arXiv:2601.13643v1 [math.AG] 20 Jan 2026

逼近Gersten复形的Borcherds乘积

Shouhei Ma

摘要：对于一个正交模簇，我们构造了一个由格和椭圆模形式定义的复形。它类似于Milnor K理论中的Gersten复形，并且通过Borcherds提升映射到该模簇的Gersten复形。这为利用特殊循环和Borcherds乘积研究该模簇的高阶Chow群提供了一种形式化框架。该构造融合了Borcherds乘积理论与Milnor K理论中的思想。

1. 引言

模簇上同调的研究始于Eichler、Shimura和Matsushima的工作，他们发现了如何将模形式和自守形式与上同调联系起来。此后，这一领域不断发展，如今已与数学的多个分支相关。

另一方面，代数几何的发展促使人们发现了动机上同调，将其视为代数簇的一种广义上同调理论。从几何上说，动机上同调体现为高阶*Chow*群 ([4])。这些群通常难以捉摸，但人们预期它们蕴含着深刻的算术和几何意义。

如果相信数学的统一性，那么自然会期待模簇的高阶Chow群是丰富的对象。在Beilinson [1] 关于模曲线的开创性工作之后，这一方向的研究主要集中于低维情形，例如Hilbert模曲面（如 [20], [21], [22]）。高维情形似乎直到最近才开始受到研究。

本文旨在利用 Borcherds乘积 [5], [6]理论，为正交模形式簇构造一条从模形式通往代数K理论的路径。为建立记号，设L_0 是一个符号为 $(2,n)$ 的偶格，其中$n > 0$，并设$X = \mathcal{D}/\Gamma$ 是与L_0, 相关的模簇，其中 $\mathcal{D}$ 是 Hermitian对称域，而 Γ 是L_0的一个适当子群。*Borcherds*提升 是一种乘法

2020 数学主题分类。11F55, 19D45, 14C15。获KAKENHI 21H00971资助。

提升，它将某个变量上的特定（弱全纯、向量值）模$f \mapsto \psi_{L_0}(f)$提升为X上的亚纯模形式 $\psi_{L_0}(f)$，并具有若干显著性质。（我们采用[15]的算术规范化。）同一构造也适用于符号为 $(2,*)$ 的子格$L \subset L_0$，并在X上的特殊循环 $Z_L \subset$ 上生成 Borcherds乘积，即由L定义的子模簇。

在 Borcherds乘积的诸多性质中，与我们最相关的是，它的除子是余维为 1 的特殊循环的一个显式线性组合。这一性质自然引出了这样一种想法：利用 Borcherds乘积构造次数较小的高阶 Chow 循环。尽管这一想法的原始形式或多或少已是经典内容，但似乎只有零星的研究采用过它（[11], [24]）。我们希望以更加系统、全面的方式发展这一想法。

字典。回顾一下，在高阶Chow群的研究中，*Gersten*复形（Milnor K-理论中的） [16]发挥着基础性作用：

$$\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X} \ : \ \cdots \longrightarrow \bigoplus_{Z\in X^{(r)}} K^M_{p-r}\mathbb{C}(Z) \longrightarrow \bigoplus_{Z'\in X^{(r+1)}} K^M_{p-r-1}\mathbb{C}(Z') \longrightarrow \cdots .$$

这里，$X^{(r)}$是X中余维为r的不可约子簇的集合，$K^M_q F = K^M_q F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 是域F的有理 Milnor K群，边界映射由温和符号定义。$\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X}$ 的上同调通过余维谱序列与X 的有理高阶Chow群 $\mathrm{CH}^p(X,m)_{\mathbb{Q}}$ 相关。特别地，当 $m \le 2$时，$H^{p-m}\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X} \simeq \mathrm{CH}^p(X,m)_{\mathbb{Q}}$。

现在，特殊循环和Borcherds乘积的递归特征让我们想起了Gersten复形的某种本质。现在我们可以更具体地说明我们的目标：构造一个以格和椭圆模形式定义的复形，并通过Borcherds提升将其映射到Gersten复形。整个想法可以粗略地用下面的对应表来表达：

K理论	$X^{(r)}$	$\mathbb{C}(Z)^\times$	$K^M_q\mathbb{C}(Z)$	温和符号
MF	$L_0^{(r)}$	$M(L)$	$\wedge^q M(L)$	准拉回

这里$L_0^{(r)}$ 是余秩为r 的L_0中本原子格L 的 Γ-等价类集合（它们对应于余维为r的特殊循环Z_L），而L的$M(L)$是L上权重 0 的 Borcherds乘积所对应的输入模形式空间，与 $\mathbb{Q}$张量。因此，L的$M(L)$是椭圆模形式构成的可数无限维$\mathbb{Q}$-线性空间。

我们构造中的一个关键点是定义留数映射

$$\wedge^q M(L) \to \wedge^{q-1} M(L') \tag{1.1}$$

通过组合使用准拉回，构造出适用于$L' \subset L$ 的对象。这是针对Borcherds乘积的一种重整化限制算子（[5], [7]）；在输入

形式层面上，它由一个线性映射给出，本质上是乘以（L'）$^{\perp}\cap L$的Theta级数（[18], [26]）。这样，通过借鉴Milnor$K$理论中的思想，我们可以构造出以下序列

$$\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\Gamma}\ :\quad \cdots\longrightarrow \bigoplus_{L\in L_0^{(r)}} \wedge^{p-r} M(L)^{G_L} \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{L'\in L_0^{(r+1)}} \wedge^{p-r-1} M(L')^{G_{L'}} \longrightarrow \cdots$$

其各项由格和椭圆模形式定义，而边界映射来自 Theta 级数的乘法。（实际上，我们需要取某个有限群G_L的不变部分，但这是一个技术问题。）

我们的主要结果可概括如下。

定理1.1（定理 6.2）。 设 $p \le n$。序列$\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\Gamma}$ 是一个复形，即 $\partial\circ\partial = 0$。*Borcherds* 提升映射

$$\wedge^q M(L)^{G_L} \to K_q^M\mathbb{C}(Z_L),\quad f_1\wedge\cdots\wedge f_q \mapsto \{\psi_L(f_1),\cdots,\psi_L(f_q)\} \tag{1.2}$$

对于 L 的子格 L_0，定义一个态射

$$\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\Gamma}\to \mathsf{K}^{\bullet}_{p,X}$$

复形之间的。

特别地，我们得到自然映射

$$H^{p-m}\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\Gamma}\to \mathrm{CH}^p(X,m)_{\mathbb{Q}} \tag{1.3}$$

对于 $0\le m\le 2$。（情形$m=0$ 只是通常将特殊循环映射到 Chow 群的映射。）当$m=1$时，转而考虑 $\mathrm{CH}^p(X,1)_{\mathbb{Q}}$ 的不可分解部分会更自然:

$$H^{p-1}\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\Gamma}\to \mathrm{CH}^p(X,1)_{\mathrm{ind},\mathbb{Q}}, \tag{1.4}$$

因为 $\mathsf{M}^{p-1}{}_{p,\Gamma}\to \mathsf{K}^{p-1}{}_{p,X}$ 的像通常不包含明显的可分解循环。当$m\ge 3$时，$H^{p-m}\mathsf{M}^{\bullet}{}_{p,\Gamma}$与 $\mathrm{CH}^p(X,m)_{\mathbb{Q}}$的联系则更为间接，具体通过

$$H^{p-m}\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\Gamma}\to H^{p-m}\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X}\leftarrow \mathrm{CH}^p(X,m)_{\mathbb{Q}},$$

其中右侧的映射来自余维谱序列。

这样，定理1.1为通过格和椭圆模形式研究X 的高阶Chow群提供了一套形式体系。特别是在具有$n\ge 2$的 (2, 2)-循环情形下，构造$\mathsf{M}^{\bullet}_{2,\Gamma}$ 回答了 Sreekantan 提出的问题（[24] §6.0.2）。尽管复形$\mathsf{M}^{\bullet}{}_{p,\Gamma}$ 仍然很大，但至少比原始的 Gersten复形$\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X}$更易于处理。我们希望发展出使用$\mathsf{M}^{\bullet}{}_{p,\Gamma}$进行计算的技术。

相关工作。 在其开创性论文（[22] §7.14）中，Ramakrishnan 提出了一个“模形式复形”：Gersten复形的一个子序列，其中只考虑模形式子簇。然而，他所给出的序列并非复形；如果排除一般子簇，却保持K-群不变，那么使用 Weil互反律（[16], [12]）的常规证明便会失效。从这个角度来看，复形$\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\Gamma}$ 可以视为对 Ramakrishnan 序列的一种“更加模形式化”的修改，其中K-群和边界映射也被替换为模形式相关的对象。因此，证明$\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\Gamma}$ 确实构成复形并非易事。

我们用 $\wedge^q$ 代替K_q^M，可以视为对K理论的一种近似，用以弥补 Borcherds乘积无法求和的问题。相应的序列

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{Z\in X^{(r)}} \wedge^{p-r}\mathbb{C}(Z)^{\times}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \bigoplus_{Z'\in X^{(r+1)}} \wedge^{p-r-1}\mathbb{C}(Z')^{\times}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \cdots$$

出现在 Goncharov [13] 的多对数动机复形中（当$p \leq 3$时有定义）。因此，将$\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\,\Gamma}$与 Goncharov复形进行比较也会很有意思。

进一步的问题。 定理1.1引出了两个基本但困难的问题：

(1) 考察映射(1.3)或(1.4)的核与余核是否有限维，尤其是在$p = 2$的情形。(2) 考察$\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\,\Gamma}$ 的上同调是否有限维（Ramakrishnan [22] 曾就他的序列提出这一问题）。

问题(1)的动机来自 Bruinier [8] 和 Bergeron-Li-Millson-Moeglin [3] 的定理：在除子的情形下，映射(1.3)通常是同构。理解其像的一种自然方法，是将这些映射与调节子映射复合。Garcia [11] 从 theta 提升的角度研究了这类(2, 1)-循环的朴素调节子。至于问题(2)，Bruinier-Raum-Zhang 的结果（[10], [27]）表明，对于任意p，$H^p\mathsf{M}^{\bullet}_{p,\,\Gamma} \to \mathrm{CH}^p(X)_{\mathbb{Q}}$ 的像都是有限维的。因此，当$m = 0$时，Ramakrishnan问题的一个版本确实有肯定答案。$m > 0$ 的情形则需要新的思路。

最后，我们应当提及两个可能的应用方向：

(1) 通过模形式计算产生足够多的特殊高阶循环，以研究正交模簇上的 Beilinson猜想。(2) 为研究系数取值于特殊高阶循环的生成级数搭建平台，即 Kudla计划的高阶 Chow 版本。

如果特殊高阶循环能够提供一个让 Beilinson猜想与 Kudla计划相互交汇的平台，那将十分有趣。

组织结构。 本文结构如下。§2回顾Borcherds乘积。§3回顾 Milnor K理论。§4中，我们定义Borcherds提升映射(1.2)。§5中，我们定义留数映射(1.1)。§6中，我们定义序列$\mathrm{M}^{\bullet}{}_{p,\Gamma}$。§7中，我们证明定理1.1。§8汇集了关于特殊高阶循环的调节子的若干评论。

致谢。 我很高兴感谢Shuji Saito在K理论方面给予的指导。

2. Borcherds乘积

本节遵循 [6] 和 [8]，回顾正交模形式簇与Borcherds乘积的基础理论。

2.1. 正交模形式簇。 设L 为一个符号为$(2,n)$且$n > 0$的偶格。具体来说，它是一个秩为$n + 2$ 的自由 $\mathbb{Z}$-模，配备非退化对称形式$(\cdot,\cdot)\colon L \times L \to \mathbb{Z}$，其符号为$(2,n)$，并且对每个$l \in L$，都有$(l,l) \in 2\mathbb{Z}$。$L$ 的正交群记为$\mathrm{O}(L)$。空间

$$\{\, \mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}(L\otimes\mathbb{C}) \mid (\omega,\omega)=0,\ (\omega,\bar{\omega})>0 \,\}$$

由两个连通分支组成。我们选取其中一个，记为 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_L$。这是与 L 相关的 Hermitian对称域。我们将保持 $\mathcal{D}$ 不变的 $\mathrm{O}(L)$ 的子群记为 $\mathrm{O}^+(L)$。若 Γ 是 $\mathrm{O}^+(L)$ 的有限指数子群，则商空间

$$X_\Gamma = \mathcal{D}/\Gamma$$

具有不可约正规拟射影簇的结构，其维数为 n。这称为正交模簇。

令 $\mathcal{O}(-1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}L_{\mathbb{C}}}(-1)|_{\mathcal{D}}$ 为 $\mathcal{D}$上的tautological线丛。设 Γ 的一个有限阶特征为 χ。 Γ-不变的$\mathcal{O}(-k)\otimes\chi$ 在 $\mathcal{D}$ 上的亚纯截面称为相对于 Γ、权为k 且特征为 χ 的亚纯模形式 。当$n \le 2$ 且L 的 Witt 指数为n时，按通常方式施加尖点条件；其他情况下，根据 Koecher原理，该条件自动满足。在$k = 0$ 且 $\chi = 1$的情况下，模函数下降为模簇X_Γ上的有理函数。本文主要关注这一情形。

2.2. **特殊循环**。 为与 §6 保持一致，我们在本小节重新设定记号：取一个符号为 $(2,n)$、满足$n > 0$的偶格L_0，取 $\mathrm{O}^+(L_0)$的一个有限指数子群 Γ，并记$X = X_\Gamma = \mathcal{D}_{L_0}/\Gamma$。

若子格L 是L_0 的本原子格，且符号为 $(2,n-r)$，则称其为余秩为 r 的子格。对于这样的 L，记 $\mathrm{Stab}_\Gamma(L)$ 为 L 在 Γ 中的稳定子群。自然映射 $\mathrm{Stab}_\Gamma(L) \to \mathrm{O}^+(L)$ 的核与余核均有限。记 $\Gamma_L < \mathrm{O}^+(L)$ 为其像。

