外平面图的面积普适性

Ravi Suthar，Raveena，Krishnendra Shekhawat

比尔拉科技与科学学院数学系，印度拉贾斯坦邦皮拉尼皮拉尼校区 VidyaVihar，邮编 333031

摘要。矩形平面布局是将一个矩形划分为若干较小矩形的一种划分方式，且任意四个矩形都不会在同一点相交。矩形平面布局自然应用于多种场景，包括超大规模集成电路设计、建筑布局和制图学；在这些场景中，需要高效且灵活的空间细分。该领域的一个核心概念是面积普适性：如果对于其组成矩形的任意目标面积分配，都存在一个组合等价布局来实现这些面积，则称该平面布局（或更一般地说，矩形布局）具有面积普适性。

本文研究外平面图具有面积通用矩形布局所需满足的结构条件。我们为这一情形下的面积普适性建立了充要条件，从而完整刻画了可容许外平面图。此外，我们还提出了一种算法构造方法，保证所得布局始终具有面积普适性。

arXiv:2601.13781v1 [cs.CG] 20 Jan 2026

K关键词：图论、图算法、复合三角形、外平面图、矩形平面布局、面积通用
u布局

1 引言

T　矩形布局是一项基本概念，涉及在矩形空间内对互不重叠的矩形（模块）进行策略性排列。此外，它还确保布局中任意四个
n互不重叠的模块形成的交点不会相交。矩形布局广泛应用于制图学 [12], 建筑-
t工程 [2], 超大规模集成电路设计 [19], 和图绘制。本文探讨面积通用矩形
l采用图论方法的布局。面积通用布局 [4] 是生成多种矩形排列的重要工具，
f这些排列能够满足特定的面积分配，同时保留
c由邻接图定义的一致邻接配置。从数学角度来看，面积通用
u布局可以用图来表示，其中布局中的每个房间或模块都表示为一个顶点，
a而邻接关系（即房间之间的物理连接或相邻关系）则由连接相应顶点的一条边表示。
c核心挑战在于确定所描述的图是否
t这些邻接约束能够适应矩形的所有可能面积分配，同时保持
t模块之间的邻接关系和连通性。图的面积通用矩形布局在
i多个领域中发挥着重要作用， [11,1], 尤其是在超大规模集成电路设计中，矩形代表电路元件，而它们的
c公共边界表示邻接要求。在超大规模集成电路设计的早期阶段，芯片元件的
a面积尚未确定，只有元件的相对位置至关重要。然而，在后续设计阶段，需要
s　指定元件的具体面积，而面积通用布局能够满足这一要求，从而简化设计流程。以往的研究[17,18] 提出了基于给定面积分配计算矩形布局的启发式算法。

1.1 预备知识

图 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是一种基本的组合结构，由有限的顶点集 V和边集E组成，其中每条边都连接 V中的一对不同顶点。若图 $\mathcal{G}$ 中任意一对不同顶点 $u, v \in V(\mathcal{G})$之间都存在至少两条顶点不相交路径，则称图 $\mathcal{G}$ 为双连通图。若一个图可以绘制在平面上，且其边仅在共享端点处相交，从而实现无交叉表示，则称该图为平面图。平面图在平面上的这种无边交叉绘制称为平面图或平面嵌入。本文中，图 $\mathcal{G}$ 的阶表示 $|V|$，即 $\mathcal{G}$的顶点数。

定义 1. 在平面图中，分隔三角形 *[16]*是由三条边 (u, v, w) 构成的圈，且该圈围成的内部区域中至少有一个图的顶点（见图1a）。

定义 2. 适当三角剖分平面图（PTPG） *[9]* 是满足以下性质的连通平面图：（见图1b）

1. 外面长度为 ≥ 4，2. 每个面（外面除外）都是三角形（由三条边围成），
3. 不含分隔三角形（ST）。

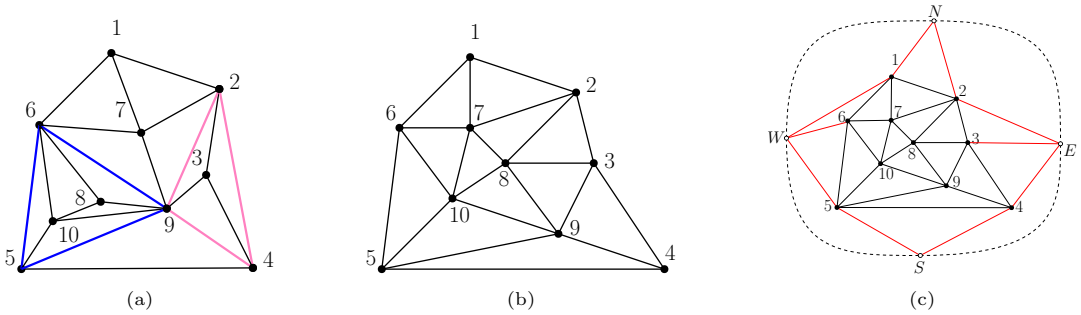


图1：（a）存在分隔三角形 (2,4,9)、(6, 9, 10) 和 (6, 9, 5)。（b）适当三角剖分平面图（PTPG）。（c）一个 PTPG 的 *extended graph*。

定义 3. 若图 $\mathcal{G}$ 存在一种平面嵌入，使得所有顶点都位于外面的边界上，则称其为外平面图。

设 $\mathcal{G}$ 是一个平面三角剖分图。若可通过添加四个外部顶点对 $\mathcal{G}$ 进行增广，这些顶点称为方位顶点，记作 N、W、S 和 E，并按顺时针顺序置于外面上（见图1c），使所得图 $E(\mathcal{G})$ 满足以下性质：（i） $E(\mathcal{G})$ 的每个内部面都是三角形，且外面是一个四边形；（ii） $E(\mathcal{G})$ 不含分隔三角形，则称 $E(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个扩展图。能够进行此类增广的平面三角剖分图 $\mathcal{G}$ 称为适当图。此外，若 $\mathcal{G}$ 是外平面图，则相应的扩展图 $E(\mathcal{G})$ 称为扩展外平面图（见图2a）。

定义 4. 正则边标记 *[*REL*] [8]*：对于一个具有四个外部顶点 N、W、S、E（按逆时针顺序排列）的双连通 PTPG $\mathcal{G}$，其正则边标记由内部边的划分及定向构成，将这些边分为两个互不相交的子集 T_1（用蓝色表示）和 T_2（用红色表示），并满足以下条件：

(I) 对于每个 内部顶点 v，关联边围绕 v 按逆时针顺序排列如下 ：
- 指向 v：输入 T_1 边。
- 从 v指出：输出 T_2 边
- 从 v指出：输出 T_1 边
- 指向 v：流入的 T_2 边

(ii) 与顶点 N 相 incident 的边包含在 T_1 中，并指向 N。反过来，与 W 相 incident 的边属于 T_2，并从 W 指向外部。与 S 相 incident 的边包含在 T_1 中，并从 S 指向外部；而与 E 相 incident 的边位于集合 T_2 中，并指向 E。

定义 5. REL 中的可翻转边 *[5]* 是指一条不与任何四度顶点 incident 的边 e，并且必须是一个四环的对角线，该四环的边在 REL 中交替标记。此外，如果一条边可翻转，则可以更改其标记而不影响其余标记。图2b 中，边 (5, 7) 和 (4, 8) 均可翻转；翻转这些边后得到的 REL 如图2c 所示。

定义 6. 平面布局（$\mathcal{F}$） *[14]*：平面布局将一个多边形通过直线段分解为若干较小的组成多边形。外部多边形称为该平面布局的边界，较小的组成多边形则称为模块。如果两个模块共用一段墙段，则它们相邻；仅有点接触（四条线段相交的四线交点）并不构成邻接关系。矩形平面图（RFP）是一类特殊的平面布局，其边界和所有模块均为矩形。

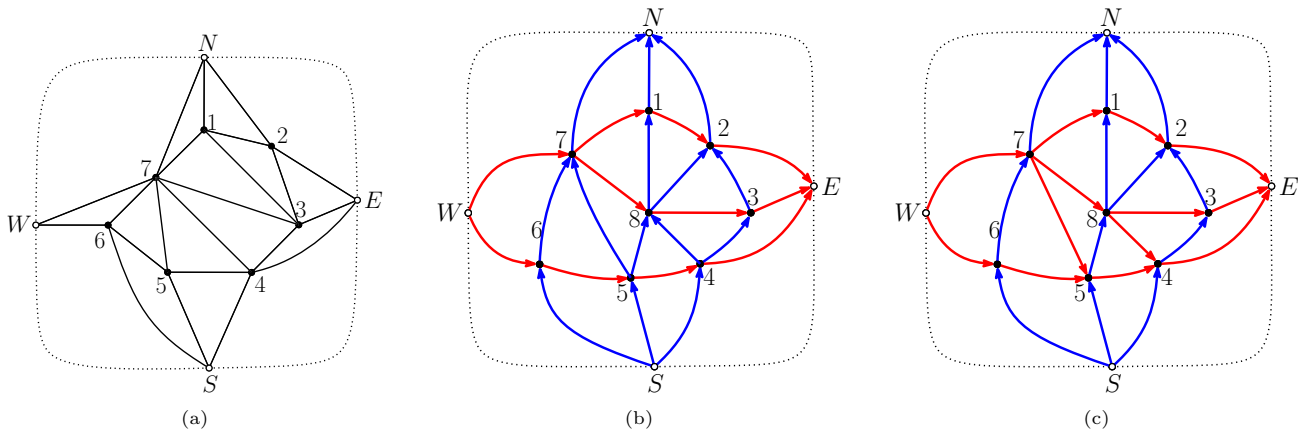


图 2：(a) 一个扩展外平面图。(b) 存在可翻转边 (5, 7) 和 (4, 8)。(c) 可翻转边 (5, 7) 和 (4, 8) 的标记已更改。

定义 7. 如果对于 $\mathcal{F}$ 中的矩形，无论如何为它们分配正面积，都存在一种在平面上绘制 $\mathcal{F}$ 的方式，使每个矩形都具有所分配的面积，那么称矩形布局 $\mathcal{F}$ 为面积通用 *[4]* 。在这种绘图中，只能改变矩形的大小； $\mathcal{F}$ 的组合结构（即矩形之间的邻接关系）必须与原始布局完全相同。

