arXiv:2601.13741v1 [math.OA] 20 Jan 2026

抽象最大拟椭圆性及其映射

Omar Mohsen*

摘要

我们证明了一个关于最大拟椭圆性的抽象定理，表明在满足某些自然假设的抽象演算中，一个算子是最大亚椭圆的，当且仅当其主符号是左可逆的。随后，我们证明该定理蕴含了文献中的若干已知结果，例如椭圆算子的正则性定理、Helffer 和 Nourrigat 对 Rockland 猜想的解决、Rodino 关于流形乘积上算子正则性的定理，以及我们对 Helffer-Nourrigat 猜想的解决。本文续篇将给出其他例子，例如我们对微局部 Helffer-Nourrigat 猜想的解决。

我们的论证基于 I 型 C^*-代数理论。

目录

1 抽象伪微分演算与最大拟椭圆性 **3**

2 Helffer-Nourrigat 定理 **11**

引言

设 $D\colon C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 是光滑流形 M 上的线性微分算子。若对于 M 上的任意分布 u，都有 $\operatorname{singsupp}(Du)=\operatorname{singsupp}(u)$，则称 D 是亚椭圆的。一个众所周知且易证的结果是：若 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的常系数齐次微分算子，则 D 是亚椭圆的，当且仅当它是椭圆的。将 $\mathbb{R}^n$ 替换为单连通分次幂零李群 G 后，Rockland [Roc78] 猜想了 G 上的齐次左不变微分算子具有亚椭圆性的一个充要条件。该猜想由 Helffer 和 Nourrigat（充分性部分）以及 Beals（必要性部分）证明。更具体地说，他们证明了以下结论

定理 0.1 ([Bea77; HN79])**.** 设 G 是单连通分次幂零李群，D 是 G 上的左不变微分算子，且相对于 G 上的分次，其齐次次数为 $k\in\mathbb{N}$。以下条件等价

1. 微分算子 D 是亚椭圆的 *2.* 对于 G 的任意不可约非平凡酉表示，$\pi(D)$ 在光滑向量上是单射的。

3. 对于任意齐次次数为 $\leqslant k$ 的微分算子 D'（不一定是左不变的），以及紧子集 $K\subseteq G$，存在常数 $C>0$ 使得

$$\left\|D'(f)\right\|_{L^2(G)}\leqslant C(\|f\|_{L^2(G)}+\|D(f)\|_{L^2(G)}),\qquad \forall f\in C_c^\infty(G)\text{ 使得 支集}(f)\subseteq K. \tag{1}$$

* 巴黎西岱大学、索邦大学、法国国家科学研究中心、巴黎朱西厄数学研究所，法国巴黎 F-75013， omar.mohsen@imj-prg.fr

不等式 (1) 称为最大次椭圆性不等式。 $1 \implies 2$ Beals 的证明 [Bea77] 简短而简单。另一方面，Helffer 和 Nourrigat 对其他蕴含关系的证明要复杂得多，需要基于 Kirillov 轨道方法，详细研究 $\pi(D)$ 在 G 所有酉表示中的情形。由于 Kirillov 轨道方法表明，所有不可约酉表示都由 G子群的一维表示诱导而来，Helffer 和 Nourrigat 的证明通过仔细研究从子群诱导表示时，$\pi(D)$ 及其范数在 Sobolev 空间上的作用来展开。

在这篇文章中，我们给出一个 C*-代数证明，证明 Helffer 和 Nourrigat 的结果，同时避免对 G的酉表示结构进行任何详细研究。相反，该证明依赖于这样一个事实：群 $G \rtimes \mathbb{R}_+^\times$ 属于 I 型，其中 $\mathbb{R}_+^\times$ 通过分次膨胀作用于 G。I 型李群有很多例子。所有连通幂零李群和实半单李群都是 I 型，见 [Dix77]。可解李群并不总是 I 型。Dixmier [Dix62]证明，一大类可解群属于 I 型，其中包括 $G \rtimes \mathbb{R}_+^\times$。更一般地，Auslander 和 Kostant [AK71]给出了单连通可解李群属于 I 型的一个简单充要条件。

我们的证明相当一般，适用于比 Helffer 和 Nourrigat 所考虑的情形更广泛的范围。我们建立了一个抽象定理，说明对于配备主符号并满足以下三个主要假设的抽象伪微分演算：

1. $\leqslant 0$ 阶算子在适当的希尔伯特空间上充当有界算子。
2. 由 0 阶算子生成的 C*-代数属于 I 型。
3. 该演算包含一族算子 $(v_k)_{k\in\mathbb{R}}$，使得 v_k 的阶为 k；该族 v_k在 k中连续变化，并且 v_0 是可逆的。

于是，在该演算中，最大拟椭圆性等价于主符号的单射性。在 Helffer 和 Nourrigat 的定理中，第一个假设由使用 Cotlar–Stein 引理的经典论证得到。第二个假设是 $G \rtimes \mathbb{R}_+^\times$ 属于 I 型。第三个假设是显然的。

我们的定理的另一项应用是解决微局部 Helffer-Nourrigat 猜想，相关内容将发表于另一篇文章中。我们先前关于 Helffer-Nourrigat 猜想的工作[AMY22] 也是我们定理的一个特例。

许多人研究过抽象伪微分演算，例如可参见 Connes-Moscovici [CM95], 、Higson [Hig06] 以及 Guillemin [Gui85]的工作。我们工作的主要创新在于使用 I 型 C*-代数。为说明这一方法的动机，我们简要解释为什么C*-代数会自然地出现在定理 0.1 的证明中。

从历史上看，C*-代数由 Gelfand 引入，旨在为维纳定理 [Wie32] 提供一种更具概念性的证明。盖尔范德论证依赖于 C*-代数理论中的以下经典结果。

定理 0.2 (Gelfand)**.** 设 A 是一个含幺 C*-代数。元素 $a \in A$ 可逆，当且仅当对于 A 在希尔伯特空间 $L^2(\pi)$ 上的每个不可约表示 π，算子$\pi(a)$： $L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 都可逆。

现在让我们回到定理 0.1 的证明。我们的策略是将算子 D 嵌入一个伪微分演算中，并考察算子 $v_{-k}D$，其中 v_{-k} 是一个经过适当选取的 $-k$ 阶算子。于是算子 $v_{-k}D$ 的阶为 0。

目标是证明 $v_{-k}D$ 在 $L^2(G)$上可逆。一旦证明这一点，就可以得到最大拟椭圆性估计。令 A 表示由 0 阶算子闭包得到的 C*-代数。盖尔范德定理使我们能够将 $v_{-k}D$ 的可逆性问题归结为研究它在 A的不可约表示下的像。在我们的情形中，这些表示来自群 G的非平凡酉表示。

此时，人们可能会问，论证中何处用到了 I 型假设。在盖尔范德定理中，要求 $\pi(a)$ 作为算子在整个希尔伯特空间 $L^2(\pi)$上可逆。然而，在定理 0.1 中，假设较弱：只要求 $\pi(D)$ 在光滑向量空间上是单射。

本文的关键观察是，对于 I 型的 C*-代数，可以弥合这一差距。更确切地说，I 型条件使得可以将整个希尔伯特空间上的单射性归结为光滑向量上的单射性。这一归结依赖于一个涉及 Fredholm 指标的计数论证，以及以下在推论 1.6 中证明的定理。

定理 0.3。设 A 是一个含幺 I 型 C*-代数。元素 $a \in A$ 可逆，当且仅当对于 A的每个不可约表示 π，以下蕴含成立

$$\pi(a) \text{ is Fredholm } \implies \pi(a) \text{ is invertible}$$

成立。

我们希望这项工作能够引起线性偏微分方程研究者对 I 型 C*-代数重要性的关注，并认识到它们在此类解析问题中的实用性。

最后需要指出的是，我们对 C*-代数理论的使用非常有限。我们所需的全部内容都包含在 [Dix77，第 $1, 2, 3, 4$] 章以及 [Lan95] 中。

致谢 我们感谢 N. Higson 和 G. Skandalis 提出的宝贵意见与建议。本研究部分得到了 ANR 项目 OpART （ ANR- 23-CE40- 0016 ）的支持。

1 抽象伪微分演算与最大次椭圆性

我们采用以下记号约定：

- 若 π 是 C*代数 A 在希尔伯特空间上的表示，则我们用 $L^2(\pi)$表示该希尔伯特空间。

- 若 V，W是拓扑向量空间，则 $\mathcal{L}(V,\ W)$ 表示从 V到 W的连续线性映射空间。若 $V = W$，则 $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V,\ V)$。
- 若 H 是希尔伯特空间，则 $\mathcal{K}(H)$ 表示作用在 H上的紧算子 C*代数。
- 半双线性型 $\langle \xi,\ \eta \rangle$ 对 η 是线性的，对 ξ是反线性的。

命题 1.1 (Gelfand)。设 A 是一个含幺 C*代数。元素 $a \in A$ 左可逆，当且仅当对于 A的每个不可约表示 π，$\pi(a)$： $L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 是单射。

证明。蕴含关系 $\implies$ 显然。对于另一个方向，令 $I \subseteq A$ 为由 a生成的闭左理想。若 a 不是左可逆的，则 $I \neq A$。因此，根据 [Dix77，定理 2.9，5], 存在

一个纯态 ϕ： $A \to \mathbb{C}$，使得 $I \subseteq \{x \in A : \phi(x^*x) = 0\}$。因此，若 π 是通过 GNS 构造由 ϕ 得到的不可约表示，且 ξ 是特征向量，则 $\pi(a)\xi = 0$。

□

命题 1.2。若 $(a_t)_{t\in[0,\ 1]}$ 是含幺 C^*-代数 A 中的一条连续路径，且 a_0 可逆，并且对所有 $t \in [0,1]$， a_t 都是左可逆的，那么对所有 $t \in [0,1]$， a_t 都是可逆的。

证明。 a_t 左可逆等价于 $a_t^*a_t$ 可逆。将 A 嵌入某个希尔伯特空间 H 上的 $\mathcal{L}(H)$ 中即可看出这一点。元素 $a_t(a_t^*a_t)^{-1}a_t^*$ 是一个依赖于 t 连续变化的投影，并且由于 a_0 可逆，它在 $t = 0$ 处等于 1。因此，对所有 $t \in [0,\ 1]$，它都等于 1。于是， a_t 右可逆，其逆映射为 $(a_t^*a_t)^{-1}a_t^*$。

□

定义 1.3（卡普兰斯基、格利姆和 Dixmier）。称 C^*-代数 A 为

- 若对 A 的每个不可约表示 π，都有 $\mathcal{K}(L^2(\pi)) = \pi(A)$，则称其为临界。
- 若对 A 的每个不可约表示 π，都有 $\mathcal{K}(L^2(\pi)) \subseteq \pi(A)$，则称其为 I 型。

关于临界代数和 I 型 C^*-代数的详细讨论，请参阅 [Dix77 第 4 章和第 9] 章。

我们指出，若 A 是一个 C^*-代数，且 π 是一个不可约表示，并满足 $K(L^2(\pi)) \cap \pi(A) \neq \{0\}$，则 $K(L^2(\pi)) \subseteq \pi(A)$；参见 [Dix77，推论 4.1.10]。

设 A 是一个含幺的 I 型 C^*-代数。根据 [Dix77，命题 4.3.3 和 4.3.4], ，存在一个序数 α 以及一族 A 的闭双边理想 $(I_\rho)_{0\leqslant\rho\leqslant\alpha}$，使得

- $I_0 = 0$ 和 $I_\alpha = A$
- 如果 $\rho \leqslant \alpha$ 是一个极限序数，那么 $I_\rho = \bigcup_{\rho'<\rho} I_{\rho'}$

- 如果 $\rho < \alpha$，那么 $I_\rho \subseteq I_{\rho+1}$，且 $I_{\rho+1}/I_\rho$ 是一个非零临界 C^*-代数。

注 1.4。我们将在第 2 节中使用的 C^*-代数，即 $C^*(G \rtimes \mathbb{R}_+^\times)$，其序数 α 实际上是有限的。

设 $a \in A$。我们将 $\mathrm{ord}(a) < \alpha$ 定义为满足以下条件的最小序数 $\beta < \alpha$： a 在A/I_β中是可逆的。如果 a 在任何 A/I_β, 中都不可逆，则 $\mathrm{ord}(a)$: $= \alpha$。这里，我们遵循这样的约定：0 在零环中不可逆，因此在 $A/I_\alpha = 0$ 中没有任何元素是可逆的。

命题 1.5。若 $a \in A$，则 阶(a) 等于 0，或者是一个后继序数。此外，若 阶$(a) \neq 0$，则对 $A/I_{\mathrm{ord}(a)-1}$, $\pi(a)$的任意不可约表示，都有： $L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 是 *Fredholm* 算子，其中 阶$(a) - 1$ 是 阶(a)的前驱。

证明。由于 A 含幺， α 是一个后继序数。令 $\alpha - 1$ 为其前驱。因此， $A/I_{\alpha-1}$ 是一个含幺临界 C^*- 代数。因此， $A/I_{\alpha-1}$ 的不可约表示均为有限维。这在阶 $(a) = \alpha$ 时证明了该引理。现在假设阶$(a) < \alpha$。根据假设，存在$b \in A$ 和 $c \in I_{\mathrm{ord}(a)}$，使得 $ba = 1 + c$。若阶(a) 是极限序数，则存在一个序数$\beta <$ 阶(a)，以及 $c' \in I_\beta$，使得 $\|c - c'\| < 1$。令 $x = (1 + c - c')^{-1} \in A$。因此， $xba = 1 + xc'$。由于$xc' \in I_\beta$，可知 a 在 A/I_β中左可逆。通过类似的论证，我们可得，对于某个 $\beta' <$阶 (a)， a 在 $A/I_{\beta'}$ 中右可逆。因此， b 在 $A/I_{\max(\beta,\beta')}$ 中可逆。由此我们得到与阶 (a) 的极小性矛盾。因此，阶(a) 是一个后继序数。令 π 为 $A/I_{\mathrm{ord}(a)-1}$的一个不可约表示。需要考虑两种情况

- 如果 π 在 $I_{\text{阶}(a)}/I_{\text{阶}(a)-1}$上为零，那么 π 便降为 $A/I_{\text{阶}(a)}$的一个不可约表示。因此， $\pi(a)$ 可逆，进而是 Fredholm 算子。

