k\neq 1,n$。此外， $\tau(0,\eta_{21},b)=B_{12}\eta_{21}+ib$且 $\tau(\eta_{(n-1)n},0,b)=B^{n(n-1)}\eta_{(n-1)n}+i_nb$。

由于维数的原因，$\mathrm{HF}^2(\mathrm{S}_k,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E})) = \mathrm{Coker}(B,i)$ 是一个扭曲层，其支撑位于由$B^{k(k-1)} = B^{k(k+1)} = 0$所定义的闭子簇 $MC,1(\vec{\delta},1)$ 上。特别地，该纤维的维数为 1。

另一方面，稳定性条件意味着唯一非零的态射为 $\mathrm{B}^{i(i+1)}$，其中 $\mathrm{i} \le \mathrm{k}-1$；$\mathrm{B}^{(t+1)t}$，其中 $\mathrm{t} \ge \mathrm{k}$；以及 $\mathrm{j}_1,\mathrm{j}_n$。我们关注这些态射的等价类。利用群作用，除 $\mathrm{B}^{(k-1)k}$ 和 $\mathrm{B}^{(k+1)k}$ 之外，所有非零线性映射都可以归一化为 1，且 $(\mathrm{B}^{(k-1)k},\mathrm{B}^{(k+1)k}) \in \mathrm{C}^2 \setminus \{0\}$。利用第 k 个顶点处的 C^*-作用，我们看到 $\mathrm{MC}_k, 1(\vec{\delta},1) \cong \mathrm{CP}\,1$，这与极小解消中的第 k 个例外因子重合。类似的论证也适用于 $\mathrm{k}=1$ 和 $\mathrm{k}=\mathrm{n}$ 的情形。□

此外，对于一般的带框架的拉格朗日膜，我们可以通过去掉若干个紧分支，构造 Nakajima 箭图簇内的全纯拉格朗日子流形。这给出了上述命题的一种“对偶”构造。

例 4.13. 作为一个具体说明，考虑 A_2 情形，并令 L^{fr} 为秩为 $(\mathrm{v}=(1,1),\mathrm{w}=(1,1))$ 的带框拉格朗日脉冲体。取 $\mathrm{n}=\mathrm{k}=1$，在推论中，我们首先观察到 $\mathrm{MC}(\mathrm{v}-\mathrm{e}^1,\mathrm{w})$ 是一个单点。此外，$\mathrm{HF}^2((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}')) = \text{余核}(\tau)$ 是一个支撑在由 $\mathrm{B}_{12}=\mathrm{i}_1=\mathrm{i}_2=0$ 定义的子簇上的扭曲层。这是因为 $\mathrm{HF}^2((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}'))$ 与 $\mathrm{HF}^0((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}'),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))$ 纤维逐点对偶。因此，唯一非零的箭头是 $[\mathrm{B}_{12},\mathrm{j}_1,\mathrm{j}_2]$，它定义了一个全纯拉格朗日子流形 $\mathrm{CP}^1 \subset \mathrm{MC}(\mathrm{v},\mathrm{w})$。类似地，可以通过 $\mathrm{HF}^2((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}''))$ 得到另一个全纯拉格朗日子流形，其中 E” 的秩为 $(\mathrm{v}-\mathrm{e}^2,\mathrm{w})$。

这个例子展示了一个简单情形下的机制。更一般地，在 ADE 情形中，对于任意维数向量，可以在相应的中岛箭图簇中构造全纯拉格朗日子流形的并集，而不是不可约分支的并集。

定理 4.14. 设 D 是一个图，$(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E})$ 是一个秩为$(\mathbf{v},\mathbf{w})$的稳定带框拉格朗日膜，F 是一个秩为$\mathbf{w}$的框架拉格朗日膜。那么，二次 *Floer* 上同调$\mathrm{HF}^2((\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}),F)$的支撑是$\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$中由 $i=0$ 定义的一个子簇。

证明. 我们先计算 Floer 复形 $\mathrm{CF}^*((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}),F)$。由于 L^{fr} 与F 横截相交，使用 Morse模型，Floer 复形由框架拉格朗日子流形的极小点P_F（次数为 2）以及从紧拉格朗日球到框架拉格朗日子流形的浸入扇区J（次数为 1）生成。因此，Floer 复形具有如下形式:

$$\mathrm{CF}^*((\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}),F) : L^1((\mathbb{L},\mathcal{E}),F) \xrightarrow{\tau} L^2(F,F), \tag{4.5}$$

其与.....纤维逐点对偶

$$\mathrm{CF}^*(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E})) : L^0(F,F) \xrightarrow{\sigma} L^1(F,(\mathbb{L},\mathcal{E})). \tag{4.6}$$

这里 $\sigma(\xi) = \mathrm{m}_1^{b\,0}$，$(\xi \mathrm{M}_F) = \mathrm{m}_2(\xi \mathrm{M}_F, \sum \mathrm{i}_k \mathrm{I}_k) = \sum \mathrm{k}(\mathrm{i}_k \xi)\mathrm{I}_k$，因为 M_F是框架拉格朗日子流形的基本类。而 $\tau(\eta) = \mathrm{m}_1^{b\,0}$，$(\sum \eta_k \mathrm{J}_k) = \sum \mathrm{m}_2(\mathrm{i}_k \mathrm{I}_k, \eta_k \mathrm{J}_k) = (\sum \mathrm{k}\ \eta_k \mathrm{i}_k)\mathrm{P}_{F_0}$。因此，$\mathrm{HF}^2((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}),\mathrm{F})$ 是一个凝聚层，其概形支撑为

$$L(\mathbf{v}) := \{b = [(B,i,j)] \in \mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mid i = 0\}.$$

□

推论 4.15. 设 D 为一个 *ADE Dynkin* 图，$(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E})$ 是秩为$(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的稳定带框拉格朗日膜，F 是秩为$\mathbf{w}$的框架拉格朗日膜。那么，$\mathrm{HF}^2((\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}),F)$ 的支撑 $L(\mathbf{v})$ 在$\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$中构成一个全纯拉格朗日子簇，并且 $\mathrm{HF}^2((\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}),F)$ 是 $L(\mathbf{v})$的结构层。

证明. 根据上述定理，对于任意元素 $\mathrm{b} = [(\mathrm{B}, 0, \mathrm{j})] \in \mathrm{L}(\mathrm{v})$，我们有 $\sum_{\mathrm{h}(\mathrm{a})=\mathrm{v}} \epsilon(\mathrm{a}) \mathrm{B}_a \mathrm{B}_{\bar{a}} = 0$。剩下需要证明 $\mathrm{L}(\mathrm{v}) = \pi^{-1}([0])$，其中 $\pi : \mathrm{M}(\mathrm{v}, \mathrm{w}) \to \mathrm{M}_0(\mathrm{v}, \mathrm{w})$ 是典范射影态射。根据 [Nak94], 中的引理 5.9，只需证明对于任意 $\mathrm{b} = [(\mathrm{B},0, \mathrm{j})],$，轨道 $\mathrm{G}_\mathrm{v} \cdot \mathrm{B}$ 的闭包包含 0。由 [Lus91] 中的命题 14.2 或 [Nak94], 中的命题 6.7 可得此结论；作者证明了，对于任意满足 $\sum_{\mathrm{h}(\mathrm{a})=\mathrm{v}} \epsilon(\mathrm{a}) \mathrm{B}_a \mathrm{B}_{\bar{a}} = 0$ 的无框 ADE 箭图 Q 的表示，它们都是幂零的。因此，轨道闭包包含零。

此外，根据 Maurer-Cartan 变形空间的定义，平凡向量丛在F 上的自同构群仍保留在构造中。因此，$\mathrm{HF}^2((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}),F)$ 是结构层，或者说是$L(\mathrm{v})$ 上的平凡全纯线丛。□