1.2 研究动机与贡献

大量研究聚焦于矩形平面图的构造。1985 年，Kozminski 和 Kinnen [9] 指出，当且仅当 PTPG 可以通过添加四个外部顶点进行扩充，使所得扩展图满足以下两个性质时，它才存在矩形平面图：(i) 每个内部面都是三角形，且外面是四边形；(ii) 扩展图不含分隔三角形。之后，Kant 和 He [8] 引入了正则边标记的概念，并提出了两种用于计算此类标记的线性时间算法。他们证明，对于任意扩展图 $E(\mathcal{G})$，都可以在线性时间内找到正则边标记，而且也可以在线性时间内构造由该标记定义的相应矩形平面图。Fusy [[6], [7]], 也研究了正则边标记，并将这一概念称为横截结构。这些标记与平面图上的其他边着色框架密切相关，可用于表示直线绘图和正交多面体结构 [3]。

一个平面图可能对应多个扩展图，并且相对于这些扩展图可能存在多个矩形布局，但并非所有布局都是面积通用的。Rinsma [13] 给出了明确的例子，表明对于某些具有给定面积分配的特定外平面图，不存在任何矩形布局能够实现它们。受建筑平面图的启发（在建筑平面图中，只需指定部分房间邻接关系），Rinsma [15] 研究了以下相关问题：给定一棵树 T，是否存在一个矩形布局 L，使得 T 是 L的对偶图的一棵生成树？她证明，这样的布局总是存在。然而，她的算法生成的布局不一定是面积通用的。

为了解决 Rinsma 提出的未决问题，Eppstein 等人 [5] 建立了一种几何刻画，它是矩形布局具有面积通用性的必要且充分条件（见定理 1）。此外，他们改进了 Rinsma 的构造方法，以生成面积通用布局，并证明，对于每一棵树 T，都存在一个面积通用矩形布局 $\mathcal{F}$，使得 T 是 $\mathcal{F}$的对偶图的一棵生成树。

在矩形布局 $\mathcal{F}$ 中，线段定义为由 $\mathcal{F}$ 的连续内部边组成的序列。如果一条线段不包含于任何其他线段中，则称其为极大线段。此外，如果一条极大线段是矩形布局中至少一个矩形的一条边，则称其为单侧线段。

定理 1。如果且仅如果 $\mathcal{F}$ 的每条内部极大线段都是单侧线段，则称矩形布局 $\mathcal{F}$ 是面积通用的。 *[5]*

图 3a 所示的矩形布局不是面积通用的，因为极大内部线段 o （以粗体突出显示）并未与任何矩形的边对齐。相比之下，图 3b 所示的矩形布局是面积通用的，因为每条极大线段都与某个矩形的边对齐。

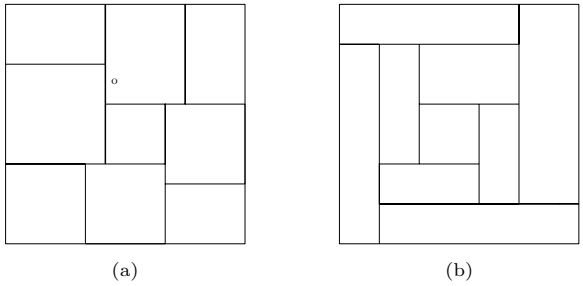


图3：（a）一个非面积通用的矩形布局。（b）一个面积通用的矩形布局。

Eppstein 等人 [5] 提出了一种构造面积通用矩形布局的算法。然而，这些算法并非完全多项式时间算法，但对于一个与 $\mathcal{G}$ 中分离四圈数量相关的参数而言，它们是固定参数可处理的。因此，该问题在一般情况下仍然具有计算难度。后续研究因此着重探讨受限的图类。例如，Kumar等人 [10] 确定了一类矩形对偶图（RDGs），其中每个 RDG 都可以在多项式时间内实现为面积通用矩形布局。

外平面图嵌入平面后，其所有顶点都位于同一个面的边界上，因而其结构性质引人关注。本文确定了能够容纳面积通用矩形布局的外平面图所具有的图论性质。第2节中，我们给出了双连通外平面图能够容纳此类布局的充要条件。第3节中，我们介绍了生成面积通用矩形布局的构造方法，并描述了若干充分的构造技术。此外，在第4节中，我们概述了另一种构造方法，它能够生成与给定双连通外平面图对应的所有可能的面积通用矩形布局。因此，我们枚举了所有满足规定邻接约束的面积通用布局。

2 充要条件

我们力求全面理解哪些外平面图能够容纳面积通用布局，并找出哪些图无法容纳此类布局。图4展示了已知最小的一个不具备面积通用布局的图。已有研究 [4] 证明，布局是面积通用的，当且仅当它满足单侧这一判据。面积通用布局的特征是，其中每条极大线段都是至少一个矩形的一条边。定理 2概述了判断外平面图能否具有面积通用布局（亦称单侧布局）所需的基本条件。Eppstein 等人 [5] 指出，如果正则边标记中包含一条可翻转边，那么相应的矩形布局至少有一条极大线段不是单侧的。下文将反复用到以下引理。

引理 1. *[5]* 设 $\mathcal{G}$ 为一个平面图，并用 $E(\mathcal{G})$表示其扩展图。设 $r(\mathcal{G})$为 $E(\mathcal{G})$的一个正则边标记，并设 $\mathcal{F}$ 为对应于 $r(\mathcal{G})$的矩形平面图。那么，当且仅当 $r(\mathcal{G})$不包含可翻转边时， $\mathcal{F}$ 才是面积通用的。

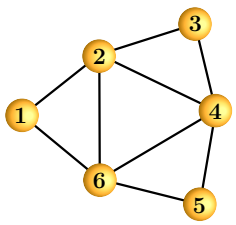


图 4：不具备任何面积通用布局的最小外平面图 G

定理 2. 设 $\mathcal{G}$ 为一个阶为 $n > 3$的双连通外平面三角剖分图。那么，当且仅当 $\mathcal{G}$ 恰好包含两个度为二的顶点时，$\mathcal{G}$ 至少存在一个扩展图 $E(\mathcal{G})$，其具有面积通用矩形布局。

证明。将 $\mathcal{G}$ 视为双连通外平面三角剖分图，可知 $\mathcal{G}$ 的最小度至少为二。我们通过为每个内部三角面引入一个顶点，并在对应的两个面共享一条内部边时连接相应顶点，定义其弱对偶 T（见图 5）。由此可知，T 是一棵树。T 的每个叶节点都对应 $\mathcal{G}$ 中的一个三角面，该面恰好共享一条内部边，而与这条边相对的边界顶点在 $\mathcal{G}$ 中的度为二。因此，$\mathcal{G}$ 中度为 2 的顶点与 T中的叶节点一一对应。此外，由于每棵具有 $|V（T）| > 1$ 的树至少有两个叶节点，因此只要 $n > 3$，$\mathcal{G}$ 就必须至少包含两个度为 2 的顶点。

首先，假设 $\mathcal{G}$ 恰好有两个度为 2 的顶点。我们的目标是证明存在一个扩展图，使其具有面积通用矩形布局。为此，我们提出一种算法（见算法 1），通过扩充 $\mathcal{G}$ 得到扩展图 $E（\mathcal{G}）$，使得与 $E（\mathcal{G}）$的任意正则边标记相对应的每个矩形布局都是面积通用的。我们证明，该算法对于任何具有两个度为 2 的顶点的双连通外平面图，都能始终生成面积通用布局，从而确立这一结论。