令$Z_L \subset X$ 为 $\mathcal{D}_L \subset \mathcal{D}_{L_0}$ 在投影 $\mathcal{D}_{L_0} \to X$下的像。这是X的一个不可约子簇。我们称Z_L 为与L相关联的特殊循环。我们有一个自然的双有理态射

$$\pi : X_{\Gamma_L} \to Z_L \subset X$$

它来自由 Γ_L 定义的模簇。这给出了Z_L的正规化。π 不是同构的轨迹由满足 $\gamma\mathcal{D}_L \cap \mathcal{D}_L \neq \emptyset$ 的那些 $\gamma \in \Gamma - \mathrm{Stab}_\Gamma(L)$ 所致；等价地，$L' := \gamma L \cap L$ 的符号为 $(2,*)$。因此Z_L 的非正规轨迹是这类$Z_{L'} \subset Z_L$的并。

2.3. **Borcherds乘积**。 再次设L 为一个符号为 $(2,n)$ 的偶格，且$n > 0$。我们以自然方式将L 嵌入对偶格$L^\vee = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(L,\mathbb{Z})$ 中。商$A_L = L^\vee/L$ 称为L的判别群 。它继承了自然的二次型$A_L \to \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$。约化˜映射 $\mathrm{O}^+(L) \to \mathrm{O}(A_L)$ 的核记为 $\mathrm{O}^+(L)$。我们将频繁使用这个群

$$\hat{\mathrm{O}}^+(L) := \langle \tilde{\mathrm{O}}^+(L), -\mathrm{id}_L \rangle$$

并将以下记号留作

$$\tilde{X}_L := \mathcal{D}_L/\hat{\mathrm{O}}^+(L) = \mathcal{D}_L/\tilde{\mathrm{O}}^+(L) \tag{2.1}$$

由该群定义的模簇。

令 $\mathbb{C}A_L$ 为A_L的群环，$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的元辛双覆盖。$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{C}A_L$上有一个特定表示 ρ_L，称为*Weil*表示。关于 ρ_L 的精确定义（本文中我们不会显式使用），请参见 [6], [8] 。权为 $1-n/2$、取值于 ρ_L 的亚纯模形式$f(\tau)$，若其在上半平面上全纯（但允许在尖点$i\infty$处有亚纯性），则称为弱全纯 。它具有如下形式的傅里叶展开

$$f(\tau) = \sum_{\lambda \in A_L} \sum_{n \in (\lambda,\lambda)/2+\mathbb{Z}} c(\lambda,n) q^n \mathbf{e}_\lambda,$$

其中$q^n = \exp(2\pi i n\tau)$，对于$n \in \mathbb{Q}$，而$\mathbf{e}_\lambda$ 是与 $\lambda \in A_L$对应的 $\mathbb{C}A_L$ 的基向量。$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$中心的不变性意味着$f$实际上取值于 $\mathbb{C}A_L$ 中对 $-\mathrm{id}_L$不变的部分。多项式

$$\sum_\lambda \sum_{n<0} c(\lambda,n) q^n \mathbf{e}_\lambda$$

称为*f*的主部 。如果*f* 的主部系数$c(\lambda,n)$属于$\mathbb{Q}$ （分别为 $\mathbb{Z}$），则称*f* 具有有理（分别为整）主部。当$n \geq 3$时，主部有理意味着$c(0,0) \in \mathbb{Q}$（见 [8] 备注 3.23）。一般地，我们用$M(L)_*$ 表示 $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 $1-n/2$、类型为 ρ_L 的弱全纯模形式空间，其中形式具有有理主部且$c(0,0) \in \mathbb{Q}$。

设 $f=\sum_{\lambda,n} c(\lambda,n)q^n\mathbf{e}_\lambda$ 是 $M(L)_*$ 中的一个模形式，其主部系数为整数，且 $c(0,0) \in 2\mathbb{Z}$。对于这样的 *f*，Borcherds [6] 构造了一个定义在 $\mathcal{D}_L$ 上的亚纯模形式 $\psi(f)$，它具有一些显著性质。特别地，$\psi(f)$关于 $\hat{\mathrm{O}}^+(L)$是模形式，权为 $c(0,0)/2$，带有有限阶特征，其除子是特殊除子的一个显式线性组合。更具体地，对于满足 $(l,l) < 0$的向量 $l \in L$，$\psi(f)$沿 $\mathcal{D}_{l^\perp} \subset \mathcal{D}_L$ 的阶由下式给出

$$\tilde{v}_l(f) := \sum_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha l \in L^\vee}} c(\alpha l, \alpha^2(l,l)/2). \tag{2.2}$$

模形式 $\psi(f)$ 称为与 *f* 相关联的*Borcherds*乘积 。

我们主要关注 $c(0,0) = 0$的情形。在这种情况下，将 *f* 乘以适当的自然数后，$\psi(f)$ 是权重 0 的模形式˜，且特征平凡，因此可下降为 X_L 上的有理函数。我们记

$$M(L) \subset M(L)_* \tag{2.3}$$

由条件 $c(0,0) = 0$定义的线性子空间。

事实上，在 $\psi(f)$ 的原始定义中（[6] §13），乘以一个绝对值为 1 的常数存在歧义。为消除这一歧义，我们采用 Howard 和 Madapusi Pera 的算术规范化（[15] §1.2 和 §9）。在 $c(0,0) = 0$ 的情形下，他们的结果表明，将 *f* 乘以一个适当的自然数后，可以选取该常数，使得 $\psi(f)$ 关于底层 Shimura 簇定义在 $\mathbb{Q}$ 上。（当 $n \geq 6$ 且 *L* 包含整双曲平面时，这可以理解为傅里叶系数的有理性：见 [15] §9.1。）这种有理性将 $\psi(f)$ 唯一确定到相差 ± 1 个绝对值为 1 的有理数为止。下文中，我们用记号 $\psi(f)$ 表示这些经过算术规范化的Borcherds乘积。在这种记号下，$\psi(f)$ 唯一确定到相差 ± 1 为止，并满足

$$\psi(f+g) = \pm\psi(f)\cdot\psi(g), \tag{2.4}$$

$$\psi(\gamma f) = \pm\gamma\psi(f), \quad \gamma \in \mathrm{O}^+(L). \tag{2.5}$$

这里 $\mathrm{O}^+(L)$ 通过其在 A_L 上的自然作用作用于 *f*。

当然，我们不应忘记，给定的形式 f 会乘上某个自然数，而且 ± 1 的不确定性依然存在。不过，如果我们与 $\mathbb{Q}$ 取张量积，这些问题便可以忽略。我们将在第 4 节继续讨论这个问题。

2.4. **准拉回**。设 $\psi_L(f)$是 $\mathcal{D}_L$上的 Borcherds 乘积。设L'是L 的余秩为$r < n$的子格。记$K = (L')^\perp \cap L$。Borcherds（[5],[7]）发现了一种将 $\psi_L(f)$重整化限制到 $\mathcal{D}_{L'} \subset \mathcal{D}_L$上的运算，称为准拉回。其定义如下：

$$\psi_L(f)\|_{\mathcal{D}_{L'}} := \left.\frac{\psi_L(f)}{\prod_{\pm l}(\cdot, l)^{\tilde{\nu}_l}}\right|_{\mathcal{D}_{L'}}$$

这里，$\pm l$ 遍历K 中所有本原向量（模 ± 1），$(\cdot, l)$是由与l的配对定义的线性形式，而 $\tilde{\nu}_l = \tilde{\nu}_l(f)$是 $\psi_L(f)$沿$\mathcal{D}_{l^\perp}$给出的（2.2）取值的阶。当 $\mathcal{D}_{L'}$不包含在 $\psi_L(f)$的除子中时，这就是通常限制。

文献 [18], [26] 证明，$\psi_L(f)\|_{\mathcal{D}_{L'}}$在相差一个常数的意义下是 $\mathcal{D}_{L'}$ 上的 Borcherds 乘积，其输入模形式为

$$f|_{L'} := \langle f \uparrow_L^{L' \oplus K}, \Theta_{K(-1)} \rangle. \tag{2.6}$$

这里 $\uparrow^{L' \oplus_K L}: \mathbb{C}A_L \to \mathbb{C}A_{L'} \otimes \mathbb{C}A_K$ 是一个拉回映射，而 $\langle \cdot, \Theta_{K(-1)} \rangle$ 是与$K(-1)$ 的 Theta级数的缩并。在本文中，我们不需要$f|_{L'}$的精确形式，相关内容请参见 [18]。对我们而言，重要的是准拉回运算由一个线性映射诱导，

$$|_{L'} : M(L)_* \to M(L')_*$$

它作用于输入模形式空间之间。

引理 2.1. 设$f \in M(L)$。若 $\mathcal{D}_{L'}$不包含于 $\mathrm{div}(\psi_L(f))$，则$\psi_L(f)|_{\mathcal{D}_{L'}} = \pm\psi_{L'}(f|_{L'})$。

证明。我们已经知道，对于某个常数C，有 $\psi_L(f)|_{\mathcal{D}_{L'}} = C \cdot \psi_{L'}(f|_{L'})$。需要验证的是$C = \pm 1$。由于 $\psi_L(f)|_{\mathcal{D}_{L'}}$和 $\psi_{L'}(f|_{L'})$都定义在 $\mathbb{Q}$上，因此我们有$C \in \mathbb{Q}$。还需验证 $|C| = 1$。

令 $\Phi_L(f)$ 为 [6] §13 中所述的正则化Theta提升 f。根据假设 $c(0,0) = 0$, Borcherds乘积 $\psi_L(f)$ 满足

$$-4 \log |\psi_L(f)| = \Phi_L(f) \tag{2.7}$$

（见 [6] 定理13.3）。由于根据我们的假设$\mathcal{D}_{L'} \not\subset \mathrm{div}\psi_L(f)$，$\psi_L(f)\|_{\mathcal{D}_{L'}}$是通常限制，$\psi_{L'}(f|_{L'})$ 的权重再次为 0。因此我们有

$$-4 \log |\psi_{L'}(f|_{L'})| = \Phi_{L'}(f|_{L'})$$

类似地。另一方面，Zemel 的一个结果 [26] 表明 $\Phi_L(f)|_{\mathcal{D}_{L'}} = \Phi_{L'}(f|_{L'})$。比较这些等式，我们发现 $|\psi_L(f)|_{\mathcal{D}_{L'}}| = |\psi_{L'}(f|_{L'})|$。因此 $|C| = 1$。□

3. Milnor$K$理论

本节回顾 Milnor$K$理论中的 Gersten复形。主要参考文献为 [23] 第 7–8 章和 [12] 第 7–8 章。

3.1. Milnor K群。 设F 是一个特征为零的域，且$q > 0$是一个正整数。Milnor$K$群的q次群$K_q^M F$ 由F 定义为以下商群

$$K_q^M F := \overbrace{F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times}^{q} / \langle \text{Steinberg relations} \rangle,$$

其中，*Steinberg* 关系 是指形如$x_1 \otimes \cdots \otimes x_q$的元素，其中$x_i + x_j = 1$，对某些$i \neq j$成立。元素$x_1 \otimes \cdots \otimes x_q$在$K_{Mq}F$中的像记作 $\{x_1, \cdots, x_q\}$。当$q = 0$时，令$K_0^M F = \mathbb{Z}$。

本文中我们始终在有理数范围内讨论，即使用$K_q^M F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$的张量积。因此，为了简便起见，我们将滥用记号，写作

$$K_q^M F = K_q^M F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

在本文中始终如此。例如，$K_0^M F = \mathbb{Q}$和 $K_{M1}F = F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$是我们采用的简写记法。由于 Steinberg符号 $\{x_1, \cdots, x_q\}$是交替的，自然的 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$\wedge^q (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to K_q^M F, \qquad x_1 \wedge \cdots \wedge x_q \mapsto \{x_1, \cdots, x_q\}, \tag{3.1}$$

是良定义的。

设F/E 是域的有限扩张。嵌入$E \hookrightarrow F$ 诱导出一个自然的 $\mathbb{Q}$-线性映射 $K_{Mq}E \hookrightarrow K_q^M F$。此外还有转移映射

$$N_{F/E} : K_q^M F \twoheadrightarrow K_q^M E$$

满足一些标准性质（见 [23] §7.3 和 [12] §7.3）。当F/E 是伽罗瓦群为G的伽罗瓦扩张时，嵌入$K_q^M E \hookrightarrow K_q^M F$ 给出一个同构

$$K_q^M E \simeq (K_q^M F)^G. \tag{3.2}$$

在此识别下，转移映射由下式给出

$$N_{F/E}(\alpha) = \sum_{g \in G} g\alpha \in (K_q^M F)^G, \quad \alpha \in K_q^M F \tag{3.3}$$

（见 [25] 推论 1.10）。

3.2. **温和符号**。 设域 F 赋有一个（归一化的）离散赋值 v。记赋值环为 A，剩余域为 k 。则存在唯一的 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$\partial_v : K_q^M F \to K_{q-1}^M k$$

满足

$$\partial_v\{a, u_2, \cdots, u_q\} = v(a) \cdot \{\bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_q\} \tag{3.4}$$

对于任意 $a \in F^\times$ 以及单位元 $u_2, \cdots, u_q \in A$，其中 $\bar{u}$ 表示 $u \in A$ 在 k 中的像。映射 ∂_v 称为（高阶）温和符号。

∂_v 的显式形式由 [23] 公式（7.2.4）给出如下。取一个满足 $v(\pi) = 1$ 的元素 $\pi \in A$。对于 $a_1, \cdots, a_q \in F^\times$，我们将 $a_i = u_i \pi^{v(a_i)}$ 写作 u_i，其中 u_i 是 A 中的一个单位元。于是

$$\partial_v\{a_1, a_2, \cdots, a_q\} = \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} v(a_i) \cdot \{\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_{i+1}, \cdots, \bar{u}_q\}.$$

这与 π 的选取无关。例如，当 $q = 1$ 时，∂_v 就是赋值映射 v。当 $q = 2$ 时，我们有

$$\partial_v\{a, b\} = \overline{b^{v(a)}/a^{v(b)}}, \qquad a, b \in F^\times. \tag{3.5}$$

注记 3.1. 当 $q \geq 2$ 时，[23] 的公式（7.2.4）包含更多项，但这些项在整系数 K-群中是 2-扭元，因此在我们的有理 K-群中消失。这解释了 (3.5) 与更常见公式之间的差异，即缺少 $(-1)^{v(a)v(b)}$。

