arXiv:2601.13672v1 [math.CV] 20 Jan 2026

希尔伯特矩阵算子在伯格曼空间上的范数

GUANLONG BAO、LIU TIAN 和 HASI WULAN

摘要。Karapetrovi´c 猜想，希尔伯特矩阵算子在 Bergman空间 A^p_α 上的范数等于 $\pi/\sin((2+\alpha)\pi/p)$，其中 $-1<\alpha<p-2$。本文证明了这一猜想在 $0\le\alpha\le\frac{6p^3-29p^2+17p-2+2p\sqrt{6p^2-11p+4}}{2}$，(3p−1)范围内成立；当 $\alpha>\frac{1}{47}$ 且 $\alpha\neq 1$时，这一范围改进了目前已知的最佳结果。

1. 引言

1894 年，希尔伯特在逼近论中引入了无穷矩阵 $\boldsymbol{H}=((n+k+1)^{-1})_{n,k\in\mathbb{N}}$。这里，$\mathbb{N}$ 是非负整数集。该矩阵广为人知，被称为希尔伯特矩阵；它应用于线性代数、数值分析和算子理论等众多领域（参见 [21, 26, 29]）。希尔伯特矩阵也是 Hankel 矩阵的典型例子，其第 n,k 个元素是 $n+k$ 的函数（参见 [30]）。关于希尔伯特矩阵的相关理论，可参阅专著 [28, 第 1 章和第 10] 章，以及 [12,第 5]章。

希尔伯特矩阵 $\boldsymbol{H}$ 可以视为作用于序列空间上的算子。更确切地说，给定一个复数序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，考虑

$$\mathrm{H}:\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

对于 $p>1$，已知算子 H 在序列空间 ℓ^p 上有界，且其算子范数等于 $\pi/\sin(\pi/p)$；例如参见 [14,定理286和定理 323]。

令 Hol($\mathbb{D}$) 表示复平面开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内解析函数所构成的空间。对于 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$，希尔伯特矩阵算子$\mathcal{H}$ 通过作用于 f 的泰勒系数序列 $\boldsymbol{H}$定义为

$$\mathcal{H}(f)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+1}\right)z^n,\quad z\in\mathbb{D},\tag{1.1}$$

2020 数学主题分类。 47B38, 47B91, 30H20.关键词和短语。
希尔伯特矩阵，Bergman空间，范数。

只要对每个 $z \in \mathbb{D}$，(1.1) 右端都有意义，并且定义了一个在 $\mathbb{D}$内的解析函数。

2000年，Diamantopoulos 和 Siskakis [8] 开始研究作用于 $\mathbb{D}$中的解析函数空间上的希尔伯特矩阵算子。他们证明，对于 $p > 1$，希尔伯特矩阵算子 $\mathcal{H}$ 在 Hardy空间 H^p 上有界，并给出了相应算子范数的一个上界。后来，Dostani´c、Jevti´c 和 Vukoti´c [10] 证明，该算子在 H^p 上的范数等于 $\pi/\sin(\pi/p)$，这与算子 H 在序列空间 ℓ^p上的范数相同。Łanucha、Nowak 和 Pavlovi´c [22] 研究了算子 $\mathcal{H}$ 在某些解析函数空间上的性质。Jevti´c 和 Karapetrovi´c[17] 考察了 $\mathcal{H}$ 在更一般的 Besov空间上的性质。Lindstr¨om、Miihkinen 和 Wikman [25] 以及 Dai [6] 研究了 $\mathcal{H}$ 在 Korenblum空间上的范数。Lindstr¨om、Miihkinen 和 Norrbo [23] 得到了 $\mathcal{H}$ 在某些经典解析函数空间上的本性范数的精确值。Ye 和 Feng [31]研究了 $\mathcal{H}$ 从对数加权 Bergman 空间到经典 Bergman空间的范数。关于作用于解析函数空间上的希尔伯特矩阵算子的综述，参见 [2] 和 [18]。

对于 $0 < p < \infty$和 $\alpha > -1$，回顾一下，Bergman空间 A^p_α 由满足以下条件的函数 $f \in$Hol($\mathbb{D}$) 组成

$$\|f\|_{A^p_\alpha} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dm_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

其中 $dm_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dm(z)$。此处及下文中，$dm$ 是 $\mathbb{D}$ 上的面积测度，并经过归一化使得 $m(\mathbb{D}) = 1$；也就是说，

$$dm(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} r dr d\theta, \quad z = x + iy = re^{i\theta}.$$

若 $\alpha = 0$，则我们用 A^p 代替 A^p_α。关于 A^p_α 空间，参见 [15, 32]。

也有不少数学家研究了希尔伯特矩阵算子 $\mathcal{H}$ 在伯格曼空间上的有界性和范数。2004年，Diamantopoulos [7] 证明，当且仅当 $p > 2$时，$\mathcal{H}$ 在 A^p 上有界，并估计了该算子范数的上界。对于 $p \geq 4$，Dostani´c、Jevti´c 和 Vukoti´c [10] 于2008年得出，$\mathcal{H}$ 在 A^p 上的范数的精确值为 $\pi/\sin(2\pi/p)$。对于 $2 < p < 4$，Bo˘zin 和 Karapetrovi´c [3] 于2018年证明，$\mathcal{H}$ 在 A^p 上的范数也为 $\pi/\sin(2\pi/p)$；关于这一结果的另一种证明，参见 Lindstr¨om、Miihkinen 和 Wikman [25]。关于 $\mathcal{H}$ 在 A^p_α上的作用，我们回顾一些已有结果如下。

(i) 2017年，Jevti´c 和 Karapetrovi´c [16] 研究了一类解析函数空间上的希尔伯特矩阵算子。特别地，他们证明了当且仅当 $1 < \alpha + 2 < p$ 时，$\mathcal{H}$ 在 A^p_α 上有界。关于广义希尔伯特算子在 A^p_α 空间上的研究，参见 Galanopoulos、Girela、Pel´aez 和 Siskakis [11] 。