- 如果 π 在 I阶$_{(a)}/I$阶$_{(a)-1}$上不为零，那么 π 在 I阶$_{(a)}/I$阶$_{(a)-1}$ 上的限制是 I阶$_{(a)}/I$阶$_{(a)-1}$的一个不可约表示，见 [Dix77, 引理 2.11。3]。由于 I阶$_{(a)}/I$阶$_{(a)-1}$是临界的，我们推得 $\pi(I$阶$_{(a)}/I$阶$_{(a)-1})$ 由紧算子构成。a 在 A/I阶$_{(a)}$ 中的可逆性意味着 a 在 A/I阶$_{(a)-1}$ 模 I阶$_{(a)}/I$阶$_{(a)-1}$意义下可逆。因此，$\pi(a)$ 模紧算子可逆。根据 Atkinson 定理， $\pi(a)$ 是 Fredholm 算子。 □

推论 1.6. 设 A 是一个含幺 C*-代数，且为 I 型。元素 $a \in A$ 可逆，当且仅当对于 A的每个不可约表示 π ，以下蕴含式

$$\pi(a) \text{ is Fredholm} \implies \pi(a) \text{ is invertible}$$

成立。

证明. 正向蕴含显然。设 $a \in A$ 满足：若 $\pi(a)$ 是 Fredholm，则 $\pi(a)$可逆。若 ord(a) 是后继序数，则由命题 1.5 和命题 1.1， a 在 $A/I_{\mathrm{ord}(a)-1}$ 中可逆，这与 ord(a)的极小性矛盾。因此，ord$(a) = 0$ ，这意味着 a在 A中可逆。

□

抽象 C*演算： 设 $\nu \geqslant 1$为一个常数，它在演算中起到多参数数量的作用。我们采用以下约定:

- 若 $k, l \in \mathbb{R}^\nu$，则记作 $k \leqslant l$，当且仅当对所有 $i \in [\![1, \nu]\!]$，均有 $k_i \leqslant l_i$。
- 若 $k \in \mathbb{C}^\nu$，则 Re$(k) :=$ (Re(k_1)， $\cdots$， Re$(k_\nu)) \in \mathbb{R}^\nu$。

定义 1.7. C*演算（带有 ν参数）是一个 $\mathbb{C}$向量空间族 $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ ，满足：对于每个 $k, l \in \mathbb{C}^\nu$，存在乘积映射 $\mathrm{A}_k \times \mathrm{A}_l \to \mathrm{A}_{k+l}$ ，它是双线性且满足结合律，即 $(ab)c = a(bc)$ 若 $a \in \mathrm{A}_{k_1}$, $b \in \mathrm{A}_{k_2}$, $c \in \mathrm{A}_{k_3}$。存在单位元 $0 \neq 1 \in \mathrm{A}_0$, ，即对所有 $a \in \mathrm{A}_k$，均有 1a$= a1 = a$。此外，还存在一个对合映射 $a \in \mathrm{A}_k \mapsto a^* \in \mathrm{A}_{\bar{k}}$ ，它是反线性的，并满足$1^* = 1$ 且对所有 $a \in \mathrm{A}_{k_1}$, $b \in \mathrm{A}_{k_2}$，均有 $(ab)^* = b^*a^*$ 。此外，A_0, 上还存在一个 C*半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_0}$ ，即一个满足 $\|ab\|_{\mathcal{A}_0} \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}_0} \|b\|_{\mathcal{A}_0}$ 且对所有 $a, b \in \mathrm{A}_0$，均有 $\|a^*a\|_{\mathcal{A}_0} = \|a\|^2$ A_0的半范数。我们用 A_0表示 A_0的豪斯多夫完备化。

我不认为当 $k \neq l$ 时， $\mathcal{A}_k$ 和 $\mathcal{A}_l$ 中的元素之间存在加法。对于我们的映射，没有必要作此假设。此外，在光滑流形上，阶为 $k \in \mathbb{C}$ 和 $l \in \mathbb{C}$ 的经典伪微分算子的和是经典伪微分算子，当且仅当 $k - l \in \mathbb{Z}$。事实上，在第 2 节所讨论的例子中，见 (22)， $\mathcal{A}_{k_1}$ 中的元素与$\mathcal{A}_{k_2}$ 中的元素之和，对任意 $l \in \mathbb{C}^\nu$ 都不属于 $\mathcal{A}_l$ 。

定义 1.8。 C*-演算 $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的一个表示由一个非零的 $\mathbb{C}$ 向量空间 $C^\infty(\pi)$ 构成，该空间配备正定厄米型 $\langle \cdot, \cdot \rangle$： $C^\infty(\pi) \times C^\infty(\pi) \to \mathbb{C}$，以及一族线性映射 $\pi_k : \mathcal{A}_k \to \mathrm{End}(C^\infty(\pi))$ ，对每个 $k \in \mathbb{C}^\nu$ 都成立，并满足以下条件:

1. 如果 k， $l \in \mathbb{C}^\nu$、 $a \in \mathcal{A}_k$、 $b \in \mathcal{A}_l$、 ξ， $\eta \in C^\infty(\pi)$, 则

$$\pi_0(1) = \mathrm{Id}_{C^\infty(\pi)}, \quad \pi_k(a)\pi_l(b) = \pi_{k+l}(ab), \quad \langle \pi_k(a)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \pi_{\bar{k}}(a^*)\eta \rangle.$$

2. 若 $k \in \mathbb{C}^\nu$ 使得 Re$(k) \leqslant 0$ 且 $a \in \mathcal{A}_k$，则 $\pi_k(a)$ 可延拓为一个有界算子$L^2(\pi) \to L^2(\pi)$, 其中 $L^2(\pi)$ 是关于范数 $\|\xi\|^2_{L^2(\pi)} := \langle \xi, \xi \rangle$的 $C^\infty(\pi)$ 的希尔伯特空间完备化。我们还假设，如果 $a \in \mathcal{A}_0$, ，那么

$$\|\pi_0(a)\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} \leqslant \|a\|_{\overline{\mathcal{A}_0}}. \tag{2}$$

因此， π_0 可延拓为$\mathcal{A}_0$的一个表示。 $\square$

3. 配备由半范数族$\|\pi_k(a)\xi\|_{L^2(\pi)}$ 生成的拓扑的空间 $C^\infty(\pi)$ ，对于 $k\in\mathbb{C}^\nu$ 和 $a\in\mathcal{A}_k$ ，是完备的。

如果该表示作为 C^*-代数 $\mathcal{A}_0$, 的表示是不可约的，则称其为不可约；也就是说，若 $L\subseteq L^2(\pi)$ 是一个在 $\pi_0(\mathcal{A}_0)$ 作用下不变的闭子空间，则 $L=0$ 或 $L=L^2(\pi)$。

我们用 $C^{-\infty}(\pi)$ 表示 $C^\infty(\pi)$ 上连续反线性泛函组成的空间。$\xi\in C^{-\infty}(\pi)$ 在 $\eta\in C^\infty(\pi)$ 上的作用记为 $\langle\eta,\xi\rangle$。空间 $C^{-\infty}(\pi)$ 配备由半范数 $\xi\mapsto|\langle\xi,\eta\rangle|$ 生成的拓扑，其中每个 $\eta\in C^\infty(\pi)$ 都对应一个半范数。我们有显然的连续线性包含关系

$$C^\infty(\pi)\subseteq L^2(\pi)\subseteq C^{-\infty}(\pi).$$

对于每个 $k\in\mathbb{C}^\nu$，我们通过公式将 π_k 扩展为线性映射 $\pi_k:\mathcal{A}_k\to\mathcal{L}(C^{-\infty}(\pi))$

$$\langle\eta,\pi_k(a)\xi\rangle:=\langle\pi_{\bar{k}}(a^*)\eta,\xi\rangle,\quad\forall a\in\mathcal{A}_k,\xi\in C^{-\infty}(\pi),\eta\in C^\infty(\pi).$$

定义与表示 π 关联的 Sobolev 空间有多种方式。这里我们采用限制最严格的一种。我们的主定理意味着它们与限制最宽松的一种相同，见 (7)。令 $H^k(\pi)$ 为满足以下条件的 $\xi\in C^{-\infty}(\pi)$ 的集合：存在一个序列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C^\infty(\pi)$ ，使得 $\xi_n\to\xi$ 属于 $C^{-\infty}(\pi)$，并且对于任意 $l\in\mathbb{C}^\nu$ 和满足 $\mathrm{Re}(l)\leqslant k$ 的 $a\in\mathcal{A}_l$ ，都有 $\pi_l(a)\xi\in L^2(\pi)$，且 $\pi_l(a)\xi_n\to\pi_l(a)\xi$ 属于 $L^2(\pi)$。我们赋予 $H^k(\pi)$ 由半范数族 $\xi\mapsto\|\pi_l(a)\xi\|_{L^2(\pi)}$ 生成的拓扑，其中 $l\in\mathbb{C}^\nu$ 为任意取值，且 $a\in\mathcal{A}_l$ 满足 $\mathrm{Re}(l)\leqslant k$。显然，

$$H^0(M)=L^2(\pi),\quad H^l(\pi)\subseteq H^k(\pi),\quad\text{if } k\leqslant l,\tag{3}$$

且若 $k\in\mathbb{C}^\nu$、 $l\in\mathbb{R}^\nu$ 和 $a\in\mathcal{A}_k$，则

$$\pi_k(a)(H^l(\pi))\subseteq H^{l-\mathrm{Re}(k)}(\pi),\text{ and the map } H^l(\pi)\xrightarrow{\pi_k(a)}H^{l-\mathrm{Re}(k)}(\pi)\text{ is continuous.}$$

空间 $C^\infty(\pi)$、 $C^{-\infty}(\pi)$、 $H^k(\pi)$ 分别称为表示 π 的光滑向量空间、分布向量空间和 Sobolev 空间。

命题1.9。有

$$C^\infty(\pi)=\bigcap_{k\in\mathbb{R}^\nu_+}H^k(\pi).\tag{4}$$

证明。 设 $\xi\in\bigcap_{k\in\mathbb{R}^\nu_+}H^k(\pi)$。我们将把 ξ 写成 $C^\infty(\pi)$中一个网的极限。由于 $C^\infty(\pi)$ 不一定是可度量化的，我们必须使用网。我们的网的指标集是 $\bigsqcup_{k\in\mathbb{C}^\nu}\mathcal{A}_k$ 的所有有限子集，并按包含关系排序。对于每个有限子集 $F\subseteq\bigsqcup_{k\in\mathbb{C}^\nu}\mathcal{A}_k$，取 $k\in\mathbb{R}^\nu_+$ ，使得若 $F\cap\mathcal{A}_l\neq\varnothing$，则 $\mathrm{Re}(l)\leqslant k$。由于 $\xi\in H^k(\pi)$，令 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如 $H^k(\pi)$的定义中所述。令 ξ_F为序列 ξ_n 中的一个元素，使得对于所有 $a\in F$都有 $\|\pi_l(a)\xi_F-\pi_l(a)\xi\|_{L^2(\pi)}\leqslant\frac{1}{|F|}$。网 ξ_F 在 $C^\infty(\pi)$中是柯西网，因此它在 $C^\infty(\pi)$ 中有一个极限，而该极限必为 ξ。 $\square$

下一个定理是这篇文章的主定理。在下面的定理中，令 K 表示满足以下条件的 $k\in\mathbb{C}^\nu$：对于至多一个 $i\in\{1,\ k_i\neq0\,,\ \cdots,\ \nu\}$ 且 $\mathrm{Re}(k_i),\ \mathrm{Im}(k_i)\in[-1,\ 1]$。

注 1.10。 在下面的定理中，对于任意 $C\in\mathbb{R}^\times_+$，可以在 K 的定义中用 $[-C,\ C]$ 替换 $[-1,\ 1]$。

定理 1.11。 设 $(A)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 是一个 C^*-演算， $\Sigma(A)$ 是 $(A)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的一组表示，满足以下条件：

1. C^*-代数 A_0 是 $\overline{I}$ 型。

2. A_0 的任意不可约表示都与某个 $\pi \in \Sigma(A)$ 的 π_0 酉等价。

3. 我们可以找到一个元素族 $v_k \in A_k$，使得对于 $k \in K$：

(a) 元素 v_0 在 A_0 中可逆。*(b)* 对任意 $a \in A_0$,，映射

$$k \in K \mapsto v_k a v_{-k} \in \overline{\mathcal{A}_0} \tag{5}$$

是连续的，其中 A_0 赋予来自 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_0}$ 的范数拓扑。 —

则以下结论成立：

1. 设 $k \in \mathbb{C}^\nu$ 和 $a \in A_k$。若对任意 $\pi \in \Sigma(A)$, $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_k(a)} C^\infty(\pi)$ 和 $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_{\bar{k}}(a^*)} C^\infty(\pi)$ 均为单射，则对每个 $(A)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的表示 π （不一定不可约，也不一定在 $\Sigma(A)$ 中），映射

$$\begin{aligned} &\pi_k(a) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi) \\ &\pi_k(a) : H^l(\pi) \to H^{l-\mathrm{Re}(k)}(\pi) \quad \forall l \in \mathbb{R}^\nu \\ &\pi_k(a) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi) \end{aligned} \tag{6}$$

是拓扑同构。此外，对于任意 $k \in \mathbb{C}^\nu$，存在满足上述条件的 $a \in A_k$。

2. 对于 $(A)_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的任意表示 π， $H^k(\pi)$ 是希尔伯特空间，并且

$$H^k(\pi) = \{\xi \in C^{-\infty}(\pi) : \pi_k(a)\xi \in L^2(\pi),\ \forall a \in \mathcal{A}_k\} \tag{7}$$

以及 $C^{-\infty}(\pi) = \bigcup_{k\in\mathbb{R}^\nu} H^k(\pi)$。

3. 若 $a \in A_0$,，则 a 在 A_0 中左可逆，当且仅当对于所有 $\pi \in \Sigma(A)$, $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_0(a)} C^\infty(\pi)$ 都是单射

若映射 $\mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ 不是单射，那么，当我们说 $a \in \mathcal{A}_0$ 在 $\mathcal{A}_0$，中可逆时，指的是它在 $\mathcal{A}_0$ 中的像可逆。

