arXiv:2601.13775v1 [math.RA] 20 Jan 2026

代数基本定理向 Q-循环矩阵多项式矩阵方程的推广

李洪建*

中国广东省广州市广东外语外贸大学数学与统计学院，邮编*510006*

摘要 本文为多项式矩阵方程建立了代数基本定理的一个类似结果，其中系数矩阵和未知矩阵均为 Q-循环矩阵。该结果推广了 Abramov 关于 [1] 循环矩阵的结果。

关键词代数基本定理；多项式矩阵方程； Q-循环矩阵

MR（2020）主题分类15A24,15B05

1 引言

代数基本定理（或称代数基本定理）指出，每个非常数复多项式至少有一个复根。17世纪初，Peter Roth、Albert Girard 和 Ren´e Descartes 等数学家的著作中首次出现了代数基本定理的某些表述。1746年，让·勒朗·达朗贝尔首次尝试证明这一定理 [4], ，但他的证明不够严谨。莱昂哈德·欧拉、Fran.cois Daviet de Foncenex、卡尔·弗里德里希·高斯、Joseph- Louis Lagrange、皮埃尔-西蒙·拉普拉斯和 James Wood 也曾尝试证明这一定理。然而，人们通常认为卡尔·弗里德里希·高斯在其 1799 年博士学位论文中给出了第一个正确证明，尽管他的证明也存在一些小漏洞。第一本包含代数基本定理完整证明的教科书是奥古斯丁-路易·柯西的分析教程 ´皇家综合理工学院 [3]。如今，代数基本定理有许多证明，主要运用代数、分析学和拓扑学（见 [6]）。

我们回顾一下 循环矩阵的定义。若矩阵 A具有以下形式，则称其为循环矩阵

*电子邮箱：lhj@gdufs.edu.cn。受广东外语外贸大学项目（项目编号：2024RC063）资助。

如果它具有以下形式:

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_{d-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-3} & a_{d-2} \\ a_{d-2} & a_{d-1} & a_0 & \cdots & a_{d-4} & a_{d-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{d-1} & a_0 \end{pmatrix},$$

其中 a_0, a_1, ..., $a_{d-1} \in \mathbb{C}$。众所周知，当且仅当$AC_d = C_dA$时， A 是循环矩阵，其中

$$C_d=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{d\times d}. \tag{1}$$

关于循环矩阵已有不少论文。读者可参阅 [5, 8, 9]。最近，作者 [10] 推广了循环矩阵的概念，并定义了一类称为 Q-循环矩阵的新矩阵。设 $Q \in M_d(\mathbb{C})$ 是一个非亏格矩阵，即其每个特征值的几何重数均为 1 的矩阵（[7, 定义 3.2.4.1]）。那么，若 $AQ = QA$ （[10,定义 1.1]），复矩阵 $d \times d$ A 就称为 Q-循环矩阵。直接计算可得，C_d的特征多项式为 $f(x) = x^d - 1$，它有 d 个互异的根。这意味着 C_d是非亏格矩阵。因此，由前述定义可知， C_d-循环矩阵是循环矩阵。为方便起见，我们将集合记为

$$\{X \in M_d(\mathbb{C}) : AX = XA\}$$

本文中始终用 $C(A)$ 表示，其中 $A \in M_d(\mathbb{C})$ 是给定矩阵。按照这一记法，$C(C_d)$ 表示所有 $d \times d$ 复循环矩阵的集合。在 [10], 中，作者给出了 Q-循环矩阵的代数结构，如下所示:

引理 1.1。 ([10, 定理2。1]) 设 $Q \in M_d(\mathbb{C})$ 是一个非亏格矩阵。那么 $C(Q)$是一个交换的 $\mathbb{C}$-代数，且 $\{I, Q, Q^2, \ldots, Q^{d-1}\}$ 是 $C(Q)$的一组 $\mathbb{C}$-基。

由引理 1.1，可知 $C(Q)$ 是复数域上的 d 维向量空间。此外， $\{I, Q, Q^2, \ldots, Q^{d-1}\}$ 是 $C(Q)$ 的 $\mathbb{C}$-基。设 A 是一个 Q-循环矩阵。那么， A 在基 $\{I, Q, Q^2, \ldots, Q^{d-1}\}$ 下的表示是唯一的。因此，每个循环矩阵都是矩阵 C_d 的幂的线性组合。在 [10], 中，作者给出了表示多项式的定义，如下所示:

定义 1.1。 ([10, 定义 2。1]) 设 $Q \in M_d(\mathbb{C})$ 是一个非亏格矩阵。设 A 是一个 Q-循环矩阵，并且假设对于某个 $a_i \in \mathbb{C}$，$A = \sum_{i=0}^{d-1} a_iQ^i$，其中 $i = 0$，1，....., $d-1$。那么 $P_A(x) = \sum_{i=0}^{d-1} a_ix^i$ 称为 A的表示多项式。

在 [1], 中，V. M. Abramov 建立了多项式矩阵方程的代数基本定理的一个类似定理，其中系数矩阵和未知矩阵均为循环矩阵。在 [2], 中，他进一步将复变函数论中的某些刻画定理扩展到循环矩阵代数结构上的类似函数理论，从而推广了 [1, 定理 2]。本文着重于将代数基本定理扩展到 Q-循环矩阵上的多项式矩阵方程。具体而言，我们提出以下定理。

定理 1.1. 设 Q 是一个具有 d 个互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$的 $d\times d$ 复矩阵。假设 $T^{-1}QT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$。那么，方程的所有解

$$X^n + A_1X^{n-1} + A_2X^{n-2} + \cdots + A_{n-1}X + A_n = O \tag{2}$$

在 $C(Q)$ 由 $\{T\operatorname{diag}(u_1, u_2, \ldots, u_d)\, T^{-1}\colon\ g_i(u_i) = 0, i = 1, 2, \ldots, d\}$给出，其中

$$g_i(x) = x^n + f_1(\lambda_i)x^{n-1} + f_2(\lambda_i)x^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(\lambda_i)x + f_n(\lambda_i), \tag{3}$$

并且 $f_1(x)\ f_2(x) \ldots, f_n(x)$ 分别是 $A_1, A_2, \ldots, A_n$的表示多项式。

根据定理 1.1，我们得到以下推论。

推论 1.1. 设 n_i 表示方程 (3)的互异根的个数。那么，方程 (2) 在 $C(Q)$ 中的解总数为 $\prod_{i=1}^{d} n_i$。

2 定理 1.1 的证明

本节给出定理 1.1 的证明。在证明定理 1.1 之前，我们先给出以下引理。

引理 2.1。 设 Q 是一个具有 d 个互异特征值 λ_1、λ_2、...、λ_d 的 $d\times d$ 复矩阵。假设 $T^{-1}QT = \operatorname{diag}(\lambda_1$、$\lambda_2$、...、$\lambda_d)$。则以下结论成立。

(i) 对于任意 $A \in C(Q)$，有 $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(f_A(\lambda_1)\ f_A(\lambda_2) \ldots,\ f_A(\lambda_d))$，其中 $f_A(x)$ 是 A 的表示多项式。

(ii) $C(Q) = \{T\operatorname{diag}(u_1, u_2, \ldots, u_d)\, T^{-1} : u_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, d\}$.

证明。 现在我们证明断言 (i)。由于 $A \in C(Q)$，由引理 1.1 可知 $A = \sum_{i=0}^{d-1} a_iQ^i$ 对某个 $a_i \in \mathbb{C}$，$i = 0$，1，.....，$d-1$。由此可得 A 的表示多项式为 $f_A(x) = \sum_{i=0}^{d-1} a_ix^i$。因此我们有

$$\begin{aligned}
T^{-1}AT &= T^{-1}\left(\sum_{i=0}^{d-1} a_iQ^i\right)T = \sum_{i=0}^{d-1} a_iT^{-1}Q^iT \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} a_i\left(T^{-1}QT\right)^i = \sum_{i=0}^{d-1} a_i\operatorname{diag}\left(\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_d^i\right) \\
&= \operatorname{diag}\left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i\lambda_1^i, \sum_{i=0}^{d-1} a_i\lambda_2^i, \ldots, \sum_{i=0}^{d-1} a_i\lambda_d^i\right) \\
&= \operatorname{diag}\left(f_A(\lambda_1), f_A(\lambda_2), \ldots, f_A(\lambda_d)\right).
\end{aligned}$$

接下来证明断言 (ii)。设 $X \in C(Q)$。由 (i) 可得

$$T^{-1}XT = \operatorname{diag}\left(f_X(\lambda_1),\, f_X(\lambda_2),\, \ldots,\, f_X(\lambda_d)\right),$$