反过来，假设存在一个与扩展图 $E(\mathcal{G})$ 对应的面积通用布局，那么我们需要证明适当图 $\mathcal{G}$ 恰有两个度为 2 的顶点。这里，我们将证明逆否命题。为此，假设 $\mathcal{G}$ 至少有三个（例如 $k(k > 2)$）度为二的顶点，那么其弱对偶 T 至少有三片叶子，因此 T 必须包含至少一个三度顶点。在 T 中，三度顶点对应一个内部三角面（一个三角面 F $= \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1\}$，其三条边分别与另一个三角面共享），位于 $\mathcal{G}$ 中（见图 5）。现在考虑一个包含内部三角面（v_1、v_2、v_3）的双连通外平面图 $\mathcal{G}$；该三角面对应于 $\mathcal{G}$ 的弱对偶中的一个三度顶点。令 $E(\mathcal{G})$ 为 $\mathcal{G}$ 的任意扩展图。构造 $E(\mathcal{G})$ 需要通过添加四个方位顶点来增广 $\mathcal{G}$。此增广将 $\mathcal{G}$ 的外边界划分为四条连续顶点路径（P_1、P_2、P_3、P_4），它们沿外面按顺时针顺序排列。每个方位顶点都与其对应路径 P_i 中的所有顶点相邻，其中 $1 \leq i \leq 4$。增广过程会确保所得图仍为三角剖分，且不含分隔三角形。对于增广过程中将 $\mathcal{G}$ 的外边界划分为四条连续路径的任意方式，如果一个度为 2 的顶点仅位于一条边界路径上，就会产生一个分隔三角形。因此，任何单一路径都不能包含度为 2 的顶点；每个度为 2 的顶点必然至少由两条边界路径共享。由此可知，三角面中的顶点 v_1、v_2、v_3 必须分别位于不同的路径上，因此相应模块沿不同的方位方向（N、W、S、E）排列。不失一般性，令 v_1、v_2和 v_3 分别位于边界路径 P_1、P_2和 P_3上。因此，与 v_1、v_2和 v_3 对应的模块分别沿 N、E和 S 方位方向排列。由于 v_1、v_2和v_3 两两相邻且位于三条不同的边界路径上，相应模块中有两个在矩形布局中共线，第三个则与这两个模块正交。在 REL 中，v_1、v_2和 v_3 之间恰有三种标记模式可实现这种构型（见图 5）。

(i) (v_1, v_2)、$(v_3, v_2) \in T_2$ 以及 $(v_3, v_1) \in T_1$。
(ii) (v_3, v_1)、$(v_2, v_1) \in T_1$ 以及 $(v_3, v_2) \in T_2$。(iii) (v_3, v_1)、$(v_3, v_2) \in T_1$ 以及 $(v_1, v_2) \in T_2$。

设 $\alpha_1(\neq v_3)$ 是顶点 v_1 和 v_2的公共邻点。根据图 $\mathcal{G}$中的邻接关系，α_1 要么位于路径 P_1 上，要么位于路径 P_2 上。在这两种情况下，边 (v_1, v_2) 都是 REL 中交替标记四边形 $(v_2 - \alpha_1 - v_1 - v_3)$ 的对角线，因此 (v_1, v_2) 是可翻转边（见图 6）。此外，在此构型中，边 (v_3, v_2) 也具有可翻转性。设 $\alpha_2(\neq v_1)$ 是顶点 v_3 和 v_2 的公共邻点。根据图中的邻接关系，α_2 要么位于路径 P_2 上，要么位于路径 P_3 上。在这两种情形下，边 (v_3, v_2) 都是交替标记四边形 $(v_3 - \alpha_2 - v_2 - v_1)$ 的对角线，因此是可翻转边（见图 6）。

情形 (ii) 可直接由情形 (i) 推得。在情形 (i) 中，边 (v_1, v_2) 属于 T_2；将其标签翻转，使 $(v_2, v_1) \in T_1$ 后，即得到情形 (ii) 的构型，其中 (v_2, v_1) 仍是一条可翻转边。类似地，从 $(v_3, v_2) \in T_2$ 开始，并将其标签翻转，使 $(v_3, v_2) \in T_1$，即可由情形 (i) 推得情形 (iii)，得到情形 (iii) 的构型，其中 (v_3, v_2) 仍是一条可翻转边。

因此，在（v_1，v_2）、（v_1，v_3）和（v_2，v_3）中始终至少存在一条可翻转边，其中 v_i、$1 \leq i \leq 3$是与弱对偶图中一个度为 3 的顶点对应的三角面的顶点，具体取决于扩展图$E（\mathcal{G}）$以及外平面图 $\mathcal{G}$中的邻接关系。

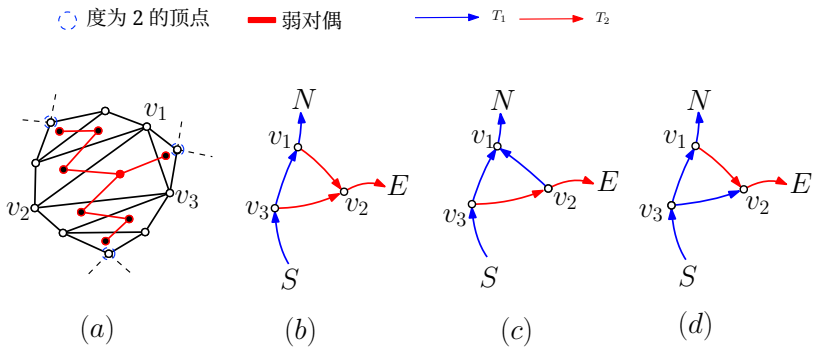


图 5：（a）路径由度为 2 的顶点分隔。（b-d） v_1、 v_2 和 v_3 之间三种可能的标记模式。

□

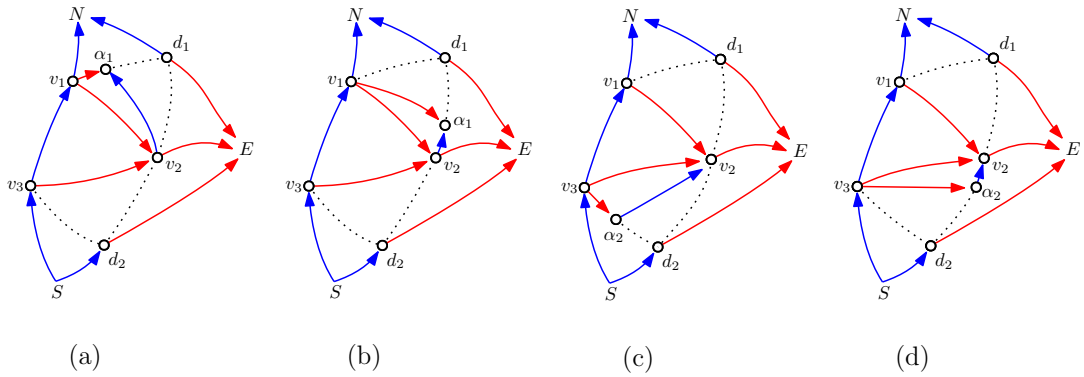


图 6：（a-b）边（v_1， v_2）可翻转；（c-d）边（v_3， v_2）可翻转。

备注：恰有两个度为二的顶点的外平面图，至少存在一个与面积通用矩形布局对应的扩展图。然而，并非该外平面图的每一种扩展都能产生面积通用布局。如图 7 所示，同一个外平面图 $\mathcal{G}$ 可以通过两种不同的方式进行增广，从而得到扩展图 $E(\mathcal{G})$。其中一种增广会产生面积通用布局（见图 7b），而另一种则不会（见图 7a）。这一观察凸显了谨慎选择增广方式的重要性。因此，有必要刻画扩展外平面图的结构性质。定理 3 确定了为获得能够实现面积通用矩形布局的扩展图而必须避免的具体增广类型。

定理 3. 设 $\mathcal{G}$ 是一个恰有两个度为二的顶点的外平面图， $E(\mathcal{G})$ 是其扩展图。若 $E(\mathcal{G})$ 存在面积通用矩形布局，则顶点 $v \in V(\mathcal{G})$ 必须与 $E(\mathcal{G})$ 中恰好三个方位顶点相邻。

证明。设 $\mathcal{G}$ 是一个阶数为 $n > 3$ 的双连通外平面图。为了通过增广得到扩展外平面图，不可能让四个方位顶点都与外平面图中的同一个顶点相邻。同样，在扩展图中，外平面图的每个顶点也不可能只与一个方位顶点相邻（这是由扩展外平面图中的三角剖分所致）。假设没有顶点恰好与三个方位顶点相邻，那么必定恰有四个顶点，记为 $\mathcal{C} = \{v_{NE}, v_{SE}, v_{WS}, v_{NW}\}$，它们各自在扩展图 $E(\mathcal{G})$ 中恰好与两个方位顶点相邻。不失一般性，假设 v_{NE} 位于东北角（即与 N 和 E 相邻）， v_{SE} 位于东南角， v_{WS} 位于西南角， v_{NW} 位于西北角（见图 8a）。若边 (v_{NE}, v_{SE})、(v_{SE}, v_{WS})、(v_{WS}, v_{NW}) 和 (v_{NW}, v_{NE}) 存在，则此配置是最简单的一种不允许面积通用布局的形式（见图 7a）。

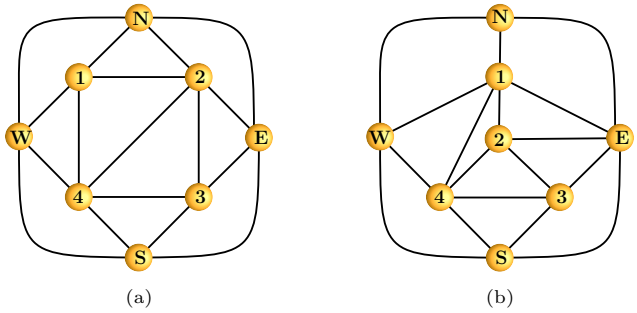


图 7：(a) 一个不具有面积通用布局的扩展外平面图。(b) 一个具有面积通用布局的扩展外平面图。

由于 $\mathcal{G}$ 是外平面图，扩展外平面图 $E(\mathcal{G})$ 中的每个顶点都必须至少与一个方位顶点相邻。因此，$V(\mathcal{G}) \setminus \{v_{NE}, v_{SE}, v_{WS}, v_{NW}\}$ 中的所有顶点都恰好与一个方位顶点相邻。我们将 $\mathcal{G}$ 中长度至少为三且端点按指定顺序位于 $\mathcal{C}$ 中的路径定义为非平凡路径。现在，我们考察 $\mathcal{C}$ 的顶点之间至少存在一条非平凡路径的条件。