(ii) 2018年，Karapetrovi´c [20] 得到了 $\mathcal{H}$ 在 A^p_α 上的范数下界 $\pi/\sin((2+\alpha)\pi/p)$，其中 $1<\alpha+2<p$，并证明当 $\alpha\geq 0$ 且 $p\geq 2(\alpha+2)$ 时，这个下界就是 $\mathcal{H}$ 在 A^p_α 上的范数的精确值。在 [20, 第 516], 页，Karapetrovi´c 猜想，若 $1<\alpha+2<p$，则 $\mathcal{H}$ 在 A^p_α 上的范数为 $\pi/\sin((2+\alpha)\pi/p)$。

（iii）2021年，Lindstr¨om、Miihkinen 和 Wikman [24] 证明了 Karapetrovi´c 关于 $\alpha>0$ 和 $\alpha+2+\sqrt{\alpha^2+\frac{7}{2}\alpha+3}\leq p<2(\alpha+2)$ 的猜想。

（iv）2021年，Karapetrovi´c [19]证明了他关于 $\alpha>0$ 和 $p\geq\alpha_0$的猜想，其中 α_0 是函数的唯一零点

$$\Phi_\alpha(x)=2x^2-(4(\alpha+2)+1)x+2\sqrt{\alpha+2}\sqrt{x}+\alpha+2$$

在区间（$\alpha+2$，$2(\alpha+2)$）上。利用这一结果，他确认了当 $\alpha>0$ 和

$$\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)(\alpha+2)}\leq p<2(\alpha+2),$$

这改进了 (iii) 中的结论。对于 $-1<\alpha<0$ 和 $p>\alpha+2$，Karapetrovi´c [19] 还给出了 $\mathcal{H}$在 A^p_α上的范数上界，随后 Bralovi´c 和 Karapetrovi´c [4],以及 Norrbo [27]对此作了进一步研究。

(v) 2023年，Dmitrovi´c 和 Karapetrovi´c [9] 证明了 Karapetrovi´c 关于 $\alpha>0$和 $\frac{3\alpha}{4}+2+\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{4}+2\right)^2-\frac{\alpha+2}{2}}\leq p$的猜想。他们指出，这改进了所有 $\alpha>\frac{1}{2}$ 情况下先前已知的最佳结果。(vi) 2024年，Dai [5] 证明了当 p 和α 满足以下条件之一时，Karapetrovi´c 的猜想成立：

- $\alpha>0$ 和 $2+\frac{3\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{9\alpha^2+40\alpha+48}\leq p<2(\alpha+2)$;
- $\alpha>0$、 $\alpha+2<p<2+\frac{3\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{9\alpha^2+40\alpha+48}$， 以及涉及二重积分和贝塔函数的 p 和 α 的一个非平凡条件；

- $0<\alpha\leq\frac{1}{47}$和 $p>\alpha+2$;
- $\alpha=1$和 $p>3$;
- $-1<\alpha<0$ 和 $p\geq 2(\alpha+2)$。

(v) 中的值 $\frac{3\alpha}{4}+2+\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{4}+2\right)^2-\frac{\alpha+2}{2}}$ 等于 (vi) 中的数值 $2+\frac{3\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{9\alpha^2+40\alpha+48}$，该数值由作者在 [9]和 [5]中独立求得。

总之，当 $\alpha>0$ 和 $\alpha+2<p<2(\alpha+2)$ 时，Karapetrovi´c 猜想尚未得到完全解决。对于$-1<\alpha<0$ 和 $\alpha+2<p<2(\alpha+2)$，Karapetrovi´c 猜想也仍是一个开放问题。

前文提到的 Karapetrovi´c 猜想的已知结果，是基于 p（α）曲线得出的。当然，也可以将它们改写为基于 α（p）曲线的结果。本文证明了 Karapetrovi´c 猜想对于

$$0 \leq \alpha \leq \frac{6p^3 - 29p^2 + 17p - 2 + 2p\sqrt{6p^2 - 11p + 4}}{(3p-1)^2}, \tag{1.2}$$

它基于 $\alpha(p)$-曲线。在本文中，当出现值$\frac{6p^3-29p^2+17p-2+2p\sqrt{6p^2-11p+4}}{(3p-1)^2}$时，我们强调始终假设该值是合理的；也就是说 $6p^2 - 11p + 4 \geq 0$ 且 $p \neq 1/3$。接下来我们将看到，条件 (1.2) 还推出了 $p > \alpha+2$。如前所述，Kara- petrovi´c 猜想在 $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{47}$ 和 $\alpha = 1$ 的情形已在文献中得到彻底解答。在第4节中，我们将指出，当 $\alpha > \frac{1}{47}$且 $\alpha \neq 1$时，(1.2) 中α 的范围是迄今为止最优的。

2. 基于 $\alpha(p)$曲线的一个结果

本节中，我们证明以下基于 $\alpha(p)$曲线陈述的结论，并将用它来证明主要结果。

命题 2.1。设

$$\begin{aligned} &\max\left\{\frac{6p^3 - 29p^2 + 17p - 2 - 2p\sqrt{6p^2 - 11p + 4}}{(3p-1)^2},\ 0\right\} \\ \leq \alpha \ &\leq \frac{6p^3 - 29p^2 + 17p - 2 + 2p\sqrt{6p^2 - 11p + 4}}{(3p-1)^2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Then

$$\|\mathcal{H}\|_{A^p_\alpha} = \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}},$$