3.3. **Gersten复形**。 设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的不可约簇。设 $Z' \subset Z$ 是 X 中的不可约子簇，且 $\dim Z' = \dim Z - 1$。我们用 $\mathbb{C}(Z)$ 表示 Z 的函数域（Z' 也类似）。于是边界映射

$$\partial_{Z'}^{Z} : K_q^M \mathbb{C}(Z) \to K_{q-1}^M \mathbb{C}(Z')$$

定义如下。设 $\pi\colon \hat{Z} \to Z$ 是正规化映射，且 $\pi^{-1}(Z') = \sum_\alpha Z'_\alpha$ 是 $\pi^{-1}(Z')$ 的不可约分解。$\hat{Z}$ 的每个除子 Z'_α 都在 $\mathbb{C}(Z) = \mathbb{C}(\hat{Z})$ 上定义一个离散赋值，其剩余域为 $\mathbb{C}(Z'_\alpha)$。我们将其记为

$$\partial_\alpha : K_q^M \mathbb{C}(Z) \to K_{q-1}^M \mathbb{C}(Z'_\alpha)$$

相应的温和符号。接下来，通过投影 $Z'_\alpha \to Z'$，我们可以取转移映射

$$N_\alpha : K_{q-1}^M \mathbb{C}(Z'_\alpha) \to K_{q-1}^M \mathbb{C}(Z').$$

然后我们令

$$\partial_{Z'}^{Z} := \sum_\alpha N_\alpha \circ \partial_\alpha \ : \ K_q^M \mathbb{C}(Z) \to K_{q-1}^M \mathbb{C}(Z').$$

现在令$p > 0$。X 的*Gersten*复形定义为（[16]）

$$\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X} : \cdots \longrightarrow \bigoplus_{Z\in X^{(r)}} K^M_{p-r}\mathbb{C}(Z) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{Z'\in X^{(r+1)}} K^M_{p-r-1}\mathbb{C}(Z') \longrightarrow \cdots,$$

其中$X^{(r)}$ 是X 中余维为r 的不可约子簇集合，且$\partial = (\partial^Z_{Z'})$。（当$Z' \not\subset Z$时，我们令 $\partial^Z_{Z'} = 0$。）以$X^{(r)}$ 为指标的项置于次数r。因此$\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X}$ 的长度为$p + 1$，从次数 0 处的$K^M_p\mathbb{C}(X)$开始:

$$K^M_p\mathbb{C}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{Z\in X^{(p-1)}} \mathbb{C}(Z)^\times_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \bigoplus_{Z'\in X^{(p)}} \mathbb{Q}[Z'].$$

Kato [16] 证明了$\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X}$ 确实是一个复形，即 $\partial\circ\partial = 0$ （另见 [12]§8.1）。

3.4. 高阶Chow群。 令 $\mathrm{CH}^p(X,m)$ 表示 Bloch[4]引入的X 的余维为p 且（K-理论）次数为m 的高阶Chow群。$\mathrm{CH}^p(X, m)$ 的元素称为类型为（p,m）的高阶 Chow 循环，或简称（p,m）-循环。Gersten复形与高阶Chow群的关系如下（[23] §8.5.d）。

对于每个p，我们都有余维谱序列（[4] §10）

$$E_1^{r,s} = \bigoplus_{Z\in X^{(r)}} \mathrm{CH}^{p-r}(\mathbb{C}(Z), -r-s) \quad\Rightarrow\quad E_\infty^{r+s} = \mathrm{CH}^p(X, -r-s).$$

E_1 页支撑在范围$s \le -p$上。于是，Gersten复形$\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X}$ 可与边线$E_1^{\bullet\,-p}$ 相识别，再与 $\mathbb{Q}$ 张量并取符号差异。由谱序列的部分退化，我们得到自然同构（[23]推论 8.5.21）

$$H^{p-m}\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X} \simeq \mathrm{CH}^p(X,m)_{\mathbb{Q}}, \qquad 0 \le m \le 2. \tag{3.6}$$

借此，X 上的（p，1）-循环可表示为形式和

$$\sum_i (Z_i, \psi_i), \qquad Z_i \in X^{(p-1)},\ \ \psi_i \in \mathbb{C}(Z_i)^\times,$$

满足余循环条件 $\sum_i \mathrm{div}(\psi_i) = 0$。类似地，$X$ 上的（p，2）-循环可表示为形式和

$$\sum_i (Z_i, \{\psi_i, \varphi_i\}), \qquad Z_i \in X^{(p-2)},\ \ \psi_i, \varphi_i \in \mathbb{C}(Z_i)^\times,$$

满足余循环条件 $\sum_i \partial^{Z_i}_{Z'}\{\psi_i, \varphi_i\} = 0$，其中任意$Z' \in X^{(p-1)}$。

当 $m \ge 3$ 时，Gersten复形与高阶Chow群之间的关系为

$$\mathrm{CH}^p(X,m)_{\mathbb{Q}} = E_\infty^{-m} \twoheadrightarrow E_\infty^{p-m,-p} \hookrightarrow E_2^{p-m,-p} \simeq H^{p-m}\mathsf{K}^{\bullet}_{p,X}. \tag{3.7}$$

当 $m = 3$ 时，我们有 $E_\infty^{p-m,-p} = E_{p-m,-p}^2$，因此可化简为

$$\mathrm{CH}^p(X,3)_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow H^{p-3}\mathsf{K}_{p,X}^{\bullet}. \tag{3.8}$$

4. 从 Borcherds乘积到 Milnor$K$群

本节定义从 $\wedge^q M(L)$ 到模簇的有理 Milnor$K$群的映射，并证明一些函子性质。

4.1. Borcherds 提升映射。设L 是一个符号为 $(2,n)$ 且满足$n > 0$的偶格。回顾一下，定义在 (2.3) 中的空间 $M(L)$，是L 的权重 0 Borcherds乘积的输入模形式空间（系数为有理数）。我们将由具有整主部且满足 $c(0,0) \in 2\mathbb{Z}$ 的f 构成的子 $\mathbb{Z}$-模记作$M(L)_{\mathbb{Z}} \subset M(L)$，并要求其算术标准化 $\psi(f)$ 有意义。我们有

$$M(L)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = M(L). \tag{4.1}$$

˜ ˆ 如同 (2.1) 中一样，我们记 $X_L = \mathcal{D}_L/$ $\mathrm{O}^+(L)$。

引理 4.1。*Borcherds* 提升 $f \mapsto \psi(f)$ 定义了一个 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$\psi = \psi_L : M(L) \to \mathbb{C}(\tilde{X}_L)^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}. \tag{4.2}$$

这是关于$\mathrm{O}^+(L)$等变的。

证明。 回顾一下，规范化Borcherds乘积 $\psi(f)$ 在 X_L 上定义了一个有理˜函数，但存在 ± 1 的不确定性。此不确定性是 $\mathbb{C}(\tilde{X}_L)^\times$ 中的一个 2-扭元，因此在 $\mathbb{C}(\tilde{X}_L)^\times_{\mathbb{Q}}$ 中消失。于是我们得到定义良好的˜映射 $M(L)_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}(X_L)^\times_{\mathbb{Q}}$。由 (2.4) 和 (2.5)，此映射是 $\mathbb{Z}$-线性的，并且关于 $\mathrm{O}^+(L)$- 等变。由 (4.1)，这扩张为一个从 $M(L)$ 出发的 $\mathbb{Q}$-线性映射。 □

设 $q \geq 0$。将 (4.2) 的外积与自然映射复合

$$\wedge^q \mathbb{C}(\tilde{X}_L)^\times_{\mathbb{Q}} \to K_q^M \mathbb{C}(\tilde{X}_L)$$

如 (3.1) 中所述，我们得到 $\mathrm{O}^+(L)$-等变 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$\psi_L : \wedge^q M(L) \to K_q^M \mathbb{C}(\tilde{X}_L), \quad f_1 \wedge \cdots \wedge f_q \mapsto \{\psi(f_1), \cdots, \psi(f_q)\}, \tag{4.3}$$

˜其中 $\psi(f_i)$ 被视为 X_L 上的有理函数。当 $q = 0$ 时，这正是 $\mathbb{Q} = \wedge^0 M(L) = K_0^M \mathbb{C}(\tilde{X}_L)$ 的恒等映射。

ˆ 更一般地，设 Γ 是 $\mathrm{O}^+(L)$ 的一个子群，且包含 $\mathrm{O}^+(L)$。我们定义

$$G = G_\Gamma := \Gamma / \hat{\mathrm{O}}^+(L) = \mathrm{Im}(\Gamma \to \mathrm{O}(A_L))/\pm 1$$

并取 (4.3) 的G-不变部分。由于

$$K_q^M \mathbb{C}(\tilde{X}_L)^G = K_q^M \mathbb{C}(\tilde{X}_L/G) = K_q^M \mathbb{C}(X_\Gamma)$$

根据（3.2），其中 $X_\Gamma = \mathcal{D}_L/\Gamma$，这给出了一个 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$\psi_\Gamma : \wedge^q M(L)^G \to K_q^M \mathbb{C}(X_\Gamma). \tag{4.4}$$

为简便起见，这里记作 $\wedge^q M(L)^G = (\wedge^q M(L))^G$。（这不应与 $\wedge^q (M(L)^G)$ 混淆。）我们将（4.4）称为 *Borcherds*提升映射。

注记 4.2. 研究 $\wedge^q M(L) \to K_q^M \mathbb{C}(\tilde{X}_L)$ 的核将引领我们探究 Borcherds 乘积之间的 Steinberg 关系：哪两个权重 0 的 Borcherds 乘积 $\psi(f)$、$\psi(g)$ 满足

$$\psi(f) + \psi(g) \equiv 1$$

（或更一般地说，单位根）。由于人们很少研究 Borcherds 乘积的和，这将是一个新类型的问题。

4.2. **函子性**。我们证明 Borcherds 提升映射的一些函子性质。暂且固定格 L，并设 $\Gamma < \Gamma$ 是 $\tilde{O}^+(L)$ 中包含 $O^+(L)$ 的两个子群。我们记 $G = G_\Gamma$、$G = G_{\tilde{\Gamma}}$、$X = X_\Gamma$ 和 $X = X_{\tilde{\Gamma}}$。于是 $G < G$，并且我们有一个自然投影 $X \to X$。令 $q \geq 0$。

引理 4.3。下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} \wedge^q M(L)^G & \xrightarrow{\psi_\Gamma} & K_q^M \mathbb{C}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \wedge^q M(L)^{\tilde{G}} & \xrightarrow{\psi_{\tilde{\Gamma}}} & K_q^M \mathbb{C}(\tilde{X}) \end{array}$$

其中 $\wedge^q M(L)^G \hookrightarrow \wedge^q M(L)^G$ 是自然包含，而 $K_q^M \mathbb{C}(X) \hookrightarrow K_q^M \mathbb{C}(\tilde{X})$ 是由 $\tilde{X} \to X$ 诱导的映射。

证明。这是因为 ψ_Γ 和 $\psi_{\tilde{\Gamma}}$ 均定义为ψ_L的限制：$\wedge^q M(L) \to K_q^M \mathbb{C}(\tilde{X}_L)$。□

接下来，我们在模侧定义转移映射如下：

$$N_{\tilde{\Gamma}/\Gamma} : \wedge^q M(L)^{\tilde{G}} \to \wedge^q M(L)^G, \quad \omega \mapsto \sum_{\gamma \in G/\tilde{G}} \gamma\omega.$$

显然，这是满射。

引理 4.4。下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} \wedge^q M(L)^{\tilde{G}} & \xrightarrow{\psi_{\tilde{\Gamma}}} & K_q^M \mathbb{C}(\tilde{X}) \\ \downarrow{\scriptstyle N_{\tilde{\Gamma}/\Gamma}} & & \downarrow{\scriptstyle N_{\tilde{X}/X}} \\ \wedge^q M(L)^G & \xrightarrow{\psi_\Gamma} & K_q^M \mathbb{C}(X) \end{array}$$

其中 $N_{\tilde{X}/X}$ 是 $\tilde{X} \to X$ 的 K 理论转移映射。

证明。 由于两个转移映射都满足传递性且都是满射，只需对 $\tilde{\Gamma} = \hat{}\,\mathrm{O}^+(L)$ 证明该断言。回忆一下，G 是 $X_L \to X$ 的伽罗瓦˜群。当 $q = 0$ 时，两个转移映射都是在 $\mathbb{Q}$ 上乘以 $|G|$。接下来，设 $q > 0$ 且 $f_1, \cdots, f_q \in M(L)$。由 (3.3)，我们在 $K_q^M\mathbb{C}(\tilde{X}_L)$ 中得到以下等式:

$$\begin{aligned} N_{\tilde{X}_L/X}(\psi_L(f_1 \wedge \cdots \wedge f_q)) &= \sum_{\gamma\in G} \gamma \cdot \{\psi_L(f_1), \cdots, \psi_L(f_q)\} \\ &= \sum_{\gamma\in G} \{\psi_L(\gamma f_1), \cdots, \psi_L(\gamma f_q)\} \\ &= \sum_{\gamma\in G} \psi_L(\gamma f_1 \wedge \cdots \wedge \gamma f_q) \\ &= \psi_L\left(\sum_{\gamma\in G} \gamma(f_1 \wedge \cdots \wedge f_q)\right). \end{aligned}$$

根据 ψ_Γ 的定义，这等于 $\psi_\Gamma(N_{\tilde{\Gamma}/\Gamma}(f_1 \wedge \cdots \wedge f_q))$。 □

注 4.5。 关于格，我们还有如下形式的函子性。设 L_1 是 L 的有限指数子格。那么在 $\mathrm{O}(L_1 \otimes \mathbb{Q}) = \mathrm{O}(L \otimes \mathbb{Q})$ 中，$\hat{}\,\mathrm{O}^+(L_1) \subset \hat{}\,\mathrm{O}^+(L)$。我们有一个自然的线性映射 $\uparrow^{L_1}_L : \mathbb{C}A_L \hookrightarrow \mathbb{C}A_{L_1}$，它满足 $\psi_{L_1}(f\uparrow^{L_1}_L) = \psi_L(f)$，其中两者都是定义在 $\mathcal{D}_{L_1} = \mathcal{D}_L$ 上的模形式（见 [18]）。这一性质表明图

$$\begin{array}{ccc} \wedge^q M(L) & \xrightarrow{\psi_L} & K_q^M\mathbb{C}(\tilde{X}_L) \\ \uparrow^{L_1}_L \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \wedge^q M(L_1) & \xrightarrow{\psi_{L_1}} & K_q^M\mathbb{C}(\tilde{X}_{L_1}) \end{array}$$