1)。假设在 $\mathcal{G}$ 中恰好存在一条非平凡路径。不失一般性，设 p_1 是一条从 v_{NE} 到 v_{SE} 的非平凡路径，记作 $p_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$，其中 $u_1 = v_{NE}$ 和 $u_k = v_{SE}$。在这种情况下，每个 REL 中的所有边 (u_j, u_i) $\forall j > i$ 均标记为 T_1（如果非平凡路径的端点为 v_{NW} 和 v_{NE}，则同理，边标记为 T_2）。此外，必定存在一个同时与 v_{NW} 和 v_{WS} 相邻的顶点 $u_c \in p_1$。因此，集合 $\{u_c, u_{c-1}, v_{NW}, v_{WS}\}$ 或集合 $\{u_c, u_{c+1}, v_{WS}, v_{NW}\}$（见图 8b 和 8c）必定在 REL 中交替标记。因此，在这种构型中必定存在一条可翻转的 $((u_c, v_{NW})$ 或 $(u_c, v_{WS}))$ 边。

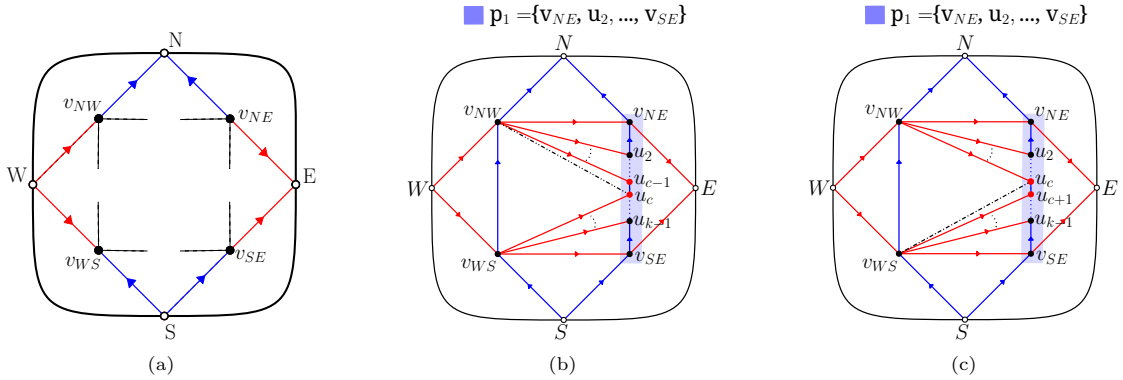


图8：(a) 顶点 v_{NE}、v_{ES}、v_{WS} 和 v_{NW} 与方位顶点的邻接关系。(b) 可翻转边 $(v_{NW}\ u_c)$ 的存在。(c) 可翻转边 $(u_c\ v_{WS})$ 的存在，

2)。如果恰好存在两条非平凡路径，例如 p_1 和 p_2，则分析可分为两种子情况：(i) 两条路径相邻；(ii) 两条路径不相邻。

2.1)。设 p_1 和 p_2 是两条相邻的非平凡路径。不失一般性，设 $p_1 = \{u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1k_1}\}$、$p_2 = \{u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2k_2}\}$，其中 $u_{11} = v_{NE}$、$u_{1k_1} = u_{2k_2} = v_{SE}$ 和 $u_{21} = v_{WS}$。此配置还可进一步细分为三种不同情况。

i 该图的邻接关系满足 $\deg(v_{WS}) = \deg(v_{SE}) = \deg(v_{NE}) = 2$，且 $\deg(v_{NW}) > 2$。根据定理 2，可知 $\mathcal{G}$ 不具有面积通用布局。ii 要么存在一个顶点 $u_{1c} \in p_1$，它同时与 v_{NW} 和 v_{WS} 相邻；要么存在一个顶点$u_{2c} \in p_2$，它同时与 v_{NW} 和 v_{NE} 相邻。这种情况可以通过类似于情况 1 的论证来解决（见图 9a 和图 9b）。

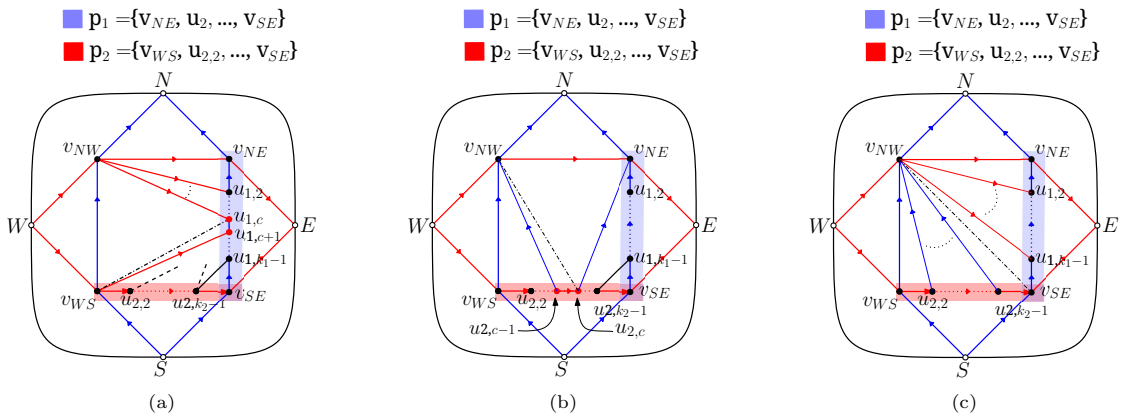


图9：(a) 存在一条可翻转边（v_{WS} $u_{1,\ c}$）。(b) 存在一条可翻转边（v_{NW} $u_{2,\ c}$）。(c) 存在一条可翻转边（v_{NW} v_{SE}）

iii 当 $\deg(v_{NW}) = n-1$ 时，可以直接验证边 (v_{NW}, v_{SE}) 是一条可翻转边（见图9c）。

2.2）。设 p_1 和 p_2 是两条非连续非平凡路径。不失一般性，设 $p_1 = \{u_{11}, u_{12},..., u_{1\ k_1-1}, u_{1k_1}\}$，其中 $u_{11} = v_{NE}$、$u_{1k_1} = v_{SE}$和 $p_2 = \{u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2\ k_2-1}, u_{2k_2}\}$，其中 $u_{21} = v_{NW}$，$u_{2k_2} = v_{WS}$。注意，v_{NW}和 v_{NE}不能同时具有度为2，同样，v_{WS}和 v_{SE}也不能同时具有度为2。对于满足$\deg(v_x) > 2$的 $x \in \{NW, NE, SE, WS\}$，我们通过以下方式为其关联一个索引 $m \in \{1, 2\}$

$$m = \begin{cases} 1, & x \in \{NW, WS\}, \\ 2, & x \in \{NE, SE\}, \end{cases}$$

令 $p_m = \{u_{m1}, u_{m2}, \ldots, u_{mk_m}\}$ 为一条路径，其顶点可能与 v_x 相邻，并按沿路径的自然顺序排列。若 $(v_x, u_{m,n}) \in E(\mathcal{G})$，且当 $n > 1$ 时 $(v_x, u_{m,n-1}) \notin E(\mathcal{G})$，则称顶点 $u_{m,n} \in p_m$ 为 v_x 在 p_m 上的最后一个相邻顶点。等价地，$(v_x, u_{m,n}) \in E(\mathcal{G})$，并且若 $n < k_m$，则 $(v_x, u_{m,n+1}) \notin E(\mathcal{G})$。若 u 是 v_x 在 p_m 的对侧路径上的任意邻点，则边 $(u_{m,n}, u)$ 或边 $(u_{m,n}, v_x)$ 是可翻转边（见图10a和图10b）。