其中，$\|\mathcal{H}\|_{A^p_\alpha}$ 是希尔伯特矩阵算子 $\mathcal{H}$ 在 A^p_α上的范数。

注记1。 在最后一节中，我们将看到，命题 2.1中的条件（2.1）可以替换为较弱的条件（1.2）。回顾一下， $\mathcal{H}$ 在A^p_α 上有界，当且仅当 $1 < \alpha + 2 < p$。我们指出，条件（1.2）蕴含 $p > \alpha + 2$。事实上，条件（1.2）给出

$$2p\sqrt{6p^2 - 11p + 4} \geq -6p^3 + 29p^2 - 17p + 2. \tag{2.2}$$

若 $p \leq 0$，则 (2.2) 的左边非正，而右边为正，这是不可能的。换言之，条件 (1.2) 推出 $p > 0$。当 $p > 0$时，直接计算可得

$$\frac{6p^3 - 29p^2 + 17p - 2 + 2p\sqrt{6p^2 - 11p + 4}}{(3p-1)^2} < p - 2.$$

将此结果与 (1.2) 结合，可得 $p > \alpha + 2$。

用 $\mathcal{P}$ 表示多项式集合。对于 $1 < \alpha + 2 < p$，回想一下，存在一个正常数 C，使得

$$\|\mathcal{H}(g)\|_{A^p_\alpha} \leq C\|g\|_{A^p_\alpha} \tag{2.3}$$

对所有 $g \in \mathcal{P}$ 均成立。事实上，由 (2.3) 可知，对于 A^p_α 中的任意 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，(1.1) 右侧对每个 $z \in \mathbb{D}$ 都有意义，并在 $\mathbb{D}$ 中定义一个解析函数。这可以参照第 1069] 页的 [7, 类似地完成。关于某些解析函数巴拿赫空间上的广义Hilbert算子，可参见 [1, 引理 2.3]，其中有类似结论。

以下结论引自 [20],，这也是促使 Karapetrovi´c 提出其猜想的原因。

定理 2.2。 [20, 定理 1。1] 若 $1 < \alpha + 2 < p$，则

$$\|\mathcal{H}\|_{A^p_\alpha} \geq \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

对于 $p > \alpha + 2 > 0$，已知

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}\,dt = B\left(\frac{\alpha+2}{p}, 1-\frac{\alpha+2}{p}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}, \tag{2.4}$$

其中 B 是贝塔函数。于是，对于 $p > \alpha + 2 > 0$，函数

$$F_{p,\alpha}(r) = r^{p-4-\frac{3\alpha}{2}} \int_0^{\frac{2r}{1+r}} \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}\,dt \tag{2.5}$$

在 $r \in (0, 1]$ 上有定义。

函数 $F_{p,\ \alpha}$ 的以下性质有助于证明命题 n 2.1.

引理 2.3. 设 $p > \alpha + 2 > 0$ 且

$$\frac{6p^3 - 29p^2 + 17p - 2 - 2p\sqrt{6p^2 - 11p + 4}}{(3p-1)^2} \leq \alpha \leq \frac{6p^3 - 29p^2 + 17p - 2 + 2p\sqrt{6p^2 - 11p + 4}}{(3p-1)^2}. \tag{2.6}$$

则 $F_{p,\ \alpha}(r) \leq 0$ 对所有 $r \in (0, 1]$ 均成立。

证明。 对于 $r \in (0, 1)$，$F'_{p,\alpha}(r) = r^{p-5-\frac{3\alpha}{2}} g(r)$，其中

$$g(r) = \left(p - 4 - \frac{3\alpha}{2}\right) \int_0^{\frac{2r}{1+r}} \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}\,dt + \frac{(2r)^{\frac{\alpha+2}{p}}}{(1+r)(1-r)^{\frac{\alpha+2}{p}}}.$$

容易得到

$$g'(r)=\frac{2^{\frac{\alpha+2}{p}}r^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1+r)^2(1-r)^{\frac{\alpha+2}{p}+1}}k(r).$$

Here

$$k(r)=\left(\frac{3\alpha}{2}+5-p\right)r^2+\left(\frac{\alpha+2}{p}-1\right)r+\frac{\alpha+2}{p}+p-\frac{3\alpha}{2}-4.$$

Then

$$k'(r)=(3\alpha+10-2p)\,r+\frac{\alpha+2}{p}-1.$$

现在，假设 $3\alpha+10-2p=0$。注意到 $p>\alpha+2>0$。于是

$$k(r)=\left(\frac{\alpha+2}{p}-1\right)r+\left(\frac{\alpha+2}{p}+p-\frac{3\alpha}{2}-4\right)$$

是 $[0,1]$ 上的递减函数，且 $k(1)=\frac{2(\alpha+2)}{p}\geq 0$。因此，对于 $r\in[0,1]$，有 $k(r)>0$。

另一方面，令 $3\alpha+10-2p\neq 0$。则 k 是一个二次函数。记 Δ_k 为 $k(r)=0$ 的判别式。于是

$$\Delta_k=\left(\frac{\alpha+2}{p}-1\right)^2-4\left(\frac{3\alpha}{2}+5-p\right)\left(\frac{\alpha+2}{p}+p-\frac{3\alpha}{2}-4\right).$$

由于 $6p^2-11p+4\geq 0$ 且 $p\neq\frac{1}{3}$，条件 (2.6) 成立当且仅当 $(3p-1)^2\alpha^2+(-12p^3+58p^2-34p+4)\alpha+(4p^4-36p^3+89p^2-44p+4)\leq 0$，这等价于 $\Delta_k\leq 0$。将其与 $k(1)=\frac{2(\alpha+2)}{p}>0$结合，可得对于 $r\in[0,1]$，有 $k(r)\geq 0$。

因此，$k(r)$在 $[0,1]$上始终非负。这表明，对于$r\in(0,1)$，$g'(r)\geq 0$。于是，g在$(0,1)$上递增。请注意，$g(0)=0$，且g在0处右连续。因此，当 $r\in(0,1)$时，$g(r)\geq 0$。由此，F_p'，对于 $r\in(0,1)$，$_\alpha(r)\geq 0$。所以，F_p，$_\alpha$在$(0,1)$上递增。此外，F_p，$_\alpha$在1处左连续，且F_p，$_\alpha(1)=0$。因此，对于所有 $r\in(0,1]$，F_p，$_\alpha(r)\leq 0$。□

设 $1<\alpha+2<p$。回顾一下，希尔伯特矩阵算子 $\mathcal{H}$ 在 A^p_α 上具有由加权复合算子 T_t 给出的积分表示（参见 [7, 20]）：

$$\mathcal{H}(f)(z)=\int_0^1 T_t(f)(z)\,dt,\quad f\in A^p_\alpha,$$

其中 $T_t(f)(z)=\omega_t(z)f(\phi_t(z))$ 以及

$$\omega_t(z)=\frac{1}{1-(1-t)z},\quad \phi_t(z)=\frac{t}{1-(1-t)z}.$$

下面给出命题 2.1 的证明。

命题 *2.1* 的证明。设 $f \in A^p_\alpha$。由注记1，$p > \alpha + 2 \geq 2$。利用闵可夫斯基不等式，由 [20, 第 520-521] 页可知