其中 $f_X(x)$ 是 X 的表示多项式。因此我们有

$$X = T\operatorname{diag}\left(f_X(\lambda_1),\, f_X(\lambda_2),\, \ldots,\, f_X(\lambda_d)\right) T^{-1},$$

这意味着 $X \in \{T\operatorname{diag}(u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_d)\ T^{-1}\colon\ u_i \in \mathbb{C},\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ d\}$。因此，我们有

$$C(Q) \subseteq \left\{T\operatorname{diag}\left(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_d\right) T^{-1} : u_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, d\right\}. \tag{4}$$

另一方面，如果 $Y \in \{T\operatorname{diag}(u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_d)\ T^{-1}\colon\ u_i \in \mathbb{C},\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ d\}$，那么

$$Y = T\operatorname{diag}\left(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_d\right) T^{-1} \tag{5}$$

对于某些 $u_i \in \mathbb{C},\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ d$。由于 $T^{-1}QT = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots,\ \lambda_d)$，我们有

$$Q = T\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_d\right) T^{-1}. \tag{6}$$

由（5）和（6），我们得到

$$\begin{aligned}
YQ &= \left(T\operatorname{diag}\left(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_d\right) T^{-1}\right) \cdot \left(T\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_d\right) T^{-1}\right) \\
&= T\operatorname{diag}\left(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_d\right) \cdot \operatorname{diag}\left(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_d\right) T^{-1} \\
&= T\operatorname{diag}\left(u_1\lambda_1,\, u_2\lambda_2,\, \ldots,\, u_d\lambda_d\right) T^{-1} \\
&= T\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_d\right) \cdot \operatorname{diag}\left(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_d\right) T^{-1} \\
&= \left(T\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_d\right) T^{-1}\right) \cdot \left(T\operatorname{diag}\left(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_d\right) T^{-1}\right) \\
&= QY.
\end{aligned}$$

这意味着 $Y \in C(Q)$。由此可得

$$\left\{T\operatorname{diag}\left(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_d\right) T^{-1} : u_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, d\right\} \subseteq C(Q). \tag{7}$$

由（4）和（7），可得 $C(Q) = \{T\operatorname{diag}(u_1,\ u_2, \ldots,\ u_d)\ T^{-1}\colon\ \ u_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, d\}$。

□

现在给出定理 1.1的证明。

证明。 设 $X \in C(Q)$。由引理 2.1 （ii）可知 $X = T\operatorname{diag}(u_1,\ u_2, \ldots,\ u_d)\ T^{-1}$，其中 $u_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, d$。于是有

$$T^{-1}XT = \operatorname{diag}\left(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_d\right). \tag{8}$$

设 $f_1(x)\ f_2(x) \ldots, f_n(x)$ 分别是 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的表示多项式。由引理2.1 (i) 可得

$$T^{-1}A_kT = \operatorname{diag}\left(f_k(\lambda_1),\, f_k(\lambda_2),\, \ldots,\, f_k(\lambda_d)\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

由 (8) 和 (9)，可得

$$
\begin{aligned}
&T^{-1}\left(X^n+A_1X^{n-1}+A_2X^{n-2}+\cdots+A_{n-1}X+A_n\right)T\\
&\quad=T^{-1}X^nT+T^{-1}A_1X^{n-1}T+T^{-1}A_2X^{n-2}T+\cdots+T^{-1}A_{n-1}XT+T^{-1}A_nT\\
&\quad=T^{-1}X^nT+\left(T^{-1}A_1T\right)\left(T^{-1}X^{n-1}T\right)+\left(T^{-1}A_2T\right)\left(T^{-1}X^{n-2}T\right)\\
&\qquad+\cdots+\left(T^{-1}A_{n-1}T\right)\left(T^{-1}XT\right)+T^{-1}A_nT\\
&\quad=\left(T^{-1}XT\right)^n+\left(T^{-1}A_1T\right)\left(T^{-1}XT\right)^{n-1}+\left(T^{-1}A_2T\right)\left(T^{-1}XT\right)^{n-2}\\
&\qquad+\cdots+\left(T^{-1}A_{n-1}T\right)\left(T^{-1}XT\right)+T^{-1}A_nT\\
&\quad=\operatorname{diag}\left(g_1(u_1),\,g_2(u_2),\,\ldots,\,g_d(u_d)\right),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