例 1.12. 1. 设 M 是一个光滑紧流形，$\mathcal{A}_k$ 是 M 上阶为 k 的经典伪微分算子空间， $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_0}$ 是 $L^2(M)$ 上的算子范数， $\Sigma(\mathcal{A}) = T^*M\backslash 0 \sqcup \{\heartsuit\}$，其中$\heartsuit$是一个辅助点。对于任意 $(x,\xi) \in T^*M\backslash 0$, 由主符号可得 $(\mathcal{A})_{k\in\mathbb{C}}$ 的一个显然的不可约表示。设 $C^\infty(\heartsuit) = C^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}})$,$L^2(\heartsuit) = L^2(M)$，并且 $\heartsuit_k$ 是伪微分算子在函数上的通常作用。在此情形下，定理 1.11.1 表明，若 P 是一个阶为 k 的椭圆经典伪微分 P，且 P 和 P^* 在 $C^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 上均为单射，则

$$\begin{aligned} C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac{1}{2}}) &\xrightarrow{P} C^{-\infty}(M,\Omega^{\frac{1}{2}}) \\ H^{k+l}(M) &\xrightarrow{P} H^l(M), \qquad \forall l \in \mathbb{R} \\ C^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}}) &\xrightarrow{P} C^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

是拓扑同构。这意味着椭圆经典伪微分算子的主要正则性定理。为此，若 Q 是椭圆算子，则可以将上述结论应用于 $P = Q^*Q + R$，其中 R 是一个在$C^\infty(M,\Omega^{\frac{1}{2}})$ 上为单射的正平滑算子。

2. 设 $(\mathsf{A})_{k\in\mathbb{C}^{\nu_1}}$ 和 $(\mathsf{B}_k)_{k\in\mathbb{C}^{\nu_2}}$ 是两个 C^*-演算。我们可以定义一个 C^*-演算 C：$\mathsf{C}_{(k,l)}=\mathsf{A}_k\otimes\mathsf{B}_l$，其中 $(k,l)\in\mathbb{C}^{\nu_1+\nu_2}$。我们取 $\Sigma(\mathsf{C})=\Sigma(\mathsf{A})\times\Sigma(\mathsf{B})$。若 $(\pi,\pi')\in\Sigma(\mathsf{C})$，则对任意$(k,l)\in\mathbb{R}^{\nu_1+\nu_2}$，取 $H^{(k,l)}(\pi,\pi'):=H^k(\pi)\otimes H^l(\pi')$ 希尔伯特张量积。于是有$H^{(k,l)}(\pi,\pi')\subseteq H^{(k',l')}(\pi,\pi')$，若 $(k',l')\leqslant(k,l)$。接着取

$$C^\infty(\pi,\pi'):=\bigcap_{(k,l)\in\mathbb{R}^{\nu_1+\nu_2}}H^{(k,l)}(\pi,\pi'),\quad C^{-\infty}(\pi,\pi'):=\bigcup_{(k,l)\in\mathbb{R}^{\nu_1+\nu_2}}H^{(k,l)}(\pi,\pi')$$

映射 $(\pi,\pi')_{(k,l)}:\mathcal{C}_{(k,l)}\to\mathcal{L}(C^{-\infty}(\pi,\pi'))$ 显然都有定义。唯一需要验证的非平凡事实是，两个 I 型 C^*-代数的张量积仍然是 I 型，并且张量积的谱是各自谱的乘积，参见 [Gui64]。值得注意的是，若对流形 M_1 和 M_2 上的两个经典伪微分演算取张量积，就会得到 Rodino 演算 [Rod75] 中出现的符号映射。

定理 *1.11* 的证明。若 $a\in\mathcal{A}_0,$，则称 a 可逆，当且仅当 a 在 $\mathcal{A}_0$ 中可逆。在整个证明过程中，每当我们考虑 $\mathcal{A}_0,$ 的一个不可约表示时，都假设它具有如下形式：对于某个 $\pi\in\Sigma(\mathcal{A})$，$\pi_0$。我们还会注意区分任意表示 π of $(\mathcal{A})_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 与 $\Sigma(\mathcal{A})$ 中的表示。

由 v_kv_{-k} 的连续性可知，当 k 足够接近 0 时，v_kv_{-k} 可逆。因此，我们可以假设对所有 $k\in K$，v_kv_{-k} 都可逆（否则可对所有指标重新缩放）。令 $K_+:=K\cap[0,1]^\nu$ 和 $K_{\mathbb{R}}=K_+\cup-K_+=K\cap\mathbb{R}^\nu$。

引理 1.13。若 $k\in K_{\mathbb{R}}$、$l\in\mathbb{R}^\nu$ 和 π 是 $(\mathcal{A})_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的一个表示，则映射

$$C^{-\infty}(\pi)\xrightarrow{\pi_k(v_k)}C^{-\infty}(\pi),\quad H^l(\pi)\xrightarrow{\pi_k(v_k)}H^{l-k}(\pi),\quad C^\infty(\pi)\xrightarrow{\pi_k(v_k)}C^\infty(\pi)$$

是拓扑同构。将 v_k 替换为 v_k^*，同样的结论仍然成立。

证明。证明依赖于自举论证。令 $k\in K_{\mathbb{R}}$。由于 v_kv_{-k} 可逆，映射 $L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(v_kv_{-k})}L^2(\pi)$ 可逆。该映射是以下复合

$$L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_{-k}(v_{-k})}H^k(\pi)\xrightarrow{\pi_k(v_k)}L^2(\pi)\tag{8}$$

(8) 的单射性蕴含 $L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_{-k}(v_{-k})}H^k(\pi)$ 是单射。若 $k\geqslant0$，则用 $-k$ 替换 k，并利用包含关系 $H^k(\pi)\subseteq L^2(\pi)$，可知 $H^k(\pi)\xrightarrow{\pi_k(v_k)}L^2(\pi)$ 是单射。两个单射的复合是双射，这意味着每个映射都是双射。因此，(8) 中的每个映射都是双射（若 $k\in K_+$）。它们是拓扑同构，因为其逆映射为 $H^k(\pi)\xrightarrow{\pi_k(v_k)}L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(v_kv_{-k})^{-1}}L^2(\pi)$ 和 $L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(v_kv_{-k})^{-1}}L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_{-k}(v_{-k})}H^{-k}(\pi)$，且它们连续。由此我们证明了，若 $k\in K_+$，则映射 $L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_{-k}(v_{-k})}H^k(\pi)$ 和 $H^k(\pi)\xrightarrow{\pi_k(v_k)}L^2(\pi)$ 是拓扑同构。

令 $k,\ k'\in K_+$。考虑 $v_kv_{k'}v_{-k'}v_{-k}\in\mathcal{A}_0$。若 k' 固定，则根据 (5)，这些算子关于 k 连续。在 $k=0$处，它们是可逆的，因为 v_0 和 $v_{k'}v_{-k'}$ 均可逆。对于 $(\mathcal{A})_{k\in\mathbb{C}^\nu}$的任意表示 π，$L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(v_kv_{k'}v_{-k'}v_{-k})}L^2(\pi)$ 是复合

$$L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_{-k}(v_{-k})}H^k(\pi)\xrightarrow{\pi_{-k'}(v_{-k'})}H^{k+k'}(\pi)\xrightarrow{\pi_{k'}(v_{k'})}H^k(\pi)\xrightarrow{\pi_k(v_k)}L^2(\pi)\tag{9}$$

根据我们以上证明的内容，这些映射均为单射，且包含关系 $H^k(\pi)\subseteq L^2(\pi)$ 和 $H^{k+k'}(\pi)\subseteq H^{k'}(\pi)$。根据命题 1.1，并由任意不可约

表示都等价于某个 π_0 这一假设可知，对于某个 $\pi \in \Sigma(\mathcal{A})$, $v_k v_{k'} v_{-k'} v_{-k}$ 是左可逆的。因此，根据命题 1.2， $v_k v_{k'} v_{-k'} v_{-k}$ 是可逆的。因此，(9) 是可逆的。单射的复合为双射，这意味着每个映射都是双射。根据上述相同的论证，每个映射都是拓扑同构。对 $v_{k_1} \cdots v_{k_n} v_{-k_n} \cdots v_{-k_1}$重复相同的论证可得，只要$k \in K_+$，且 $l \in \mathbb{R}_+^\nu$， $H^l(\pi) \xrightarrow{\pi_{-k}(v_{-k})} H^{l+k}(\pi)$ 和 $H^{l+k}(\pi) \xrightarrow{\pi_k(v_k)} H^l(\pi)$ 就是拓扑同构。

令 $l \to \infty$ 趋于极限，并利用 (4)，可知对于任意 $k \in K_{\mathbb{R}}$， $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_k(v_k)} C^\infty(\pi)$ 是一个拓扑同构。 v_k 满足的性质， v_k^*也满足。因此，采用相同的论证可得， $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_k(v_k^*)} C^\infty(\pi)$ 是一个拓扑同构。根据对偶性，对于任意 $k \in K_{\mathbb{R}}$， $C^{-\infty}(\pi) \xrightarrow{\pi_k(v_k)} C^{-\infty}(\pi)$和 $C^{-\infty}(\pi) \xrightarrow{\pi_k(v_k^*)} C^{-\infty}(\pi)$ 都是拓扑同构。

设 $k \in K_{\mathbb{R}}$ 和 $l \in \mathbb{R}^\nu$。我们需要证明 $H^l(\pi) \xrightarrow{\pi_k(v_k)} H^{l-k}(\pi)$ 是一个拓扑同构。设 $k_1, \cdots, k_n, k_1', \cdots, k_m' \in K_{\mathbb{R}}$，使得 $k_1 + \cdots + k_n = -l$且 $k_1' + \cdots k_m' = l - k$。考虑 $w = v_{k_1'} \cdots v_{k_m'} v_k v_{k_1} \cdots v_{k_n} \in \mathcal{A}_0$。映射 $L^2(\pi) \xrightarrow{\pi_0(w)} L^2(\pi)$ 等于

$$L^2(\pi) \xrightarrow{\pi_{k_n}(v_{k_n})} H^{-k_n}(\pi) \cdots \to H^l(\pi) \xrightarrow{\pi_k(v_k)} H^{l-k}(\pi) \to \cdots \xrightarrow{\pi_{k_1'}(v_{k_1'})} L^2(\pi) \tag{10}$$

这些映射均为单射，因为我们已证明它们在 $C^{-\infty}(\pi)$ 上的单射性。因此，根据命题 1.1， w 是左可逆的。对伴随算子使用相同的论证，可得 w 是可逆的。因此， $L^2(\pi) \xrightarrow{\pi_0(w)} L^2(\pi)$是双射，这意味着 (10) 中的每个映射都是双射。类似地，我们可以证明每个映射都是拓扑同构。

□

引理 1.14。 对于任意 $a \in A_0$ 和 $k \in K_+$，阶$(v_k a v_{-k}) \leqslant$ 阶(a)。

证明。 不失一般性，设 $\mathrm{ord}(a) < \alpha$。我们需要证明 $v_k a v_{-k}$ 在 $\mathcal{A}_0/I_{\mathrm{ord}(a)}$ 中可逆。根据连续性假设，使得 $v_k a v_{-k}$在$\mathcal{A}_0/I_{\mathrm{ord}(a)}$ 中可逆的 $k \in K_+$ 的集合是开集。该集合非空，因为 v_0 在$\mathcal{A}_0$ 中可逆。我们将证明该集合是闭集。设 k 是闭包中的一点。假设 $v_k a v_{-k}$ 在 $\overline{\mathcal{A}_0}/I_{\mathrm{ord}(a)}$ 中不可逆。因此，$\mathrm{ord}(a) <$ord$(v_k a v_{-k})$。设 $\pi \in \Sigma(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}_0/I_{\mathrm{ord}(v_k a v_{-k})-1}$ 的一个不可约表示。 算子 $L^2(\pi) \xrightarrow{\pi_0(v_k a v_{-k})} L^2(\pi)$ 是 Fredholm 算子（根据命题 1.5），且是可逆算子的极限（因为 k 在闭包中，并且 $\mathrm{ord}(a) \leqslant$ord$(v_k a v_{-k}) - 1$）。因此，它的 Fredholm 指标为 0。映射 $L^2(\pi) \xrightarrow{\pi_0(v_k a v_{-k})} L^2(\pi)$ 是以下映射的复合

$$L^2(\pi) \xrightarrow{\pi_{-k}(v_{-k})} H^k(\pi) \xrightarrow{\pi_0(a)} H^k(\pi) \xrightarrow{\pi_k(v_k)} L^2(\pi)$$

根据引理 1.13，外侧的映射都是单射。内侧的映射也是单射，因为 $L^2(\pi) \xrightarrow{\pi_0(a)} L^2(\pi)$ 可逆（$(a) \leqslant$ 的阶为 $(v_k a v_{-k}) - 1$，且 $H^k(\pi) \subseteq L^2(\pi)$）。因此，映射 $L^2(\pi) \xrightarrow{\pi_0(v_k a v_{-k})} L^2(\pi)$ 是指标为 0 的单射 Fredholm 算子。故它是可逆的。因此，根据命题 1.1， $v_k a v_{-k}$ 在 $\mathcal{A}_0/\overline{I_{\mathrm{ord}(v_k a v_{-k})-1}}$ 中可逆，这与 $(v_k a v_{-k})$ 的阶的极小性矛盾。

□

引理 1.15。 若 $a \in A_0$，且对于任意 $\pi \in \Sigma(A)$， $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_0(a)} C^\infty(\pi)$ 都是单射，则 a 在 A_0 中是左可逆的。

证明。 将 a 替换为 a^*a后，我们可以假设 a 是自伴的。我们将证明 $\mathrm{ord}(a) = 0$。假设并非如此。我们将通过证明 a 在$\mathcal{A}_0/I_{\mathrm{ord}(a)-1}$中可逆来导出矛盾。设$\pi \in \Sigma(\mathcal{A})$ 是$\mathcal{A}_0/I_{\mathrm{ord}(a)-1}$的一个不可约表示。由于 a 是自伴的， $L^2(\pi) \xrightarrow{\pi_0(a)} L^2(\pi)$是一个指标为 0 的 Fredholm 算子。

现在考虑元素 $v_{k_1}\cdots v_{k_n}av_{-k_n}\cdots v_{-k_1}\in\mathcal{A}_0$，其中 $k_1,\cdots,k_n\in K_+$和 $n\in\mathbb{N}$。通过反复应用引理 1.14，我们得到

$$\mathrm{ord}(v_{k_1}\cdots v_{k_n}av_{-k_n}\cdots v_{-k_1})\leqslant\mathrm{ord}(a)$$