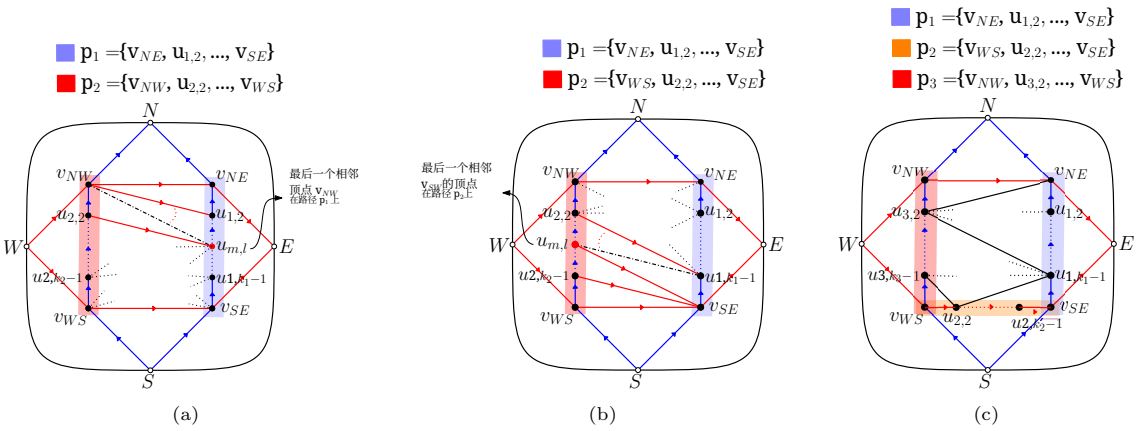


图 10：(a) 可翻转边（v_x $u_{m,l}$）的存在，$x = NW$，$m = 1$；(b) 可翻转边（$u_{m,l}$ u）的存在，$m = 2$ 和 $u = u_{1,k_1-1}$；(c) deg（v_{NW}）$= deg$（v_{SE}）$= deg$（v_{WS}）$= 2$ 在外平面图 $\mathcal{G}$中。

3）。如果恰好存在三条非平凡路径，即 p_1、p_2 和 p_3，不失一般性，我们可以假设 $p_1 = \{u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1k_1}\}$、$u_{11} = v_{NE}$、$u_{1k_1} = v_{SE}$、$p_2 = \{u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2k_2}\}$、$u_{21} = v_{WS}$、$u_{2k_2} = v_{ES}$ 以及 $p_3 = \{u_{31}, u_{32}, \ldots, u_{3k_3}\}$、$u_{31} = v_{NW}$、$u_{3k_3} = v_{WS}$. 在这种配置中，显然顶点 v_{NW}和

v_{NE} 不可能同时具有度为二的性质。此外，如果路径 p_1 上没有顶点与 v_{WS} 邻接关系，路径 p_3 上没有顶点与 v_{ES} 邻接关系，并且路径 p_1 上没有顶点与 v_{NW} 或 v_{NE} 邻接关系，那么所得的外平面图包含三个度为二的顶点（见图 10c）。这样的图不具有面积通用布局（见定理 2）。在其他所有可容许的邻接配置中，恰好有两个顶点的度为二，我们将在下面的两个子情况中进一步分析这一点。

i 当 deg(v_{NW}) 和 deg(v_{NE}) 均大于二时，只有在路径 p_2 上存在一个顶点 u_{2c}，且它同时与 v_{NE} 和 v_{NW} 相邻，才会出现这种情况。在这种情况下，我们会得到一条可翻转边——(u_{2c}, v_{NW}) 或 (u_{2c}, v_{NE})——如情况 1 中所述（见图 11a）。

ii 当对于某个 $x \in \{NW, NE\}$，deg(v_x) > 2时，若 $x = NE$ 则定义 $m = 3$，若 $x = NW$ 则定义 $m = 1$。令 $u_{m,l}$ 表示路径 p_m 上与 v_x 相邻的最后一个顶点；也就是说，(v_x,$u_{m,l}$) $\in E(\mathcal{G})$，且若 $l < k_m$ 则 (v_x,$u_{m,l+1}$) $\notin E(\mathcal{G})$。在这种情况下，边 (v_x, $u_{m,l}$) 或边 ($u_{m,l}$, $u_{p,2}$) 必定可翻转，其中若 $x = NE$ 则 $p = 2$，若 $x = NW$ 则 $p = 3$（见图 11b 和图 11c）。

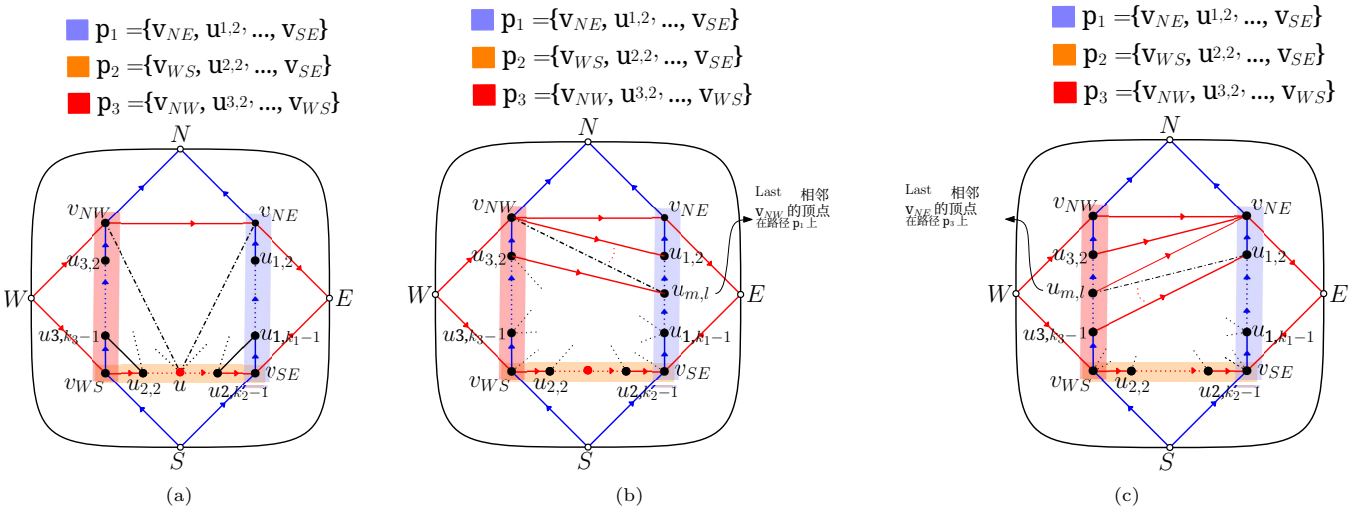


图11：（a）存在一条可翻转边，要么是（v_{NW} u），要么是（v_{NE} u）；（b）存在一条可翻转边（$u_{m,\ l}$ v_x）、 $m = 1$ 和$x = NW$；（c）存在一条可翻转边（$u_{m,\ l}$ $u_{p,\ 2}$）、 $m = 3$ 和 $p = 1$。

4）。如果恰好存在四条非平凡路径，设为 p_1、 p_2、 p_3 和 p_4，不失一般性地，我们可以假设 $p_1 = \{u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1k_1}\}$、$u_{11} = v_{NE}$、 $u_{1k_1} = v_{SE}$、 $p_2 = \{u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2k_2}\}$、 $u_{21} = v_{WS}$、 $u_{2k_2} = v_{ES}$、$p_3 = \{u_{31}, u_{32}, \ldots, u_{3k_3}\}$、 $u_{31} = v_{NW}$、$u_{3k_3} = v_{WS}$，以及 $p_4 = \{u_{41}, u_{42}, \ldots, u_{4k_4}\}$、 $u_{41} = v_{NW}$、 $u_{4k_4} = v_{NE}$。我们排除外平面图 $\mathcal{G}$ 中包含三个或更多度为 2 的顶点的构型（已知这些构型不存在面积通用布局（定理 2））。对于任意两条连续路径 p_m、 p_n（其中 m、 $n \in \{1, 2, 3, 4\}$和 $n \equiv m + 1$（取模 4）），假设 v_x和 $x \in \{NW, NE, SE, WS\}$不同时位于 p_m和 p_n上。定义u_j、$_k$为（$p_m \cup p_n$）$\cap N$（v_x）中的顶点，使得若 $k > 2$，则（v_x、 u_j、$_{k-1}$） $\notin E$（$\mathcal{G}$）；若 $k < k_j$，则（v_x、 u_j、$_{k+1}$） $\notin E$（$\mathcal{G}$）。（即 p_m 或 p_n 上与 v_x相邻的最后一个顶点。）令 p_{m+2} 表示与p_m 相对的路径（下标对 4 取模）。如果u_j、$_k$ 位于 p_m（分别为 p_n）上，则令 u 为 v_x 的邻居，且该邻居位于对侧路径 p_{m+2}上。那么（u_j、 $_k$、 u）或（u_j、 $_k$、 v_x）必定是一条可翻转边（见图 12a 和图 12b）。

在上述所有讨论的情形中，如果 $\mathcal{G}$ 的任何顶点在扩展图$E(\mathcal{G})$中都不恰好与三个方位顶点相邻，那么 $E(\mathcal{G})$的每个规则边标记都至少包含一条可翻转边。因此，相应的矩形布局不可能是面积通用的（见引理 1）。□

3 方法论 I：面积通用矩形布局的构造

为了解决双连通外平面图的面积通用布局问题，我们首先需要一种机制，用于判断给定的输入图是否满足此类布局存在所需的结构条件。具体而言，双连通外平面图只有在恰好包含两个度为二的顶点时，才存在面积通用布局（见定理 2）。只需统计度为 2 的顶点数量，即可在线性时间内检验这一条件。