˜是交换的，其中右侧的竖直映射由投影 $X_{L_1} \to \tilde{X}_L$ 诱导。

5. 留数映射

本节定义模侧的留数映射，并证明它们与K-理论侧的温和符号相对应。

5.1. 构造。设 L 是符号为 (2, n) 的偶格，其中 $\mathrm{n} > 0$，且 L′ 是 L 的余秩为 1 的子格。设 Γ 是 O^+(L) 的一个子群，且包含 O^+(L)。我们将 Stab_Γ (L′) $\to \mathrm{O}^+$(L′) 在 $\Gamma' = \Gamma_{L'} < \mathrm{O}^+$(L′) 中的像记为。根据 Nikulin [19], 的理论，我们有 $\Gamma' \supset \hat{}\,\mathrm{O}^+$(L′)。我们记 $\mathrm{X} = \mathrm{X}_\Gamma$，并记 $\mathrm{X}' = \mathrm{X}_{\Gamma'}$。自然态射 $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ 的像，即与 L′相关联的特殊除子，记为 Z。我们还记 $\mathrm{G} = \mathrm{G}_\Gamma$，并记 $\mathrm{G}' = \mathrm{G}_{\Gamma'}$。在整个 §5 中，均采用此设定和记号。

对于具有整主部且满足 $f \in M(L)_*$ 和 $c(0,0) \in 2\mathbb{Z}$的情形，我们将Borcherds乘积 $\psi(f)$ 沿除子 $\mathcal{D}_{L'} \subset \mathcal{D}_L$ 的阶记为$\tilde{\nu}(f)$。由公式 (2.2)，这可扩展为一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\tilde{\nu}\colon M(L)_* \to \mathbb{Q}$，其可表示为主部中若干系数之和。设 r 为投影 $\mathcal{D}_L \to X$ 沿 $\mathcal{D}_{L'} \to Z$ 的分歧指数。令

$$\nu := r^{-1}\tilde{\nu} \ : \ M(L)_* \to \mathbb{Q}. \tag{5.1}$$

若$f \in M(L)_{\mathbb{Z}}$，则 $\nu(f)$ 是 Borcherds乘积 $\psi(f)$ 作为X 上的有理函数沿除子Z的阶。注意，$\tilde{\nu}$ 不依赖于Γ，但 ν 依赖于它。

令 $|_{L'} : M(L)_* \to M(L')_*$ 为式 (2.6) 中定义的拟拉回映射。对于$q > 0$，我们定义留数映射

$$\mathrm{Res} \ : \ \wedge^q M(L)_* \to \wedge^{q-1} M(L')_*$$

by

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}(f_1 \wedge \cdots \wedge f_q) \\ := \ &\sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} \nu(f_i) \cdot (f_1|_{L'}) \wedge \cdots \wedge (f_{i-1}|_{L'}) \wedge (f_{i+1}|_{L'}) \wedge \cdots \wedge (f_q|_{L'}). \end{aligned}$$

例如，当$q = 1$时，这就是映射 $\nu\colon M(L)_* \to \mathbb{Q}$。当$q = 2$时，我们有

$$\mathrm{Res}(f_1 \wedge f_2) = \nu(f_1) f_2|_{L'} - \nu(f_2) f_1|_{L'} = (\nu(f_1) f_2 - \nu(f_2) f_1)|_{L'} \tag{5.2}$$

根据运算 $|_{L'}$ 的线性性。注意，映射 Res 依赖于 Γ（相差一个常数），因为 ν 也如此。

命题 5.1。我们有 $\mathrm{Res}(\wedge^q M(L)) \subset \wedge^{q-1} M(L')$。

这个命题的证明基于以下观察。

引理 5.2。如果 $f \in M(L)$ 且 $\nu(f) = 0$，那么 $f|_{L'} \in M(L')$。

证明。在 [18] §3 中，已经证明 $f|_{L'}$ 的系数 $c(0,0)$ 等于 f 和 $\tilde{\nu}(f)$（$= 0$ 在本情形中）的系数之和。因此，$f \in M(L)$ 蕴含 $f|_{L'} \in M(L')$。□

（命题*5.1*的证明）。我们对q进行归纳。先考虑$q = 2$的情形。令$f_1, f_2 \in M(L)$。我们使用表达式 (5.2)，并写作$f = \nu(f_1) f_2 - \nu(f_2) f_1$。于是有

$$\nu(f) = \nu(f_1)\nu(f_2) - \nu(f_2)\nu(f_1) = 0.$$

由于 $f \in M(L)$，由引理 5.2 可得 $\mathrm{Res}(f_1 \wedge f_2) = f|_{L'} \in M(L')$。这就证明了 $q = 2$ 时的断言。

假设我们的断言已在次数 $q-1$ 时得到证明，现在考虑次数为 q 的情形。设 $f_1,\cdots,f_q\in M(L)$。在 $\nu(f_q)=0$ 的情形下，我们有

$$\mathrm{Res}(f_1\wedge\cdots\wedge f_q)=\mathrm{Res}(f_1\wedge\cdots\wedge f_{q-1})\wedge(f_q|_{L'})$$

根据 Res 的定义。因此，根据归纳假设，$\mathrm{Res}(f_1\wedge\cdots\wedge f_{q-1})\in\wedge^{q-2}M(L')$，而根据引理 5.2，$f_q|_{L'}\in M(L')$。

下面考虑 $\nu(f_i)\neq 0$ 对任意 i 的情形。令 $\alpha=\nu(f_q)/\nu(f_1)$。于是

$$f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_q=f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge(f_q-\alpha f_1)$$

并且 $\nu(f_q-\alpha f_1)=0$，因此归结为第一种情形。 □

根据命题 5.1，我们得到如下 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$\mathrm{Res}=\mathrm{Res}^L_{L'}:\wedge^q M(L)\to\wedge^{q-1}M(L').$$

由于映射 $|_{L'}\colon M(L)_*\to M(L')_*$ 对 $\mathrm{Stab}_\Gamma(L')$ 是等变的，且映射 $\nu\colon M(L)_*\to\mathbb{Q}$ 对 $\mathrm{Stab}_\Gamma(L')$ 是不变的，我们看到映射 Res 对 $\mathrm{Stab}_\Gamma(L')$ 是等变的。因此，它限制为

$$\mathrm{Res}:\wedge^q M(L)^G\to\wedge^{q-1}M(L')^{G'} \tag{5.3}$$

相关不变部分之间的映射。

5.2. **留数映射与温和符号**。 我们证明，留数映射与 Borcherds 提升映射给出的温和符号相对应。

命题 5.3. 图

$$\begin{array}{ccc}\wedge^q M(L)^G & \xrightarrow{\psi_\Gamma} & K^M_q\mathbb{C}(X)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial}\\ \wedge^{q-1}M(L')^{G'} & \xrightarrow{\psi_{\Gamma'}} & K^M_{q-1}\mathbb{C}(X')\end{array} \tag{5.4}$$

可交换，其中 ∂ 是 $Z\subset X$ 的温和符号。

证明。我们取 $\omega=\sum_\alpha \mathrm{f}(\alpha)_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{f}(\alpha)\mathrm{q}$ 的一个元素，其中 $\wedge^q\mathrm{M(L)}^G$，且 $\mathrm{f}(\alpha)\mathrm{i}\in\mathrm{M(L)}$。与命题 5.1 的证明中一样，我们可以假设对任意 $\mathrm{i}>1$ 和 α，$\nu(\mathrm{f}^{(\alpha)}\mathrm{i})=0$。回忆 $\tilde{\mathrm{X}}=\mathrm{X}_L/\mathrm{G}$ 和 $\tilde{\mathrm{X}}'=\mathrm{X}_{L'}/\mathrm{G}'$，其中 X_L 和 $\tilde{\mathrm{X}}_{L'}$ 如 (2.1) 中所述。令 $\tilde{\mathrm{Z}}\subset\mathrm{X}_L$ 为 $\mathrm{X}_{L'}\to\mathrm{X}_L$ 的像。我们有有限映射 $\mathrm{X}_{L'}\to\tilde{\mathrm{Z}}\to\mathrm{Z}$，并相应地，

$$K^M_{q-1}\mathbb{C}(X')\subset K^M_{q-1}\mathbb{C}(\tilde{Z})\subset K^M_{q-1}\mathbb{C}(\tilde{X}_{L'}).$$

那么，在这个 K-群中，我们有

$$\begin{aligned}\psi_{\Gamma'}(\mathrm{Res}(\omega)) &= \psi_{L'}\left(\sum_{\alpha}\nu(f_1^{(\alpha)})\cdot(f_2^{(\alpha)}|_{L'})\wedge\cdots\wedge(f_q^{(\alpha)}|_{L'})\right)\\ &= \sum_{\alpha}\nu(f_1^{(\alpha)})\cdot\{\psi_{L'}(f_2^{(\alpha)}|_{L'}),\cdots,\psi_{L'}(f_q^{(\alpha)}|_{L'})\}\\ &= \sum_{\alpha}\nu(f_1^{(\alpha)})\cdot\{\psi_L(f_2^{(\alpha)})|_{\tilde{Z}},\cdots,\psi_L(f_q^{(\alpha)})|_{\tilde{Z}}\},\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由引理 2.1 得出。令 $\tilde{\partial}\colon \mathrm{K}_q^M\mathbb{C}(\tilde{\mathrm{X}}_L) \to \mathrm{K}^M\,\mathrm{q}{-}1\mathbb{C}(\tilde{\mathrm{Z}})$ 为针对 $\tilde{\mathrm{Z}}\subset\tilde{\mathrm{X}}_L$ 的温和符号，令 $\tilde{\mathrm{r}}$ 为 $\tilde{\mathcal{D}}_L\to\mathrm{X}_L$ 沿 $\tilde{\mathcal{D}}_{L'}\to\mathrm{Z}$ 的分歧指数。那么，$\mathrm{r}/\tilde{\mathrm{r}}$ 是 $\mathrm{X}_L\to\mathrm{X}$ 沿 $\tilde{\mathrm{Z}}\to\mathrm{Z}$ 的分歧指数。由于 $(\mathrm{r}/\tilde{\mathrm{r}})\cdot\nu(\mathrm{f}_1^{(\alpha)})$ 等于 $\psi_L(\mathrm{f}(\alpha)\,1)$ 沿 $\tilde{\mathrm{Z}}\subset\mathrm{X}_L$ 的阶，我们得到

$$\nu(f_1^{(\alpha)})\cdot\{\psi_L(f_2^{(\alpha)})|_{\tilde{Z}},\cdots,\psi_L(f_q^{(\alpha)})|_{\tilde{Z}}\}=(\tilde{r}/r)\cdot\tilde{\partial}\{\psi_L(f_1^{(\alpha)}),\cdots,\psi_L(f_q^{(\alpha)})\}$$

根据温和符号的公式（3.4），在 $K^M{}_{q-1}\mathbb{C}(\tilde{Z})$ 中。因此我们有

$$\begin{aligned}\psi_{\Gamma'}(\mathrm{Res}(\omega)) &= (\tilde{r}/r)\cdot\tilde{\partial}\left(\sum_{\alpha}\{\psi_L(f_1^{(\alpha)}),\cdots,\psi_L(f_q^{(\alpha)})\}\right)\\ &= (\tilde{r}/r)\cdot\tilde{\partial}(\psi_L(\omega))\end{aligned}$$

在 $K^M{}_{q-1}\mathbb{C}(\tilde{Z})$ 中。根据温和符号与拉回的相容性（[12] 备注 7.1.6.2），我们有

$$(\tilde{r}/r)\cdot\tilde{\partial}(\psi_L(\omega))=\partial(\psi_\Gamma(\omega))$$

在 $K_{M\,q-1}\mathbb{C}(X')\subset K^M{}_{q-1}\mathbb{C}(\tilde{Z})$ 中。这证明了我们的断言。 □

注记 5.4. 为了使图表（5.4）可交换，我们在 ν 的定义中作出了修改（5.1）。如果使用 $\tilde{\nu}$，它不依赖于Γ；但一般来说，图表（5.4）只能在相差一个常数的意义下可交换。

5.3. 留数映射与转移映射。 在本小节中，我们证明模侧留数映射与转移映射的相容性。首先准备一些记号。设 Γ 是 Γ 的一个子群，且包含 $\mathrm{O}^+(L)$。记 $\tilde{G}=\tilde{\Gamma}/\hat{\mathrm{O}}^+(L)$。我们选取代表元 $\{L'_\alpha\}_\alpha$，它们代表子格的 $\tilde{\Gamma}$-等价类，且与 L Γ-等价。我们将 Γ'_α 记为 $\mathrm{Stab}_{\tilde{\Gamma}}(L'_\alpha)\to\mathrm{O}^+(L'_\alpha)$的像。在$L'_\alpha\simeq L'$的识别下，我们有

$$\hat{\mathrm{O}}^+(L')<\Gamma'_\alpha<\Gamma'<\mathrm{O}^+(L').$$

ˆ我们记$G'_\alpha = \Gamma'_\alpha/\mathrm{O}^+(L')$。相应的几何情形为

$$\begin{array}{ccccc} \bigsqcup_\alpha X_{\Gamma'_\alpha} & \longrightarrow & \sum_\alpha Z_\alpha & \hookrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Z & \hookrightarrow & X \end{array}$$

˜ ˜其中，$X = X_{\tilde{\Gamma}}$，$Z_\alpha \subset X$ 是$L'_\alpha \subset L$的特殊除子，左侧水平˜映射是正规化映射，并且 $\sum_\alpha Z_\alpha$ 是X中Z 的原像。

命题 5.5。 下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \wedge^q M(L)^{\tilde{G}} & \xrightarrow{(\mathrm{Res}_\alpha)_\alpha} & \bigoplus_\alpha \wedge^{q-1} M(L'_\alpha)^{G'_\alpha} \\ {\scriptstyle N}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (N_\alpha)_\alpha} \\ \wedge^q M(L)^G & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \wedge^{q-1} M(L')^{G'} \end{array}$$