因此，$L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(v_{k_1}\cdots v_{k_n}av_{-k_n}\cdots v_{-k_1})}L^2(\pi)$ 是一个 Fredholm 算子。为说明这一点，若 ord $(v_{k_1}\cdots v_{k_n}av_{-k_n}\cdots v_{-k_1})=$ ord(a)，则命题 1.5 可推出其为 Fredholm 算子；若 ord $(v_{k_1}\cdots v_{k_n}av_{-k_n}\cdots v_{-k_1})<$ ord(a)，则 $L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(v_{k_1}\cdots v_{k_n}av_{-k_n}\cdots v_{-k_1})}L^2(\pi)$ 可逆。通过反复应用我们的连续性假设 (5) 以及假设 v_0 可逆，它们的 Fredholm 指标都与 $L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(a)}L^2(\pi)$ 相同。因此，它们的 Fredholm 指标为零。

令 $V=\ker(L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(a)}L^2(\pi))$。由于 $H^k(\pi)\subseteq H^l(\pi)$ if $l\leqslant k$ 且 V是有限维的，存在 $l\in\mathbb{R}_+^\nu$ 使得

$$V\cap H^l(\pi)=\bigcap_{k\in\mathbb{R}_+^\nu}V\cap H^k(\pi)=V\cap C^\infty(\pi),$$

其中第二个等式由（4）得出。根据我们的假设，$\pi_0(a)$ 在 $C^\infty(\pi)$上是单射的，即 $V\cap C^\infty(\pi)=0$。因此，$V\cap H^l(\pi)=0$。固定 k_1，$\cdots$，$k_n\in K_+$使得 $k_1+\cdots+k_n=l$。映射 $L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(v_{k_1}\cdots v_{k_n}av_{-k_n}\cdots v_{-k_1})}L^2(\pi)$等于以下复合

$$L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_{-k_1}(v_{-k_1})}H^{k_1}(\pi)\cdots H^l(\pi)\xrightarrow{\pi_0(a)}H^l(\pi)\cdots\xrightarrow{\pi_{k_1}(v_{k_1})}L^2(\pi)\tag{11}$$

根据引理 1.13，外部映射是拓扑同构。内部映射是单射的，因为 $V\cap H^l(\pi)=0$。因此，$L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(v_{k_1}\cdots v_{k_n}av_{-k_n}\cdots v_{-k_1})}L^2(\pi)$ 是单射的。于是，它是双射的（因为它是 Fredholm 指标为 0 的 Fredholm 算子）。所以，（11）中的每个映射都是双射。因此，$H^l(\pi)\xrightarrow{\pi_0(a)}H^l(\pi)$ 是满射的。于是，$L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(a)}L^2(\pi)$ 具有稠密像，因为$C^\infty(\pi)\subseteq H^l(\pi)\subseteq L^2(\pi)$。一个 Fredholm 指标为 0 且像稠密的 Fredholm 算子是可逆的。因此，$L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(a)}L^2(\pi)$是可逆的。根据命题 1.1，$a$ 在$\mathcal{A}_0/I_{\mathrm{ord}(a)-1}$ 中是可逆的，这就矛盾了。

—

□

现在证明：如果 $k\in\mathbb{C}^\nu$, $a\in\mathrm{A}_k$ 满足 $C^\infty(\pi)\xrightarrow{\pi_k(a)}C^\infty(\pi)$，且对于任意 $\pi\in\Sigma(\mathrm{A})$, $C^\infty(\pi)\xrightarrow{\pi_{\tilde{k}}(a^*)}C^\infty(\pi)$均为单射，那么对于 $(\mathrm{A})_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的任意表示 π，(6) 都是拓扑同构。我们需要证明 (6) 存在连续的左逆和右逆。因此，将a 替换为 a^*a 和 aa^*后，不妨设 $k\in\mathbb{R}^\nu$ 且 $a=a^*$。令 $l\in\mathbb{R}^\nu$。任取元素k_1、$\cdots$、k_n、k_1'、$\cdots$、$k_m'\in K_{\mathbb{R}}$，使得 $k_1+\cdots+k_n=l-k$且 $k_1'+\cdots+k_m'=-l$。由引理 1.15 和引理 1.13 可知，对于任意 $l\in\mathbb{R}^\nu$，$v_{k_1}\cdots v_{k_n}av_{k_1'}\cdots v_{k_m'}\in\mathrm{A}_0$ 在 A_0 中是左可逆的。对伴随应用相同的论证，可得它是可逆的。现在，设 π 是 $(\mathrm{A})_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的一个表示。因此，$L^2(\pi)\xrightarrow{\pi_0(v_{k_1}\cdots v_{k_n}av_{k_1'}\cdots v_{k_m'})}L^2(\pi)$ 是可逆的。将此映射因式分解并应用引理 1.13，可得 $H^l(\pi)\xrightarrow{\pi_k(a)}H^{l-k}(\pi)$ 是拓扑同构。令 $l\to\infty$ 趋于极限，并利用 (4)，可得 $C^\infty(\pi)\xrightarrow{\pi_k(a)}C^\infty(\pi)$ 是拓扑同构。由对偶性，$C^{-\infty}(\pi)\xrightarrow{\pi_k(a)}C^{-\infty}(\pi)$ 是拓扑同构。

现在证明，对于任意 $k\in\mathbb{C}^\nu$，存在 $a\in\mathcal{A}_k$，使得对于 $(\mathcal{A})_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的任意表示 π，映射 (6) 都是拓扑同构。根据我们已经证明的内容，只需证明对于任意 $\pi\in\Sigma(\mathcal{A})$, $C^\infty(\pi)\xrightarrow{\pi_k(a)}C^\infty(\pi)$ 和 $C^\infty(\pi)\xrightarrow{\pi_k(a^*)}C^\infty(\pi)$ 都是单射。将 k 写成 $k_1+\cdots+k_n$ 与 $k_i\in K$ 之和，并取 $a=v_{k_1}\cdots v_{k_n}$。由于根据假设（参见本证明开头，我们还将 k 替换成了 $-k$），对于任意 $k\in K$，$v_{-k}v_k$ 在 $\mathcal{A}_0$ 中可逆，因此对于任意 $\pi\in\Sigma(\mathcal{A})$，$\pi_k(v_k)$ 在 $L^2(\pi)$ 上，尤其是在 $C^\infty(\pi)$ 上是单射。可逆性

$v_{-k}v_k$ 可逆意味着其伴随也可逆。因此，依据同样的论证， $\pi_k(v_k^*)$ 在 $C^\infty(\pi)$ 上是单射。现在证明，对于 $(\mathcal{A})_{k\in\mathbb{C}^\nu}$ 的任意表示 π， $C^{-\infty}(\pi)=\bigcup_{k\in\mathbb{R}^\nu}H^k(\pi)$。设 $\xi\in C^{-\infty}(\pi)$。根据 $C^\infty(\pi)$ 上拓扑的定义，存在 $C>0$、 $a_1\in\mathcal{A}_{k_1}$， $\cdots$， $a_n\in\mathcal{A}_{k_n}$，使得

$$|\langle\eta,\xi\rangle|\leqslant C\sum_{i=1}^n\left\|\pi_{k_i}(a_i)\eta\right\|_{L^2(\pi)},\quad\forall\eta\in C^\infty(\pi)$$

令 $k\in\mathbb{R}^\nu$ 使得对所有 i均有 $k_i\leqslant k$，且 $w\in\mathcal{A}_k$ 使得（6）为拓扑同构。因此，$H^k(\pi)\xrightarrow{\pi_k(w)}L^2(\pi)$ 是一个拓扑同构。于是，

$$|\langle\eta,\xi\rangle|\leqslant C'\left\|\pi_k(w)\eta\right\|_{L^2(\pi)},\quad\forall\eta\in C^\infty(\pi)\tag{12}$$

映射 $C^{-\infty}(\pi)\xrightarrow{\pi_k(w)}C^{-\infty}(\pi)$ 是一个拓扑同构。因此，存在 $\xi'\in C^{-\infty}(\pi)$使得 $\pi_k(w)\xi'=\xi$。由（12）以及 $C^\infty(\pi)\xrightarrow{\pi_k(w)}C^\infty(\pi)$的满射性，我们推得$\xi'\in L^2(\pi)$。因此， $\xi\in H^{-k}(\pi)$。

□

问题 1.16。 定理 1.11 是否仍然成立，而$\mathcal{A}_0$ 不一定是I 型?

2 Helffer-Nourrigat 定理

本节的内容大多属于众所周知的结果（主要归功于 Glowski、Goodman、Helffer、Knapp、Nourrigat、Stein、Taylor [KS71; Goo73; HN79; Tay84; Gło91] 及其合作者），但定理 2.18 的证明除外。

深度为 $N\in\mathbb{N}$ 的分次幂零李代数是一个分次向量空间 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}^N$，其上赋有李代数结构，使得对每个 $i,j\in\{1,\cdots,N\}$

$$[\mathfrak{g}^i,\mathfrak{g}^j]\subseteq\begin{cases}\mathfrak{g}^{i+j}, & \text{if } i+j\leqslant N\\ 0 & \text{if not}\end{cases}$$

由于 $\mathfrak{g}$ 是幂零的，Baker-Campbell-Hausdorff（BCH）公式

$$g\cdot h:=g+h-\frac{1}{2}[g,h]+\frac{1}{12}[g,[g,h]]-\frac{1}{12}[h,[h,g]]+\cdots\tag{13}$$

是一个有限和。我们的 BCH 公式与群论中使用的公式相差一个符号，也就是说，我们的公式是相反李代数的通常公式。因此，若 X_g 是 $\mathfrak{g}$ 上满足 $X_g(0)=g$ 的右不变向量场，则 $[X_g,X_h]=X_{[g,h]}$。

配备由 BCH公式 给出的乘法后，空间 $\mathfrak{g}$ 是一个积分 $\mathfrak{g}$的单连通李群。本文中，我们将 $\mathfrak{g}$ 同时视为李群和李代数。需要强调其李群结构时，我们改用记号 G 。根据上下文， $g\in\mathfrak{g}$ 的逆映射记为 $-g$ 或 g^{-1} 。 $\mathfrak{g}$ 上的勒贝格测度也是 G上的 Haar 测度。我们固定这样一个测度，并将其记为 $\mathrm{d}g$。

设 $C^{-\infty}(\mathfrak{g})$ 是 $C_c^\infty(\mathfrak{g})$的拓扑反线性对偶， $C_c^{-\infty}(\mathfrak{g})$ 是紧支集分布构成的子空间。分布 u 对函数 f 的作用记为 $\langle f,\ u\rangle$。 换言之，我们只使用内积 $\langle\phi,\ \psi\rangle=\int\phi\psi$，其中 $\phi,\ \psi\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$。

卷积： 若 $u,\ v\in C^{-\infty}(\mathfrak{g})$，则我们利用群律定义卷积和转置

$$u*v(g)=\int u(gh^{-1})v(h)\,\mathrm{d}h,\quad u^t(g)=u(g^{-1}),\quad u^*=\overline{u^t}.$$

如果 u 或 v 具有紧支集，则卷积是良定义的。元素 δ 表示位于 0 处的狄拉克δ分布，它是卷积乘积的单位元。

右不变微分算子： 设 $D : C^\infty(\mathfrak{g}) \to C^\infty(\mathfrak{g})$ 是 G上的右不变微分算子。我们用 $\delta_D \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 表示满足以下条件的唯一分布：对所有 $f \in C^\infty(\mathfrak{g})$，均有 $\delta_D * f = D(f)$。设 D^* 是 D 的形式伴随，它也是右不变的。可以验证

$$f * \delta_D = D^*(f), \quad \delta_{D_1} * \delta_{D_2} = \delta_{D_1 D_2}, \quad \delta_D^* = \delta_{D^*}.$$

映射 $D \mapsto \delta_D$ 是 $\mathfrak{g}$ 上右不变微分算子的 $*$代数与 $C_c^{-\infty}(\mathfrak{g})$ 中支集包含于 $\{0\}$的分布所成的 $*$子代数之间的一个 $*$代数同构

膨胀： 我们定义膨胀

$$\alpha_\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad \alpha_\lambda\left(\sum_{i=1}^N g_i\right) = \sum_{i=1}^N \lambda^i g_i, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

映射 α_λ 是李代数同态，也是李群同态。分布上的膨胀作用定义为

$$\alpha_\lambda : C^{-\infty}(\mathfrak{g}) \to C^{-\infty}(\mathfrak{g}), \quad \langle \phi, \alpha_\lambda(u)\rangle = \langle \phi \circ \alpha_\lambda, u\rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}). \tag{14}$$

因此，若 $u \in C^\infty(\mathfrak{g})$，则

$$\alpha_\lambda(u) = \lambda^{-Q} u \circ \alpha_{\lambda^{-1}}, \quad Q = \sum_{i=1}^N i \dim(\mathfrak{g}^i). \tag{15}$$

于是，若 $u \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$，则

$$\operatorname{supp}(\alpha_\lambda(u)) \subseteq \alpha_\lambda(\operatorname{supp}(u)), \quad \|\alpha_\lambda(u)\|_{L^1} = \|u\|_{L^1}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^\times. \tag{16}$$

值得注意的是

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \alpha_\lambda(u) = \langle 1, u\rangle \delta, \quad \forall u \in C_c^{-\infty}(\mathfrak{g}), \tag{17}$$

其中极限是在 $C_c^{-\infty}(\mathfrak{g})$ 中取的。

注意， $P \in C^\infty(\mathfrak{g})$ 作为一个次数为 $-n-Q$ 的分布是齐次的，当且仅当$P \circ \alpha_\lambda = \lambda^n P$。此外，由于在 0 处光滑， P必然是一个多项式。

齐次微分算子： 若右不变微分算子 D 满足 δ_D 的齐次次数为 k，则称其为次数为 k 的齐次算子，即

$$D(\phi \circ \alpha_\lambda) = \lambda^k D(\phi) \circ \alpha_\lambda \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}), \tag{18}$$

我们用 $\mathrm{DO}^k(\mathfrak{g})$ 表示次数为 k的齐次右不变微分算子空间。

设 $n \in \mathbb{N}$。我们用 $C_{c,\ n}^\infty(\mathfrak{g})$ 表示 $u \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 的子空间，该子空间中的元素满足：对于任意次数为 $-m-Q$ 且满足 $m < n$的齐次多项式 $P \in C^\infty(\mathfrak{g})$，均有 $\int Pu = 0$。按惯例$C_{c,\ 0}^\infty(\mathfrak{g})$:$= C_c^\infty(\mathfrak{g})$。

命题 2.1. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $u \in C_{c,n}^\infty(\mathfrak{g})$ 当且仅当 $u = \sum_i \delta_{D_i} * v_i$，其中 $v_i \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 且$D_i \in \mathrm{DO}^{n_i}(\mathfrak{g})$ 是次数为 $n_i \geqslant n$的齐次函数。