若不假设D 是 ADE Dynkin 图，则由$i = 0$ 定义的子簇并非全纯拉格朗日子流形。

例 4.16。 回忆一下，Nakajima 箭图簇 $\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 的维数为 $\mathbf{v}^t(2\mathbf{w} - C\mathbf{v})$，其中$C$ 是图 D的 Cartan 矩阵，参见 [Nak94]中的方程 (4.6)，例如。

特别地，取D为仿射A_1 图，且 $\mathrm{v} = \mathrm{w} = (1,1)$。那么 $\mathrm{M}(\mathrm{v},\mathrm{w})$ 的维数为 4。然而，由$i_1 = i_2 = 0$ 定义的子簇维数只有 3。事实上，当 $\mathrm{v} = (1,1)$ 时，矩映射条件$B_{\bar{1}}B_1 = B_{\bar{2}}B_2$ 等价于$B_1 B_{\bar{1}} = B_2 B_{\bar{2}}$，若 $i_1 = i_2 = 0$。因此，根据维数计数，由$i = 0$ 定义的子簇并非全纯拉格朗日子流形。

在存在边环的情况下也会出现类似现象。例如，设D 为仿射A_0 图，并取 $\mathrm{v} = \mathrm{w} = 1$。在此情形下，$(B_1, B_{\bar{1}})$ 是复数。因此 $[B_1, B_{\bar{1}}] = 0$。矩映射方程蕴含 $ij = 0$。然而，稳定性要求 $j \neq 0$。因此，$\mathrm{M}(1,1)$ 同构于由$i = 0$定义的子簇，而该子簇不是全纯拉格朗日子流形。

4.4. 与 Hecke 对应的结构类比。虽然本文并未构造产生与湮灭算子，但我们注意到，拉格朗日 Floer 理论中的某些几何运算在结构上与 Hecke 对应相似。

在上一节中，我们注意到，纤维上同调 $\mathrm{HF}^0((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_k),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_j))$ 的支撑，具有类似于 Borel–Moore 同调上卷积乘积的结构。在本小节中，我们关注 $\mathrm{rank}\, \mathrm{E}_k = (0,\mathrm{w})$ 的情形，此时纤维逐点支撑是一个全纯拉格朗日子流形$L(\mathrm{v}_j)$，如推论 4.15 所示。

我们先给出以下引理，它对后续讨论很有用。

引理4.17. 如果$\mathcal{E}_1$ 的秩小于或等于$\mathcal{E}_2$，的秩，那么 A_∞-*produc* t

$$m_2^{0,b_1,b_2} : \mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_1)) \otimes \mathrm{HF}^0((\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_1),(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_2)) \to \mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E}_2))$$

在纤维方向上是单射。

证明。 设 $\sum \xi_1 M_{12} + d_1 M^{F_{12}}$ 是 $\mathrm{HF}^0((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2))$ 中的一个非零元素。这里我们采用与第 4.2 节相同的记号。如定理 4.7 的证明所示，$\mathrm{HF}^0(F,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1))$ 由框架拉格朗日子流形M^{F_1}的最大点生成。

由于 M^{F_1} 是框架拉格朗日子流形的基本类，我们有 $\mathrm{m}_{0,b_1,\mathrm{b}_2}{}^2(\mathrm{M}^{F_1}, \sum \xi_1 \mathrm{M}_{12} + \mathrm{d}_1 \mathrm{M}^{F_{12}}) = \mathrm{m}_{0,b_1,\mathrm{b}_2}{}^2(\mathrm{M}^{F_1}, \mathrm{d}_1 \mathrm{M}^{F_{12}}) = \mathrm{d}_1 \mathrm{M}^{F_2}$，因此，$\mathrm{m}_{0,b_1,\mathrm{b}_2}{}^2$是单射。□

由于$m_{0,b_1,b_2}{}^2$是单射，对于 $\mathrm{HF}^0(F,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1))$ 的任意子层 F，A_∞-乘积$m_{0,b_1,b_2}{}^2$将在 F 的支撑上诱导出一个对应。

现在，设 $\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^1 + \mathrm{e}^k$ 与之前相同。为简便起见，我们将纤维上同调 $\mathrm{HF}^0((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_1), (\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}, \mathrm{E}_2))$ 记为 $\mathrm{F}_{k\, \mathrm{v}^2}$，其支撑位于 Hecke 对应 $\mathrm{S}_k(\mathrm{v}^1,\mathrm{w})$ 中。考虑形式

和 $\mathrm{F}_{k\mathbf{v}^2}$通过 $m_2^{0,\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}}$，，作用于$\bigoplus \mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}))$，$(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))$，其中 $\forall k$:$\mathbf{v}$

$$F_k=\sum_{\mathbf{v}^2}\mathscr{F}^k_{\mathbf{v}^2}\bullet:\bigoplus_{\mathbf{v}}\mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}))\to\bigoplus_{\mathbf{v}}\mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E})).\tag{4.7}$$

换言之，对于任意 $\alpha\in\bigoplus\mathrm{HF}^0(F,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))$，我们定义 $F_k(\alpha):=m_2^{0,\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}},,(\alpha,\beta)\in\bigoplus\mathrm{HF}^0(F,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))_{\mathbf{v}}$ $_{\mathbf{v}}$，其中 $\forall\beta\in\mathrm{F}_{k\,\mathbf{v}^2}$。特别地，由于 $m0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ ^{2}是单射，故其支撑

$$m_2^{0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2}:\mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_1))\otimes\mathrm{HF}^0((\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_1),(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_2))\to\mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_2))$$

是 $p_2(p_1^{-1}(L(\mathrm{v}^1))\cap\mathrm{S}_k(\mathrm{v}^1,\mathrm{w}))$，这与生成算子 F_k的结构非常相似。

类似地，我们定义 $\mathrm{F}_{k\mathbf{v}^2}$ 在 $\bigoplus\mathrm{HF}^0(F,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))$ 上的形式和的左作用，然后取$_{\mathbf{v}}$其对偶:

$$E_k=(\sum_{\mathbf{v}^2}\mathscr{F}^k_{\mathbf{v}^2}(\bullet)^\vee)^\vee:\bigoplus_{\mathbf{v}}\mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}))\to\bigoplus_{\mathbf{v}}\mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E})).\tag{4.8}$$

更准确地说，对于任意 $\alpha^2\in\bigoplus\mathrm{HF}^0(F,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))$，我们定义 $E_k(\alpha):=(m_2(\beta,(\alpha)^\vee))^\vee\in\bigoplus\mathrm{HF}^0(F,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))_{\mathbf{v}}$ $_{\mathbf{v}}$，其中 $\forall\beta\in\mathrm{F}_{k\,\mathbf{v}^2}$。这里，对偶 $(\alpha)^\vee$ 是 $\mathrm{HF}^2((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}),F)$ 中的对偶元素。特别地，其支撑

$$m_2^{0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2}:\mathrm{HF}^0((\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_1),(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_2))\otimes\mathrm{HF}^2((\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_2),F)\to\mathrm{HF}^2((\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_1),F)$$

是 $p_1(p_2^{-1}(L(\mathrm{v}^1))\cap\mathrm{S}_k(\mathrm{v}^1,\mathrm{w}))$，其结构与湮灭算子 E_k十分相似。此外，我们还有作用于 $\mathrm{HF}^0(F,(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))$ 上的恒等算子，其定义为 $1_{\mathbf{v}}=\sum M_{11}+M^{F_{11}}\in\mathrm{HF}^0((\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}),(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}))$。更准确地说，我们定义:

$$H_{\mathbf{v}}=m_2(\bullet,1_{\mathbf{v}}):\mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E}_1))\to\mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E})).\tag{4.9}$$