其中 $g_i(x)=x^n+f_1(\lambda_i)x^{n-1}+f_2(\lambda_i)x^{n-2}+\cdots+f_{n-1}(\lambda_i)x+f_n(\lambda_i)$ $i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ d$。由（10）可知，$X$是方程（2）的解，当且仅当对于 $i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ d,\ g_i(u_i)=0$。因此，方程（2）在 $C(Q)$ 中的所有解为

$$
\left\{T\operatorname{diag}\left(u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_d\right)T^{-1}:g_i(u_i)=0,i=1,2,\ldots,d\right\}.
$$

□

3 一些推论和例子

本节给出一些推论和例子。

3.1 方程（2）在 C（Q（$k_1,\ k_2,\ \ldots\ldots,\ k_d$））的所有解

Let

$$
Q=Q(k_1,k_2,\ldots,k_d)=\begin{pmatrix}
0 & k_1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & k_2 & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & k_{d-1}\\
k_d & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
\tag{11}
$$

其中 $k_1,\ k_2,\ \ldots\ldots,\ k_d\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$。直接计算可得，$Q$的特征多项式为

$$
f(x)=x^d-\prod_{i=1}^{d}k_i,
$$

其有 d 个互不相同的根。在本节中，令 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{d}}$ 表示本原 d 次单位根。令 $k=\prod_{i=1}^{d}k_i$，并令 λ 为任意一个 d 次根 k。则 Q 有 d 个互不相同的特征值 $\lambda,\ \lambda\omega,\ \lambda\omega^2,\ \ldots\ldots,\ \lambda\omega^{d-1}$。我们定义对角矩阵

$$
\Lambda=\frac{k}{k_d}\operatorname{diag}\left(1,\,\frac{\lambda}{k_1},\,\frac{\lambda^2}{k_1k_2},\,\ldots,\,\frac{\lambda^{d-2}}{k_1\cdots k_{d-2}},\,\frac{\lambda^{d-1}}{k_1\cdots k_{d-1}}\right).
\tag{12}
$$

令 F 为离散傅里叶矩阵，即

$$F=\frac{1}{\sqrt{d}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^{2} & \cdots & \omega^{d-2} & \omega^{d-1}\\ 1 & \omega^{2} & \omega^{4} & \cdots & \omega^{2(d-2)} & \omega^{2(d-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \omega^{d-2} & \omega^{2(d-2)} & \cdots & \omega^{(d-2)^{2}} & \omega^{(d-2)(d-1)}\\ 1 & \omega^{d-1} & \omega^{2(d-1)} & \cdots & \omega^{(d-2)(d-1)} & \omega^{(d-1)^{2}}\end{pmatrix}. \tag{13}$$

令 $T=\Lambda F^{-1}$。于是我们有

$$\begin{aligned}T^{-1}QT&=F\Lambda^{-1}Q\Lambda F^{-1}=F\left(\Lambda^{-1}Q\Lambda\right)F^{-1}=F\left(\lambda C_{d}\right)F^{-1}=\lambda FC_{d}F^{-1}\\&=\lambda\mathrm{diag}\left(\omega^{d},\,\omega^{d-1},\,\ldots,\,\omega^{2},\,\omega^{1}\right)=\mathrm{diag}\left(\lambda\omega^{d},\,\lambda\omega^{d-1},\,\ldots,\,\lambda\omega^{2},\,\lambda\omega^{1}\right),\end{aligned} \tag{14}$$

其中 C_d 是式（1）中的矩阵。由定理 1.1 和式（14），可得以下推论。

推论 *3.1.* 设 Q 为式（*11*）中的矩阵。设 Λ 和 F 分别为式（*12*）和（*13*）中的矩阵，并设 $T=\Lambda F^{-1}$。则方程（*2*）在 $C(Q)$ 中的所有解均由 $\{T\mathrm{diag}\,(u_1,\,u_2,\ldots,\,u_d)\,T^{-1}:\,g_i(u_i)=0,i=1,2,\ldots,d\}$给出，其中

$$g_i(x)=x^{n}+f_{1}\left(\lambda\omega^{d-i+1}\right)x^{n-1}+f_{2}\left(\lambda\omega^{d-i+1}\right)x^{n-2}+\cdots+f_{n-1}\left(\lambda\omega^{d-i+1}\right)x+f_{n}\left(\lambda\omega^{d-i+1}\right), \tag{15}$$