证明。 蕴含关系 $\Longleftarrow$ 显然。我们来证明另一个蕴含关系。下面的引理是经典结果。

引理 2.2. 若 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} u = 0$，则存在 $u_1, \cdots, u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得$u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$。

—

引理 2.3. 对于每个 $g \in \mathfrak{g}$，令 Y_g 为 $\mathfrak{g}$ 上的常向量场，其取值恒等于 g；令 X_g 为在0处取值等于 g 的右不变向量场。若 $g \in \mathfrak{g}^i$，则 $X_g - Y_g$ 是若干形如 PY_h的元素之和，其中 $h \in \mathfrak{g}^j$ 满足 $j > i$， P 是 $\mathfrak{g}$ 上的多项式，且只依赖于 $\oplus_{k=1}^{j-1}\mathfrak{g}^k$。特别地， $Y_h(P) = 0$。

证明。 这由 BCH公式立即得出，因为对于某些系数 $c_k \in \mathbb{Q}$，有 $X_g(h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(tg) \cdot h = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \operatorname{ad}_h^k(g)$ 。 □

令 $u \in C_c^{\infty}{}_{,1}(\mathfrak{g})$。引理 2.2 蕴含， u 是若干形如 $Y_g(v)$ 的元素之和，其中 $v \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$且 $g \in \mathfrak{g}^i$ ，对某个 i成立。根据引理 2.3，我们可以用 $X_g(v)$ 替换 $Y_g(v)$ ，并将其替换为若干形如 $PY_h(v) = Y_h(Pv)$ 的元素之和，其中对 $j > i$有 $h \in \mathfrak{g}^j$ 。重复这一过程即可得出结论。对于一般的 $n \in \mathbb{N}$，我们用归纳法。令 $n \geqslant 2$ 和 $u \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 满足：对于所有满足某个 $m < n$的 $P \in C^\infty(\mathfrak{g})$ 多项式，均有 $\int Pu = 0$ 。应用归纳假设，我们可以将 u 写成若干形如 $D(v)$ 的元素之和，其中 $D \in \mathrm{DO}^m(\mathfrak{g})$ 且 $m \geqslant n-1$。固定一个满足 $\int w = 1$的 $w \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 。将每一项 $D(v)$ 写成 $D(v - \langle 1, v\rangle w) + \langle 1, v\rangle D(w)$。对 $v - \langle 1, v\rangle w$应用情形 $n = 1$ ，可将 u 写成一个形如 $D(v)$ 的元素与若干形如 $D(w)$ 的元素之和，其中 D 为 $\geqslant n$ 次齐次，且 D 为$\leqslant n-1$次齐次。现在固定 $\oplus_{m\leqslant n-1}\mathrm{DO}^m(\mathfrak{g})$的一组基。由于该空间与满足某个 $m < n$的多项式空间对偶，我们推知，对于 $\langle P$，若 $u\rangle = 0$ 对所有这样的P都为零，则所有形如 $D(w)$ 的项都必须为零。

□

空间$C_{c,\ n}^{\infty}(\mathfrak{g})$ 在取伴随运算下显然是封闭的，因为若 P 是次数为$-m-Q$的齐次元，那么 P^* 也是次数为 $-m-Q$的齐次元。因此，在命题 2.1 中，可以用 $u * \delta_D$替换$\delta_D * u$ 。由此可推出：

$$C_{c,n}^\infty(\mathfrak{g})^* = C_{c,n}^\infty(\mathfrak{g}), \quad C_{c,n}^\infty(\mathfrak{g}) * C_{c,m}^\infty(\mathfrak{g}) \subseteq C_{c,n+m}^\infty(\mathfrak{g}), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{19}$$

酉表示与分布： 设 π 是 G的酉表示， $C^\infty(\pi) \subseteq L^2(\pi)$ 为光滑向量构成的子空间，即 $\xi \in L^2(\pi)$ 中满足映射 $g \in G \mapsto \pi(g)\xi \in L^2(\pi)$ 为弗雷歇光滑的元素所构成的子集。设 D 是 $\mathfrak{g}$上的右不变微分算子， $\xi \in C^\infty(\pi)$。我们将 $\pi(D)\xi \in L^2(\pi)$ 定义为在 $g = 0$处取值的 $D(g \mapsto \pi(g)\xi)$ 。若 ξ 光滑，则 $\pi(D)\xi$也光滑。因此， $\pi(D) \in \mathrm{End}(C^\infty(\pi))$。可以直接验证，对于所有$D_1$， D_2 右不变微分算子， $\pi(D_1D_2) = \pi(D_1)\pi(D_2)$ 成立。我们在 $C^\infty(\pi)$ 上赋予由所有半范数 $\|\pi(D)\xi\|_{L^2(\pi)}$生成的拓扑。该拓扑使 $C^\infty(\pi)$ 成为一个弗雷歇空间。我们将配备弱拓扑的 $C^\infty(\pi)$ 的拓扑反线性对偶空间记为 $C^{-\infty}(\pi)$。

例 2.4。 设 Θ 是 G 在 $L^2(G)$ 上的左正则表示。根据局部索伯列夫嵌入定理， $C^\infty(\Theta)$ 是满足以下条件的 $f \in C^\infty(G)$ 空间：对于任意 $D \in \mathrm{DO}(\mathfrak{g})$， $D(f) \in L^2(G)$。在文章的最后，这个例子将尤为重要。

推广到分布： 设 $\xi \in C^\infty(\pi)$ 和 $u \in C_c^{-\infty}(\mathfrak{g})$。若 $\eta \in L^2(\pi)$，则 $g \in G \mapsto \langle \eta,\ \pi(g)\xi\rangle \in \mathbb{C}$ 是一个光滑函数。我们通过将黎斯表示定理应用于该泛函来定义 $\pi(u)\xi \in L^2(\pi)$

$$\langle \eta, \pi(u)\xi\rangle := \langle g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta\rangle, u\rangle, \quad \forall \eta \in L^2(\pi)$$

泛函 $\eta \mapsto \langle g \mapsto \langle \pi(g)\xi,\ \eta\rangle,\ u\rangle$ 有界这一事实，直接源于 u 作为反线性泛函 $C_c^\infty(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ 的连续性。可以验证

$$\pi(\delta_D) = \pi(D), \quad \pi(u)C^\infty(\pi) \subseteq C^\infty(\pi), \quad \pi(u_1 * u_2) = \pi(u_1)\pi(u_2), \quad \langle \pi(u)\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \pi(u^*)\eta\rangle,$$

其中 $\xi,\ \eta \in C^\infty(\pi)$ 且 D 是一个右不变微分算子。映射 $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi(u)} C^\infty(\pi)$是连续的。根据对偶性，它可延拓为一个连续映射 $C^{-\infty}(\pi) \xrightarrow{\pi(u)} C^{-\infty}(\pi)$。如果 $u \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$，那么 $\pi(u)C^{-\infty}(\pi) \subseteq C^\infty(\pi)$。此外，

$$\pi(u)\xi = \int_{\mathfrak{g}} u(g)\pi(g)\xi \,\mathrm{d}g, \quad \forall \xi \in L^2(\pi), u \in C_c^\infty(\mathfrak{g}) \tag{20}$$

这意味着

$$\|\pi(u)\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} \leqslant \|u\|_{L^1}. \tag{21}$$

C^***演算：** 设 $k \in \mathbb{C}$。空间 $\mathcal{A}_k$ 表示满足以下条件的分布 $u \in C_c^{-\infty}(\mathfrak{g})$

$$\alpha_\lambda(u) - \lambda^k u \in C_c^\infty(\mathfrak{g}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^\times. \tag{22}$$

例如 $\delta \in \mathcal{A}_0$, , 并且如果 $D \in \mathrm{DO}^k(\mathfrak{g})$，那么 $\delta_D \in \mathcal{A}_k$。有

$$\mathcal{A}_k * \mathcal{A}_l \subseteq \mathcal{A}_{k+l}, \quad \mathcal{A}_k^* = \mathcal{A}_{\overline{k}}, \quad \forall k, l \in \mathbb{C}.$$

如果 $u \in \mathcal{A}_k$，那么 $\mathrm{singsupp}(u) \subseteq \{0\}$。为此，注意到根据（22）， u 的奇异支集是 $\mathfrak{g}$ 的一个紧子集，并且在 $\mathbb{R}_+^\times$ 对 $\mathfrak{g}$的作用下保持不变。因此，$\mathrm{singsupp}(u) \subseteq \{0\}$。

命题 2.5。 设 $k \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ 满足 实部$(k) < n$。若 $f \in C_{c,\ n}^\infty(\mathfrak{g})$，则

$$u = \int_0^1 \alpha_t(f)\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+k}} \in \mathcal{A}_k \tag{23}$$

反过来，若 $u \in A_k$，则存在 $f \in C_{c,\ n}^\infty(\mathfrak{g})$ 和 $g \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$，使得

$$u = g + \int_0^1 \alpha_t(f)\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+k}}. \tag{24}$$

条件 $\mathrm{Re}(k) < n$ 基本上保证了该积分定义了一个分布。

证明。 我们可以假设 $f = \delta_D * g$ 满足 $D \in \mathrm{DO}^m(\mathfrak{g})$，且 $g \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 满足 $m > \mathrm{Re}(k)$。我们有 $\int_0^1 \alpha_t(f)\,\mathrm{d}\frac{t}{t^{1+k}} = \delta_D * \int_0^1 \alpha_t(g)\,\mathrm{d}\frac{t}{t^{1+k-m}}$。根据 (16)，第二个积分收敛于 L^1。因此， u 是一个定义良好的紧支撑分布，并满足 (22)。现在我们证明反向结论。

引理 2.6。 对于任意 $k \in \mathbb{C}$, $u \in A_k$，映射

$$\Psi : \mathbb{R}_+^\times \to C_c^\infty(\mathfrak{g}), \quad \Psi(\lambda) = \alpha_\lambda(u) - \lambda^k u. \tag{25}$$

是光滑的。

证明。 我们沿用 [EY19 中引理 21] 的证明。固定 $m \in \mathbb{N}$，令 $B_n := \{\lambda \in \mathbb{R}_+^\times : \|\Psi(\lambda)\|_{C^m} \leqslant n\}$。显然 $\mathbb{R}_+^\times = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$。由于 Ψ 作为映射 $\mathbb{R}_+^\times \to C^{-\infty}(\mathfrak{g})$ 是连续的，因此对任意 $n \in \mathbb{N}$， B_n 都是闭集。根据贝尔纲定理，存在 n ，使得 B_n 具有非空内部。由余循环关系 $\Psi(\lambda\lambda') = \alpha_\lambda(\Psi(\lambda')) + \lambda'^k\Psi(\lambda)$，我们推得该映射

$\lambda \in \mathbb{R}_+^\times \mapsto \|\Psi(\lambda)\|_{C^m} \in \mathbb{R}$ 局部有界。根据阿尔泽拉-阿斯科利定理，现在可得 $\Psi\colon \mathbb{R}_+^\times \to C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 的连续性

我们现在证明 $\Psi\colon \mathbb{R}_+^\times \to C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 是光滑的。设 $F \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^\times)$ 使得 $\int_0^{+\infty} F(t)t^k \frac{dt}{t} = 1$。可以验证

$$\Psi(\lambda) = \int_0^{+\infty} F(\lambda^{-1}t)\Psi(t) - F(t)\alpha_\lambda(\Psi(t))\frac{dt}{t}.$$

由于 $\Psi\colon \mathbb{R}_+^\times \to C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 是连续的，因此 $\Psi\colon \mathbb{R}_+^\times \to C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 是光滑的。 □

设 $u \in \mathcal{A}_k$。将 u 替换为 $u - g$，其中某个 $g \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 满足 $\langle P,\ g\rangle = \langle P,\ u\rangle$，对于所有次数为 $-m - Q$ 且满足 $m \leqslant n$的齐次多项式 P均成立；这样我们可以假设 $\langle P,\ u\rangle = 0$。根据引理 2.6,

$$f := \left.\frac{\mathrm{d}\alpha_t(u) - t^k u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \in C_{c,n}^\infty(\mathfrak{g}).$$

将链式法则应用于恒等式 $\alpha_{ts}(u) = \alpha_t(\alpha_s(u))$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}t^{-k}\alpha_t(u)}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha_t(f)}{t^{k+1}}$$

积分 $\int_0^1 \frac{\alpha_t(f)}{t^{k+1}}$ 定义了 $\mathcal{A}_k$ 中的一个元素，因为 $f \in C_{c,\ n}^\infty(\mathfrak{g})$。因此，极限

$$\lim_{t\to 0^+} t^{-k}\alpha_t(u) = u - \int_0^1 \frac{\alpha_t(f)}{t^{k+1}}$$

存在（作为一个分布），且它属于 $\mathcal{A}_k$。由 (16) 可知，极限的支集包含于 $\{0\}$。若 $k \notin \mathbb{Z}_+$，则这意味着极限为零。若 $k \in \mathbb{Z}_+$，则极限具有如下形式：δ_D，其中 $D \in \mathrm{DO}^k(\mathfrak{g})$。根据我们关于 $\langle P,\ u\rangle$ 消失的假设，这种情况下它也为零。 □

定理 2.7。若 $k \in \mathbb{C}$，且 $\mathrm{Re}(k) \leqslant 0$，并且 $u \in A_k$，而 π 是一个酉表示，则 $\pi(u)L^2(\pi) \subseteq L^2(\pi)$ 且 $L^2(\pi) \xrightarrow{\pi(u)} L^2(\pi)$ 连续。

据我所知，这一定理归功于 Knapp 和 Stein [KS71], ，另见 [Goo73]。我们的证明基本上与 Knapp 和 Stein 的证明相同。我们只简化了一些技术细节。

证明。我们先讨论 $\mathrm{Re}(k) < 0$ 的情形。令 $v = u - 2^k\alpha_{2^{-1}}(u) \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$。我们有

$$u = 2^{k(n+1)}\alpha_{2^{-k(n+1)}}(u) + \sum_{j=0}^{n} 2^{kj}\alpha_{2^{-j}}(v).$$

由（17），

$$\pi(u)\xi = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{kj}\pi(\alpha_{2^{-j}}(v))\xi, \quad \forall \xi \in C^{-\infty}(\pi).$$