˜这里，Res 是(Γ； Γ′)的留数映射，Res_α 是(Γ； Γ'_α)的留数映射，˜N 是 $\Gamma < \Gamma$的转移映射，而 N_α 是$\Gamma'_\alpha < \Gamma'$的转移映射。

证明。由转移映射的传递性和满射性，我们可归结为 $\tilde{\Gamma} = \hat{\mathrm{O}}^+(\mathrm{L})$的情形。于是 ˜G是平凡的。由于ˆ$\mathrm{O}^+$(L)在 Γ中正规，因此每个$\mathrm{G}'_\alpha$ 在G′ 中都是正规子群，其中$\mathrm{G}'/\mathrm{G}'_\alpha$ 是$\mathrm{X}_{\Gamma'_\alpha} \to \mathrm{X}'$的伽罗瓦群。令$\mathrm{H}_\alpha < \mathrm{G}$为$\mathrm{Z}_\alpha \leftrightarrow [\mathrm{L}'_\alpha]$ 的稳定子群，并令 $\mathrm{R}_\alpha < \mathrm{H}_\alpha$ 为惯性群。于是， $|\mathrm{R}_\alpha|$˜是$\mathrm{X}_L \to \mathrm{X}$沿$\mathrm{Z}_\alpha \to \mathrm{Z}$的分歧指数，而商群$\mathrm{H}_\alpha/\mathrm{R}_\alpha$可与$\mathrm{G}'/\mathrm{G}'_\alpha$相识别。我们有$\mathrm{G} = \bigsqcup_\alpha \gamma_\alpha \mathrm{H}_\alpha$，其中 γ_α 由 γ_α 中的一个元素 Γ 表示，该元素满足 $\gamma_\alpha \mathrm{L}'_\alpha = \mathrm{L}'$ （我们使用相同的记号 γ_α）。

取一个元素 $f_1 \wedge \cdots \wedge f_q$，它属于 $\wedge^q M(L)$。于是有

$$\begin{aligned} \mathrm{Res} \circ N(f_1 \wedge \cdots \wedge f_q) &= \sum_{\gamma \in G} \mathrm{Res}(\gamma f_1 \wedge \cdots \wedge \gamma f_q) \\ &= \sum_\alpha \sum_{\gamma \in \gamma_\alpha H_\alpha} \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} \nu_{L'}(\gamma f_i) \cdot (\gamma f_1|_{L'}) \wedge \cdots (\text{no } i) \cdots \wedge (\gamma f_q|_{L'}) \\ &= \sum_\alpha \sum_{\gamma \in H_\alpha} \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} \nu_{L'}(\gamma_\alpha \gamma f_i) \cdot (\gamma_\alpha \gamma f_1|_{L'}) \wedge \cdots (\text{no } i) \cdots \wedge (\gamma_\alpha \gamma f_q|_{L'}) \end{aligned}$$

在 $\wedge^{q-1} M(L')$ 中。根据识别 $\gamma_\alpha \colon L'_\alpha \to L'$，我们有 $(\gamma_\alpha \gamma f)|_{L'} = \gamma(f|_{L'_\alpha})$。此外，由于 $|R_\alpha| \cdot \nu_{L'} = \nu_{L'_\alpha}$，我们有

$$|R_\alpha| \cdot \nu_{L'}(\gamma_\alpha \gamma f_i) = \nu_{L'_\alpha}(\gamma f_i) = \nu_{\gamma^{-1} L'_\alpha}(f_i) = \nu_{L'_\alpha}(f_i).$$

因此，通过 $H_\alpha/R_\alpha \simeq G'/G'_\alpha$，上述表达式等于

$$\begin{aligned} & \sum_\alpha \sum_{\gamma\in G'/G'_\alpha} \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} \nu_{L'_\alpha}(f_i)\cdot \gamma(f_1|_{L'_\alpha}) \wedge \cdots (\text{no } i) \cdots \wedge \gamma(f_q|_{L'_\alpha}) \\ = & \sum_\alpha \sum_{\gamma\in G'/G'_\alpha} \gamma(\mathrm{Res}_\alpha(f_1\wedge\cdots\wedge f_q)) \\ = & \sum_\alpha N_\alpha \circ \mathrm{Res}_\alpha(f_1\wedge\cdots\wedge f_q). \end{aligned}$$

这就证明了我们的断言。 □

6. Borcherds-Gersten复形

现在我们来到了本文的核心部分。我们将前几节中的构造结合起来，定义 Gersten 复形的一个模类比。所需性质的证明将在下一节 §7 给出。

我们固定一个符号为 $(2, n)$ 且 $n > 0$ 的偶格 L_0，以及一个包含 $\hat{O}^+(L_0)$ 的 $O^+(L_0)$ 子群 Γ。模簇 $X = X_\Gamma$ 是我们希望用 Borcherds乘积逼近其 Gersten复形的目标簇。记号 L、L' 将用于表示符号为 $(2, *)$ 的 L_0 的本原子格。与 §2.2 中一样，我们用 Γ_L 表示 $\mathrm{Stab}_\Gamma(L) \to O^+(L)$ 的像。我们还记 $X_L = X_{\Gamma_L}$ 和 $G_L = \Gamma_L/\hat{O}^+(L)$。回顾一下，$X_L$ 是 $L \subset L_0$ 对应的特殊循环 $Z_L \subset X$ 的正规化。另一方面，与 (2.1) 中一样，我们记 $\tilde{X}_L = \tilde{X}_{\hat{O}^+(L)}$。于是 $X_L = \tilde{X}_L/G_L$。本节中始终使用这些记号。

6.1. 边界映射。设$L' \subset L$ 是L_0 的余秩分别为$r + 1$ 和r的子格。在本小节中，我们定义边界映射

$$\partial^L_{L'} : \wedge^q M(L)^{G_L} \to \wedge^{q-1} M(L')^{G_{L'}}$$

通过调整§5中的留数映射，使其适用于相对情形$L' \subset L \subset L_0$。由于特殊循环可能存在的非正规性使构造变得复杂，我们先来说明相关的几何情形。

我们用 $C(L', L; \Gamma)$表示L 的子格中与L'等价的 Γ_L-等价类的集合。我们选取一个代表元 $\{L'_\alpha\}_\alpha$，属于$C(L', L; \Gamma)$。若 $\pi_L: X_L \to Z_L$是正规化映射，则有

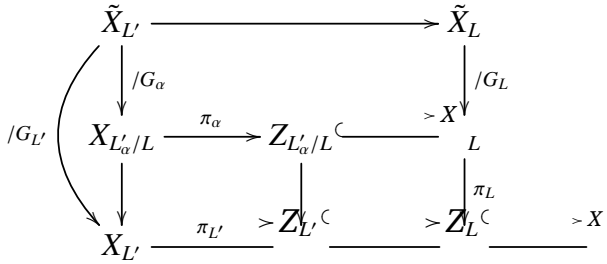
$$\pi_L^{-1}(Z_{L'}) = \sum_\alpha Z_{L'_\alpha/L},$$

其中$Z_{L'_\alpha/L} \subset X_L$ 是$L'_\alpha \subset L$对应的特殊循环。我们用 $\Gamma_{L'_\alpha/L}$ 表示 $\mathrm{Stab}_{\Gamma_L}(L'_\alpha) \to O^+(L'_\alpha)$ 的像。于是$X_{L'_\alpha/L} := X^{\Gamma_{L'_\alpha/L}}$ 是正规化

后的$Z_{L'_\alpha/L}$。若将$\Gamma_{L'_\alpha/L}$ 通过 Γ-作用$L'_\alpha \simeq L'$视为 $\mathrm{O}^+(L')$ 的子群，则有

$$\hat{\mathrm{O}}^+(L') \subset \Gamma_{L'_\alpha/L} \subset \Gamma_{L'} \subset \mathrm{O}^+(L'). \tag{6.1}$$

ˆ我们记$G_\alpha = \Gamma_{L'_\alpha/L}/\mathrm{O}^+(L')$。对于每个 α，情况由以下交换图概括：



其中各个 $\pi_?$ 都是正规化映射，而左侧一列来自 (6.1)。

现在我们定义边界映射。子格$L'_\alpha \subset L$ 及其群（Γ_L;$\Gamma_{L'_\alpha/L}$）的模剩余映射是如下形式的映射

$$\mathrm{Res}_\alpha := \mathrm{Res}^L_{L'_\alpha} \ : \ \wedge^q M(L)^{G_L} \to \wedge^{q-1} M(L')^{G_\alpha}.$$

我们将它与转移映射复合

$$N_\alpha : \wedge^{q-1} M(L')^{G_\alpha} \to \wedge^{q-1} M(L')^{G_{L'}}$$

对于$\Gamma_{L'_\alpha/L} \subset \Gamma_{L'}$。最后，我们对 α 求和：

$$\partial^L_{L'} := \sum_\alpha N_\alpha \circ \mathrm{Res}_\alpha : \wedge^q M(L)^{G_L} \to \wedge^{q-1} M(L')^{G_{L'}}.$$

这就是我们的边界映射。

6.2. 复形。 现在我们可以定义复形。设$p \le n$。对于$r \le p$，令$L_0^{(r)}$ 为 L_0 中余秩为r的子格的 Γ-等价类集合。这与X 中余维为r的特殊循环集合相同。然后我们构造序列

$$\mathsf{M}^\bullet_{p,\Gamma} \ : \ \cdots \longrightarrow \bigoplus_{L \in L_0^{(r)}} \wedge^{p-r} M(L)^{G_L} \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{L' \in L_0^{(r+1)}} \wedge^{p-r-1} M(L')^{G_{L'}} \longrightarrow \cdots$$

其中，带有指标 $L_0^{(r)}$ 的项置于次数 r，而 $\partial = (\partial^L_{L'})$ 由 §6.1 中定义的边界映射组成。（若 $Z_{L'} \not\subset Z_L$，则令 $\partial^L_{L'} = 0$。）因此，$\mathsf{M}^\bullet{}_{p,\Gamma}$ 的长度为 $p+1$，从次数 0 的 $\wedge^p M(L_0)^\Gamma$ 开始：

$$\wedge^p M(L_0)^\Gamma \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{L \in L_0^{(p-1)}} M(L)^{G_L} \longrightarrow \bigoplus_{L' \in L_0^{(p)}} \mathbb{Q}[L'].$$

例6.1. 最简单的情形是，假设 L_0 是幺模的。那么$\Gamma = O^+(L_0)$。根据 Nikulin 理论（[19]§1.14），每个秩为 $r < n/2$ 的负定偶格 K 都能原始嵌入 L_0, ，且在 $O^+(L_0)$ 作用下唯一。因此，根据对应关系 $K \leftrightarrow K^\perp$，$L_0^{(r)}$ 可以视为秩为 r 的负定偶格等距类的集合 $\mathcal{S}_r$。此外，$G_{K^\perp}$ 是 $O(K) \to O(A_K) \simeq O(A_{K^\perp})$ 除以 ± 1 后所得的像。因此，在 $r < n/2$ 的范围内，$M^\bullet_{p,\Gamma}$ 可表示为

$$\wedge^p M(L_0) \to \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} \wedge^{p-1} M(\langle -2d\rangle^\perp) \to \cdots \to \bigoplus_{K\in\mathcal{S}_r} \wedge^{p-r} M(K^\perp)^{O(K)} \to \cdots$$

由于$A_{K^\perp} \simeq A_K(-1)$，每个$M(K^\perp)$都可以完全用$K$来表示。

我们回到一般情形。对于$L \in L_0^{(r)}$，记

$$\psi_L = \psi_{\Gamma_L} : \wedge^q M(L)^{G_L} \to K_q^M \mathbb{C}(X_L)$$

为Γ_L的Borcherds提升映射。（缩写 ψ_L 与第4节和第5节中的不同。）我们的主要结果如下。

定理 6.2。设 $p \le n$。以下结论成立。

(1) 序列$M^\bullet_{p,\Gamma}$是一个复形，即 $\partial \circ \partial = 0$。（*2*）对于 L_0 的子格 L，*Borcherds*提升映射 ψ_L 定义了复形$M^\bullet_{p,\Gamma} \to K^\bullet_{p,X}$ 之间的一个态射。

定理 6.2 的证明将在第§7节给出。在继续之前，让我们看看它与本节其余部分中的高阶Chow群的相关性。

备注6.3：我们添加假设$p \le n$，以使 $\bigoplus_{L_0^{(n)}} \mathbb{Q}[L]$ 成为特殊0-循环出现的唯一地方。由于在维数0时我们没有 Borcherds乘积的（算术正规化），Borcherds提升映射对于特殊0-循环并未良定义。因此，在$p > n$的情况下，我们需要在特殊0-循环处截断$M^\bullet_{p,\Gamma}$。

6.3. **特殊高阶循环**。我们回顾 §3.4 中 Gersten复形与高阶Chow群之间的关系。将态射$M^\bullet_{p,\Gamma} \to K^\bullet_{p,X}$与同构 (3.6) 结合，我们得到一个 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$H^{p-m}M^\bullet_{p,\Gamma} \to \mathrm{CH}^p(X,m)_\mathbb{Q}, \quad 0 \le m \le 2. \tag{6.2}$$

我们将以此方式得到的高阶 Chow 循环称为特殊高阶循环。当$m \ge 3$时，关系更为间接：

$$H^{p-m}M^\bullet_{p,\Gamma} \to H^{p-m}K^\bullet_{p,X} \leftarrow \mathrm{CH}^p(X,m)_\mathbb{Q},$$

其中右侧映射是余维谱序列中的边缘映射（3.7）。如（3.8）所述，当 $m = 3$ 时，该映射是满射，因此在这种情况下，我们仍可从 $H^{p-3}M^\bullet_{p,\Gamma}$ 得到高阶 Chow 循环。当 $m \ge 4$ 时，一个自然的问题是，能否用模形式给出一个判据，以确定

来自 $\mathrm{M}^{\bullet}{}_{p,\Gamma}$ 的 Gersten 上同调类是否属于 $\mathrm{CH}^p(X,m)_{\mathbb{Q}}$ 的像；换言之，判断它们能否一直存留到余维谱序列的 E_∞ 页。