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{A^p_\alpha} \leq \int_0^1 \|T_t(f)\|_{A^p_\alpha}\, dt, \tag{2.7}$$

and

$$\|T_t(f)\|_{A^p_\alpha} = \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left((\alpha+1)\int_{D_t} (g_t(z))^\alpha |f(z)|^p |z|^{p-4}\, dm(z)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Here

$$g_t(z) = \frac{2\mathrm{Re}z - (2-t)|z|^2 - t}{(1-t)|z|^2} > 0, \ \ z \in D_t,$$

且 $D_t = \mathbb{D}\left(\frac{1}{2-t}, \ \frac{1-t}{2-t}\right)$ 是半径为 $(1-t)/(2-t)$、中心为 $1/(2-t)$ 的欧几里得圆盘。注意

$$g_t(z) \leq \frac{2|z| - (2-t)|z|^2 - t}{(1-t)|z|^2} = \frac{1}{|z|^2}\left(1 - |z|^2 - \frac{(1-|z|)^2}{1-t}\right).$$

由于 $\alpha \geq 0$，我们得到

$$(g_t(z))^\alpha \leq \frac{1}{|z|^{2\alpha}}\left(1 - |z|^2 - \frac{(1-|z|)^2}{1-t}\right)^\alpha.$$

因此，

$$\begin{aligned} ||T_t(f)||_{A^p_\alpha} &\leq \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \times \\ &\left((\alpha+1)\int_{D_t}\left(1 - |z|^2 - \frac{(1-|z|)^2}{1-t}\right)^\alpha |f(z)|^p |z|^{p-4-2\alpha}\, dm(z)\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

显然，

$$D_t \subseteq \left\{z \in \mathbb{D} : \frac{t}{2-t} < |z| < 1\right\}. \tag{2.9}$$

记

$$K_{p,\alpha}(t) = 2(\alpha+1)\int_{\frac{t}{2-t}}^1 \left(1 - r^2 - \frac{(1-r)^2}{1-t}\right)^\alpha r^{p-3-2\alpha} M_p^p(r,f)\, dr,$$

其中

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由此可由 (2.8) 得出

$$\|T_t(f)\|_{A^p_\alpha} \le \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}(K_{p,\alpha}(t))^{\frac{1}{p}}.$$

由此以及（2.7）可得

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{A^p_\alpha} \le \int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}(K_{p,\alpha}(t))^{\frac{1}{p}}\,dt. \tag{2.10}$$

接下来，由于 $p > \alpha+2 \ge 2$，我们考虑

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}\left((K_{p,\alpha}(t))^{\frac{1}{p}} - \|f\|_{A^p_\alpha}\right)\,dt\\ =&\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}\left((K_{p,\alpha}(t))^{\frac{1}{p}} - (J_{p,\alpha})^{\frac{1}{p}}\right)\,dt,\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中

$$J_{p,\alpha} = 2(\alpha+1)\int_0^1 M_p^p(r,f)(1-r^2)^\alpha r\,dr.$$

回顾以下初等不等式（参见 [14, 第 39] 页）

$$x^\beta - y^\beta \le \beta y^{\beta-1}(x-y)$$

当 $x>0$、$y>0$ 和 $\beta\in$（0，1）时成立。于是，由（2.11）可得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}\left((K_{p,\alpha}(t))^{\frac{1}{p}} - \|f\|_{A^p_\alpha}\right)\,dt\\ \le&\frac{1}{p}\,(J_{p,\alpha})^{\frac{1}{p}-1}\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}}\,(K_{p,\alpha}(t)-J_{p,\alpha})\,dt.\end{aligned} \tag{2.12}$$

由 $\alpha\ge 0$ 和 $(1+r)^\alpha \ge 2^\alpha r^{\alpha/2}$，我们得到

$$\begin{aligned}&K_{p,\alpha}(t) - J_{p,\alpha}\\ \le& 2(\alpha+1)\int_{\frac{t}{2-t}}^1 \left(1-r^2-(1-r)^2\right)^\alpha r^{p-3-2\alpha}M_p^p(r,f)\,dr\\ &-2^{\alpha+1}(\alpha+1)\int_0^1 M_p^p(r,f)(1-r)^\alpha r^{\frac{\alpha}{2}+1}\,dr\\ =&\,2^{\alpha+1}(\alpha+1)\int_{\frac{t}{2-t}}^1 (1-r)^\alpha\, r^{p-3-\alpha}M_p^p(r,f)\,dr\\ &-2^{\alpha+1}(\alpha+1)\int_0^1 M_p^p(r,f)(1-r)^\alpha r^{\frac{\alpha}{2}+1}\,dr.\end{aligned}$$

因此，

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left(K_{p,\alpha}(t) - J_{p,\alpha}\right)\, dt$$

$$\leq 2^{\alpha+1}(\alpha+1) \int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \times$$

$$\left(\int_{\frac{t}{2-t}}^1 (1-r)^\alpha\, r^{p-3-\alpha} M_p^p(r,f)\, dr - \int_0^1 M_p^p(r,f)(1-r)^\alpha r^{\frac{\alpha}{2}+1}\, dr \right) dt.$$

结合富比尼定理可得

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left(K_{p,\alpha}(t) - J_{p,\alpha}\right)\, dt$$

$$\leq 2^{\alpha+1}(\alpha+1) \int_0^1 M_p^p(r,f)(1-r)^\alpha r^{\frac{\alpha}{2}+1} F_{p,\alpha}(r)\, dr,$$

其中 $F_{p,\ \alpha}(r)$ 定义如 (2.5)。由引理 2.3，得到

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left(K_{p,\alpha}(t) - J_{p,\alpha}\right)\, dt \leq 0. \tag{2.13}$$

因此，由 (2.4)、(2.12) 和 (2.13) 可得

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} (K_{p,\alpha}(t))^{\frac{1}{p}}\, dt \leq \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}} \|f\|_{A_\alpha^p}.$$