有时我们也将 $H_{\mathbf{v}}$ 写作 $\Delta(\mathrm{v},\mathrm{w})$。

在几何表示论中，Nakajima 通过 Hecke 对应在 Borel–Moore 同调 $\bigoplus H^{\mathrm{top}}(\mathrm{Supp}\mathrm{HF}^0(F,(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},\mathcal{E})))$ 上引入了产生算子和湮灭算子。因此，这个直和构成变形 Kac–Moody 代数上的可积最高权模，参见 [Nak98]中的定理 10.2。

上述构造的算子在结构上类似于 Nakajima 所定义的算子。上述讨论并未给出与 Hecke 对应的严格对应，而是表明 Floer 理论捕捉到了 Nakajima 工作中所蕴含的表示论结构的某种映象。

4.5. 修正箭图簇。本小节将说明，某些带框架的拉格朗日膜的 Maurer–Cartan 变形空间可以与修正箭图簇对应起来。此外，对于这些拉格朗日膜，修正箭图簇的 Hecke 对应构造同样适用。

为了明确这一识别，我们现在描述这些修正的带框拉格朗日膜的构造。首先，取第 4.2 节中的管状邻域空间里的一个带框拉格朗日膜 $(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E})$。回顾一下，$\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}$ 的定义域中的每个紧致连通分支都是一个球面。特别地，每个紧致分支都允许一个完美莫尔斯函数，且该函数有唯一的最大点和唯一的极小点。设 $\widetilde{\mathrm{L}}^{\mathrm{fr}}_k=\mathrm{L}^{\mathrm{fr}}\setminus\{p_i\}_{i\neq k\in I}$, 其中 p_i 是第 i 个球面 S^2上的完美莫尔斯函数的极小点。此外，固定除第 k 个球面外每个球面上的 E 的一组基。将修正的带框拉格朗日膜记作 $(\widetilde{\mathrm{L}}^{\mathrm{fr}}_k,\mathrm{E})$。 在

下文中，我们将限制在由 $\widetilde{\mathrm{L}}_k^{\mathrm{fr}}$ 生成的 Fukaya 子范畴，并采用上文考虑的稳定性条件。

命题 4.18。 经过坐标变换，$(\widetilde{\mathbb{L}}^{fr}{}_k, \mathcal{E})$ 的 *Maurer-Cartan* 空间是 *Nakajima* 引入的箭图簇的修正，

$$\mathcal{MC}(\widetilde{\mathbb{L}}_k^{fr}, \mathcal{E}) = \mu_k^{-1}(0)^s / GL(V_k),$$

其中 $\mu_k^{-1}(0)$ 表示 (L^{fr},E) 的障碍方程 $\mu^{-1}(0)$ 的第 k 个分量（即 $Hom(V_k,V_k)$ 分量），而 $GL(V_k)$ 是第 k 个顶点处的自同构群。此外，令 $v^2 = v^1 + ne^k$ 对 $n \in Z_{\geq 0}$ 成立。则 *Floer* 上同调 $HF^2((\widetilde{L}^{fr}\, k, E_2), (\widetilde{L}^{fr}\, k, E_1))$ 的上同调支撑是 *Hecke* 对应的修正。

证明。回顾一下，在 [HLT24]，中，作者证明了 $(\mathrm{L}^{\mathrm{fr}},\mathrm{E})$ 的障碍方程 $\mathrm{m}_0^b = 0$ 与定义 Nakajima 箭图簇的复矩映射 μ 的零级条件在坐标变换意义下相一致。更确切地说，障碍项 m_0^b 计算的是在每个球面的极小点处带有输出的珍珠轨迹，而障碍方程则由这些输出的系数产生。由于 L^{fr} 是精确的且具有常值原函数，m_0^b 计算常值圆盘，正如 [HLT24] 中所述。此外，根据 $\widetilde{\mathrm{L}}_k^{\mathrm{fr}}$ 的构造，对于 $\mathrm{i} \neq \mathrm{k}$，球面 S_i^2 的极小点 P_i 被移除。因此，m_0^b 仅在 P_k 处具有输出，这恰好恢复了第 k 个顶点处的修正矩映射方程 μ_k。至此，定理第一部分的证明完成。

对于后一个陈述，我们按照定理 4.7 的证明，考虑 $\mathrm{CF}^*((\widetilde{\mathrm{L}}_k^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1),(\widetilde{\mathrm{L}}_k^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2))$ 的纤维逐点对偶 $\mathrm{CF}^*((\widetilde{\mathrm{L}}_k^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2),(\widetilde{\mathrm{L}}_k^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1))$。此外，根据修正的带框拉格朗日膜的构造，$\mathrm{CF}^*((\widetilde{\mathrm{L}}_k^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_1),(\widetilde{\mathrm{L}}_k^{\mathrm{fr}},\mathrm{E}_2))$ 除第二个微分 τ 和最后一项外，与公式 4.2 一致。更确切地说，我们有如下复形：

$$L^0((\mathbb{L},\mathcal{E}_1),(\mathbb{L},\mathcal{E}_2)) \oplus L^0(F,F) \xrightarrow{\sigma} E((\mathbb{L},\mathcal{E}_1),(\mathbb{L},\mathcal{E}_2)) \oplus L^1(F,(\mathbb{L},\mathcal{E}_2)) \oplus L^1((\mathbb{L},\mathcal{E}_1),F) \xrightarrow{\tau|_k} L^2((\mathbb{S}_k,\mathcal{E}_1),(\mathbb{S}_k,\mathcal{E}_2)), \tag{4.10}$$

其中 S_k 是第k个球面，$\tau|_k$ 是 τ 在浸入扇区中头部或尾部等于k的部分上的限制。因此，利用与定理 4.7 证明中类似的论证，可由此复形得到结论。□

注记 *4.19.* 在 *[Nak01]*，中，修正的箭图簇 $MC(\widetilde{L}^{fr}\, k, E)$ 记作 $\widetilde{M}(v,w)^\circ$，它是 $M(v, w)$ 的一个开子簇。后一个空间 $M(v,w)$ 是 $(L^{fr}\, k, E)$ 中满足 $HF^0(S_k,(L^{fr}\, k, E, b)) = 0$ 的 *Maurer-Cartan* 元素 b 的同构类空间。注意，在第 k 个球面附近，浸入拉格朗日与该球面和若干余切纤维的并集同胚。由此可见，$M(v,w)$ 同构于 A_1 图对应的 *Nakajima* 箭图簇与一个仿射空间的乘积，从而重新得到 *Nakajima* 最初的观察。

类似地，可以考虑 $\widetilde{\mathrm{L}}_J^{\mathrm{fr}} = \mathrm{L}^{\mathrm{fr}} \setminus \{p_i\}_{i \in I \setminus J}$ 的 Maurer-Cartan 空间，其中 J 是顶点集 I 的子集。分析过程与前一种情况类似，因此省略证明细节。

推论 4.20. 经过坐标变换后，$(\widetilde{\mathbb{L}}^{fr}{}_J, \mathcal{E})$ 的 *Maurer-Cartan* 空间为

$$\mathcal{MC}(\widetilde{\mathbb{L}}_J^{fr}, \mathcal{E}) = \mu_J^{-1}(0)^s / GL_J,$$

其中，$\mu_J^{-1}(0)$ 表示障碍方程 $\mu^{-1}(0)$ 中与$(\mathbb{L}^{fr},\mathcal{E})$对应的分量，而 GL_J是相应的自同构群。

5. ADE 曲面的局部同调镜像对称

5.1. 稳定性条件与拉格朗日 Floer 理论。在接下来的章节中，我们将局部化镜像函子限制到不存在收敛性问题的子范畴，并像之前一样在复数域上进行研究。

令M 为通过管状拼接余切丛T^*S^2 ac- 按照图D构造得到的辛流形，并令L （分别为 L^{fr}）表示一个拉格朗日浸入（分别为带框拉格朗日子流形），其定义为零截面的并集（分别再加上每个分支上的一个余切纤维）。