且 $f_1(x)$ $f_2(x)$ 。。，$f_n(x)$ 分别是 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的表示多项式 $y.$

设 $k_1=k_2=\cdots=k_d=1$ 在式（11）中。则 $C(Q)$ 是所有 $d\times d$ 复循环矩阵的集合。由推论 3.1，可得以下推论。

推论 3.2。 设 F 为式 (13) 中的矩阵。设 A_1、A_2、.....、A_n 为循环矩阵，并假设 A_k $f_k\,x=\sum_{j=1}^{d}a_{k\,j-1}x^{j-1}$ $k=$ 的表示多项式为 (),对于，，，。 1 2 … n 2
则循环矩阵中方程 () 的所有解为

$$\left\{F^{-1}\mathrm{diag}\,(u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_d)\,F:\,g_i(u_i)=0,i=1,2,\ldots,d\right\},$$

其中 $g_i(x)=x^{n}+b_1^{(i)}x^{n-1}+b_2^{(i)}x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}^{(i)}x+b_n^{(i)}$，且 $b_k^{(i)}=\sum_{j=1}^{d}a_{k,j-1}\frac{1}{\omega^{(i-1)(j-1)}}$。

证明。 设 $k_1=k_2=\cdots=k_d=1$。则 $k=1$ 和 $\lambda=1$。因此矩阵 $\Lambda=I$ 变为单位矩阵。于是 $T=\Lambda F^{-1}=F^{-1}$。注意到

$$\begin{aligned}b_k^{(i)}&=\sum_{j=1}^{d}a_{k,j-1}\frac{1}{\omega^{(i-1)(j-1)}}=\sum_{j=1}^{d}a_{k,j-1}\omega^{(-i+1)(j-1)}\\&=\sum_{j=1}^{d}a_{k,j-1}\left(\omega^{-i+1}\right)^{j-1}=f_k(\omega^{-i+1})=f_k(\omega^{d-i+1}).\end{aligned} \tag{16}$$

由于 A_k 的表示多项式为 $f_k(x)=\sum_{j=1}^{d}a_{k,\,j-1}x^{j-1}$，由此以及（16）可得 (15)

$$\begin{aligned}g_i(x)&=x^{n}+f_{1}\left(\omega^{d-i+1}\right)x^{n-1}+f_{2}\left(\omega^{d-i+1}\right)x^{n-2}+\cdots+f_{n-1}\left(\omega^{d-i+1}\right)x+f_{n}\left(\omega^{d-i+1}\right)\\&=x^{n}+b_1^{(i)}x^{n-1}+b_2^{(i)}x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}^{(i)}x+b_n^{(i)}.\end{aligned}$$

根据推论 3.1，方程（2）在循环矩阵中的所有解均为

$$\left\{F^{-1}\mathrm{diag}\left(u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_d\right)F : g_i(u_i)=0, i=1,2,\ldots,d\right\},$$

其中 $g_i(x)=x^n+b_1^{(i)}x^{n-1}+b_2^{(i)}x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}^{(i)}x+b_n^{(i)}$和 $b_k^{(i)}=\sum_{j=1}^{d}a_{k,\,j-1}\frac{1}{\omega^{(i-1)(j-1)}}$ □

根据推论3.2，可得以下推论，由 [1]给出。

推论3.3。([1, 定理 2]) 循环矩阵上的方程 (2) 满足代数基本定理，且其解的总数不超过 n^d。

推论3.4。([1, 定理 3]) 设 n_i 表示首一多项式方程的不同根的个数

$$x^n+b_1^{(i)}x^{n-1}+\cdots+b_n^{(i)}=0,\quad i=1,2,\ldots,d,$$

其中

$$b_k^{(i)}=\sum_{j=1}^{d}a_{k,j-1}\overline{r}_{(i-1)(j-1)}.$$

则方程 (2) 在循环矩阵中的解的总数为 $\prod_{i=1}^{d}n_i$。

现在我们给出一个例子，以说明本节的结果。

例3.1。设

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\8&0&0\end{pmatrix}.$$

设 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$为三次本原单位根，并设

$$D=\begin{pmatrix}1&2\omega^3&\left(2\omega^3\right)^2\\1&2\omega^2&\left(2\omega^2\right)^2\\1&2\omega&\left(2\omega\right)^2\end{pmatrix}.$$