将此与 (2.10) 结合，得到

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{A_\alpha^p} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}} \|f\|_{A_\alpha^p}$$

对所有 $f \in A_\alpha^p$ 均成立，由此可得

$$\|\mathcal{H}\|_{A_\alpha^p} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

由此并根据定理 2.2，得到所需结果。命题 2.1 的证明至此完成。□

注记 2. 命题 2.1 的证明与 [5] 中定理3.2 的证明基本相同。为完整起见，我们在此给出所有细节。不过，我们采用了更自然的估计式 (2.9)，这与 [5] 中的估计不同。这在命题 2.1 的证明中引入了两个新的函数 $K_{p,\ \alpha}$ 和 $F_{p,\ \alpha}$，并在引理 2.3 中给出了一个新的 $F_{p,\ \alpha}$ 估计。因此，我们得到了新的参数范围 p和 α，在这些范围内，Karapetrovi´c 猜想成立。

3. 基于 A $p(\alpha)$ 曲线的一个结果

来自 $\alpha(p)$-曲线

$$\alpha = \frac{6p^3 - 29p^2 + 17p - 2 + 2p\sqrt{6p^2 - 11p + 4}}{(3p-1)^2}$$

在命题 2.1 中，通过求解上述方程来得到相应的 $p(\alpha)$ 曲线并不容易。本节应用命题 2.1 的证明，得到命题 3.1，该命题基于一条 $p(\alpha)$ 曲线表述。从某种意义上说，命题 3.1 改进了先前已知结果中的最佳结果，并且也可用于下一节。

命题 3.1。设 $\alpha \geq 0$和 $p \geq \frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4}$。则

$$\|\mathcal{H}\|_{A^p_\alpha} = \frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

证明。由命题 2.1 的证明可知，只需证明 $F_{p,\ \alpha}(r) \leq 0$对所有 $r \in (0,1]$ 当 $\alpha \geq 0$ 且

$$p \geq \frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4}.$$

显然，本命题的假设蕴含 $p > \alpha + 2$。

使用引理 2.3 的证明中的相同符号。回顾

$$k(r) = \left(\frac{3\alpha}{2} + 5 - p\right) r^2 + \left(\frac{\alpha+2}{p} - 1\right) r + \frac{\alpha+2}{p} + p - \frac{3\alpha}{2} - 4,$$

and

$$k'(r) = (3\alpha + 10 - 2p)\, r + \frac{\alpha+2}{p} - 1.$$

当 $3\alpha + 10 - 2p = 0$ 时，我们已经在引理 2.3 中证明了，对于 $r \in [0,1]$，$k(r) > 0$。现在令 $3\alpha + 10 - 2p \neq 0$。则 k 是一个二次函数。

情况 *1*。考虑

$$p \geq \frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+62\alpha+97}}{4}. \tag{3.1}$$

注意到 $p > 0$ 和 $\alpha \geq 0$。则 (3.1) 等价于 $k'(1) \leq 0$。此外，$k'(0) < 0$。因此，对于 $r \in [0,1]$，$k'(r) \leq 0$，这意味着 k 关于 $[0,1]$ 是一个递减函数。注意到 $k(1) = {}^{2}{}_{(\alpha+2)\ p} > 0$。因此，对于 $r \in [0,1]$，$k(r) > 0$。

情形 *2*. 设

$$\frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4} \leq p < \frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+62\alpha+97}}{4}. \tag{3.2}$$

还要注意， $p > \alpha + 2$ 和 $\alpha \geq 0$。在 p 和 α的这些取值范围内，(3.2) 成立当且仅当

$$\begin{cases} \frac{\alpha+2}{p} + \frac{2p}{3} - \alpha - 3 \geq 0, \\ k'(1) = 9 + 3\alpha + \frac{\alpha+2}{p} - 2p > 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

该命题的假设也给出 $p \geq \frac{3\alpha}{2} + 3$；即，

$$\frac{\alpha+2}{p} + p - \frac{3\alpha}{2} - 4 \geq \frac{\alpha+2}{p} + \frac{2p}{3} - \alpha - 3.$$

因此，(3.3) 中的第一个不等式推出

$$k(0) = \frac{\alpha+2}{p} + p - \frac{3\alpha}{2} - 4 \geq 0. \tag{3.4}$$

由 (3.3)、(3.4) 和 $p > \alpha + 2$，可知

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \left(\frac{\alpha+2}{p} - 1\right)^2 - 2\left(3\alpha + 10 - 2p\right)\left(\frac{\alpha+2}{p} + p - \frac{3\alpha}{2} - 4\right) \\ &\leq \left(\frac{\alpha+2}{p} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{\alpha+2}{p} - 1\right)\left(\frac{\alpha+2}{p} + p - \frac{3\alpha}{2} - 4\right) \\ &= \left(\frac{\alpha+2}{p} - 1\right)\left(\frac{3(\alpha+2)}{p} + 2p - 3\alpha - 9\right) \leq 0. \end{aligned}$$

由此以及 $k(1) = 2\,\frac{(\alpha+2)}{p} > 0$，可得 $k(r) \geq 0$ 对于 $r \in [0,1]$。

因此，在这些假设下，我们总有 $k(r) \geq 0$ 对于 $r \in [0,1]$。接下来，仿照引理 2.3 的证明，可得 $F_{p,\,\alpha}(r) \leq 0$ 对于所有$r \in (0,1]$。证明完毕。□

我们以几点评论结束本节。

注 3. 命题 2.1 和命题 3.1 不能相互推出。例如， $\alpha = 9$和 $p = 17$ 满足命题 2.1 的条件，但不满足命题 3.1 的条件。另一方面， $\alpha = 9$和 $p = 20$ 满足命题 3.1 的假设，但不满足命题 2.1 的条件。

注 4。 如第 1 节所述，已有若干结果证明了 Karapetrovi´c 的猜想，适用于 $\alpha > 0$ 和 $p \geq \alpha_1$的情形，其中 α_1 是区间 $(\alpha+2, 2(\alpha \pm 2))$ 中的一个数。接下来我们将证明，对于所有 $\alpha \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ 和 $\alpha \neq 1$，命题 3.1 中的值 $\frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4}$优于先前已知的最佳结果。