下面我们将针对每个 $0 \le m \le 2$作更具体的说明。

6.3.1. $m = 0$的情形。映射 $\mathrm{M}^p{}_{p,\Gamma} \to \mathrm{CH}^p(X)_{\mathbb{Q}}$ 只是将子格 L 映到特殊循环 Z_L的类的映射。$\mathrm{M}^{p-1}{}_{p,\Gamma} \to \mathrm{M}^p{}_{p,\Gamma}$ 的像是由 Borcherds乘积在高一维特殊循环上给出的有理等价空间。在 $p = 1$的情形，Bruinier定理 [8] 和 Bergeron-Li-Millson-Moeglin [3] 表明，在对 L_0施加适当条件时，$\mathrm{H}^1\mathrm{M}^{\bullet}_{1,\Gamma} \to \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$ 是一个同构。此外，Bruinier-Raum-Zhang 的定理（[10], [27]）表明，对于每个 p，$\mathrm{H}^p\mathrm{M}^{\bullet}{}_{p,\Gamma} \to \mathrm{CH}^p(X)_{\mathbb{Q}}$ 的像都是有限维的。可以推测，$\mathrm{H}^p\mathrm{M}^{\bullet}{}_{p,\Gamma}$ 本身也具有有限维数。

6.3.2. $m = 1$的情形。特殊（p，1）-循环的形式为

$$\sum_i (Z_{L_i}, \psi(f_i)),$$

其中Z_{L_i}是余维为$p-1$的特殊循环，而$\psi(f_i)$是Z_{L_i}上的Borcherds乘积。对任意余秩为p的$L' \subset L_0$，余循环条件为$\sum_i \nu_{L'}(f_i) = 0$。这可以用f_i的傅里叶系数来表示。在$p = 2$的情形下，Garcia [11] 从theta提升的角度研究了这类循环。

如果一个（p，1）-循环在有理等价意义下等于若干形如（Z，ψ）的循环之和，其中 $\psi \in O^\times(Z)$既无零点也无极点，则称其为可分解的 。（在模情形中，根据Koecher原理，ψ 在大多数情况下必须是常数。）$\mathrm{CH}^p(X,1)_{\mathbb{Q}}$ 除以可分解循环子空间所得的商记为$\mathrm{CH}^p(X,1)_{\mathrm{ind},\mathbb{Q}}$。由于Borcherds乘积的除子很少平凡，因此转而考虑不可分解部分更为自然:

$$H^{p-1}\mathrm{M}^{\bullet}_{p,\Gamma} \to \mathrm{CH}^p(X,1)_{\mathrm{ind},\mathbb{Q}}. \tag{6.3}$$

那么 $H^{p-1}\mathrm{M}^{\bullet}{}_{p,\Gamma}$ 具有可数维，而 $\mathrm{CH}^p(X,1)_{\mathrm{ind},\mathbb{Q}}$ 被猜想至少在 $p = 2$和 X 光滑射影时具有可数维。因此，自然会问，(6.3) 的核和余核是否具有有限维。

作为我们构造的示例，我们给出一个特殊的 (2,1)-循环。（不过，我怀疑这个循环在 $H^1\mathrm{M}^{\bullet}_{2,\Gamma}$ 中会消失。）

例6.4。取$L_0 = 2U \oplus A_1^{(1)} \oplus A_1^{(2)}$，其中$A_1^{(i)}$是$A_1$的一个副本。令$\Gamma = \hat{\mathrm{O}}^+(L_0)$。对于$i = 1, 2$，我们置$L_i = 2U \oplus A_1^{(i)}$。此外，我们从$2U$中选取一个（$-2$）-向量$\delta$，并令

$$L_3 = \delta^\perp \cap 2U \simeq U \oplus \langle 2 \rangle \oplus 2A_1 \simeq U \oplus U(2) \oplus A_1.$$

记$L_{ij} = L_i \cap L_j$为$i \neq j$。于是$L_{12} = 2U$且$L_{i3} \simeq U \oplus \langle 2 \rangle \oplus A_1$，对于$i = 1, 2$。容易看出$Z_{L_i} \cap Z^{L_j} = Z^{L_{ij}}$。

现在$X_{L_1} \simeq X_{L_2}$是 $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ 的 Siegel 模三维簇。我们取模函数 Δ_5^7 / χ_{35}，其中 Δ_5 是十个偶 theta 常数的乘积，χ_{35} 是第一个奇权 Siegel 模形式。（下标表示权。）根据 Gritsenko-Nikulin [14], , 这是一个 Borcherds乘积，其

$$\mathrm{div}(\Delta_5^7/\chi_{35}) = 7\mathrm{div}(\Delta_5) - \mathrm{div}(\chi_{35}) = 6Z_{L_{12}} - Z_{L_{i3}}.$$

另一方面，L_3 是 [9] 意义下的简单格。因此，在X_{L_3}上存在一个 Borcherds乘积 ψ_1，满足 $\mathrm{div}(\psi_1) = Z_{L_{13}}$。对$L_3$ 应用交换两个A_1, 副本的对合，我们还得到一个权相同的 Borcherds乘积 ψ_2，满足 $\mathrm{div}(\psi_2) = Z_{L_{23}}$。于是 ψ_1/ψ_2 的权重 0，且 $\mathrm{div}(\psi_3) = Z_{L_{13}} - Z_{L_{23}}$。因此该元素

$$(L_1, \Delta_5^7/\chi_{35}) + (L_2, \chi_{35}/\Delta_5^7) + (L_3, \psi_1/\psi_2)$$

of$M_{1\ 2,\Gamma}$ 满足余循环条件。

6.3.3. $m = 2$. 的情形。特殊（p，2）-循环具有如下形式

$$\sum_i (Z_{L_i}, \{\psi(f_i), \psi(g_i)\}),$$

其中Z_{L_i}是余维为$p - 2$的特殊循环，且 ψ（f_i）、ψ（g_i）是定义在Z_{L_i}上的Borcherds乘积。余循环条件为

$$\sum_i \partial_{L'}^{L_i}(f_i \wedge g_i) = 0$$

对于任意余秩为$p - 1$的$L' \subset L_0$。

例如，当$p = 2$时，我们有$L_i = L_0$，且 $\partial^{L_0}{}_{L'} = \mathrm{Res}^{L_0}{}_{L'}$ 是简单留数映射。于是，由（5.2），余循环条件可写为

$$\left(\sum_i \nu_{L'}(f_i) g_i - \nu_{L'}(g_i) f_i \right) \Big|_{L'} = 0. \tag{6.4}$$

Sreekantan（[24] §6.0.2）曾问，能否用输入模形式来表达特殊 (2, 2)-循环的余循环条件。条件 (6.4) 在$n \geq 2$的情形下给出了答案。然而，他最初提出这个问题时，针对的是$n = 1$的情形；正如注 6.3 中所解释的，定理 6.2 并未涵盖这一情形。这里涉及的是模曲线上 Borcherds乘积的 CM 值。这个尚未解决的情形，无论从K理论观点还是模观点来看，都颇具研究价值。

7. 定理 6.2 的证明

本节证明定理 6.2。我们先证明断言 (2)，再利用 Borcherds 提升映射证明断言 (1)。沿用 §6 中的记号。

7.1. **Borcherds 提升映射**。 定理 6.2 的 (2) 相当于以下断言。

命题 7.1。 设 $L' \subset L \subset L_0$ 如 *§6.1* 所述。

(1) 以下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \wedge^q M(L)^{G_L} & \xrightarrow{\partial^L_{L'}} & \wedge^{q-1} M(L')^{G_{L'}} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_L} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{L'}} \\ K^M_q \mathbb{C}(X_L) & \xrightarrow{\partial^Z_{Z'}} & K^M_{q-1}\mathbb{C}(X_{L'}) \end{array}$$

其中 $\partial^Z_{Z'}$ 是 $Z_{L'} \subset Z_L$ 的 K 理论边界映射。

(2) 若 Y 是 X_L 的一个不可约除子，且不是特殊除子，则复合映射

$$\wedge^q M(L)^{G_L} \xrightarrow{\psi_L} K^M_q \mathbb{C}(X_L) \xrightarrow{\partial_Y} K^M_{q-1}\mathbb{C}(Y)$$

为零，其中 ∂_Y 是 $Y \subset X_L$的温和符号。

证明。 （1）根据 $\partial^L_{L'}$ 和 $\partial^Z_{Z'}$ 的定义以及 §6.1 中的几何解释，相关图可分解为

$$\begin{array}{ccccc} \wedge^q M(L)^{G_L} & \xrightarrow{(\mathrm{Res}^M_\alpha)} & \bigoplus_\alpha \wedge^{q-1} M(L'_\alpha)^{G_\alpha} & \xrightarrow{(N^M_\alpha)} & \wedge^{q-1} M(L')^{G_{L'}} \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_L} & & \downarrow{\scriptstyle (\psi_\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{L'}} \\ K^M_q \mathbb{C}(X_L) & \xrightarrow{(\mathrm{Res}^K_\alpha)} & \bigoplus_\alpha K^M_{q-1}\mathbb{C}(X_{L'_\alpha/L}) & \xrightarrow{(N^K_\alpha)} & K^M_{q-1}\mathbb{C}(X_{L'}) \end{array}$$

这里，Res^M_α 是 $(\Gamma_L;\Gamma_{L'_\alpha/L})$ 的模剩余映射，Res^K_α 是 $Z_{L'_\alpha/L} \subset X_L$的温和符号，$N^M_\alpha$是 $\Gamma_{L'_\alpha/L} \subset \Gamma_{L'}$的模形式转移映射，$N^K_\alpha$是 K理论的转移映射，作用于 $X_{L'_\alpha/L} \to X_{L'}$，而 ψ_α 是$\Gamma_{L'_\alpha/L}$的 Borcherds提升映射。于是，左方方块由命题 5.3 交换，右方方块由引理 4.4 交换。

(2) 我们选取 Y 的一个不可约除子，它位于 X_L 之上，即 $\subset X_L$，并令 $\partial_{\tilde{Y}}$ 为关于 $Y \subset X_L$的温和符号。我们考虑图

$$\begin{array}{ccccc} \wedge^q M(L)^{G_L} & \xrightarrow{\psi_L} & K^M_q \mathbb{C}(X_L) & \xrightarrow{\partial_Y} & K^M_{q-1}\mathbb{C}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \wedge^q M(L) & \xrightarrow{\psi_L} & K^M_q \mathbb{C}(\tilde{X}_L) & \xrightarrow{\partial_{\tilde{Y}}} & K^M_{q-1}\mathbb{C}(\tilde{Y}) \end{array}$$

左方方块由引理 4.3 交换，右方方块则根据温和符号的函子性只相差一个常数而交换（[12] 注 7.1.6.2）。因此，只需证明下方序列中的复合为零。

我们取$f_1 \wedge \cdots \wedge f_q$属于 $\wedge^q M(L)$ 的一个元素。由于 $\mathrm{div}(\psi_L(f_i))$ 是特殊除子的线性组合，因此其支集不包含Y。于是

$$\partial_{\tilde{Y}}(\psi_L(f_1 \wedge \cdots \wedge f_q)) = \partial_{\tilde{Y}}\{\psi_L(f_1), \cdots, \psi_L(f_q)\} = 0.$$

这就证明了我们的断言。 □

7.2. **证明** $\partial \circ \partial = 0$。 定理 6.2 (1) 等价于以下断言。

命题 7.2。 设 $L'' \subset L$ 是 L_0 的余秩分别为 $r+2$ 和 r 的子格。则复合

$$\wedge^q M(L)^{G_L} \xrightarrow{(\partial^L_{L'})} \bigoplus_{L'} \wedge^{q-1} M(L')^{G_{L'}} \xrightarrow{(\partial^{L'}_{L''})} \wedge^{q-2} M(L'')^{G_{L''}} \tag{7.1}$$

为零，其中 L' 遍历满足 $Z_{L''} \subset Z_{L'} \subset Z_L$ 的 $L' \in L_0^{(r+1)}$。

证明。 证明是逐步约化的过程，最终归结为$q=2$的情形。由于约化过程相当漫长，为了便于阅读，我们按相反顺序给出证明。因此，我们从$q=2$的情形开始，逐步推广，最后得到一般情形。

步骤 1. 命题 7.2 在$q=2$的情况下成立。

证明。 由命题 7.1，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \wedge^2 M(L)^{G_L} & \longrightarrow & \bigoplus_{L'} M(L')^{G_{L'}} & \longrightarrow & \mathbb{Q}[L''] \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_L} & & \downarrow{\scriptstyle (\psi_{L'})} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ K_2\mathbb{C}(X_L) & \longrightarrow & \bigoplus_{Z'} \mathbb{C}(Z')^\times & \longrightarrow & \mathbb{Q}[Z_{L''}] \end{array}$$

下面的序列是X的 Gersten 复形的一部分，其中Z' 遍历满足$Z' \in X^{(r+1)}$ 且$Z_{L''} \subset Z' \subset Z_L$的对象。由于右侧的竖直映射是同构，下面的序列是一个复形（[16]）这一事实意味着上面的序列也如此。□

接下来我们考虑$r=0$ 且G_L 平凡的情况。

^步骤 2. 命题 7.2 在$L = L_0, \Gamma = \mathrm{O}^+(L)$的情况下成立。

证明。 根据我们的假设，序列 (7.1) 具有如下形式

$$\wedge^q M(L) \xrightarrow{(\mathrm{Res}^L_{L'})} \bigoplus_{L'} \wedge^{q-1} M(L')^{G_{L'}} \xrightarrow{(\partial^{L'}_{L''})} \wedge^{q-2} M(L'')^{G_{L''}}.$$

我们首先计算 $\partial^{L'}{}_{L''} \circ \mathrm{Res}^{L}_{L'}$ 对每个满足 L' 的 $L'' \subset L' \subset L$ 的值。我们从 $\mathrm{Res}^{L'}{}_{L''} \circ \mathrm{Res}^{L}_{L'}$ 开始。取 $\omega = f_1 \wedge \cdots \wedge f_q$ 为 $\wedge^q M(L)$ 的一个元素。于是

$$\begin{aligned} & \mathrm{Res}^{L'}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(\omega)) \\ = \ & \mathrm{Res}^{L'}_{L''}\left(\sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\nu_{L'}(f_i)\cdot(f_1|_{L'})\wedge\cdots(\text{no } i)\cdots\wedge(f_q|_{L'})\right) \\ = \ & \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q-1}(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\nu_{L'}(f_i)\cdot\nu_{L''}(f_{\tilde{j}}|_{L'})\cdot(f_1|_{L'})|_{L''}\wedge\cdots(\text{no } i,\tilde{j})\cdots\wedge(f_q|_{L'})|_{L''} \end{aligned}$$