引理 5.1. 令$(\mathbb{L}^{fr}, E)$表示秩为$(\mathbf{v}, \mathbf{w})$、变形参数为 b：$=\sum B_a X_a+\sum i_v I_v+\sum j_v J_v$的稳定带框拉格朗日膜，并令 G_k为第 k–个球面上的余切纤维，该球面不同于框架拉格朗日子流形 F_k。那么$\mathscr{F}_{(\mathbb{L}^{fr}, E)}(G_k)$ 是$\mathcal{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 上与第 k 个顶点相对应的典范丛，其秩为$\mathbf{v}_k$。

证明。注意，余切纤维 G_k 与 L^{fr} 在第 k 个球面上的一点 P 处横截相交。因此，根据定义，对于任意固定的 $b_0 \in M(v, w)$，$F(L^{fr},E,b^0)(G_k) = E_k|_P P$。因此，$F(L^{fr},E,b^0)(G_k) \cong E_k$，其中 E_k 正是与第 k– 个顶点关联的典范丛。换言之，位于 $b_0 \in MC(v, w)$ 处的纤维 E_k 由赋给第 k 个顶点的 GL_{v_k} 表示 V_k 给出。□

备注 5.2. 若考虑 $\mathbb{L}^{fr}$ 的非交换变形空间，那么根据定义，$\mathscr{F}_{(\mathbb{L}^{fr},b)}(G_k)$ 是射影模 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}^{fr}} \cdot e_k$，其中 e_k 表示第 k 个幂等元。

特别地，当D 是仿射 ADE Dynkin 图时，其带框架箭图表示的稳定性条件可如下描述，参见定义 2.2。这里 $\zeta_{\mathbb{R}}^0 \in \mathbb{R}^{Q_0}$ 表示 Nakajima 意义下的一个一般稳定性参数，而 $\zeta_{\mathbb{R}}$ 位于相应的腔室中（详情参见 [Nak07] 第 2.1 节）。这并非一种新的判据，而是 Nakajima 稳定性概念的镜像翻译，它通过 Maurer–Cartan 变形空间为稳定模空间轨迹提供了几何实现。

引理 5.3 ([Nak07]中的命题 4.1)。 设 D 是一个仿射*ADE Dynkin* 图，且 $b_0 = \sum B_a X_a + \sum i_v I_v + \sum j_v J_v$ 是 $(\mathbb{L}^{fr},E')$ 的 *Maurer–Cartan* 方程的一个解，即 $m_0^{b_0} = 0$。则

(1) 若 b_0 作为箭图表示是 $\zeta_{\mathbb{R}}$-稳定的，当且仅当 $HF^0((L,E,b),(\mathbb{L}^{fr},E',b_0))$ 仅对有限多个 b 不为零，且 $HF^2((L, E, b),(\mathbb{L}^{fr},E',b_0)) = 0$ 对所有 $b \in \mathcal{MC}(L,E)$。*(2)* 若 b_0 作为箭图表示是 $\zeta_{\mathbb{R}}^0$-稳定的，当且仅当对于除有限多个以外的所有 b，$\in \mathcal{MC}(L, E)$。*(3)* 若 b_0 作为箭图表示是 $\zeta_{\mathbb{R}}^0$-稳定的，当且仅当对于所有 b，$HF^0((L, E, b),(\mathbb{L}^{fr}, E', b_0)) = HF^2((L, E, b),(\mathbb{L}^{fr}, E', b_0)) = 0$

$$HF^0((L,E,b),(\mathbb{L}^{fr},E',b_0)) = HF^2((L,E,b),(\mathbb{L}^{fr},E',b_0)) = 0$$

证明。 根据 [HLT24], Floer 复形 $\left(CF^*((L,E,b),(\mathbb{L}^{fr},E',b_0)), m_1^{b\,b_0}\right)$，与单子复形相对应，而该复形与 ALE 空间（紧致化后）上的（带框架）无挠层拟同构。在此对应下，拉格朗日 Floer 上同调 HF^0和 HF^2 是稳定性的障碍，这由 [Nak07] 中的命题 4.1 得出。□

注 5.4。 回忆一下，若 D 是一个仿射 *ADE Dynkin* 图，则导出 *McKay* 对应[KV00, BKR01] 表明

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{T},-): D^b\mathrm{Coh}(\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma}) \to D^b(\mathrm{mod}-\mathcal{A}_{\mathbb{L}})$$

在此处诱导导出范畴之间的等价，其中 Γ 是与图 D 对应的 $SL_2(\mathbb{C})$ 有限子群，$\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma}$ 是 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ 的保正则解消，而 $\mathcal{T}$ 是倾斜向量丛。

利用此函子，可以证明，将拉格朗日膜(L, E, b)替换为泛 *brane*$(\mathbb{L}, b)$后，引理 *5.3* 中的类似结果仍然成立。

5.2. 局部同调镜像对称。 Kontsevich 提出的同调镜像对称 [Kon95] 猜想存在一个导出等价

$$\mathrm{Fuk}(M) \simeq D^b\mathrm{Coh}(\check{M})$$

与镜像对$M, \check{M}$相关）。在本小节中，我们将考察这种等价的局部化版本。在辛几何侧，我们取由 $\mathbb{L}$生成的 Fukaya 子范畴。在镜像侧，我们考虑 Maurer-Cartan 代数$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$。利用局部化镜像函子 [CHL17], 我们希望证明它给出导出范畴之间的拟同构。作为应用，这一框架使我们能够建立 ADE 曲面稳定性条件的镜像对应（推论 5.6）。

定理 5.5. 设 M 是按照一个非 *Dynkin* 图 D 对余切丛 $T^*\mathbb{S}^2$ 进行管状拼接所得的空间，且$\mathbb{L} \subset M$ 是零截面。那么，$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}(\mathbb{L},b)$ 给出了预投射代数$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 作为$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$-双模的一个投射分解。此外，$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}$ 诱导一个拟同构

$$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}: \mathrm{CF}^*((\mathbb{L},b),U) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}(\mathbb{L},b), \mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}(U)).$$

特别地，局部化镜像函子

$$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}: \mathrm{Fuk}^{sub}(M) \to \mathrm{Perf}(\mathcal{A}_{\mathbb{L}})$$

是一个拟等价，其中$\mathrm{Fuk}^{sub}(M)$ 表示由$(\mathbb{L},b)$ 分裂生成的 *Fukaya* 子范畴，而$\mathrm{Perf}(\mathcal{A}_{\mathbb{L}})$ 是完美$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$-模的微分分次范畴。

证明. 为简洁起见，我们将省略符号，其取决于 L 的自旋结构和定向的选择。

如方程 4.2 中，经过坐标变换（至多），Morse模型产生如下复形：

$$(\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}(\mathbb{L},b), m_1^{b,b}): L((\mathbb{L},b),(\mathbb{L},b)) \xrightarrow{\sigma} E((\mathbb{L},b),(\mathbb{L},b)) \xrightarrow{\tau} L((\mathbb{L},b),(\mathbb{L},b)). \tag{5.1}$$

在上述情形中，$\sigma(\xi_v) = m_1^{b,b}$，$(\xi_v M_v) = \sum_{h(a)=v}(m_2(x_a X_a, \xi_v M_v) + m_2(\xi_v M_v, x_a X_a)) = \bigoplus_{h(a)=v}(\xi_v x_a \oplus x_{\bar{a}}\xi_v)$，因为 M_v 是 S_v^2的基本类。此外，$\tau(\eta_a) = m_1^{b,b}$，$(\eta_a X_a) = x_a\eta_a \oplus \eta_a x_{\bar{a}}$。特别地，$\sigma$对应于与箭头进行前复合（分别为后复合），其中箭头的头（分别为尾）位于顶点 v。