设 $A=a_0I+a_1Q+a_2Q^2$ 和 $B=b_0I+b_1Q+b_2Q^2$，其中

$$\left(a_0,a_1,a_2\right)^T=D^{-1}\left(-5,2,-3\right)^T\quad\text{and}\quad\left(b_0,b_1,b_2\right)^T=D^{-1}\left(4,1,2\right)^T.\tag{17}$$

接下来我们求方程的解

$$X^2+AX+B=O\tag{18}$$

在 $C(Q)$ 中。注意， A 和 B 的表示多项式分别为 $f_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$和 $f_2(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$。由（17）可得 $f_1\left(2\omega^3\right)=-5, f_1\left(2\omega^2\right)=2, f_1\left(2\omega\right)=-3, f_2\left(2\omega^3\right)=4, f_2\left(2\omega^2\right)=1, f_2\left(2\omega\right)=2$。因此我们有

$$\begin{aligned}g_1(x)&=x^2+f_1\left(2\omega^3\right)x+f_2\left(2\omega^3\right)=x^2-5x+4=\left(x-1\right)\left(x-4\right),\\g_2(x)&=x^2+f_1\left(2\omega^2\right)x+f_2\left(2\omega^2\right)=x^2+2x+1=\left(x+1\right)^2,\\g_3(x)&=x^2+f_1\left(2\omega\right)x+f_2\left(2\omega\right)=x^2-3x+2=\left(x-1\right)\left(x-2\right).\end{aligned}$$

Let

$$F=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega^4\end{pmatrix},$$

并令 $T=\mathrm{diag}\,(1,2,4)\ F^{-1}$。由推论 3.1 可知，方程（18）在 $C(Q)$ 中的四个解为

$$\begin{aligned}
T\mathrm{diag}\,(1,\,-1,\,1)\,T^{-1}&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -2\omega & -\omega^2\\ -8\omega^2 & 2 & -2\omega\\ -16\omega & -8\omega^2 & 2\end{pmatrix},\\
T\mathrm{diag}\,(1,\,-1,\,2)\,T^{-1}&=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}8 & 4+6\omega^2 & -1-3\omega^2\\ -8-24\omega^2 & 8 & 4+6\omega^2\\ 32+48\omega^2 & -8-24\omega^2 & 8\end{pmatrix},\\
T\mathrm{diag}\,(4,\,-1,\,1)\,T^{-1}&=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}16 & 10+4\omega^2 & 3-2\omega^2\\ 24-16\omega^2 & 16 & 10+4\omega^2\\ 80+32\omega^2 & 24-16\omega^2 & 16\end{pmatrix},\\
T\mathrm{diag}\,(4,\,-1,\,2)\,T^{-1}&=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}20 & 10+6\omega^2 & 2-3\omega^2\\ 16-24\omega^2 & 20 & 10+6\omega^2\\ 80+48\omega^2 & 16-24\omega^2 & 20\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.2 方程(2) 在 $C(\pi)$上的所有解

设 λ_1、λ_2、……、λ_d为 d个互不相同的复数，并设

$$f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_d)=x^d+a_{d-1}x^{d-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

Let

$$\pi=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{d-2} & -a_{d-1}\end{pmatrix}. \tag{19}$$

注意，矩阵 π 是多项式 $f(x)$ 的伴随矩阵。因此，π的特征多项式为 $f(x)$。由此可知，π有 d个互不相同的特征值 λ_1、λ_2、……、λ_d。设

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{d-1} & \lambda_d\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_{d-1}^2 & \lambda_d^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1^{d-2} & \lambda_2^{d-2} & \lambda_3^{d-2} & \cdots & \lambda_{d-1}^{d-2} & \lambda_d^{d-2}\\ \lambda_1^{d-1} & \lambda_2^{d-1} & \lambda_3^{d-1} & \cdots & \lambda_{d-1}^{d-1} & \lambda_d^{d-1}\end{pmatrix}. \tag{20}$$

于是我们有

$$T^{-1}\pi T=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_d). \tag{21}$$

根据定理1.1和（21），我们得到以下推论。

推论3.5。 设 π 和 T 分别为 ((19) 和 (20)中的矩阵。那么，方程 ((2) 在 $C(\pi)$ 中的所有解为

$$\left\{T\operatorname{diag}\left(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_d\right)T^{-1}:g_i(u_i)=0,i=1,2,\ldots,d\right\},$$