其中 $\tilde{j} = j$ 若 $j < i$ 且 $\tilde{j} = j+1$ 若 $j \geq i$。由拟-拉回的传递性可得 $(f|_{L'})|_{L''} = f|_{L''}$。因此，将 j 改写为 j 并代入

$$\omega_{i,j} = f_1|_{L''} \wedge \cdots(\text{no } i,j)\cdots \wedge f_q|_{L''},$$

我们得到

$$\mathrm{Res}^{L'}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(\omega)) = \sum_{i\neq j}(-1)^{i+j+\varepsilon(i,j)}\nu_{L'}(f_i)\cdot\nu_{L''}(f_j|_{L'})\cdot\omega_{i,j},$$

其中 $\varepsilon(i,j) = 0$ 若 $j < i$ 且 $\varepsilon(i,j) = 1$ 若 $j > i$。将其改写为以下形式更为方便:

$$\mathrm{Res}^{L'}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(\omega)) = \sum_{i>j}(-1)^{i+j}\{\nu_{L'}(f_i)\nu_{L''}(f_j|_{L'}) - \nu_{L'}(f_j)\nu_{L''}(f_i|_{L'})\}\cdot\omega_{i,j}.$$

下一步是应用 $\Gamma_{L''/L'} < \Gamma_{L''}$ 的转移映射。若 $f \in M(L)$，$f|_{L''}$ 不仅是 $\Gamma_{L''/L'}$-不变的，而且已经是 $\Gamma_{L''}$-不变的。根据上述表达式，我们发现 $\mathrm{Res}^{L'}{}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(\omega))$ 已经是 $\Gamma_{L'}$-不变的。因此，$\mathrm{Res}^{L'}{}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(\omega))$ 的转移映射就是乘以 $[\Gamma_{L''} : \Gamma_{L''/L'}]$。

最后一步是对 $C(L'', L'; \Gamma) = \{L''_\alpha\}$ 求和。（记号见第 6.1 节。）对于每个 α，根据 Γ-作用 $L'' \simeq L''_\alpha$，我们有 $f|_{L''_\alpha} = f|_{L''}$。因此

$$\begin{aligned} & \partial^{L'}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(\omega)) \\ = \ & \sum_{i>j}(-1)^{i+j}\sum_{\alpha}[\Gamma_{L''_\alpha} : \Gamma_{L''_\alpha/L'}]\cdot\{\nu_{L'}(f_i)\nu_{L''_\alpha}(f_j|_{L'}) - \nu_{L'}(f_j)\nu_{L''_\alpha}(f_i|_{L'})\}\cdot\omega_{i,j}. \end{aligned}$$

另一方面，将 $f_i \wedge f_j$ 代入 ω，可得

$$\partial^{L'}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(f_i\wedge f_j)) = \sum_{\alpha}[\Gamma_{L''_\alpha} : \Gamma_{L''_\alpha/L'}]\cdot\{\nu_{L'}(f_i)\nu_{L''_\alpha}(f_j|_{L'}) - \nu_{L'}(f_j)\nu_{L''_\alpha}(f_i|_{L'})\}.$$

由此可得

$$\partial^{L'}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(\omega)) = \sum_{i>j}(-1)^{i+j}\partial^{L'}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(f_i\wedge f_j))\cdot\omega_{i,j}.$$

最后，对满足 $L' \in L^{(1)}$ 且 $Z_{L''} \subset Z_{L'} \subset \tilde{X}_L$ 的情形求和，得到

$$\begin{aligned}\sum_{L'} \partial^{L'}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(\omega)) &= \sum_{L'}\sum_{i>j}(-1)^{i+j}\partial^{L'}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(f_i \wedge f_j))\cdot\omega_{i,j} \\ &= \sum_{i>j}(-1)^{i+j}\left(\sum_{L'}\partial^{L'}_{L''}(\mathrm{Res}^{L}_{L'}(f_i \wedge f_j))\right)\cdot\omega_{i,j} \\ &= 0,\end{aligned}$$

其中最后一个等式由步骤 1 得出。 □

下一步是在保持 L 为L_0的同时，允许 Γ 为一般情形。

ˆ步骤 3。 命题 7.2 在$L = L_0$,$\mathrm{O}^+(L) < \Gamma < \mathrm{O}^+(L)$的情形下成立。

证明。 我们考虑下图：

$$\begin{array}{ccccc}
\wedge^q M(L) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \bigoplus_{L'} \wedge^{q-1} M(L')^{\tilde{G}_{L'}} & \xrightarrow{\partial} & \bigoplus_{\alpha} \wedge^{q-2} M(L''_\alpha)^{\tilde{G}_{L''_\alpha}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\wedge^q M(L)^{G_L} & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \bigoplus_{L'} \wedge^{q-1} M(L')^{G_{L'}} & \xrightarrow{\partial} & \wedge^{q-2} M(L'')^{G_{L''}}
\end{array}$$

其中，上、下两个序列分别是 $\hat{\mathrm{O}}^+(L)$ 和 Γ 的 Borcherds-Gersten 复形，L''_α 遍历与L Γ-等价的子格的 $\tilde{\mathrm{O}}^+(L)$-等价类，而竖直映射是转移映射。根据命题 5.5，左方的方块是交换的。同理，右方的方块也是交换的。

由步骤 2 可知，上方序列中的复合映射为零。由于左侧的转移映射是满射，这意味着下方序列中的复合映射也为零。□

在讨论一般情形之前，回顾或准备一些记号会很有帮助。对于 $\mathrm{L}_1 \subset \mathrm{L}_2$ 的两个本原子格（它们包含于 L_0,），我们用 $C(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2; \Gamma)$ 表示 L_2 中与 L_1 Γ-等价的子格 L'_1 的 Γ_{L_2}-等价类集合。我们将 $\mathrm{Stab}^{\Gamma_{L_2}}(\mathrm{L}_1)$ 在 $\mathrm{O}^+(\mathrm{L}_1)$ 下的像记作 $\Gamma_{L_1}/\mathrm{L}_2$，并记 $\mathrm{G}_{L_1}/\mathrm{L}_2 = \Gamma_{L_1}/\mathrm{L}_2/\hat{\mathrm{O}}^+(\mathrm{L}_1)$。我们将 X_{L_2} 中（而非 X 中）与 $\mathrm{L}_1 \subset \mathrm{L}_2$ 对应的特殊循环记作 $\mathrm{Z}_{L_1}/\mathrm{L}_2 \subset \mathrm{X}_{L_2}$。我们还记 $\mathrm{X}_{L_1}/\mathrm{L}_2 = \mathrm{X}^{\Gamma_{L_1/L_2}}$。那么，$\mathrm{X}_{L_1}/\mathrm{L}_2$ 是 $\mathrm{Z}_{L_1}/\mathrm{L}_2$ 的正规化。

步骤 4. 命题 7.2 在完全一般的情形下成立。

证明。 对于每个L'，其中$L'' \subset L' \subset L$，我们记为

$$C(L', L; \Gamma) = \{L'_\alpha\}_\alpha, \quad G_\alpha = G_{L'_\alpha/L},$$
$$C(L'', L'; \Gamma) = \{L''_\beta\}_\beta, \quad G_\beta = G_{L''_\beta/L'}.$$

对于每个 α，我们选择一个$L'_\alpha \simeq L'$ 等距映射，由 Γ作用给出。若通过$L'_\alpha \simeq L'$将$\Gamma_{L'_\alpha/L} < \mathrm{O}^+(L'_\alpha)$视为$\mathrm{O}^+(L')$的一个子群，则有

$$\hat{\mathrm{O}}^+(L') < \Gamma_{L'_\alpha/L} < \Gamma_{L'} < \mathrm{O}^+(L'). \tag{7.2}$$

我们将$L''_\alpha \subset L'_\alpha$ 记为$L'' \subset L'$ 在$L' \simeq L'_\alpha$下的像。于是我们写作

$$C(L''_\alpha, L'_\alpha; \Gamma_L) = \{L''_{\alpha,\gamma}\}_\gamma, \quad G_{\alpha,\gamma} = \Gamma_{L''_{\alpha,\gamma}/L'_\alpha/L}/\hat{\mathrm{O}}^+(L''_{\alpha,\gamma}),$$

其中 $\Gamma_{L''_\alpha,\gamma}/L'_\alpha/L$ 是 $\mathrm{Stab}_{\Gamma_{L'_\alpha/L}}(L''_{\alpha,\gamma}) \to \mathrm{O}^+(L''_{\alpha,\gamma})$ 的像。通过将 $L''_{\alpha,\gamma} \subset L'_\alpha$ 沿 $L'_\alpha \simeq L'$ 送回，并记住其 $\Gamma_{L'}$-等价类，我们得到一个赋值 $\gamma \mapsto \beta$，其中 $L''_{\alpha,\gamma} \overset{\Gamma_{L'}}{\sim} L''_\beta$。在识别 $L''_{\alpha,\gamma} \simeq L''_\beta \simeq L''$ 下，我们有

$$\hat{\mathrm{O}}^+(L'') < \Gamma_{L''_{\alpha,\gamma}/L'_\alpha/L} < \Gamma_{L''_\beta/L'} < \Gamma_{L''} < \mathrm{O}^+(L''). \tag{7.3}$$

采用这些记号，映射 $\partial^L_{L'} \circ \partial^{L'}{}_{L''}$ 可以分解如下：

$$\begin{array}{ccccc}
\wedge^q M(L)^{G_L} & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \bigoplus_\alpha \wedge^{q-1} M(L'_\alpha)^{G_\alpha} & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \bigoplus_{\alpha,\gamma} \wedge^{q-2} M(L''_{\alpha,\gamma})^{G_{\alpha,\gamma}} \\
& \searrow^{\partial^L_{L'}} & \downarrow & & \downarrow \\
& & \wedge^{q-1} M(L')^{G_{L'}} & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \bigoplus_\beta \wedge^{q-2} M(L''_\beta)^{G_\beta} \\
& & & \searrow^{\partial^{L'}_{L''}} & \downarrow \\
& & & & \wedge^{q-2} M(L'')^{G_{L''}}
\end{array} \tag{7.4}$$

这里，两个三角形分别是各个边界映射的定义性分解，中间的竖直映射是式 (7.2) 对应的转移映射，右侧的竖直映射是式 (7.3) 对应的转移映射。该方块的交换性由命题 5.5 得出。

另一方面，我们考虑

$$C(L'', L; \Gamma) = \{L''_\delta\}_\delta, \quad G_\delta = G_{L''_\delta/L}.$$

通过遗忘中间格 L'_α 中的 $L''_{\alpha,\gamma} \subset L'_\alpha \subset L$，我们得到一个赋值 $(\alpha, \gamma) \mapsto \delta$，其中 $L''_{\alpha,\gamma} \overset{\Gamma_L}{\sim} L''_\delta$。在识别 $L''_{\alpha,\gamma} \simeq L''_\delta \simeq L''$下，我们有

$$\hat{\mathrm{O}}^+(L'') < \Gamma_{L''_{\alpha,\gamma}/L'_\alpha/L} < \Gamma_{L''_\delta/L} < \Gamma_{L''} < \mathrm{O}^+(L''). \tag{7.5}$$

通过比较 (7.3) 和 (7.5)，我们看到 (7.4) 中两个右侧竖直映射的复合可分解为

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{\alpha,\gamma} \wedge^{q-2} M(L''_{\alpha,\gamma})^{G_{\alpha,\gamma}} & \longrightarrow & \bigoplus_\delta \wedge^{q-2} M(L''_\delta)^{G_\delta} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_\beta \wedge^{q-2} M(L''_\beta)^{G_\beta} & \longrightarrow & \wedge^{q-2} M(L'')^{G_{L''}}
\end{array}$$

对于每个 α，复合映射

$$\wedge^{q-1}M(L'_\alpha)^{G_\alpha} \xrightarrow{\text{Res}} \bigoplus_\gamma \wedge^{q-2}M(L''_{\alpha,\gamma})^{G_{\alpha,\gamma}} \longrightarrow \bigoplus_\delta \wedge^{q-2}M(L''_\delta)^{G_\delta}$$

是 Borcherds-Gersten复形中从 $Z_{L'_\alpha/L}$ 到 $Z_{L''_\delta/L}$ 的边界映射关于 δ 的直和，其中该复形对应于 X_L。这表明 $\partial^{L'}{}_{L''}\circ\partial^L_{L'}$ 可经由

$$\wedge^{q}M(L)^{G_L} \xrightarrow{\text{Res}} \bigoplus_\alpha \wedge^{q-1}M(L'_\alpha)^{G_\alpha} \longrightarrow \bigoplus_\delta \wedge^{q-2}M(L''_\delta)^{G_\delta},$$

其中这些映射是 Borcherds-Gersten复形中对应于 X_L的边界映射。

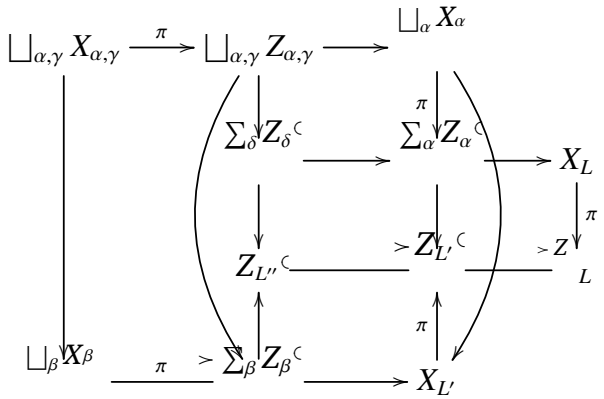
最后，对满足$Z_{L''}\subset Z_{L'}\subset Z_L$的$L'\in L_0^{(r+1)}$ 求和，可知$\partial\circ\partial$ 可经由

$$\wedge^{q}M(L)^{G_L} \xrightarrow{\text{Res}} \bigoplus_{L'} \wedge^{q-1}M(L')^{G_{L'/L}} \longrightarrow \bigoplus_\delta \wedge^{q-2}M(L''_\delta)^{G_\delta}, \tag{7.6}$$