首先，我们证明$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}(\mathbb{L},b)$ 给出了 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$的一个投射双模分解，将其与 [CBK22]中命题 2.5 引入的复形相对应。关键步骤是识别微分映射。

设 $P_0 = \oplus_i \mathcal{A}_{\mathbb{L}} e_i \otimes e_i \mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 和 $P_1 = \oplus_a \mathcal{A}_{\mathbb{L}} e^{h(a)} \otimes e^{t(a)} \mathcal{A}_{\mathbb{L}}$。 回顾一下，在 [CBK22],的定理 2.7 中，作者证明了以下复形是 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 作为 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 双模的投射分解，条件是

D 是一个非 Dynkin 图：

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}\text{-}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(P_0, \mathcal{A}_{\mathbb{L}} \otimes \mathcal{A}_{\mathbb{L}}) \xrightarrow{-g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}\text{-}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(P_1, \mathcal{A}_{\mathbb{L}} \otimes \mathcal{A}_{\mathbb{L}}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}\text{-}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(P_0, \mathcal{A}_{\mathbb{L}} \otimes \mathcal{A}_{\mathbb{L}}) \to 0,$$

其中 $f(e_i \otimes e_i) = \sum_{h(a)=i}(e_{h(a)} \otimes \bar{a} + a \otimes e^{h(a)})$，且 $g(e^{h(a)} \otimes e^{t(a)}) = a \otimes e^{t(a)} - e^{h(a)} \otimes a$。

设 $\varphi_{e_i \otimes e_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}\text{-}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(P_0, \mathcal{A}_{\mathbb{L}} \otimes \mathcal{A}_{\mathbb{L}})$ 是与 $e_i \otimes e_i \in e_i\mathcal{A}_{\mathbb{L}} \otimes \mathcal{A}_{\mathbb{L}} e_i$ 对应的态射。则 $g^*\varphi_{e_i \otimes e_i}(e^{h(a)} \otimes e^{t(a)}) = \varphi_{e_i \otimes e_i}(g(e^{h(a)} \otimes e^{t(a)})) = \varphi_{e_i \otimes e_i}(a \otimes e^{t(a)} - e^{h(a)} \otimes a) = a e_i \otimes e_i e^{t(a)} - e^{h(a)} e_i \otimes e_i a$，其中 $e_i e_j = \delta_{ij}$。特别地，若 $t(a) = i$ 且 $h(a) \neq i$，则 $g^*\varphi_{e_i \otimes e_i}(e^{h(a)} \otimes e^{t(a)}) = a \otimes e_i$。若 $h(a) = i$ 且 $t(a) \neq i$，则 $g^*\varphi_{e_i \otimes e_i}(e^{h(a)} \otimes e^{t(a)}) = -e_i \otimes a$。因此，$g^*$ 对以第 i 个顶点为终点（分别为起点）的箭进行前复合（分别为后复合），这与 σ 一致。

同理，我们可以证明 f^* 与 τ 相同。设 ϕ_x 为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}\text{-}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(P_1, \mathcal{A}_{\mathbb{L}} \otimes \mathcal{A}_{\mathbb{L}})$ 中对应于 $e^{h(x)} \otimes e^{t(x)} \in \bigoplus_{a \in Q^{fr}} e^{h(a)}\mathcal{A}_{\mathbb{L}} \otimes \mathcal{A}_{\mathbb{L}} e^{t(a)}$ 的态射。特别地，当 $x \neq a$ 时，ϕ_x 在分量 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}} e^{h(a)} \otimes e^{t(a)} \mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 上的限制为零。和之前一样，我们可以计算 $f^*\phi_x(e_i \otimes e_i) = \phi_x(\sum_{h(a)=i}(e_{h(a)} \otimes \bar{a} + a \otimes e^{h(a)})) = e_i e_{h(x)} \otimes \bar{x} + \bar{x} \otimes e_i e^{t(x)}$，其与 τ 一致。因此，根据 CBK22]中的命题2.4和定理 2.7，$F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})(L, b)$ 是 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 的一个投射分解。

最后，我们将证明

$$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},\boldsymbol{b})} : \mathrm{CF}^*((\mathbb{L},\boldsymbol{b}), U) := \mathcal{A}_{\mathbb{L}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{CF}^*(\mathbb{L}, U) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(\mathscr{F}^{(\mathbb{L},\boldsymbol{b})}(\mathbb{L},\boldsymbol{b}), \mathscr{F}^{(\mathbb{L},\boldsymbol{b})}(U))$$

是一个拟同构，其中 K 是由平凡路径构成的半单环。为此，我们使用双复形的谱序列来计算 $H^k(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})(L, b), F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})(U)))$。为简便起见，记 $F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})(L, b)$ 为 $A^\bullet$，$F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})(U)$ 为 $B^\bullet$。注意，复形 $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(A^\bullet, B^\bullet)$ 是双复形 $K^{i,j} := \mathrm{Hom}(A^{-i}, B^j)$ 的全复形，并赋有两个微分 $d_I = \pm d_A$ 和 $d_{II} = d_B$。此外，还存在一个谱序列

$$E_2^{p,q} := H_{II}^p H_I^q(K^{\bullet,\bullet}) \Rightarrow H^{p+q}(K^{\bullet,\bullet}).$$

注意，当 $E_2^{p,q} := H^p_{II} H^q_I(K^{\bullet,\bullet}) = 0$ 若 $q \neq 0$. 若 $q = 0$,

$$E_2^{p,0} = H^p(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(H^0(A^\bullet), B^\bullet)) = H^p(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(\mathcal{A}_{\mathbb{L}}, B^\bullet)) = H^p(\mathscr{F}^{(\mathbb{L},\boldsymbol{b})}(U)).$$

因此，我们知道

$$H^p(\mathscr{F}^{(\mathbb{L},\boldsymbol{b})}(U)) \cong H^p(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(\mathscr{F}^{(\mathbb{L},\boldsymbol{b})}(\mathbb{L},\boldsymbol{b}), \mathscr{F}^{(\mathbb{L},\boldsymbol{b})}(U))).$$

此外，这可以由 $F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})$：$\alpha \mapsto m_2^{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}0}(-, \alpha)$，导出，因为 $m_2^{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}0}(1_{\mathbb{L}}, \alpha) = \alpha$ 对于 $\forall \alpha \in \mathrm{CF}^*((\mathbb{L},\boldsymbol{b}), U)$ 成立。因此，第一个结论成立。

特别地，根据定理 4.2 [CHL17]，要证明 $F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})$ 的全忠实性，只需考虑分裂生成元。因此，由于 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 与 $F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})(L,\boldsymbol{b}) = \mathrm{CF}^*((L,\boldsymbol{b}),(L,\boldsymbol{b}))$ 拟同构，取 $U = (L,\boldsymbol{b})$. 即得最后一个结论。

□

由此，我们得到引理 5.3 的如下镜像对称对应，即箭图稳定性条件。

推论 5.6. 对于 *ADE* 曲面，$\mathrm{Ext}^*(\mathcal{T},\mathcal{E}[-1]) \cong \mathrm{HF}^*((\mathbb{L}, \boldsymbol{b}),(\mathbb{L}^{fr},\boldsymbol{b}_0))$，其中 $\mathcal{T}$ 是倾斜丛，$\mathcal{E}$ 是 $\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma}$ 上的无挠层。特别地，$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{T},\mathcal{E}) = 0$ 以及 $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{T},\mathcal{E}) = 0$。