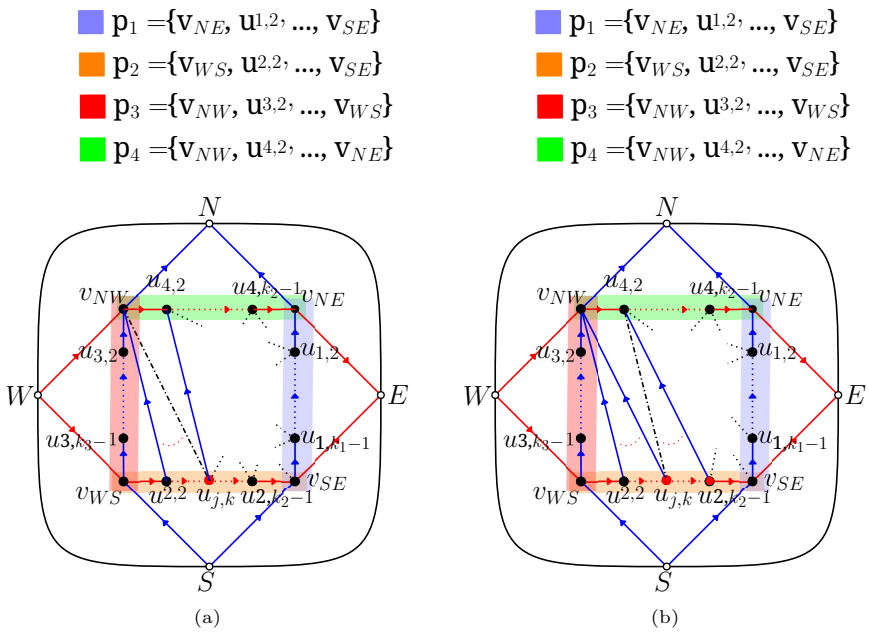


图 12：(a) 存在一条可翻转边 $(v_x\ u_{j,\ k})$，$j = 2, x = NW$ (b) 存在一条可翻转边 $(u_{j,\ k}, u)$，$j = 2$ 和 $u = u_{4,\ 2}$。

OUTER4COMPLETION 的目的是将给定的双连通外平面图转化为一个扩展外平面图，使所得扩展图存在面积通用矩形布局。具体而言，该增广可确保扩展图 $E(\mathcal{G})$ 的每一种正则边标记都不包含可翻转边。

Notat **i在一个d helper functions:**

– $B = (b_1, \ldots, b_n)$：按顺序排列的外面环。– d_1, d_2：两个二度顶点。– CARD $= [N, E, S, W]$：由四个新方位顶点组成的数组。– indexOf(v, B)：返回 v 在 B 中的位置。– 添加边(u, w)：插入一条边 (u, w)，同时保持平面性。– 对于 $1 \le i \le 4$, P_i，表示从外环 B 中选出的顶点集合，这些顶点按照其在 B 中出现的顺序列出，并由顶点 v, d_1 和 d_2 确定。– E_c：增广过程中引入的边的集合，用于构造 $E(\mathcal{G})$。

该增广过程在算法 1 中有形式化描述。给定一个双连通外平面图 $\mathcal{G}$，其外面环为 $B = (b_1, \ldots, b_n)$，且恰有两个二度顶点 d_1 和 d_2，该算法通过引入四个新顶点 N, E, S, W，并将它们沿边界按顺时针顺序排列，从而对 $\mathcal{G}$ 进行增广。这些顶点统称为 CARD $= [N, E, S, W]$，并作为方位顶点。随后，选取一个度大于二的枢轴顶点 $v \in V$。从 v 的后继顶点开始，沿顺时针方向遍历外边界环 B，并根据 d_1 和 d_2 在 B 上的位置，将其划分为四个集合 P_1, P_2, P_3 和 P_4。

P_1：仅由顶点 v 组成，P_2：沿 B 按顺时针顺序从 v 到第一个度为 2 的顶点 d_1 所经过的顶点，P_3：沿 B 按顺时针顺序从 d_1 到第二个度为 2 的顶点 d_2 所经过的顶点，P_4：从 d_2 返回 v 的其余顶点。

随后，将 P_i、$1 \le i \le 4$ 中的顶点分别与指定的方位顶点相连，并使顶点 v 本身与三个连续的方位顶点（W、N、E）相邻。最后，用边将四个方位顶点连接成四环（N、E、S、W），使增广图的新外面成为一个四边形。输出的增广图 $\mathcal{G}_v$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个有效扩展外平面图，从而保证它存在面积通用的矩形布局。

算法1 Outer4Completion($\mathcal{G}, B, d_1, d_2$)

输入：双连通外平面图 $\mathcal{G} = (V, E)$，外面环 $B = (b_1, \ldots, b_n)$（顺时针），度为 2 的顶点 d_1, d_2
输出：增广图 $\mathcal{G}_v = (V \cup \{N, E, S, W\}, E \cup E_C)$
$V_{>2} \leftarrow \{u \in V :$ 度 $_{\mathcal{G}_p}(u) > 2\}$
在外边界上添加顶点 N, E, S, W；CARD$= [N, E, S, W]$ ▷ *clockwise indices* 0..3
选择一个顶点 $v \in V_{>2}$
$\mathcal{G}_v \leftarrow \mathcal{G}$
添加边(v, W), 添加边(v, N), 添加边(v, E)
$i \leftarrow$ (indexOf$(v, B) + 1$) 取模 n,
$P_2 = \phi$, $P_3 = \phi$, $P_4 = \phi$
当.....时true **do**
    追加 $B[i]$ 到 P_2;
    如果 $B[i] = d_1$ 或 $B[i] = d_2$ 那么
        追加 $B[i]$ 到 P_3
        $i \leftarrow (i + 1)$ 取模 n
        中断
    $i \leftarrow (i + 1)$ 取模 n
对所有 $u \in P_2$ 执行 添加边(u, E)
当.....时 true 执行
    追加 $B[i]$ 到 P_3;
    如果 $B[i] = d_1$ 或 $B[i] = d_2$ 则
        追加 $B[i]$ 到 P_4
        $i \leftarrow (i + 1)$ 取模 n
        跳出
    $i \leftarrow (i + 1)$ 取模 n
对于所有 $u \in P_3$，执行添加边(u, S)
当.....时 true 执行
    如果 $B[i] = v$，那么跳出
    追加 $B[i]$ 至 P_4
    $i \leftarrow (i + 1)$ 取模 n
对于所有 $u \in P_4$，执行 添加边(u, W)
添加边$(\mathcal{G}_v, (N, E))$；添加边$(\mathcal{G}_v, (E, S))$；添加边$(\mathcal{G}_v, (S, W))$；添加边$(\mathcal{G}_v, (W, N))$
返回 G_v ▷ *success: augmented graph*

3.1 正确性与时间复杂度

为了证明 Outer4Completion 过程总能生成一个存在面积通用布局的扩展外平面图，且这一结论不依赖于所选的具体 REL，我们依赖以下定理。具体而言，我们证明：对于任意双连通外平面图 $\mathcal{G}$，如果存在一个顶点 v，其度 deg$(v) > 2$，并且可以使其与三个连续的方位顶点相邻，那么由此得到的扩展外平面图对于每一种可能的 REL 都存在面积通用布局。该论断在定理 4 中作了正式陈述。

定理 4. 设 $\mathcal{G}$ 是一个阶为 $n > 3$ 的双连通外平面图，并设 $v \in V(\mathcal{G})$ 是一个度为 $k > 2$ 的顶点。如果 v 在 $E(\mathcal{G})$ 中恰好与三个方位顶点相邻，则 $E(\mathcal{G})$ 具有单侧矩形布局（面积通用布局）是充分的。

证明。设 $\mathcal{G}$ 是嵌入平面且其顶点按顺时针顺序排列的一个双连通外平面图。选取一个度大于 2 的顶点 $v \in V$（$\mathcal{G}$），使其恰好与三个方位顶点相邻；按顺时针顺序将四个基准点记为 N、E、S、W。于是，V（$\mathcal{G}$）被唯一划分为四条连续的边界路径 P_1、P_2、P_3、P_4。这种划分的唯一性源于外平面性，以及 v（deg（v）> 2）与三个不同方位顶点相邻这一事实（见图 13a 和图 13b）。我们采用约定 $P_1 = \{v\}$，并从 v 出发按顺时针顺序取 P_2、P_3、P_4，使得 P_2 从 v 开始，并在第一个度为 2 的顶点 d_1 处结束；P_3 从 d_1 延伸到另一个度为 2 的顶点 d_2；其余边界顶点（包括 d_2）则位于 P_4 上。外面若有其他划分为四条路径的方式，就会产生一个分隔三角形，因此不对应有效的 RFP。

由于 v 同时属于 P_2 和 P_4，将 v 的第三个（非基数）邻接关系通过把它连接到 P_2 或 P_4 中的某个顶点来实现，会产生一种禁用局部构型（复杂/分隔三角形）。因此，第三个

能够见证 $\deg(v) > 2$ 的邻居必须位于 P_3上；将该顶点记为 $w \in P_3$。作出这一选择后， P_2 中的顶点与 P_4 中的顶点之间不可能存在邻接关系（见图 13c）。