对于 $\alpha > 0$，显然

$$\begin{aligned}\frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4} &< 2+\frac{3\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{9\alpha^2+40\alpha+48}\\ &= \frac{3\alpha}{4}+2+\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{4}+2\right)^2-\frac{\alpha+2}{2}}.\end{aligned}$$

回顾一下，对于 $0 < \alpha \leq \frac{1}{47}$ 和 $\alpha = 1$，Karapetrovi´c 的猜想已在 [5]中得到证明。因此，对于 $\alpha > \frac{1}{47}$ 和 $\alpha \neq 1$，命题 3.1 改进了第 1 节中 (v) 和 (vi) 所述的相应结果。

现在我们将命题 3.1 与第 1 节中提到的 (iv) 的相应结论进行比较。令 $\alpha > 0$。根据 [19, 第 5918], 页，函数 Φ_α 在 $(\alpha+2, 2(\alpha+2))$ 上的唯一零点 α_0 满足

$$\begin{aligned}&\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-(\alpha+2)}\\ <\alpha_0 <\ &\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)(\alpha+2)}.\end{aligned}$$

注意

$$\frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4} \leq \alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-(\alpha+2)} \tag{3.5}$$

当且仅当

$$\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33} \leq \alpha-1+4\sqrt{\alpha^2+3\alpha+2}. \tag{3.6}$$

若 $\alpha \geq 1$，显然 (3.6) 成立，因而 (3.5) 也成立。若 $0 < \alpha < 1$，则 (3.6) 等价于

$$0 < 1-\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33} \leq 4\sqrt{\alpha^2+3\alpha+2};$$

也就是说，

$$3\alpha^3+7\alpha^2+\alpha-2 = 3(\alpha+2)\left(\alpha-\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(\alpha-\frac{-1-\sqrt{13}}{6}\right) \geq 0.$$

因此，若 $\alpha \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$，则 (3.5) 成立，从而命题 3.1 中的值 $\frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4}$ 小于函数 Φ_α 的零点 α_0。

总之，对于所有 $\alpha \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ 和 $\alpha \neq 1$，命题 3.1 中的值 $\frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4}$ 改进了先前已知的最佳结果。

注 5. 由 [5] 中的定理3.2和 [20], 中的推论1.3可知，Kara- petrovi´c 的猜想在 $\alpha > 0$ 成立，且满足以下任一条件时成立：

- $$p \geq 2 + \frac{3\alpha}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{9\alpha^2 + 40\alpha + 48}; \tag{3.7}$$

- $\alpha + 2 < p < 2 + \frac{3\alpha}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{9\alpha^2 + 40\alpha + 48}$ 且

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha+2}{p}-1}}{(1-t)^{\frac{\alpha+2}{p}}} \left(\int_{t^2}^1 (1-r)^{\alpha} r^{p-3-\alpha}\, dr \right) dt$$
$$\leq B\left(1+\alpha, 2+\frac{\alpha}{2}\right) B\left(\frac{\alpha+2}{p}, 1-\frac{\alpha+2}{p}\right). \tag{3.8}$$

利用条件 (3.8) 来判定 Kara- petrovi´c 猜想中的值 p and α 并不容易。命题3.1意味着，当 $\alpha > 0$and

$$\frac{9 + 3\alpha + \sqrt{9\alpha^2 + 30\alpha + 33}}{4} \leq p < 2 + \frac{3\alpha}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{9\alpha^2 + 40\alpha + 48},$$

这一点无法从 (3.8) 中清楚看出。

与注 4 和注 5 相对应，我们也可以通过下图来理解命题 3.1。

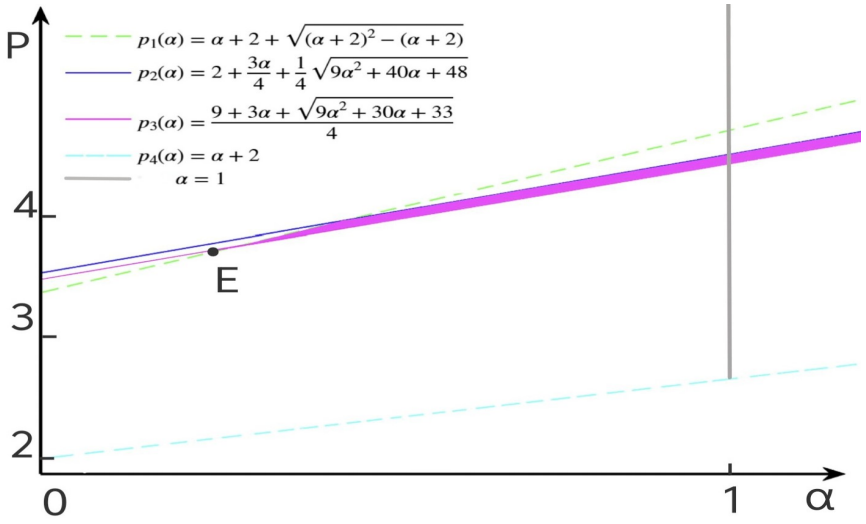

图 1

当 $(\alpha,\ p)$ 位于图 1 的紫色区域时，命题 3.1 证实了 Karapetrovi´c 的猜想；此前的研究尚未彻底解决这一问题

结果。注意，点

$$E\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6},\frac{11+\sqrt{13}}{6}+\sqrt{\left(\frac{11+\sqrt{13}}{6}\right)^2-\frac{11+\sqrt{13}}{6}}\right)$$

是曲线 $p_1(\alpha)$ 和 $p_3(\alpha)$ 的交点。当 $\alpha \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ 和 $\alpha \neq 1$ 时，与之前的曲线相比，由命题 3.1 推导出的曲线 $p_3(\alpha) = \frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4}$ 最接近直线 $p_4(\alpha) = \alpha+2$。因此，当 $\alpha \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ 和 $\alpha \neq 1$时，命题 3.1 中的值 $\frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4}$ 优于文献中的先前结果。