证明。 根据定理 5.5，对于仿射 ADE Dynkin 图和所有拉格朗日子流形 U，$F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})$ 诱导了 $\mathrm{CF}^*((L,\boldsymbol{b}), U)$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})(L,\boldsymbol{b}), F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})(U))$ 之间的拟同构。特别地，我们可以取 $U = (L^{\mathrm{fr}},\boldsymbol{b}_0)$。在导出 McKay 对应下，$F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})(L,\boldsymbol{b})$ 对应于倾斜丛 T，而 $F(\mathbb{L},\boldsymbol{b})(L^{\mathrm{fr}},\boldsymbol{b}_0)$ 与无挠层 $E[-1]$ 拟同构。

因此，我们有

$$\mathrm{Ext}^*(\mathcal{T},\mathcal{E}[-1]) \cong \mathrm{HF}^*((\mathbb{L},\boldsymbol{b}),(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},b_0)).$$

注意，只有 $\mathrm{HF}^1((\mathbb{L},\boldsymbol{b}),(\mathbb{L}^{\mathrm{fr}},b_0)) \neq 0$ 当 b_0 是 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}^{\mathrm{fr}}$的稳定表示时才成立，参见例如 [Nak07] 或引理 5.3。因此，该陈述得证。□

如所见，$\mathrm{F}^{(\mathbb{L},b)}$ 的全忠实性证明仅依赖于以下事实：$\mathrm{F}^{(\mathbb{L},b)}(\mathrm{L},\boldsymbol{b})$ 提供了 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 的投射双模分解。这一观察立即导出如下推论：

推论 5.7。 设 $\mathbb{L}$ 是一个具有形式变形空间 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 的拉格朗日浸入。若 $\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}(\mathbb{L},\boldsymbol{b})$给出 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 的投射双模分解，则局部化镜像函子

$$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},\boldsymbol{b})} : \mathrm{Fuk}^{sub}(M) \to \mathrm{Perf}(\mathcal{A}_{\mathbb{L}})$$

是一个拟等价，其中 $\mathrm{Fuk}^{sub}(M)$ 表示由 $(\mathbb{L}, b)$分裂生成的 *Fukaya* 子范畴。

将这一局部等价扩展到整体镜像会很有意义。

此外，当浸入拉格朗日 $\mathbb{L}$ 是紧致的时，前述结论似乎与 Calabi-Yau 代数的双模分解理论密切相关。为明确这种联系，我们回顾结合代数的同调光滑性和 Calabi–Yau 性质的定义。关于 Calabi-Yau 代数理论，可参见例如 [Gin07、Boc08、VdB15、Lam18] 。

定义 5.8。 若结合代数 A 是完美 A-双模，则称其具有同调光滑性。换言之，将 A 视为自身上的双模时，它存在一个由有限生成投射双模构成的有限长度分解。

若结合代数 A 具有同调光滑性，且在 A-双模的导出范畴中存在一个同构 $\eta:\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{A\otimes A^{op}}(A,A\otimes A^{op}) \to A[-d]$，则称 A 是维数为 d 的 *Calabi-Yau* 代数。

一般而言，如果用一次边界变形代替平坦联络，我们有以下关于形式变形空间 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 与局部化镜像函子具有 Calabi-Yauness 性质的命题。

引理 5.9. 设$\mathbb{L}$ 是辛流形 M 中一个紧致、相对自旋、定向的浸入拉格朗日子流形。若$\mathscr{F}^{(\mathbb{L},b)}(\mathbb{L},\boldsymbol{b})$ 给出$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 作为$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$-双模的一个投射分解，则$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 是一个 *Calabi–Yau* 代数。

此外，局部化镜像函子 $F^{(L,b)} : CF^*((L, b), U) \to Hom_{\mathcal{A}_{\mathbb{L}}}(F^{(L,b)}(L, b), F^{(L,b)}(U))$ 诱导一个拟同构。将局部化镜像函子 $F^{(L,b)}$ 限制到由 (L, b) 分裂生成的子范畴时，它诱导一个拟等价。

证明。 给定一个紧致、相对自旋、定向的拉格朗日子流形$\mathbb{L}$ ，其维数为n，Fukaya [Fuk10]证明了A_∞-代数 $\mathrm{CF}^*(\mathbb{L},\mathbb{L})$ 具有循环结构。换言之，

$$\langle m_k(v_1,\dots,v_k),v_{k+1}\rangle = (-1)^{|v_1|'(|v_2|'+\dots+|v_{k+1}|')}\langle m_k(v_2,\dots,v_{k+1}),v_1\rangle,$$

其中 $\cdot,\cdot$ 是 $\mathrm{CF}^*(\mathrm{L},\mathrm{L})$ 上的分次交换交叉配对， $|v_1|' = \deg(v) - 1$ 以及任意$v_1,\dots,v_{k+1} \in C^*(\mathrm{L} \times_t \mathrm{L})$。因此，$\mathrm{F}^{(\mathbb{L},b)}(\mathrm{L},\boldsymbol{b})$ 给出了一个有限长度的自对偶复形（相差一个平移），其系数为 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$-双模。如果它是 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 作为 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$-双模的投射分解，那么 $\mathrm{A}_{\mathbb{L}}$ 就是一个n–Calabi-Yau代数。

对于第二个陈述，可以参照定理 5.5 的证明进行论证。该结论由谱序列的计算得出。特别是，如果我们将范围限制在 $\mathrm{F}^{(\mathbb{L},b)}$ 上由 (L,b) 分裂生成的子范畴

，局部化镜像函子会诱导一个拟等价 $\mathrm{F}(\mathbb{L},b):\mathrm{Fuk}^{sub}(M)\to\mathrm{Perf}(A_{\mathbb{L}})$. □

注 *5.10.* 若形式变形空间 $A_{\mathbb{L}}$ 是光滑仿射簇的坐标环，则 $A_{\mathbb{L}}$ 的投射双模分解 $F(L,b)(L,b)$ 给出了对角线分解。特别地，当 D 是仿射 A_0 图时，便会出现这种情况。此时，L 是捏缩环面，且 $A_{\mathbb{L}}\cong C[x,y]$，见 *HKL23*，引理 *3.6*]。

此外，这一结果推广了 *[CHL21]*，中的定理 *4.9*，该定理表明局部化镜像函子具有某种单射性。

回顾一下，在 [Gin07]，中，Ginzburg 证明，带超势的箭图是 3 维 Calabi-Yau，当且仅当路径代数的扩展余切复形（一个双模复形）是一个分解。这一代数判据在辛几何侧有一个镜像对应物。

事实上，对于一个$\mathbb{L}$ 维数为 3 的紧拉格朗日浸入，我们观察到 $\mathscr{F}_{(\mathbb{L},b)}(\mathbb{L},\boldsymbol{b})$ 与非交换变形空间 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 的扩展余切复形一致。为证明这一点，我们首先定义 $\mathbb{L}$ 的时空超势，参见 [CHL21]，中的定义 3.6，利用循环结构 [Fuk10]:

定义 5.11。 *(*($\mathbb{L}$, b) 的时空超势定义为

$$\Phi_{\mathbb{L}}:=\sum_k\frac{1}{k+1}\langle m_k(\boldsymbol{b},\dots,\boldsymbol{b}),\boldsymbol{b}\rangle.$$

以下命题是定理 5.5 的三维对应物，将局部同调镜像对称等价推广到非交换变形代数 $A_{\mathbb{L}}$ 为 3-Calabi–Yau 的情形。

命题 5.12（定理 5.5 的三维类比）。 设 $\mathbb{L}$ 是一个维数为 *3* 的紧致、相对自旋、定向拉格朗日浸入，且 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 是其非交换变形空间。则以下条件等价：

(1) 局部化镜像函子$\mathscr{F}_{(\mathbb{L},b)}(\mathbb{L},\boldsymbol{b})$ 给出了$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$的投射双模分解。*(2)* 代数$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 是3–卡拉比–丘代数。