如果 $\xi \in L^2(\pi)$，那么该级数在 $L^2(\pi)$ 中收敛，因为根据（16）和（21），我们有

$$\sum_{j=0}^{\infty} |2^{kj}| \left\|\pi(\alpha_{2^{-j}}(v))\xi\right\|_{L^2(\pi)} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\mathrm{Re}(k)j} \left\|\alpha_{2^{-j}}(v)\right\|_{L^1} \|\xi\|_{L^2(\pi)} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\mathrm{Re}(k)j} \|v\|_{L^1} \|\xi\|_{L^2(\pi)}.$$

现在我们讨论 $\mathrm{Re}(k) = 0$ 的情形。将 u 替换为 $u^* * u$ 后，可以假设 $k = 0$。这种情形下的证明要用到以下引理。

引理 2.8 (Cotlar-Stein 引理 [Hör85, 引理 18.6。5]). 设 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是作用于希尔伯特空间 H 上的一列有界算子，使得

$$A=\sup_j\sum_{k=1}^{+\infty}\left\|A_j^*A_k\right\|_{\mathcal{L}(H)}^{1/2}<+\infty,\quad B=\sup_j\sum_{k=1}^{+\infty}\|A_jA_k^*\|_{\mathcal{L}(H)}^{1/2}<+\infty.$$

和 $\sum_{k=1}^{+\infty}A_k$ 在强拓扑下收敛到一个范数为 $\leqslant\sqrt{AB}$ 的有界算子。

引理 2.9. 存在一个连续半范数 q，定义在 $C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 上，使得

$$\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_j\pi(\alpha_{2^j}(v))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}\leqslant q(v)$$

对所有 $v\in C_{c,\ 1}^\infty(\mathfrak{g})$ 以及满足 $|\beta_j|\leqslant 1$ （对所有 $j\in\mathbb{Z}$）的 $(\beta_j)_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}$。

证明. 我们应用 Cotlar-Stein 引理。将 π 替换为 $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\pi\circ\alpha_{2^j}$后，可以假设 $\|\pi(\alpha_{2^j}(\phi))\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}=\|\pi(\phi)\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}$ 对所有 $\phi\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$均成立。因此,

$$\left\|\pi\Big(\overline{\beta_j}\beta_l\alpha_{2^j}(v)^**\alpha_{2^l}(v)\Big)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}\leqslant\left\|\pi\Big(v^**\alpha_{2^{l-j}}(v)\Big)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}.$$

因此，只需证明存在一个连续半范数 q，定义在 $C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 上，使得

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\|\pi\Big(v^**\alpha_{2^j}(v)\Big)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}^{\frac12}\leqslant q(v),\quad\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\|\pi\Big(v*\alpha_{2^j}(v^*)\Big)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}^{\frac12}\leqslant q(v)$$

由对称性，只需处理第一种情况。我们将和式 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}=\sum_{j\geqslant0}+\sum_{j<0}$ 分解。由于$v\in C_{c,\ 1}^\infty(\mathfrak{g})$, 我们可以将 v 写成形如 δ_D*w 的元素的有限和，其中 $w\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 和$D\in\mathrm{DO}^n(\mathfrak{g})$，且 $n\geqslant1$。按照命题 2.1 的证明，在选取线性基$\oplus_{j=1}^N\mathrm{DO}^j(\mathfrak{g})$ 后，可以选择依赖于 v 连续变化的 w。因此，将 v 替换为 δ_D*w 后，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j<0}\left\|\pi\Big(v^**\alpha_{2^j}(\delta_D*w)\Big)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}^{\frac12}&=\sum_{j<0}2^{\frac{jn}{2}}\left\|\pi\Big(v^**\delta_D*\alpha_j(w)\Big)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}^{\frac12}\\&\leqslant\sum_{j<0}2^{\frac{jn}{2}}\|v^**\delta_D\|_{L^1}^{\frac12}\|w\|_{L^1}^{\frac12}.\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{j\geqslant0}\left\|\pi\Big((\delta_D*w)^**\alpha_{2^j}(v)\Big)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}^{\frac12}&=\sum_{j\geqslant0}\left\|\pi\Big(w^**\delta_{D^*}*\alpha_{2^j}(v)\Big)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}^{\frac12}\\&=\sum_{j\geqslant0}2^{\frac{-jn}{2}}\left\|\pi\Big(w^**\alpha_{2^j}(\delta_{D^*}*v)\Big)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))}^{\frac12}\\&\leqslant\sum_{j\geqslant0}2^{\frac{-jn}{2}}\|w^*\|_{L^1}^{\frac12}\|\delta_{D^*}*v\|_{L^1}^{\frac12}.\end{aligned}$$

□

令 $u\in\mathcal{A}_0$, $v=u-\alpha_{2^{-1}}(u)\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$。由命题 2.1，$v\in C_{c,\ 1}^\infty(\mathfrak{g})$。由 (17)，我们推得

$$\pi(u)-\langle1,u\rangle\pi(\delta)=\sum_{j\leqslant0}\pi(\alpha_{2^j}(v)).\tag{26}$$

由于 $\pi(\delta)$ =恒等算子，结论得证。 □

由定理 2.7 可知，我们可以定义

$$\|u\|_{\overline{\mathcal{A}}_0} := \sup_{\pi\in\hat{G}} \|\pi(u)\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} = \Xi(u)_{L^2(G)}, \quad u \in \mathcal{A}_0.,$$

ˆ 其中， Ξ 是将 $\mathfrak{g}$ 视为李群后得到的左正则表示， G 是 G的不可约酉表示空间。第二个等式源于李群 G 是可和的这一事实。由此我们定义了一个 C^*演算。我们感兴趣的演算 $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{C}}$ 有两类表示。

第一类表示： 若 π 是 G的酉表示，则对所有 $k \in \mathbb{C}$，我们定义 $\pi_k := \pi$ 。算子 $\pi(u) \in \mathcal{L}(C^\infty(\pi))$ 对任意 $u \in \mathcal{A}_k$ 都有良好定义，因为 u 是紧支撑的。利用半范数 $\|\pi(u)\xi\|_{L^2(\pi)}$ （其中 $k \in \mathbb{C}$ 且 $u \in \mathcal{A}_k$ ）定义的 $C^\infty(\pi)$ 上的拓扑，与 $C^\infty(\pi)$ 上的通常拓扑一致，因为对任意 $D \in \mathrm{DO}^n(\mathfrak{g})$，都有 $\delta_D \in \mathcal{A}_n$。由此可得，我们为 $k \in \mathbb{R}$定义了 Sobolev 空间 $H^k(\pi)$ ，参见定义 1.8 后的段落。

第二类表示： 设 π 是G的非平凡不可约酉表示。我们通过以下公式定义 π_k ：

$$\pi(\sigma^k(u))\xi := \lim_{n\to+\infty} 2^{-nk}\pi(\alpha_{2^n}(u))\xi, \quad \forall u \in \mathcal{A}_k, \xi \in C^\infty(\pi) \tag{27}$$

我们将使用记号 $\pi(\sigma^k(u))$ 代替 π_k ，以避免混淆第一类和第二类表示。

定理 2.10。极限(27) 存在于 $C^\infty(\pi)$中，且诱导映射 $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi(\sigma^k(u))} C^\infty(\pi)$ 连续。族 $(\pi(\sigma^k(\cdot)))_{k\in\mathbb{C}}$ 定义了 $(A)_{k\in\mathbb{C}}$的一个表示。事实上，以下结论成立：

1. 若 $u \in A_k, w \in A_l, \xi, \eta \in C^\infty(\pi)$，则

$$\pi_0(\delta) = \mathrm{Id}_{C^\infty(\pi)}, \quad \pi(\sigma^k(u))\pi(\sigma^l(w)) = \pi_{k+l}(uw), \quad \langle\xi, \pi(\sigma^k(u))\eta\rangle = \langle\pi(\sigma^{\bar{k}}(u^*))\xi, \eta\rangle.$$

2. 若$\mathrm{Re}(k) \leqslant 0$，则 $\pi(\sigma^k(u))$ 可延拓为 $L^2(\pi)$上的有界算子。此外，对所有$u \in A_0$，$\left\|\pi(\sigma^0(u))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} \leqslant \|u\|_{\mathcal{A}_0}$。 —

3. 对于任意的 $k \in \mathbb{C}$ 和 $u \in A_k$， $\pi(u) - \pi(\sigma^k(u))$ 可延拓为一个连续映射 $C^{-\infty}(\pi) \to C^\infty(\pi)$。特别地，使用半范数 $\left\|\pi(\sigma^k(u))\xi\right\|_{L^2(\pi)}$ （$k \in \mathbb{C}$ 和 $u \in A_k$ ）定义的 $C^\infty(\pi)$ 上的拓扑，与 $C^\infty(\pi)$ 上的通常拓扑一致；使用表示 $(\pi(\sigma^k(\cdot)))_{k\in\mathbb{C}}$ 定义的 *Sobolev* 空间，与将表示 π 视为第一类表示时定义的 *Sobolev* 空间一致。

证明。 由恒等式 $\pi(\sigma^{k+l}(\delta_D * u)) = \pi(\delta_D) * \pi(\sigma^k(u))$ （其中 $D \in \mathrm{DO}^l(\mathfrak{g})$）可知，要证明极限（27）在 $C^\infty(\pi)$ 中存在，只需证明它在 $L^2(\pi)$ 中存在，且诱导的 $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi(\sigma^k(u))} L^2(\pi)$ 连续。为此，令 $v = 2^{-k}\alpha_2(u) - u \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$。于是，

$$2^{-nk}\pi(\alpha_{2^n}(u)) = \pi(u) + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-jk}\pi(\alpha_{2^j}(v)) \tag{28}$$

该结果现在可由以下黎曼–勒贝格引理的变体推出：

引理 2.11。 若 π 是非平凡不可约酉表示，且 $u \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$，则对任意 $l \in \mathbb{N}$，极限 $\lim_{n\to+\infty} 2^{-nl} \left\|\pi(\alpha_{2^n}(u))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} = 0$。

证明。 由于平凡表示不弱包含于 π，存在 $v \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 使得 $\|\pi(v)\| < |\langle 1,\ v\rangle|$。通过重新缩放，我们可以假设 $\langle 1,\ v\rangle = 1$。因此， $\|\pi(v^* * v)\| < 1$，且算子 $\mathrm{Id}_{L^2(\pi)} - \pi(v) \colon L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 可逆。由 (16) 和 (21),

$$\begin{aligned}\left\|\pi(\alpha_{2^n}(u))(\mathrm{Id} - \pi(v))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} = \left\|\pi(\alpha_{2^n}(u) - \alpha_{2^n}(u) * v)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} &\leqslant \left\|\alpha_{2^n}(u) - \alpha_{2^n}(u) * v\right\|_{L^1} \\ &= \left\|u - u * \alpha_{2^{-n}}(v)\right\|_{L^1}\end{aligned}$$

我们有

$$u(g) - u * \alpha_{2^{-n}}(v)(g) = \int \big(u(g) - u(g\alpha_{2^{-n}}(h)^{-1})\big)v(h)\,\mathrm{d}h \tag{29}$$

中值定理结合 $u,\ v$ 的支集的紧性可得

$$\limsup_{n\to+\infty} 2^n \left\|u - u * \alpha_{2^{-n}}(v)\right\|_{L^1} < +\infty.$$

由于 $\mathrm{Id} - \pi(v)$ 可逆，我们推得

$$\limsup_{n\to+\infty} 2^n \left\|\pi(\alpha_{2^n}(u))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} < +\infty \tag{30}$$

现在，有两种方法可以继续。可以进行相同的计算，但将 $\mathrm{Id} - \pi(v)$ 替换为 $(\mathrm{Id} - \pi(v))^l$，并使用高阶中值定理。也可以使用 Dixmier-Mallivain 定理，下面我们将回顾该定理

定理 2.12 ([DM78, 3.1 定理], 另见 [Fra22])。 设 G 是一个配备 *Haar* 测度的李群。每个 $u \in C_c^\infty(G)$ 都可以表示为 $v_1 * w_1 + \cdots + u_m * v_m$，其中 $m \in \mathbb{N}$、v_i、$w_i \in C_c^\infty(G)$。

通过反复应用 Dixmier-Mallivain 定理和 (30)，我们推得对任意$l \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{n\to+\infty} 2^{nl} \left\|\pi(\alpha_{2^n}(u))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} < +\infty$$

这就完成了引理 2.11 的证明。 □

注意， $\pi(\sigma^k(u)) - \pi(u) = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-jk}\pi(\alpha_{2^j}(v))$ 由引理 2.11 可知，它将 $C^{-\infty}(\pi)$连续映射到 $C^\infty(\pi)$。特别地， $\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-jk}\pi(\alpha_{2^j}(v))$ 是一个有界算子 $L^2(\pi) \to L^2(\pi)$。此外，若 $\mathrm{Re}(k) \leqslant 0$, 则根据定理 2.7， $\pi(\sigma^k(u))$ 可延拓为 $L^2(\pi)$ 上的有界算子。

如果 $k = 0$, 那么

$$\left\|\pi(\alpha_{2^n}(u))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} \leqslant \left\|\alpha_{2^n}(u)\right\|_{\overline{\mathcal{A}_0}} = \|u\|_{\overline{\mathcal{A}_0}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此， $\left\|\pi(\sigma^0(u))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\pi))} \leqslant \|u\|_{\overline{\mathcal{A}_0}}$。

现在我们证明 $\pi(\sigma^k(u))\pi(\sigma^l(w)) = \pi_{k+l}(uw)$。如果 $\xi, \eta \in C^\infty(\pi)$, 那么我们有

$$\begin{aligned}\langle \pi(\sigma^k(u))\pi(\sigma^l(w))\xi, \eta\rangle = \langle \pi(\sigma^l(w))\xi, \pi(\sigma^{\bar{k}}(u^*))\eta\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle 2^{-nl}\pi(\alpha_{2^n}(w))\xi, 2^{-n\bar{k}}\pi(\alpha_{2^n}(u^*))\eta\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty} \langle 2^{-n(l+k)}\pi(\alpha_{2^n}(uw))\xi, \eta\rangle \\ &= \langle \pi_{k+l}(uw)\xi, \eta\rangle.\end{aligned}$$

定理 2.10 的其余部分很容易证明。 □

注 2.13。 若 $u \in \mathcal{A}_0$, , 则对于任意 酉表示 π，以及任意 $\xi \in L^2(\pi)$，极限（27）在 $L^2(\pi)$ 中存在，并定义了 $L^2(\pi)$ 上的一个有界算子。这直接由定理 2.7 和（28）得出。

注 2.14。 对于任意 $k \in \mathbb{C}$，如果 $u \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$，则根据引理 2.11， $\pi(\sigma^k(u)) = 0$ 。

Let

- $\Sigma_1(\mathcal{A})$ 是由 G 的不可约酉表示导出的第一类 $(\mathcal{A})_{k\in\mathbb{C}}$ 的所有表示构成的集合
- $\Sigma_2(\mathcal{A})$ 是由 G 的非平凡不可约酉表示导出的第二类 $(\mathcal{A})_{k\in\mathbb{C}}$ 的所有表示构成的集合。

我们取 $\Sigma(\mathcal{A}) = \Sigma_1(\mathcal{A}) \sqcup \Sigma_2(\mathcal{A})$。

定理 2.15。 具有 $\Sigma(A)$ 的 C^*演算 $(A)_{k\in\mathbb{C}}$ 满足定理 *1.11* 的假设 .