4. 主要结果

本节利用命题 2.1 和命题 3.1，在 p和 α 满足 (1.2) 时，证实了 Karapetrovi´c 的猜想。该结论优于命题 2.1 和命题 3.1。特别地，当 $\alpha > \frac{1}{47}$ 和 $\alpha \neq 1$时，该结论是迄今为止最优的。

设 $\alpha \geq 0$ 和 $p > \alpha + 2$。那么

$$p \geq \frac{9+3\alpha+\sqrt{9\alpha^2+30\alpha+33}}{4}$$

命题 3.1 中的内容可改写为

$$\alpha \leq \frac{2p^2-9p+6}{3p-3};$$

条件

$$\alpha+2+\sqrt{(\alpha+2)^2-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)(\alpha+2)} \leq p$$

第 1 节的 (iv) 中的条件成立，当且仅当

$$\alpha \leq \frac{p^2-4p+2\sqrt{2}-1}{2p+\frac{1}{2}-\sqrt{2}};$$

以及条件

$$2+\frac{3\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{9\alpha^2+40\alpha+48} \leq p$$

第 1 节的 (v) 或 (vi) 中的条件等价于

$$\alpha \leq \frac{2p^2-8p+2}{3p-1}.$$

因此，先前对 p 的下界可以转化为对 α 的上界。图 1 是一个 p（α）图。利用这些对 α 的上界以及（2.1），我们

给出下面的一个 α（p）图，从中可以看出命题 3.1 在多大程度上填补了命题 2.1 中下界所留下的空隙。

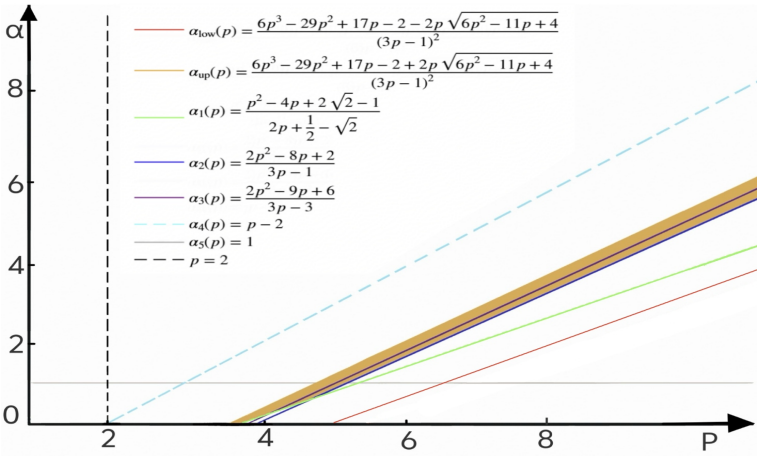

图 2

命题 2.1 证明了当 (α, p) 位于图 2 的黄色区域时 Karapetrovi´c 的猜想，而这一点在先前的研究结果中尚未得到彻底解决。

注意， α_{up} 在图 2 中有定义。当

$$\max\left\{\frac{2p^2-9p+6}{3p-3},\ \frac{p^2-4p+2\sqrt{2}-1}{2p+\frac{1}{2}-\sqrt{2}},\ \frac{2p^2-8p+2}{3p-1}\right\}\geq\alpha\geq 0,$$

直接计算可得

$$\alpha_{up}(p)\geq\max\left\{\frac{2p^2-9p+6}{3p-3},\ \frac{p^2-4p+2\sqrt{2}-1}{2p+\frac{1}{2}-\sqrt{2}},\ \frac{2p^2-8p+2}{3p-1}\right\},\quad(4.1)$$

这与图 2 一致。事实上，图 2 还告诉我们，当 $0\leq\alpha\leq\alpha_{up}(p)$ 时，Karapetrovi´c 的猜想成立。利用命题 2.1 和命题 3.1，我们将证明这一结论，这也是本文的主要结果。由 (4.1) 可知，既然 Karapetrovi´c 的猜想在 $0\leq\alpha\leq\frac{1}{47}$ 和 $\alpha=1$ 时成立，我们可以看出，当 $\alpha>\frac{1}{47}$ 和 $\alpha\neq 1$ 时，以下定理似乎是迄今为止已知的最佳结果。

定理 4.1。设

$$0\leq\alpha\leq\frac{6p^3-29p^2+17p-2+2p\sqrt{6p^2-11p+4}}{(3p-1)^2}.$$

Then

$$\|\mathcal{H}\|_{A^p_\alpha}=\frac{\pi}{\sin\frac{(\alpha+2)\pi}{p}}.$$

证明。 根据注记1，我们得到 $p > \alpha + 2$，由此可得 $\mathcal{H}$ 在 A^p_α 上有界。回忆一下，

$$\alpha_{low}(p) = \frac{6p^3 - 29p^2 + 17p - 2 - 2p\sqrt{6p^2 - 11p + 4}}{(3p-1)^2}.$$

当 $p > 2$ 时，计算可得

$$\frac{2p^2 - 9p + 6}{3p - 3} > \alpha_{low}(p). \tag{4.2}$$

根据命题 2.1，当且仅当下式成立时，所需结果成立

$$\max\{\alpha_{low}(p), 0\} \leq \alpha \leq \alpha_{up}(p).$$

因此，只需证明当 $\alpha_{low}(p) > 0$ 时结论成立。在这种情况下，由 (4.2) 可得 $\frac{2p^2-9p+6}{3p-3} > 0$。根据命题 3.1，当且仅当 $0 \leq \alpha \leq \frac{2p^2-9p+6}{3p-3}$ 时，Karapetrovi´c 的猜想成立。将其与 (4.2) 结合，我们得到：当 $\alpha_{low}(p) > 0$ 且 $0 \leq \alpha \leq \alpha_{low}(p)$ 时，Kara- petrovi´c 的猜想成立。此外，根据命题 2.1，当且仅当 $\alpha_{low}(p) > 0$且 $\alpha_{low}(p) \leq \alpha \leq \alpha_{up}(p)$ 时，Karapetrovi´c 的猜想成立。因此，当$\alpha_{low}(p) > 0$ 时，我们得到所需结论。证明完毕。 □