证明。 如 [CHL21]，所示，非交换变形空间$\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 的 $\mathbb{L}$ 是一个带有时空超势的箭图路径代数 $\Phi_{\mathbb{L}}$。只需证明 $\mathscr{F}_{(\mathbb{L},b)}(\mathbb{L},\boldsymbol{b})$ 与 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$的扩张余切复形一致。其余结论由 [Boc08]中的定理 4.3，或 [Gin07]中的命题 5.1.9 和定理 5.3.1 得出。

B根据定义，$\mathrm{F}(\mathbb{L},b)(\mathrm{L},\boldsymbol{b})=(\oplus_Y A_{\mathbb{L}}\otimes_{\mathbb{K}}Y\otimes_{\mathbb{K}}A_{\mathbb{L}},m_1^{\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{b}},(\cdot))$，它具有如下形式 :

$$\bigoplus_{M_i}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}e_i\langle M_i\rangle e_i\mathcal{A}_{\mathbb{L}}\xrightarrow{d_1}\bigoplus_{X_a}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}e_{t(X_a)}\langle X_a\rangle e_{h(X_a)}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}\xrightarrow{d_2}\bigoplus_{\bar{X}_a}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}e_{h(X_a)}\langle\bar{X}_a\rangle e_{t(X_a)}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}\xrightarrow{d_3}\bigoplus_{P_i}\mathcal{A}_{\mathbb{L}}e_i\langle P_i\rangle e_i\mathcal{A}_{\mathbb{L}},\tag{5.2}$$

其中M_i （分别地，P_i）是正规化中第i个连通分支的最大（分别地，最小）点，X_a 是 1 次浸入扇区，而 $\bar{X}_a$ 是其补集。

为简便起见，我们像之前一样省略微分符号。根据最大点是单位元这一事实，可以计算出第一个微分。因此，$d_1(M_i)=m_1^{\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{b}},(M_i)=$

$\sum_{h(X_a)=i} x_a X_a - \sum_{t(Y_a)=i} y_a Y_a$. 此外，注意到

$$d_2(X_a) = \partial_{x_a} m_0^b = \partial_{x_a}\left(\sum_{x_b} \partial_{x_b} \Phi_{\mathbb{L}}\right).$$

换言之，d_2 可以通过障碍方程 m_0^b的偏导数来计算，而 m_0^b正是带有时空超势 $A_{\mathbb{L}}$的箭图的关系。接下来需要计算 d_3。注意，$m_1^b(\bar{X}_a) = \sum_k m_k(b,...,b,\bar{X}_a,b,...,b)$，其次数为 3。因此，$m_k(b,...,b,\bar{X}_a,b,...,b)$是 P_i的线性组合。于是，P_i的系数等于 $m_k(b,...,b,\bar{X}_a,b,...,b),M_i = \pm m_k(M_i,b,...,b,\bar{X}_a,b,...,b),b$，这是由循环结构得出的。由于 M_i是单位元，除非 $k = 2$ 且 $i = t(X_a)$ 或 $i = h(X_a)$时，该式为零。此外，$m_2(b,\bar{X}_a),M_i = -m_2(M_i,b),\bar{X}_a$，当且仅当 $m_2(M_i,b) = m_2(M_i,x_aX_a) = x_aX_a$时，该式非零。因此，

$$d_3(\bar{X_a}) = m_2(x_aX_a,\bar{X_a}) \pm m_2(\bar{X_a},x_aX_a) = x_aP_{t(X_a)} \pm x_aP_{h(X_a)}.$$

总之，$F(\mathbb{L}, b)(L, \boldsymbol{b})$ 是一个 $A_{\mathbb{L}}$-双模复形，它与扩展余切复形重合。因此，当且仅当 $A_{\mathbb{L}}$ 是 Calabi-Yau代数时，$F(\mathbb{L}, b)(L, \boldsymbol{b})$ 才给出 $A_{\mathbb{L}}$ 的双模分解。□

注 5.13。 特别地，根据推论 *5.7*，上述命题表明，如果 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 是 *3-Calabi-Yau* 代数，那么局部化镜像函子$\mathscr{F}(\mathbb{L}, b)$ 诱导出一个拟等价。典型例子包括合流形的非交换解消 *[FHLY18]* 以及 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$ *[LNT23]*。

此外，Bocklandt [Boc08] 提出了 Calabi-Yau 代数的另一种定义：如果有限维表示的导出范畴 $D^b(\mathrm{Rep}A)$ 是 Calabi-Yau 的，则代数A 是 Calabi-Yau代数。此外，他还分类了维数小于等于 3 的此类 Calabi-Yau 代数。在这些情形下，自对偶双模分解也与拉格朗日Floer复形 $F(\mathbb{L}, b)(L, \boldsymbol{b})$ 重合。

此外，Keller [Kel08] 还证明，对于一个极小的 A_∞-范畴 $\mathcal{A}$，若其具有循环结构，则完美导出范畴 perf($\mathcal{A}$) 是 Calabi-Yau。

受 A_∞-代数的循环结构启发，结合现有关于 Calabi-Yau 代数或 Calabi-Yau 范畴的结果（例如 [Gin07、 Boc08、 Kel08、 VdB15]，），自然可以预期如下结论：

猜想。 设 $\mathbb{L}$ 是辛流形 M 中一个维数为 n 的紧致、相对自旋、分次定向浸入拉格朗日子流形。将其 *Maurer-Cartan* 代数（由一度元素构成）记为 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$。那么以下各条件等价：

(1) $\mathscr{F}(\mathbb{L}, b)(\mathbb{L}, \boldsymbol{b})$ 为 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 提供一个投射分解，视其为一个 $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$-双模。

(2) $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}$ 是一个 *n–Calabi-Yau* 代数。

若此猜想成立，那么只要局部化镜像是一个 Calabi–Yau 代数，局部化镜像函子 $F(\mathbb{L}, b)$ 就继承全忠实性。

注 5.14. 可以看到，定理 *5.5* 为支持该猜想提供了进一步的证据。事实上，根据 *[Boc08]*, 中引入的定义，该猜想在维数小于或等于 *3* 时成立，这由上述定理 *5.5* 以及 *[Boc08]*中的定理 *3.2* 和 *4.3* 得出。

然而，并非所有由拉格朗日子流形产生的非交换变形空间都是 *n–Calabi-Yau* 代数。例如，考虑依照 *ADE Dynkin* 图对 $T^*\mathbb{S}^2$ 进行的管状邻域空间。此时，零截面的非交换变形空间不是 *2-Calabi-Yau*。

一般而言，应当考虑扩展镜像函子 *[CHL21，Hon23]* 到微分分次代数上的 *dg* 模。这是与 *Hansol Hong* 正在进行的合作工作的一部分。