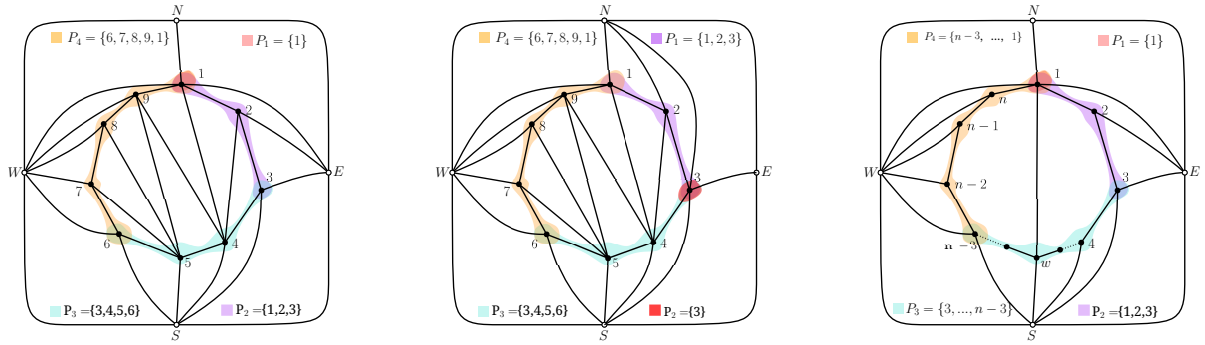


图 13：（a）当顶点 1 与三个方位顶点相邻时，路径的唯一划分。（b）在外平面图中，即使顶点 3 与三个方位顶点相邻，也可能存在多种划分。（c）邻接关系 (u, v) 不存在，其中 $u \in P_2$ 和 $v \in P_4$。

现在，路径 P_2 中的顶点只能与路径 P_3 中的顶点相邻，但有一个例外：其中一个顶点可与路径 P_1 中的顶点相邻。类似地，路径 P_4 中的顶点只能与路径 P_3 中的顶点相邻，但有一个例外：其中一个顶点可与路径 P_1 中的顶点相邻。在此划分下，四环构型只有两种可能：要么一条路径 p_i 中取两个顶点，另一条路径 p_j 中取两个顶点；要么一条路径 p_i 中取一个顶点，另一条路径 p_j 中取三个顶点。在这两种情况下，都不可能出现交替四环，即边在正则边标记中交替着色的四环。因此，由此构造得到的任何 REL 中都不会出现可翻转边。因此，通过这种增广得到的任何 REL 最终都会产生面积通用布局。 □

算法 1 的时间复杂度可分析如下。构造度大于二的顶点集合 $V_{>2}$ 需要遍历 $\mathcal{G}$ 中的所有顶点一次，耗时为 $O(n)$，其中 $n = |V|$。随后，算法选取一个枢轴顶点 v，并调用一次 indexOf(v, B)；该调用需要扫描边界环 B 一次，因此耗时为 $O(n)$。接下来，通过沿外环移动指针，将边界划分为三个连续集合 P_2、P_3、P_4；因此， B 上的每个顶点至多处理一次，耗时另为 $O(n)$。将各划分中的顶点连接到指定方位节点，每个顶点需要插入常数条边，因此耗时同样为 $O(n)$。最后，算法添加四条边以闭合该圈（N、 E、 S、 W），耗时为常数。因此，针对单个枢轴构造四向补全的总运行时间上界为 $O(n)$，主要由边界的线性扫描和度的计算所决定。

4 方法论 II：面积通用矩形布局的构造

在第3节中，我们介绍了一种算法：当顶点 $v \in V(\mathcal{G})$ 在 $E(\mathcal{G})$ 中恰好与三个方位顶点相邻时，该算法会构造出唯一的扩展外平面图。然而，当一个二度顶点在 $E(\mathcal{G})$ 中与三个方位顶点相邻时，增广可能产生多个不同的扩展外平面图，而且并非所有这些图都具有面积通用矩形布局。

本节中，我们将确定在二度顶点与三个方位顶点相邻时必须选择的特定增广方式，以得到一个无论正则边标记如何选择都具有面积通用矩形布局的扩展外平面图。由此，我们将枚举能够实现给定双连通外平面图的面积通用矩形布局总数。

定理 5. 设 $\mathcal{G}$ 是一个恰有两个度为二的顶点的双连通外平面图，并令 $E(\mathcal{G})$ 表示其扩展外平面图。设 d 是 $\mathcal{G}$ 的一个二度顶点，它在 $E(\mathcal{G})$中恰与三个方位顶点相邻。当且仅当 d 的至少一个邻居在 $E(\mathcal{G})$中恰与两个方位顶点相邻时，$E(\mathcal{G})$存在面积通用矩形布局。

证明。设 $\mathcal{G}$ 是一个阶数为 $n > 4$ 、恰有两个度为二的顶点的双连通外平面图，并令 $E(\mathcal{G})$ 表示其扩展外平面图；该图是在外面上按顺时针顺序添加四个方位顶点 N、W、S 和 E 得到的。设一个二度顶点 $d \in V(\mathcal{G})$ 在 $E(\mathcal{G})$中恰与三个方位顶点相邻。不失一般性，假设 d 与方位顶点 E、N 和 W 相邻。令 w_1 和 w_2 表示图 $\mathcal{G}$ 中 d 的两个邻居。

我们首先确立一个必要条件：如果 d 的两个邻居都恰好与一个方位顶点相邻，那么可以从增广中得到多个不同的扩展外平面图（见图13b），且无论选择哪种正则边标记，这些图都不具备面积通用布局。随后我们证明，该条件也是充分的。具体而言，如果 d 至少有一个邻居恰好与两个方位顶点相邻，那么增广会产生唯一的扩展外平面图 $E(\mathcal{G})$，该图具有面积通用矩形布局。

由于用于构造 $E(\mathcal{G})$ 的增广将顶点集 $V(\mathcal{G})$ 划分为四条边界路径（P_0、P_1、P_2、P_3），不失一般性，假设路径 P_0 仅由二度顶点 d 组成（因为 d 与三个方位顶点相邻）。假设 d 的两个邻居 w_1 和 w_2 都恰好与一个方位顶点相邻（见图14a）。在这种情况下，w_1 和 w_2 各自仅位于一条边界路径上，且分别与 $w_1 \in P_3$ 和 $w_2 \in P_1$ 相邻。在这种配置下，可以从增广中得到多个不同的扩展外平面图，其可能的扩展数量取决于 $|V(\mathcal{G})|$。设 v_1、$v_2 \in V(\mathcal{G})$ 为两个相邻顶点，使得满足以下任一条件：$v_1 \in N(w_1) \cap N(w_2)$，或 $v_2 \in N(w_1) \cap N(w_2)$（见图14b和图14b）。由于 $(w_1, w_2) \in T_2$、$(v_1, w_1) \in T_1$、$(v_2, w_2) \in T_1$，且 $(v_1, v_2) \in T_2$ （因为 $v_1 \in P_3$ 和 $v_2 \in P_1$），这些边共同构成一个交替四环（w_1、w_2、v_2、v_1）。如果 $v_1 \in N(w_1) \cap N(w_2)$，那么边 (v_1, w_2) 可翻转。同理，如果 $v_2 \in N(w_1) \cap N(w_2)$，那么边 (w_1, v_2) 可翻转。因此，每个这样的增广都会在相应的正则边标记中引入至少一条可翻转边。

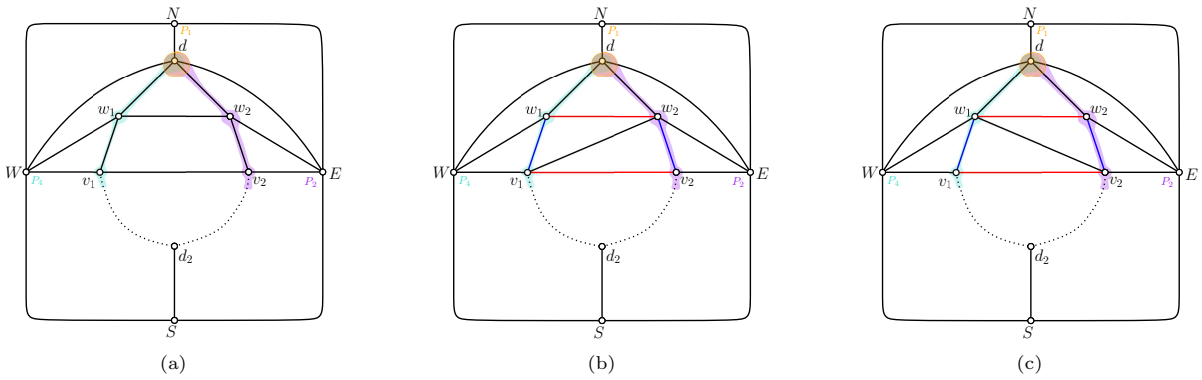


图 14: （a）当 $|V(\mathcal{G})| > 4$ 时，可能存在多个 *extended* 外平面图。（b、c）交替四环 $w_1 - w_2 - v_2 - v_1$ 中存在一条可翻转边。

另一方面，假设 d 的某个邻居恰好与两个方位顶点相邻；不失一般性，设 w_2 与方位顶点 N 和 E 相邻。在这种情况下，增广会得到唯一的扩展外平面图。边界顶点的诱导划分由四条路径 $P_0 = \{d\}$、$P_1 = \{d, w_2\}$、$P_2 = \{w_2, \ldots, d_2\}$ 和 $P_3 = \{d_2, \ldots, d\}$. 组成。设 $C = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ 是增广图 $E(\mathcal{G})$ 中任意一个四环。要使 C 成为交替四环，必须存在索引 $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ 和 $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ （索引对 4 取模），使得

$$\{a_i, a_{i+1}\} \subseteq P_k \quad \text{and} \quad \{a_{i+2}, a_{i+3}\} \subseteq P_{k+2},$$

with

$$\{a_i, a_{i+1}\} \cap P_{k+2} = \emptyset \quad \text{and} \quad \{a_{i+2}, a_{i+3}\} \cap P_k = \emptyset.$$