致谢。 本工作得到中国国家自然科学基金（项目编号：12271328）的资助。

参考文献

[1] G. Bao 和 F. Sun, 《伯格曼空间上的广义希尔伯特算子》, *Proc.Amer.Math.Soc.*, **153**（2025）, 3439-3449。[2] C. Bellavita、V. Daskalogiannis 和 G. Stylogiannis, 《关于希尔伯特矩阵算子：简要综述》。载于：J. Ball、HO. Tylli、J. Virtanen（编）, 《算子理论、相关领域及应用》。IWOTA 2023。《算子理论：进展与应用》, 第307卷, 第127-147页, Birkh¨auser, Cham, 2025。[3] V. Bo˘zin 和 B. Karapetrovi´c, 《伯格曼空间上希尔伯特矩阵的范数》, *J. Funct. Anal.*, **274**（2018）, 525-543。[4] D. Bralovi´c 和 B. Karapetrovi´c, 《负指标加权Bergman空间上希尔伯特矩阵范数的新上界》, *Bull. Malays.Math. Sci. Soc*, **45**（2022）, 1183-1193。[5] J. Dai, 《加权Bergman空间上希尔伯特矩阵算子的范数》。*J. Funct. Anal*, **287**（2024）, 论文编号110587, 共40页。[6] J. Dai, 《Korenblum空间上希尔伯特矩阵算子的范数》, *J.Math.Anal. Appl*, **514**（2022）, 论文编号126270, 共12页。[7] E. Diamantopoulos, 《伯格曼空间上的希尔伯特矩阵》, *IllinoisJ.Math*, **48**（2004）, 1067-1078。[8] E. Diamantopoulos 和 A. Siskakis, 《复合算子与希尔伯特矩阵》, 《数学研究》, **140**（2000）, 191-198。

[9] D. Dmitrovi´c 和 B. Karapetrovi´c, 《正指标加权伯格曼空间上希尔伯特矩阵的范数》, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, 117（2023）, 论文编号138, 共12页。[10] M. Dostani´c、M. Jevti´c 和 D. Vukoti´c, 《伯格曼空间与哈代空间上希尔伯特矩阵的范数及一个Nehari型定理》, J. Funct. Anal., 254（2008）, 2800-2815。[11] P. Galanopoulos、D. Girela、J. Pel´aez 和 A. Siskakis, 《广义希尔伯特算子》, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 39（2014）, 231-258。[12] P. Halmos, 《希尔伯特空间问题集》, Springer, 纽约, 1982。[13] D. 希尔伯特, 《关于勒让德多项式理论的一项贡献》, Acta Math., 18（1894）, 155-159。[14] G. Hardy、J. Littlewood 和 G. P´olya, 《不等式》, 剑桥大学出版社, 1952。[15] H. Hedenmalm、B. Korenblum 和 K. Zhu, 《伯格曼空间理论》, Springer-Verlag, 纽约, 2000。[16] M. Jevti´c 和 B. Karapetrovi´c, 《伯格曼型空间上的希尔伯特矩阵》, J. Math. Anal. Appl., 453（2017年）, 241-254。[17] M. Jevti´c 和 B. Karapetrovi´c, 《Besov空间上的希尔伯特矩阵算子》, Publ. Math. Debrecen, 90（2017年）, 359-371。[18] B. Karapetrovi´c, 《关于希尔伯特矩阵的范数》。载于：I. Binder、D. Kinzebu-latov 和 J. Mashreghi（编）, 《解析函数空间及其应用》, 第245-269页, Fields Inst. Commun., 87, Springer, Cham, 2023。[19] B. Karapetrovi´c, 《加权Bergman空间上的希尔伯特矩阵及其范数》, J. Geom. Anal., 31（2021年）, 5909-5940。[20] B. Karapetrovi´c, 《加权伯格曼空间上希尔伯特矩阵算子的范数》, Glasg. Math. J., 60（2018）, 513-525。[21] T. Kato, 《关于希尔伯特矩阵》, Proc. Amer. Math. Soc., 8（1957）, 73-81。[22] B. Łanucha、M. Nowak 和 M. Pavlovi´c, 《解析函数空间上的希尔伯特矩阵算子》, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 37（2012）, 161-174。[23] M. Lindstr¨om、S. Miihkinen 和 D. Norrbo, 《经典解析函数空间上广义希尔伯特矩阵算子的精确本性范数》, Adv. Math., 408（2022）, 论文编号108598, 共34页。[24] M. Lindstr¨om、S. Miihkinen 和 N. Wikman, 《加权Bergman空间上希尔伯特矩阵算子范数的精确值》, Ann. Fenn. Math., 46（2021年）, 201-224。[25] M. Lindstr¨om、S. Miihkinen 和 N. Wikman, 《与希尔伯特矩阵有关的加权复合算子的范数估计》, Proc. Amer. Math. Soc., 147（2019）, 2425-2435。[26] W. Magnus, 《希尔伯特矩阵的谱》, Amer. J. Math., 72（1950）, 699-704。[27] D. Norrbo, 《加权Bergman空间上希尔伯特矩阵算子的范数估计》, J. Math. Anal. Appl., 548（2025）, 论文编号129408, 共16页。[28] V. Peller, 《汉克尔算子及其应用》, Springer-Verlag, 纽约, 2003。[29] R. Savage 和 E. Lukacs, 《希尔伯特矩阵有限分段的逆矩阵表》, 载于《线性方程组求解与特征值确定文集》, 第105-108页, 美国国家标准局应用数学丛书第39号, 美国政府印刷局, 华盛顿特区, 1954。

[30] H. Widom，Hankel 矩阵，美国数学会汇刊，**121** （1966年），1-35。[31] S. Ye 和 G. Feng，对数加权 Bergman 空间上希尔伯特矩阵的范数，复分析与算子理论，**17** （2023年），第97号论文，共16页。[32] K. Zhu，函数空间中的算子理论，美国数学会，普罗维登斯，2007年。

GUANLONG BAO，汕头大学数学系，广东省汕头市 515821，中国电子邮箱：glbao@stu.edu.cn

LIU TIAN，汕头大学数学系，广东省汕头市 515821，中国电子邮箱：20ltian@stu.edu.cn

HASI WULAN，汕头大学数学系，广东汕头 515821，中国电子邮箱地址：wulan@stu.edu.cn