参考文献

[AB82] M. F. Atiyah 和 R. Bott. 黎曼曲面上的杨–米尔斯方程。《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑》，308:523—615，1982年。[ABM09] Alekseev、H. Bursztyn 和 E. Meinrenken. 李群上的纯旋量。《Asterisque》，327:131–199，2009年。[Abo11] Mohammed Abouzaid. 管状拼接的 Fukaya 范畴的拓扑模型。《微分几何杂志》，87(1):1–80，2011年。[Abo17] Mohammed Abouzaid. 族 Floer 函子是忠实的。《欧洲数学学会杂志》（JEMS），19(7):2139–2217，2017年。[AJ10] Manabu Akaho 和 Dominic Joyce. 浸入拉格朗日 Floer 理论。《微分几何杂志》，86(3):381–500，2010年。[AMM98] A. Alekseev、A. Malkin 和 E. Meinrenken. 李群值矩映射。《微分几何杂志》，48(3):445—-495，1998年。[Aur07] Denis Auroux. 反典范因子的补集上的镜像对称与 T-对偶。《J. G¨okova Geom. Topol. GGT》，1:51–91，2007年。[BC05] Henrique Bursztyn 和 Marius Crainic. Dirac 结构、动量映射与拟 Poisson 流形，第 1–40 页。Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2005年。[BC07] Paul Biran 和 Octav Cornea. 拉格朗日子流形的量子结构。arXiv 预印本，2007年。arXiv:0708.4221。[Ber07] Aaron Bergman. 变形与 D 膜。《理论与数学物理进展》，12:781–815，2007年。[BKR01] Tom Bridgeland、Alastair King 和 Miles Reid. McKay 对应作为导出范畴的等价。《美国数学会杂志》，14(3):535–554，2001年。[Boc08] Raf Bocklandt. 三维分次 Calabi-Yau 代数。《纯粹与应用代数杂志》，212(1):14–32，2008年。[CBK22] William Crawley-Boevey 和 Yuta Kimura. 关于变形前射影代数。《纯粹与应用代数杂志》，226(12):107130，2022年。[CG97]Neil Chriss 和 Victor Ginzburg. 表示论与复几何。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1997年。[CHL17] Cheol-Hyun Cho、Hansol Hong 和 Siu-Cheong Lau. 拉格朗日浸入的局部化镜像函子，以及 $P^1_{a,b,c}$ 的同调镜像对称。《微分几何杂志》，106(1):45–126，2017年。[CHL21] Cheol-Hyun Cho、Hansol Hong 和 Siu-Cheong Lau. 非交换同调镜像函子。《美国数学会回忆录》，271(1326):v+116，2021年。[CW22] Franccois Charest 和 Chris Woodward. Floer 理论与翻转。《美国数学会回忆录》，279(1372)，2022年。[FHLY18] Y.-W. Fan、H. Hong、S.-C. Lau 和 S.-T. Yau. 辛几何中的 Atiyah 翻转之镜像与稳定性条件。《理论与数学物理进展》，22(5):1149–1207，2018年。[FM81] William Fulton 和 Robert MacPherson. 研究奇异空间的范畴框架。《美国数学会回忆录》，31(243):vi+165，1981年。

[FOOO09a] 深谷贤治、吴容根、大田博和 Kaoru Ono. 过滤 A_∞-代数与 Morse 复形的典范模型。载于《辛场论的新视角与挑战》，第 49 卷《CRM 讲义丛书》，第 201–227 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009年。[FOOO09b] 深谷贤治、吴容根、大田博和 Kaoru Ono. 拉格朗日交 Floer 理论：反常与障碍。第一、二部分。《AMS/IP 高等数学研究》，第 46 卷（2009），2009年 1 月。[FOOO17] 深谷贤治、Y.-G. Oh、H. Ohta 和 K. Ono. 反辛 involution 与 Floer 上同调。《几何与拓扑》，21(1):1–106，2017年。[FOOO20] 深谷贤治、吴容根、大田博和 Kaoru Ono. Kuranishi 结构与虚基本链。《施普林格数学专著》，2020年。[Fuk02] 深谷贤治. 族的 Floer 同调——进展报告。载于《可积系统、拓扑学与物理学》（东京，2000），第 309 卷《当代数学》，第 33–68 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002年。[Fuk10] 深谷贤治. 拉格朗日 Floer 理论中的循环对称性与 adic 收敛。《京都数学杂志》，50(3):521–590，2010年。[Ful97] William Fulton. 杨表，第 35 卷《伦敦数学学会学生教材》。剑桥大学出版社，剑桥，1997年。附有在表示论与几何学中的应用。[Gin07] Victor Ginzburg. Calabi-Yau 代数，2007年。[Gol84] W. Goldman. 曲面基本群的辛性质。《数学进展》，54:200—225，1984年。[HKL23] Hansol Hong、Yoosik Kim 和 Siu-Cheong Lau. 浸入二维球面与 SYZ 及其在格拉斯曼流形中的应用。《微分几何杂志》，125(3):427–507，2023年。[HLT24] Jiawei Hu、Siu-Cheong Lau 和 谭炬. 中岛箭图簇的镜像构造。预印本，2024年。arXiv:2404.16172。[Hon23] Hansol Hong. 拉格朗日子流形的 Maurer–Cartan 变形。《辛几何杂志》，21(1):1–71，2023年。[Kel08] Bernhard Keller. Calabi–Yau 三角范畴。载于《代数表示论及相关主题趋势》，《欧洲数学学会会议报告丛书》，第 467–489 页。欧洲数学学会，苏黎世，2008年。[KLZ23] Yoosik Kim、Siu-Cheong Lau 和 Xiao Zheng. T-等变圆盘势与 SYZ 镜像构造。《数学进展》，430:论文编号 109209，共 70 页，2023年。[KN90] Peter B. Kronheimer 和 Hiraku Nakajima. ALE 引力瞬子上的杨–米尔斯瞬子。《数学年刊》，288(2):263–308，1990年。[Kon95] 马克西姆·孔采维奇. 镜像对称的同调代数。载于 S. D. Chatterji 编，《国际数学家大会论文集》，第 120–139 页，巴塞尔，1995年。Birkh¨auser Basel。[KS11] 马克西姆·孔采维奇和 Yan Soibelman. 上同调 Hall 代数、指数霍奇结构与动机 Donaldson–Thomas 不变量。《数论物理通讯》，5(2):231–352，2011年。[KV00] M. Kapranov 和 E. Vasserot. 克莱因奇点、导出范畴与 Hall 代数。《数学年刊》，316(3):565–576，2000年。

[Lam18] Yan Ting Lam。《卡拉比–丘范畴与带超势的箭图》。博士论文，牛津大学，牛津，英国，2018年。博士论文。[LNT23] Siu-Cheong Lau、Junzheng Nan 和谭炬。《箭图代数丛叠的镜像对称》，2023年。[Lus91] G. Lusztig。《箭图、反常层与量子化包络代数》。美国数学学会杂志，4(2):365–421，1991年。[Nak94] Hiraku Nakajima。《ALE 空间上的瞬子、箭图簇与Kac-Moody代数》。杜克数学杂志，76(2):365–416，1994年。[Nak98] Hiraku Nakajima。《箭图簇与Kac-Moody代数》。杜克数学杂志，91(3):515–560，1998年。[Nak01] Hiraku Nakajima。《箭图簇与量子仿射代数的有限维表示》。美国数学学会杂志，14(1):145–238，2001年。[Nak07] Hiraku Nakajima。《ALE 空间上的层与箭图簇》。莫斯科数学杂志，7，2007年1月。[OZ11] Yong-Guen Oh 和 Ke Zhu。《具有浸入节点的 Floer 轨迹与依赖尺度的粘合》。辛几何杂志，9(4):483–636，2011年。[PW26] Joseph Palmer 和 Chris Woodward。《拉格朗日手术下浸入 Floer 上同调的不变性》。Quantum Topol.，2026年。[RS17] Alexander Ritter 和 Ivan Smith。《单调包裹 Fukaya 范畴与开闭弦映射》。数学精选，23，2017年1月。[Sei00] Paul Seidel。《分次拉格朗日子流形》。法国数学会通报，128(1):103–149，2000年。[Sei08] Paul Seidel。《Fukaya 范畴与皮卡–勒夫谢茨理论》。苏黎世高级数学讲座。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2008年。[SYZ96] Andrew Strominger、丘成桐和 Eric Zaslow。《镜像对称是 T-对偶》。Nuclear Phys. B，479(1-2):243–259，1996年。[Tu14] Junwu Tu。《关于镜像对称中的重构问题》。Adv. Math.，256:449–478，2014年。[VdB15] Michel Van den Bergh。《Calabi-Yau代数与超势》。数学精选（新系列），21(2):555–603，2015年。