证明。 令 Θ 为 G 的左正则表示，见例 2.4。令 B 为$\mathcal{A}_0$ 按以下方式得到的豪斯多夫完备化

$$\|u\|_B := \left\|\Theta(\sigma^0(u))\right\|,$$

这里用到了注 2.13。注意， B 是一个豪斯多夫完备化，因为若 $u \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$，则根据注 2.14 有 $\|u\|_B = 0$ 。我们有一个显然的短正合列

$$0 \to C^*G \to \overline{\mathcal{A}_0} \to B \to 0 \tag{31}$$

显然，它在 C^*G 和 B处正合。在中间项处也正合。为此，取 $u \in \mathcal{A}_0$。我们将证明 $\|u\|_{\mathcal{A}_0/C^*G} \leqslant 2\|u\|_B$，这意味着（31）是正合的。设 $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 满足 $\int f = 1$。于是，

$$\Theta(u - u * \alpha_{2^{-n}}(f)) = \Theta(\sigma^0(u))(\mathrm{Id} - \Theta(\alpha_{2^{-n}}(f))) - (\Theta(\sigma^0(u)) - \Theta(u))(\mathrm{Id} - \Theta(\alpha_{2^{-n}}(f)))$$

第一项的范数有界于 $2\|u\|_B$。因此，我们只需证明第二项在范数意义下收敛到 0。事实上，由（28）可知，若 $v = \alpha_2(u) - u \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$，则

$$\begin{aligned}
\left\|(\Theta(\sigma^0(u)) - \Theta(u))(\mathrm{Id} - \Theta(\alpha_{2^{-n}}(f)))\right\|_{\mathcal{L}(L^2(G))} &= \left\|\Theta\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_{2^m}(v) - \alpha_{2^m}(v) * \alpha_{2^{-n}}(f)\right)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(G))} \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{+\infty} \|\alpha_{2^m}(v) - \alpha_{2^m}(v) * \alpha_{2^{-n}}(f)\|_{L^1} \\
&= \sum_{m=n}^{+\infty} \|v - v * \alpha_{2^{-m}}(f)\|_{L^1}
\end{aligned}$$

由（29）和中值定理，存在 $C > 0$ ，使得对所有 $m \geqslant 0$，都有 $\|\alpha_{2^m}(v) - \alpha_{2^m}(v) * f\|_{L^1} \leqslant C2^{-m}$。

为了完成定理 1.11 前两个假设的证明，我们需要证明 B 是 I 型，并且它的不可约表示都等价于某个 π G 的非平凡酉表示 $\pi(\sigma^0(\cdot))$ 。这一结果归功于 Fermanian-Kammerer 和 Fischer [FF20]。我们的论证与他们的不同，基本上与 Ewert [Ewe21] 的论证相同。

为方便读者，我们将概述 Ewert 的论证。设 C_1^*G 是 C^*G 中 $C_{c,\ 1}^\infty(\mathfrak{g})$ 的完备化。我们将证明 B 与 $C_1^*G \rtimes \mathbb{R}_+^\times$ Morita 等价，其中 $\mathbb{R}_+^\times$ 作用于

[1] 为避免集合论方面的问题，应取酉表示的等价类。我们将忽略 th is.

C_1^*G 上的作用方式为膨胀。事实上， B 是 Rieffel 正则作用的典型例子，见 [Rie90; BE16]。一旦得到 Morita 等价，结论便可由 Kirillov 轨道方法推出，该方法应用于群 $G \rtimes \mathbb{R}_+^\times$ ；这个群是指数可解群，见 [LL94]。

我们将使用希尔伯特 C^*-模与乘子理论，参见 [Lan95]。在空间 $C_{c,1}^\infty(\mathfrak{g})$ 上，根据命题 2.5，我们定义取值于 B 的内积

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \alpha_t(f^* * g)\frac{\mathrm{d}t}{t} \in B, \quad f, g \in C_{c,1}^\infty(\mathfrak{g}).$$

这是一个内积。唯一非平凡之处是证明：若 $u \in \mathcal{A}_0$,，则 $\langle f, g*u\rangle = \langle f, g\rangle * u$。事实上，

$$\langle f, g * u\rangle - \langle f, g\rangle * u \in C_c^\infty(\mathfrak{g}).$$

这可通过将 u 写成式 (24) 的形式得到。细节留给读者。令 E 为 $C_{c,1}^\infty(\mathfrak{g})$ 在该内积所诱导的范数下的完备化，即 $\|f\|_E = \|\langle f, f\rangle\|_B^{1/2}$。空间 E 是一个右 C^*-希尔伯特 B-模。该希尔伯特 E 模是满的，即 $\langle C_{c,1}^\infty(\mathfrak{g}), C_{c,1}^\infty(\mathfrak{g})\rangle$ 在 B 中稠密。为此，取 $u \in \mathcal{A}_0$。取 $n > N$，其中 N 是李群 G 的深度。根据命题 2.5，存在 $f \in C_{c,n}^\infty(\mathfrak{g})$，使得 $u - \int_0^1 \alpha_t(f)\,\mathrm{d}_t^{\,t} \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$。结论由以下引理得出：

引理 2.16。 任意 $f \in C_{c,\ n}^\infty(\mathfrak{g})$ 都可以写成形如 $f_1 * f_2$ 且满足 $f_1, f_2 \in C_{c,\ 1}^\infty(\mathfrak{g})$的元素之和。因此， u模 $C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 等于形如 $\langle f_1^*, f_2\rangle$的元素之和。

证明。 由命题 2.1，我们可以假设 $f = \delta_D * f'$，其中 D 是$\geqslant n$次齐次的。由于 $n > N$, D 不是向量场，因此我们可以假设 $D = D_1 D_2$，其中 D_1 和 D_2是 $\geqslant 1$次齐次的。因此，$\delta_{D_2} * f' \in C_{c,\ 1}^\infty(\mathfrak{g})$。由于 $C_{c,\ 1}^\infty(\mathfrak{g})$ 在取伴随运算下封闭，我们可以将 $\delta_{D_2} * f'$ 写成形如 $h * \delta_{D''}$ 的元素之和，其中某个 D'' 是 $\geqslant 1$次齐次的。总之， f可以写成形如 $\delta_{D_1} * f' * \delta_{D_2}$且满足 D_1 并且 D_2 是 $\geqslant 1$次齐次的元素之和。将定理 2.12 应用于 f'即可得到结论。

□

由于模 E 是满的，它在紧算子（按 Kasparov 的意义）$\mathcal{K}(E)$ 与 B之间给出 Morita 等价。根据 C^*-模上紧算子的定义，$\mathcal{K}(E) = C_1^*G \rtimes \mathbb{R}_+^\times$。

现在我们按照定理 1.11 构造元素 $v_k \in \mathcal{A}_k$，参见注 1.10。

引理 2.17. 存在 $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$和 $f' \in C_{c,1}^\infty(\mathfrak{g})$，使得 f、f'作为 C^*-代数 C^*G中的元素是正的，并且

1. 若 π 是 G的酉表示，则 $\pi(f)\colon L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 是单射。
2. 若 π 是 G的非平凡不可约酉表示，则 $\pi(f')\colon L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ 是单射。

证明。 设 $h \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 为任意满足 $\int h = 1$的光滑函数。定义

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \alpha_{2^{-n}}(h^* * h)$$

其中 $c_n > 0$ 为任意一个收敛到 0 的序列，且收敛速度足够快，使得 $f \in C^\infty(\mathfrak{g})$。由 (16) 可知，函数 f 是紧支撑的。

设 π 是 G、$\xi \in L^2(\pi)$的任意酉表示。若 $\pi(f)\xi = 0$，则对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\pi(\alpha_{2^{-n}}(h))\xi = 0$。由于对于任意 $\xi \in L^2(\pi)$， $\pi(\alpha_{2^{-n}}(h))\xi \to (\int h)\xi = \xi$ 属于 $L^2(\pi)$，见（20），因此可得 $\xi = 0$。

设 $X_1, \cdots, X_k$ 是右不变向量场，它们在原点线性张成 $\mathfrak{g}$。我们取 e

$$f' = \sum_{i=1}^{n} (\delta_{X_i} * f)^* * (\delta_{X_i} * f).$$

设 π 为一个非平凡不可约酉表示，$\xi \in L^2(\pi)$ 使得 $\pi(f')\xi = 0$。因此，对于所有 i，都有 $\pi(\delta_{X_i} * f)\xi = 0$。向量 $\eta = \pi(f)\xi$是一个光滑向量，并且 $\pi(\delta_{X_i})\eta = 0$。因此，$\eta$是一个不变向量。由于 π 是一个非平凡不可约表示，$\eta = 0$。因此，$\xi = 0$。 □

对于任意满足 $\mathrm{Re}(k) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$的 $k\in\mathbb{C}$，令

$$v_k := f + \int_0^1 \alpha_t(f') \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+k}}. \tag{32}$$

由命题 2.5，$v_k \in \mathcal{A}_k$。若 $\pi \in \Sigma_1(\mathcal{A})$，则 $\pi(v_0)$ 在 $L^2(\pi)$ 上的单射性源于 $\pi(f)$ 的单射性。若 $\pi \in \Sigma_2(\mathcal{A})$，则单射性

$$\pi(\sigma^0(v_0)) = \int_0^{+\infty} \alpha_t(f') \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

在 $L^2(\pi)$ 上的单射性源于 $\pi(f')$ 的单射性。因此，由命题 1.1，算子 v_0 在$\overline{\mathcal{A}_0}$ 中可逆。由引理 2.9 可立即得出，对于任意 $\overline{a}\in\mathcal{A}_0$，$k \mapsto v_{-k} a v_k \in \mathcal{A}_0$ 的连续性。 □

Helffer、Nourrigat 和 Glowski 定理： 根据本节中证明的结果，我们可以将定理 1.11 应用于演算 $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{C}}$。现在我们证明以下 Glowski [Gło91] 定理，该定理基于 Helffer 和 Nourrigat 的定理 [HN79]。

定理 2.18。 设 $k \in \mathbb{C}$ 和 $u \in\mathcal{A}_k$。以下命题等价

1. *For every $\pi \in \Sigma_2(\mathcal{A})$, the maps $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi(\sigma^k(u))} C^\infty(\pi)$ and $C^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi(\sigma^{\bar{k}}(u^*))} C^\infty(\pi)$ are injective.*

2. 对于每个 $\pi \in \Sigma_2(\mathcal{A})$，映射

$$\begin{aligned} &\pi(\sigma^k(u)) : C^{-\infty}(\pi) \to C^{-\infty}(\pi) \\ &\pi(\sigma^k(u)) : H^l(\pi) \to H^{l-\mathrm{Re}(k)}(\pi) \quad \forall l \in \mathbb{R}^\nu \\ &\pi(\sigma^k(u)) : C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi) \end{aligned} \tag{33}$$

   是拓扑同构。

3. 存在 $v \in \mathcal{A}_{-k}(\mathfrak{g})$，使得 $v * u - \delta$ 和 $u * v - \delta$ 属于 $C_c^\infty(\mathfrak{g})$

证明。蕴含关系 $3 \implies 2$ 由注 2.14 得出。蕴含关系 $2 \implies 1$ 是显然的。现在我们证明 $1 \implies 3$。由对称性，只需证明 u 在$\mathcal{A}_{-k}$中具有左参数子。将 u替换为 $v_{k_1} \cdots v_{k_n} * u^* * u$，其中 $v_{k_i} \in \mathcal{A}^{k_i}$如（32）中所示，并取 $k_1, \cdots, k_n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$使得 $k_1 + \cdots + k_n = -2\mathrm{Re}(k)$,- 我们可以假设 $k = 0$。取 $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 如引理 2.17.1 中所述。将 u 替换为 $u^*u + f$后，我们可以假设 $u \in \mathcal{A}_0$ 满足 $u = u^*$；对于任意不可约酉表示，$\pi(u)$ 在 $C^\infty(\pi)$上是单射的，并且如果 π 非平凡，则 $\pi(\sigma^0(u))$ 在 $C^\infty(\pi)$上也是单射的。特别地，定理 1.11 适用于 u。

令 Θ 为左正则表示，见例 2.4。根据定理 1.11，$\Theta(u)$ 是 $C^\infty(\Theta)$ 和 $L^2(G)$ 的拓扑同构。令 $T\colon L^2(G) \to L^2(G)$ 为其逆映射。由包含关系 $C_c^\infty(\mathfrak{g}) \subseteq C^\infty(\Theta) \subseteq C^\infty(\mathfrak{g})$，我们推得 $T(C_c^\infty(\mathfrak{g})) \subseteq C^\infty(\mathfrak{g})$。若 $R_g\colon L^2(G) \to L^2(G)$ 表示

由 $g\in\mathfrak{g}$ 给出的右平移，则 $\Theta(u)$ 与 R_g 可交换。因此， T 与 R_g 可交换。由此可知，存在唯一的分布 $v\in C^{-\infty}(\mathfrak{g})$，使得对所有 $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$， $T(f)=v*f$ 成立。因此，$v*u=\delta=u*v$。

现在我们证明 v 的奇异支集是 $\{0\}$。为此，对任意 $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$，令 $M_f\colon L^2(G)\to L^2(G)$ 为乘法算子。它将 $C^\infty(\Theta)$ 映射到 $C^\infty(\Theta)$。因此，根据对偶性，它在 $C^{-\infty}(\Theta)\to C^{-\infty}(\Theta)$ 上定义良好。

引理 2.19. 对于任意 $k\in\mathbb{C}$, $u\in\mathcal{A}_k$, $v_1,\cdots,v_n\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$，迭代对易子

$$[\cdots[\Theta(u),M_{v_1}],M_{v_2}],\cdots,],M_{v_n}]\in\mathcal{L}(C^{-\infty}(\Theta)).$$