其中此处 L' 遍历L 的余秩为 1 的子格的 Γ_L-等价类，且对某个 δ，有 $Z_{L''_\delta/L}\subset Z_{L'/L}$。这是 Borcherds-Gersten 复形中从 L 到 $L''_\delta\subset L$ 的 δ 求和。根据步骤 3，我们发现该复合映射为零。□

命题 7.2 的证明至此完成。 □

步骤 4 中论证背后的几何结构是这个交换图



这里 $Z_\alpha = Z_{L'_\alpha}/L$、$X_\alpha = X_{L'_\alpha}/L$、$Z_{\alpha,\gamma}\subset X_\alpha$ 是 $L''_{\alpha,\gamma}\subset L'_\alpha$ 的特殊循环，等等。各种 $\pi\colon X_? \to Z_?$ 都是正规化映射。步骤 4 的论证要旨，就是从直线 $Z_{L''}\hookrightarrow Z_{L'}\hookrightarrow Z_L$ 转到上方的直线 $\sum_\delta Z_\delta\hookrightarrow\sum_\alpha Z_\alpha\hookrightarrow X_L$。因此，简单来说，步骤 4 就是取正规化 $X_L\to Z_L$ 的过程。同样，步骤 3 就是取有限覆盖 $X_L\to X_L$ 的˜过程。

8. 调节子与正则化 theta 提升

研究高阶循环的一种标准方法是计算其调节子。本节我们汇集了一些关于特殊高阶循环调节子的评论，尤其是关于 $(p, 1)$ 型的评论。这是对 §6.3 的一篇长篇补充。我们所做的不过是回顾一些一般事实，但明确写出这些内容仍可能有所帮助。

8.1. **调节子**。 设X 是一个维数为n的光滑射影簇，且$A = \mathbb{Q}$或 $\mathbb{R}$。根据 Beilinson [1] 和 Bloch [4], , 我们有一个循环映射

$$\mathrm{CH}^p(X, m)_{\mathbb{Q}} \to H^{2p-m}_{\mathcal{D}}(X, A(p)) \tag{8.1}$$

到 Deligne上同调，通常称为调节子映射。关于这一映射的一些显式公式已为人所知。关于全面论述，请参阅 [17] 及其中的参考文献。这里，为简单起见，我们只考虑$m = 1$ 且 $A = \mathbb{R}$的情形。实Deligne上同调可描述为

$$H^{2p-1}_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{R}(p)) \simeq \frac{H^{2p-2}(X, \mathbb{C})}{F^p + H^{2p-2}(X, \mathbb{R}(p))} \simeq H^{p-1,p-1}(X, \mathbb{R}(p-1)).$$

这可以看作$H^{n-p+1,n-p+1}(X, \mathbb{R})$的对偶。若 $\sum_i (Z_i, \psi_i)$ 是一个$(p,1)$-循环，则其调节子实值形式为泛函

$$\omega \mapsto (2\pi\sqrt{-1})^{p-n-1} \sum_i \int_{Z_i} \log|\psi_i| \cdot \omega \tag{8.2}$$

作用于$H^{n-p+1,n-p+1}(X, \mathbb{R})$上。

8.2. **Shimura曲面**。 仅当$X = \mathcal{D}_L/\Gamma$ 为紧时，模簇才是紧的，而这仅在 $n \leq 2$时发生。因此，设L 是符号为$(2, 2)$的各向异性空间，并假设 Γ 是无挠的。则$X = \mathcal{D}_L/\Gamma$ 是一个光滑射影曲面，称为四元数*Shimura*曲面。设$\sum_i (Z_{L_i}, \psi(f_i))$是$X$上的一个特殊$(2, 1)$循环。根据(8.2)和(2.7)，该循环的实调节子，除一个常数因子外，由以下泛函给出

$$\omega \mapsto \sum_i \int_{Z_{L_i}} \Phi(f_i) \cdot \omega \tag{8.3}$$

在 $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 上，其中 $\Phi(f)$ 是 f的正则化Theta提升。当 ω是特殊曲线 $Y \subset X$的类，且该曲线与 $\sum_i (Z_{L_i}, \psi(f_i))$ 正确相交时，这个配对值可以写成

$$\sum_i \sum_{p \in Y \cap Z_{L_i}} \Phi(f_i)(p).$$

这样，正则化 theta 提升的 CM 值自然会出现在调节子公式中。

8.3. **关于非紧情形**。当L为一般情形时，$X = \mathcal{D}_L/\Gamma$不再是紧的。在这种情况下，至少有两种处理方法：

(1) 取一个（环面）紧化$X \hookrightarrow \bar{X}$并研究扩展这些循环。（2）研究非紧情形下的调节子映射 (8.1)。

在本节余下部分中，我们将针对每种方法扩展上述评述。

8.3.1. 扩展。我们取一个环面紧化$X \hookrightarrow \bar{X}$，并令$D = \bar{X} - X$为边界除子。设$\xi = \sum_i (Z_{L_i}, \psi(f_i))$是$X$上的一个特殊$(p, 1)$-循环。由局部化正合列

$$\cdots \to \mathrm{CH}^p(\bar{X}, 1)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{CH}^p(X, 1)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\delta} \mathrm{CH}^{p-1}(D)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{CH}^p(\bar{X})_{\mathbb{Q}} \to \cdots$$

可知，ξ能够扩展到$\bar{X}$当且仅当$\delta(\xi) = 0$。连接映射map δ描述如下。令Z_i为Z_{L_i}在X中的闭包，并令ψ_i为$\psi(f_i)$，将其视为Z_i上的有理函数。假设$\xi = \sum_i (Z_i, \psi_i)$与$D$正常相交。由$\xi$的余循环条件，循环$\sum_i \mathrm{div}(\psi_i)$支持在$D$上。因此，$\delta(\xi)$是$\sum_i \mathrm{div}(\psi_i)$在$\mathrm{CH}^{p-1}(D)_{\mathbb{Q}}$中的类。

若$\sum_i \mathrm{div}(\psi_i) = 0$作为一个循环（而不只是有理等价于 0），那么$\xi$便已在$X$上定义了一个$(p, 1)$-循环，从而给出$\xi$一个显而易见且易于处理的推广。这种情况的一个典型例子是，每个$\mathrm{div}(\psi_i)$都没有包含在D中的额外分支。

8.3.2. 非紧调节子。即使X非紧，调节子映射 (8.1) 仍有定义，其取值属于 Deligne-Beilinson 上同调。我们取$A = \mathbb{Q}$。(8.1)（其中$m = 1$）与到奇异上同调的自然映射复合后，形式如下：

$$\mathrm{CH}^p(X, 1)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow (2\pi\sqrt{-1})^p W_{2p} H^{2p-1}(X, \mathbb{Q}) \cap F^p, \tag{8.4}$$

其中$(W_\bullet, F^\bullet)$是$H^*(X)$上混合霍奇结构中的权滤过和霍奇滤过（见 [2]）。

在我们的模情形中，有如下消失结果：

引理 8.1。设$X = \mathcal{D}_L/\Gamma$。当$p < n/2$时，(8.4) 的目标消失。

证明。$H^k(X, \mathbb{Q})$上的混合霍奇结构在$k < n - 1$时是纯的（例如参见 [3]）。因此，当$p < n/2$时，(8.4) 的目标是一个权为$2p - 1$的纯$\mathbb{Q}$-霍奇结构的有理部分与F^p-部分的交，这显然为零。□

因此，映射 (8.4) 只有在$p \geq n/2$时才可能非零。在此情况下，根据一般公式，特殊的$(p, 1)$-循环$\sum_i (Z_{L_i}, \psi(f_i))$的循环类在相差一个常数的意义下为

$$\sum_i \int_{Z_{L_i}} d\log\psi(f_i) \wedge \bullet \quad \in W_{2p} H^{2p-1}(X, \mathbb{Q}) \cap F^p. \tag{8.5}$$

由于 $W_{2p-1}H^{2p-1}(X,\ \mathbb{Q})\ \cap F^p = 0$，投影

$$W_{2p}H^{2p-1}(X,\mathbb{Q})\cap F^p \to \mathrm{Gr}^W_{2p}H^{2p-1}(X,\mathbb{Q})\cap F^p$$

是单射。因此，类 (8.5) 由其在 $\mathrm{Gr}^W_{2\ p}H^{2p-1}(X,\mathbb{Q})$ 中的像所确定，而该像是一个霍奇类。

另一方面，当 $p\ < n/2$ 时，引理 8.1 表明，映射 (8.1) 具有如下形式：

$$\mathrm{CH}^p(X,1)_{\mathbb{Q}} \to \frac{H^{2p-2}(X,\mathbb{C})}{H^{2p-2}(X,\mathbb{Q}(p))+F^p} \tag{8.6}$$

关于这种非紧阿贝尔-雅可比映射，似乎鲜有研究。当 $p-1 < n/4$ 时，$H^{2p-2}(X)$ 由特殊循环生成（[3]）。于是，(8.6) 可写为：

$$\mathrm{CH}^p(X,1)_{\mathbb{Q}} \to H^{2p-2}(X,\mathbb{Q}(p-1))\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}/\mathbb{Q}(1).$$

若能将特殊 (p,1)-循环的这一非紧阿贝尔-雅可比不变量表示为特殊循环和 Borcherds乘积，将会很有意思。

注 8.2。即使 X 非紧，(8.2) 仍可作为一个流来理解，不过我不清楚它与 Beilinson 调节子的关系。在 $p\ = 2$ 的情形下，一般 L 所对应的 (8.3) 形式的流与 theta提升有关（[11]）。

参考文献

[1] Beilinson, A. A.高阶调节子与 L 函数的特殊值。J. Soviet Math. **30**(1985) 2036–2070.[2] Beilinson, A. A. 绝对霍奇上同调札记。载于《代数几何与数论中的代数K理论应用（博尔德，1983）》，Contemp. Math., **55**(1986), 35–68.[3] Bergeron, N.; Li, Z.; Millson, J.; Moeglin, C. *Noether-Lefschetz* 猜想及其推广。Invent. Math.**208** (2017), no. 2, 501–552.[4] Bloch, S. 代数循环与高阶 K 理论。Adv. in Math. **61** (1986), no.3, 267– 304.[5] Borcherds, R. O 上的自守形式$_{s+2,2}(\mathbb{R})$ 与无穷乘积。Invent. Math.**120**(1995), no. 1, 161–213.[6] Borcherds, R.格拉斯曼流形上的奇点自守形式。Invent. Math.**132**(1998), no. 3, 491–562.[7] Borcherds, R.; Katzarkov, L.; Pantev, T.; Shepherd-Barron, N. I.*K3* 曲面的族。J. Algebraic Geom. **7** (1998), no. 1, 183–193.[8] Bruinier, J. H. O 上的 *Borcherds*乘积(2,l) 与 *Heegner* 除子的陈类。Lecture Notes in Math. **1780**, Springer-Verlag, 2002.[9] Bruinier, J. H.; Ehlen, S.; Freitag, E.含有许多 *Borcherds*乘积的格。Math. Comp. **85**(2016), 1953–1981.[10] Bruinier, J. H.; Westerholt-Raum, M. *Kudla* 的模性猜想与形式傅里叶-雅可比级数。Forum Math. Pi **3** (2015), e7, 30 pp.

[11] Garcia, L. E. GSpin 志村簇上的正则化 theta 提升与 (1,1)-流。Algebra Number Theory 10 (2016), no.3, 597–644.[12] Gille, P.; Szamuely, T. 中心单代数与伽罗瓦上同调。第 2 版。剑桥大学出版社，2017.[13] Goncharov, A. 调节子。载于《K-理论手册，第 I 卷》，295–349，Springer，2005.[14] Gritsenko, V. A.; Nikulin, V. V. 自守形式与洛伦兹 Kac-Moody 代数。II. 国际数学杂志 9 (1998), no. 2, 201–275.[15] Howard, B.; Madapusi Pera, K. Borcherds乘积的算术。载于《正交与酉志村簇上的算术除子》。Ast´erisque 421 (2020), 187–297.[16] Kato, K. Milnor K理论与零循环的 Chow 群。载于《代数几何与数论中的代数 K-理论应用（博尔德，1983）》，Cont- emp. Math., 55 (1986), 241–253.[17] Kerr, M.; Lewis, J.; M¨uller-Stach, S. 高阶Chow群的 Abel-Jacobi 映射。组合数学 142 (2006), no.2, 374–396.[18] Ma, S. Borcherds乘积的准拉回。伦敦数学会通报 51 (2019), no. 6, 1061–1078.[19] Nikulin, V.V. 整对称双线性形式及其若干应用。苏联数学学报 14 (1980), 103–167.[20] Ramakrishnan, D. 希尔伯特-布卢门塔尔曲面的 L 函数在 s = 1 处的特殊值。巴黎科学院数学报告 301 (1985), no.18, 809–812.[21] Ramakrishnan, D. 希尔伯特-布卢门塔尔曲面的算术。载于《数论（蒙特利尔，1985）》，加拿大数学会会议论文集 7 (1987), 285–370.[22] Ramakrishnan, D. 模曲线、模曲面与模四维簇。载于《代数循环与动机。第 1 卷》，伦敦数学会讲义系列，343 (2007), 278–292.[23] Saito, S.; Sato, K. 代数循环与 ´étale 上同调。第 2 版。（日文）丸善，2025.[24] Sreekantan, R. 代数循环与 Green 函数的特殊值。arXiv:2022.08325[25] Suslin, A. A. 互反律与多项式环的稳定秩。苏联数学学报 15 (1980), 589–623.[26] Zemel, S. 广义 theta 函数的跷跷板恒等式与 theta 收缩，以及 theta 提升的限制。Ramanujan 杂志 63 (2024), no.3, 749–771.[27] Zhang, W. 志村簇上特殊循环生成函数的模性。论文，哥伦比亚大学，2009。

东京科学大学数学系，东京 152-8551，日本电子邮件地址：
ma@math.titech.ac.jp