其中， $g_i(x)=x^n+f_1(\lambda_i)x^{n-1}+f_2(\lambda_i)x^{n-2}+\cdots+f_{n-1}(\lambda_i)x+f_n(\lambda_i)$以及 $f_1(x)$ $f_2(x)\ldots,f_n(x)$分别是 A_1、 A_2、 . . . 、 A_n 的表示多项式。

现在我们给出一个例子，以说明本节的结果。

例3.2。 设 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，并设

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6.$$

Let

$$\pi=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&-11&6\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad D=\begin{pmatrix}1&1&1^2\\1&2&2^2\\1&3&3^2\end{pmatrix}.$$

设 $A=a_0I+a_1\pi+a_2\pi^2$ 和 $B=b_0I+b_1\pi+b_2\pi^2$，其中

$$(a_0,a_1,a_2)^T=D^{-1}(-5,2,-3)^T\quad\text{and}\quad(b_0,b_1,b_2)^T=D^{-1}(4,1,2)^T.\tag{22}$$

接下来求方程的解

$$X^2+AX+B=O\tag{23}$$

在 $C(\pi)$ 中。注意， A 和 B 的表示多项式分别为 $f_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$和 $f_2(x)$ $=b_0+b_1x+b_2x^2$。由 (22) 可得 $f_1(1)=-5$， $f_1(2)=2$， $f_1(3)=-3$， $f_2(1)=4$， $f_2(2)=1$， $f_2(3)=2$。因此我们有

$$\begin{aligned}g_1(x)&=x^2+f_1(1)x+f_2(1)=x^2-5x+4=(x-1)(x-4),\\g_2(x)&=x^2+f_1(2)x+f_2(2)=x^2+2x+1=(x+1)^2,\\g_3(x)&=x^2+f_1(3)x+f_2(3)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2).\end{aligned}$$

Let

$$T=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}.$$

于是，根据推论3.5 ，方程（23）在 C（π）中的四个解为

$$\begin{aligned}T\operatorname{diag}(1,\ -1,\ 1)T^{-1}&=\begin{pmatrix}7&-8&2\\12&-15&4\\24&-32&9\end{pmatrix},\\T\operatorname{diag}(1,\ -1,\ 2)T^{-1}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}16&-19&5\\30&-39&11\\66&-91&27\end{pmatrix},\\T\operatorname{diag}(4,\ -1,\ 1)T^{-1}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}32&-31&7\\42&-45&11\\66&-79&21\end{pmatrix},\\T\operatorname{diag}(4,\ -1,\ 2)T^{-1}&=\begin{pmatrix}17&-17&4\\24&-27&7\\42&-53&15\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4 结论

设 Q 是一个具有 d 个互异特征值的 $d \times d$ 复矩阵。本文建立了代数基本定理在 Q-循环矩阵多项式方程中的类似结果。也就是说，我们给出了该方程的所有解

$$X^n + A_1 X^{n-1} + A_2 X^{n-2} + \cdots + A_{n-1} X + A_n = O$$

在 $C(Q)$。这一结果推广了 Abramov 关于 [1]循环矩阵的结果。

参考文献

[1] V. M. Abramov, 《代数基本定理关于循环矩阵多项式矩阵方程的推广》, 《美国数学月刊》, 132（2025年）, 356–360。[2] V. M. Abramov, 《循环矩阵集合中的函数类及其刻画》, 《乌克兰数学杂志》, （2025年）。https://doi.org/10.1007/s11253-025-02535-8[3] A.-L. Cauchy, 《皇家综合理工学院分析学教程》, Debure Fr`eres, 巴黎：皇家印刷所, 1821年。[4] J. L. R.d'Alembert, 《积分计算研究》, 《柏林科学院历史》, 2（1746年）, 182–224。[5] P. J. Davis, 《循环矩阵》, Wiley, 纽约, 1979年。[6] B. Fine, G. Rosenberger, 《代数基本定理》, 施普林格出版社, 纽约, 1997年。[7] R. A. Horn, C. R. Johnson, 《矩阵分析》, 第二版, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2013年。[8] D. Kalman, J. E. White, 《多项式方程与循环矩阵》, 《美国数学月刊》, 108（2001年）, 821–840。[9] I. Kra, S. R. Simanca, 《论循环矩阵》, 《美国数学会通报》, 59（2012年）, 368–377。[10] H. Li, W. Zhang, P. Yuan, 《论 Q-循环矩阵》, 《计算与应用数学》, 43（2024年）, 第154篇, 13页。