将索伯列夫空间 $H^l(\Theta)$ 映射到 $H^{l-k+n}(\Theta)$

证明。在此证明中，我们令膨胀 α_t 按照公式 $\alpha_t(f)(x,y)=f(\alpha_{t^{-1}}(x),\alpha_{t^{-1}}(y))t^{-Q}$ 作用于 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 上的函数，见 (15)。

我们需要证明，若 $u'\in\mathcal{A}_{n-k}$，则 $\Theta(u')[\cdots[\Theta(u),\ M_{v_1}],\ M_{v_2}],\ \cdots,\ ],\ M_{v_n}]$ 是 $L^2(G)$ 上的有界算子。根据命题 2.5 和命题 2.1，我们可以假设，对于某个 $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$， D 是次数为 $>-\mathrm{Re}(k)$ 的左不变齐次函数。迭代对易子 $[\cdots[\Theta(u),\ M_{v_1}],\ M_{v_2}],\ \cdots,\ ],\ M_{v_n}]$ 的施瓦茨核为 $K(x,y)=\int_0^1\alpha_t(h_t)\,\mathrm{d}_{t^{1+k}}^{\ t}$，其中

$$h_t(x,y)=D(f)(xy^{-1})\Big(v_1(\alpha_t(x))-v_1(\alpha_t(y))\Big)\cdots\Big(v_n(\alpha_t(x))-v_n(\alpha_t(y))\Big)\tag{34}$$

同样，根据命题 2.5 和命题 2.1，我们可以假设 $u'=\int_0^1\alpha_t(D'(f'))\,\mathrm{d}_{t^{1+n-k}}^{\ t}$，其中 $f'\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 和 D' 是次数为 $>-\mathrm{Re}(k)+n$ 的右不变齐次函数。因此，算子 $\Theta(u')[\cdots[\Theta(u),\ M_{v_1}],\ M_{v_2}],\ \cdots,\ ],\ M_{v_n}]$ 的核经简单的变量代换后等于

$$\int_0^1\alpha_t\left(\int_0^1\int\alpha_s(D'(f'))(xy^{-1})\frac{h_t(y,z)}{t^n}\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}s}{s^{1+n-k}}+\int_0^1\int D'(f')(xy^{-1})\alpha_s(\frac{h_t}{t^n})(y,z)\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}s}{s^{1+k}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

我们注意到函数

$$K_t'(x,y)=\int_0^1\int\alpha_s(D'(f'))(xy^{-1})\frac{h_t(y,z)}{t^n}\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}s}{s^{1+n-k}}+\int_0^1\int D'(f')(xy^{-1})\alpha_s(\frac{h_t}{t^n})(y,z)\frac{\mathrm{d}s}{s^{1+k}}\,\mathrm{d}y$$

是 $(x、\ y、\ t)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathbb{R}_+$上的光滑函数。这里， x、 y 上的光滑性来自 D 和 D'的齐次次数，而 t 上的光滑性则由（34）显然可知。此外， K_t'' 具有如下性质：它等于 $D_x'K_t''(x、\ y)$ 和 $D_y''K_t'''(x、y)$，其中 K''和 K'''是 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathbb{R}_+$上的光滑函数； D_x' 表示 D' 作用于 x 变量，而 D_y''表示 D^t 作用于 y 变量，其中 $D^t(l):=D(l(y^{-1}))$。这足以使 Cotlar-Stein 方法（积分版本）像引理 2.9 中那样直接适用，并且使核为 $\int_0^1\alpha_t(K_t')\frac{\mathrm{d}t}{t}$ 的算子有界。

— □

下面证明 v 的奇异支集是 $\{0\}$。我们需要证明 u 是亚椭圆的，即 .,

$$\mathrm{singsupp}(u*f)=\mathrm{singsupp}(f),\quad\forall f\in C_c^\infty(\mathfrak{g}).$$

注意到 $C_c^\infty(\mathfrak{g})\subseteq C^{-\infty}(\Theta)$。我们将证明 u 是最大亚椭圆的，即对于任意开集 $U\subseteq\mathfrak{g}$

$$u*f\in H^s(\Theta)\text{ locally on }U\implies f\in H^s(\Theta)\text{ locally on }U,\quad\forall s\in\mathbb{R},f\in H^s(\Theta).\tag{35}$$

回顾一下，分布 w 在 U 上局部属于 $H^s(\Theta)$ ，是指对任意截断函数 $\chi \in C_c^\infty(U)$，都有 $\chi w \in H^s(\Theta)$。下面证明 (35)。注意，由定理 1.11 可知，(35) 在 $U = \mathfrak{g}$ 下成立，即我们具有全局最大拟椭圆性。现在，设 $f \in C^{-\infty}(\Theta)$ 满足 $u * f \in H^s(\Theta)$ 在 U 上局部成立，并令 $K \subseteq U$ 为一个紧子集。我们选取一列截断函数 $\chi_n \in C_c^\infty(U)$ ，使得 $\chi_n \chi_{n+1} = \chi_{n+1}$，并且对所有 n，$\chi_n = 1$ 在 K 上成立。我们将证明存在某个 n，使得 $\chi_n f \in H^s(\Theta)$。为此，取 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $f \in H^t(\Theta)$。在下面的等式中，为简便起见，我们用 $[u,\ \chi_n]$ 代替 $[\Theta(u),\ M_{\chi_n}]$。因此，

$$u * (\chi_1 f) = [u, \chi_1](f) + \chi_1(u * f)$$

根据引理 2.19，右边属于 $H^{\min(t+1,s)}$。因此，由全局最大拟椭圆性可知，$\chi_1 f \in H^{\min(t+1,s)}$。现在，

$$\begin{aligned} u * (\chi_2 f) = u * (\chi_2 \chi_1 f) &= [u, \chi_2](\chi_1 f) + \chi_2(u * \chi_1 f) = [u, \chi_2](\chi_1 f) + \chi_2([u, \chi_1](f) + \chi_1(u * f)) \\ &= [u, \chi_2](\chi_1 f) + [\chi_2, [u, \chi_1]](f) + [u, \chi_1](\chi_2 f) + \chi_2(u * f) \end{aligned}$$

第一项属于 $H^{\min(t+1,s)+1}$，第二项属于 H^{t+2}，第三项属于 $H^{\min(t+1,s)+1}$ ，因为 $\chi_2 f = \chi_2 \chi_1 f \in H^{\min(t+1,s)}$，第四项属于 H^s。因此，$\chi_2 f \in H^{\min(t+2,s)}$。重复这一过程可得 $\chi_n f \in H^{\min(t+n,s)}$。最大拟椭圆性随之成立，且 $\operatorname{singsupp}(v) = \{0\}$。

令 $w = \chi v$，其中 $\chi \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 在 0 的某个邻域内等于 1。因此，$w * u - \delta \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$。取伴随并利用 $u^* = u$这一事实，可得 $u * w^* - \delta \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$。将这两个方程合并，可推出 $w - w^* \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$。因此，$w$ 是 u的双边参数子。最后，有

$$w - \alpha_\lambda(w) = w * (\alpha_\lambda(u) - u) * \alpha_\lambda(w) \mod C_c^\infty(\mathfrak{g}).$$

因此，$w - \alpha_\lambda(w) \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$。所以，$w \in \mathcal{A}_0$。 □

注 2.20. 我们来简单说明一下定理 2.18 的证明思路。我们的结果定理 1.11.1 给出了全局最大拟椭圆性。要构造参数化子，需要局部最大拟椭圆性。为此，演算需要包含截断函数，并且与截断函数的交换子应使阶降低 1。一旦满足这一点，沿着引理 2.19 的论证（这是相当标准的）便可由全局最大拟椭圆性推出局部最大拟椭圆性。

我们原本可以从一开始就定义一种同时包含M_f （作为 $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 的 0 阶算子）和$\mathcal{A}_k$ （作为 k 阶算子）的演算，然后证明在这种演算中，与 M_f 取交换子会使阶降低 1。这种演算在 [Chr+92] 中定义。我们没有采用这种方法，因为我们认为这会使本节其余部分变得复杂。相反，我们采取了另一种方法，以一种非常临时的方式证明所需的交换子条件（引理 2.19）。

在我们此前的工作 [AMY22]，中，我们没有遇到这一困难，因为我们的演算已经包含了乘以光滑函数的运算，而且我们证明了与乘法算子取对易子会使阶降低 1。

参考文献

[AMY22] I. Androulidakis、O. Mohsen 和 R. Yuncken。最大亚椭圆算子的伪微分演算与 *Helffer-Nourrigat* 猜想。2022 年。arXiv：2201.12060 [math.AP]。

[AK71] L. Auslander 和 B. Kostant。《可解李群的极化与酉表示》。载于：《数学发明》14（1971），第 255–354 页。ISSN：0020-9910,1432-1297。DOI：10.1007/BF01389744.[Bea77] R. Beals。《幂零李群上的亚椭圆不变算子》。载于：Goulaouic-Schwartz 研讨会 1976/1977：偏微分方程与泛函分析，第 19 号报告。1977 年，第 8 页。[BE16] A. Buss 和 S. Echterhoff。《Rieffel 正则作用》。载于：《算子理论杂志》75.1（2016），第 49–73 页。ISSN：0379-4024,1841-7744。DOI：10.7900/jot.2014oct28.2047.[Chr+92] M. Christ 等。《带膨胀的群上的伪微分算子》。载于：《杜克数学杂志》68.1（1992），第 31–65 页。ISSN：0012-7094。DOI：10.1215/S0012-7094-92-06802-5.[CM95] A. Connes 和 H. Moscovici。《非交换几何中的局部指标公式》。载于：《几何与泛函分析》5.2（1995），第 174–243 页。ISSN：1016-443X,1420-8970。DOI：10.1007/BF01895667.[Dix62] J. Dixmier。《可解李群的酉表示》。载于：《冈山大学数学杂志》11（1962），第 1–18 页。ISSN：0030-1566。[Dix77] J. Dixmier。C^*-代数。Francis Jellett 从法语译出，北荷兰数学文库，第 15 卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约—牛津，1977 年，第 xiii+492 页。ISBN：0-7204-0762-1。[DM78] J. Dixmier 和 P. Malliavin。《函数与无限可微向量的分解》。载于：《数学科学通报》（第 2 辑）102.4（1978），第 307–330 页。ISSN：0007-4497。[EY19] E. van Erp 和 R. Yuncken。《伪微分演算的群胚方法》。载于：《纯粹与应用数学杂志》756（2019），第 151–182 页。ISSN：0075-4102。DOI：10.1515/crelle-2017-0035.[Ewe21] E. Ewert。分次幂零李群上的伪微分扩张。2021 年。arXiv:2002.01875 [math.OA].[FF20] C. Fermanian-Kammerer 和 V. Fischer。《分次李群上的缺陷测度》。载于：《比萨高等师范学院科学年刊》（第 5 辑）21（2020），第 207–291 页。ISSN：0391-173X。[Fra22] M. Francis。《李群胚的 Dixmier-Malliavin 定理》。载于：《李理论杂志》32.3（2022），第 879–898 页。ISSN：0949-5932。[Gło91] P. Głowacki。《非微分卷积算子的 Rockland 条件，II》。英文。载于：《数学研究》98.2（1991），第 98–114 页。ISSN：0039-3223。[Goo73] R. Goodman。《幂零李群上某些卷积算子的有界性与无界性》。载于：《美国数学学会会刊》39（1973），第 409–413 页。ISSN：0002-9939,1088-6826。DOI：10.2307/2039655.[Gui64] A. Guichardet。《C^*-代数张量积的特征与表示》。载于：《高等师范学院科学年刊》（第 3 辑）81（1964），第 189–206 页。ISSN：0012-9593。[Gui85] V. Guillemin。《Weyl 特征值渐近分布公式的新证明》。载于：《数学进展》55.2（1985），第 131–160 页。ISSN：0001-8708。DOI：10.1016/0001-8708(85)90018-0.[HN79] B. Helffer 和 J. Nourrigat。《分次幂零李群上左不变齐次亚椭圆算子的刻画》。载于：《偏微分方程通讯》4.8（1979），第 899–958 页。ISSN：0360-5302。DOI：10.1080/03605307908820115。

[Hig06] N. Higson.《Connes–Moscovici 剩余指标定理》。载于：非交换几何综述。第 6 卷。Clay 数学会议录。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2006 年，第 71–126 页。isbn：978-0-8218-3846-4；0-8218-3846-6。[Hör85] L. Hörmander。《线性偏微分算子分析》。III。第 274 卷。数学科学基础丛书 [。伪微分算子。施普林格出版社，柏林，1985 年，第 viii 页+525。isbn：3-540-13828-5。[KS71] A. W. Knapp 和 E. M. Stein。“半单群的交织算子”。载于：《数学年刊》（第二辑）93（1971），第 489–578 页。issn：0003-486X。doi：10.2307/1970887。[Lan95] E. C. Lance。Hilbert C^*-模。第 210 卷。伦敦数学会讲义系列。算子代数学家的工具包。剑桥大学出版社，剑桥，1995 年，第 x 页+130。isbn：0-521-47910-X。doi：10.1017/CBO9780511526206。[LL94] H. Leptin 和 J. Ludwig。指数李群的酉表示理论。第 18 卷。德格鲁伊特数学专题丛书。Walter de Gruyter 出版社，柏林，1994 年，第 x 页+200。isbn：3-11-013938-3。doi：10.1515/9783110874235。[Rie90] M. A. Rieffel。“群在 C^*-代数上的适当作用”。载于：算子代数映射（宾夕法尼亚州费城，1988）。第 84 卷。数学进展丛书。Birkhäuser Boston 出版社，马萨诸塞州波士顿，1990 年，第 141–182 页。isbn：0-8176-3476-2。[Roc78] C. Rockland。“海森堡群上的亚椭圆性——表示论判据”。载于：《美国数学会汇刊》240（1978），第 1–52 页。issn：0002-9947。doi：10.2307/1998805。[Rod75] L. Rodino。“两个流形乘积上的一类伪微分算子及其映射”。载于：《比萨高等师范学校科学კლას》（第四辑）2.2（1975），第 287–302 页。issn：0391-173X，2036-2145。[Tay84] M. Taylor。“非交换微局部分析。I”。载于：《美国数学会回忆录》52.313（1984），第 iv 页+182。issn：0065-9266。doi：10.1090/memo/0313。[Wie32] N. Wiener。“陶伯定理”。载于：《数学年刊》（第二辑）33.1（1932），第 1–100 页。issn：0003-486X，1939-8980。doi：10.2307/1968102。