在给定的边界顶点划分 (P_0, P_1, P_2, P_3) 下，没有四环 C 满足这些条件。因此，$E(\mathcal{G})$ 不包含交替四环。由此可知，不存在可翻转边。因此，与 $E(\mathcal{G})$ 对应的矩形平面布局是面积通用的。□

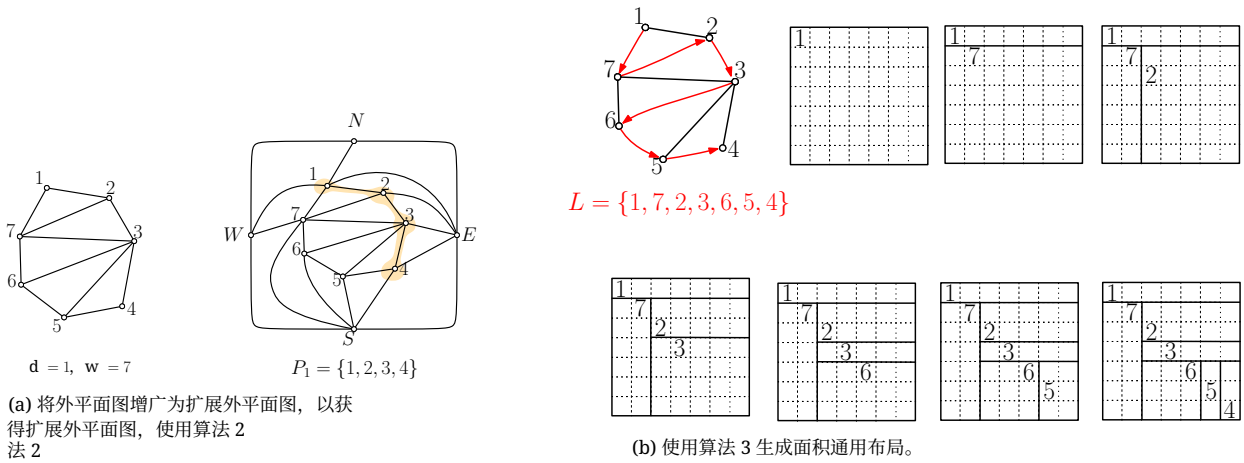
算法 2 度-2 扩展($\mathcal{G}, B, d_1, d_2$)

输入：双连通外平面图 $\mathcal{G}=(V,E)$，外面环 $B=(b_1,\ldots,b_n)$（顺时针），度为 2 的顶点 d_1, d_2
输出：增广图集合 $\mathcal{S}$
$\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$
添加方位顶点 N , E, S, W 按顺时针顺序
对于所有 $d \in \{d_1, d_2\}$ 执行 ▷ *choose degree-2 vertex*
    $i_d \leftarrow$ indexOf(d, B)
    $w^- \leftarrow B[(i_d - 1)$ 取模 $n]$ ▷ *neighbor before d*
    $w^+ \leftarrow B[(i_d + 1)$ 取模 $n]$ ▷ *neighbor after d*
    对于所有 $w \in \{w^-, w^+\}$ 执行 ▷ *choose neighbor with two cardinal adjacencies*
        $\mathcal{G}_{d,w} \leftarrow \mathcal{G}$
        添加边(d, W); 添加边(d, N); 添加边(d, E)
        如果 $w = w^+$，则 ▷ *w immediately after d*
            添加边(w, E); 添加边(w, S)
            $P_0 \leftarrow \{d\}$, $P_1 \leftarrow \{d, w\}$, $P_2 \leftarrow \{w\}$, $P_3 \leftarrow \emptyset$
            $i \leftarrow$ (indexOf(w, B) $+ 1$) 取模 n
            当.....时 $B[i] \neq w^-$，执行
                将 $B[i]$ 追加到 P_2
                $i \leftarrow (i+1)$ 对 n 取模
            将 $B[i]$ 追加到 P_2 和 P_3
            $i \leftarrow (i+1)$ 对 n 取模
            当 $B[i] \neq d$ 时执行
                将 $B[i]$ 追加到 P_3
                $i \leftarrow (i+1)$ 取模 n
            追加 $B[i]$ 到 P_3
        else ▷ *w immediately before d*
            添加边(w, W); 添加边(w, S)
            $P_0 \leftarrow \{d\}$, $P_3 \leftarrow \{d, w\}$, $P_2 \leftarrow \{w\}$, $P_1 \leftarrow \emptyset$
            $i \leftarrow$ (indexOf(w, B) $- 1$) 取模 n
            当.....时 $B[i] \neq w^-$ 执行
                将 $B[i]$ 追加到 P_2
                $i \leftarrow (i-1)$ 取模 n
            将 $B[i]$ 追加到 P_2 和 P_1
            $i \leftarrow (i-1)$ 取模 n
            当.....时 $B[i] \neq d$ 执行
                将 $B[i]$ 追加到 P_3
                $i \leftarrow (i-1)$ 取模 n
            将 $B[i]$ 追加到 P_1
        对所有 $u \in P_1$，执行添加边(u, E)
        对所有 $u \in P_2$，执行添加边(u, S)
        对所有 $u \in P_3$，执行添加边(u, W)
        ▷ *connect cardinal vertices*
        添加边(N, E); 添加边(E, S)
        添加边(S, W); 添加边(W, N)
        $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\mathcal{G}_{d,w}\}$
返回 $\mathcal{S}$

Kant 和 He [8] 证明，对于任意扩展图 $E(\mathcal{G})$，都可以在线性时间内计算出正则边标记，并且也可以在线性时间内构造由该标记定义的对应矩形平面布局。然而，对于算法 2 生成的特定扩展外平面图，无需计算正则边标记。相反，我们可以按照下文所述的算法，直接将顶点放置在 $n \times n$网格上，从而构造矩形平面布局。所得布局总是面积通用的。

算法 3 AURFP($\mathcal{G}, d, w, P_1$)

输入：一个双连通外平面图，其中指定了一个度为 2 的顶点及其邻点，以及 $V(\mathcal{G})$ 的一个有效划分
输出：一个面积通用布局
$L \leftarrow [d, w]$
$\ell \leftarrow d, \ell' \leftarrow w$
令 $u \in N_{\mathcal{G}}(\ell \cap \ell')$，追加 u 到 L
已访问 $\leftarrow \{d, w, u\}$
当.....时 |已访问| < $|V(\mathcal{G}|$ 执行
    $A = N_{\mathcal{G}}(u, \ell) \setminus Visited$, $B = N_{\mathcal{G}}(u, \ell') \setminus Visited$
    如果 $A \neq \phi$ 则
        选择 $v \in A$ 并将 v 追加到 L
        已访问 $\leftarrow$已访问 $\cup\{v\}$
        $\ell' \leftarrow u$ 和 $u \leftarrow v$
    否则如果 $B \neq \phi$ 则
        选择 $v \in B$ 并将 v 追加到 L
        已访问 $\leftarrow$已访问 $\cup\{v\}$
        $\ell \leftarrow u$ 和 $u \leftarrow v$
绘制一个块并将其命名为 $L[0]$
在该块内构造一个 $n \times n$ 网格
对于 $i = 2$ 到 $|V(\mathcal{G})|$ 执行
    如果 $L[i-2] \in P_1$ 则
        在 i^{th} 层级处用水平线段切分右下块；将新块命名为 $L[i-1]$
    else
        在 i^{th} 层级处用垂直线段切分右下块；将新块命名为 $L[i-1]$



(a) 将外平面图增广为扩展外平面图，以获得扩展外平面图，使用算法 2 法 2

(b) 使用算法 3 生成面积通用布局。

图 15：算法 2 和算法 3 的示意图，展示了通过固定一个与三个方位顶点相邻的二度顶点来构造面积通用矩形布局。

算法 3 总是会生成面积通用矩形布局。在每次迭代 i 中，通过插入一条极大线段来创建一个新块，该线段构成与 $L[i-2]$ 对应的矩形的一条边。因此，算法引入的每条极大线段都是单侧的。由此，最终得到的矩形布局是面积通用的。

5 枚举实现双连通外平面图邻接结构的面积通用矩形布局

本文刻画了这样一类扩展外平面图：它们由一个双连通外平面图增广恰好两个度为二的顶点而得到，并且具有面积通用矩形布局。在第2节中，我们证明，如果扩展外平面图中没有顶点恰好与三个方位顶点相邻，那么相应的矩形布局就不是面积通用的。随后，我们在第3节中证明，当某个顶点恰好与三个方位顶点相邻时，只有当所选顶点在原图中的度大于二，这一条件才足以保证得到面积通用矩形布局；在这种情况下，增广得到唯一的扩展外平面图。相比之下，当所选顶点的度为二时，增广可能得到多个不同的扩展外平面图，而并非所有这些图都具有面积通用矩形布局。

因此，选定一个度至少为三的顶点，并使其恰好与三个方位顶点相邻后，所得扩展外平面图是唯一的，且存在唯一的正则边标记。因此，对于每个这样的选定顶点，恰好存在一种面积通用矩形排列（旋转视为相同）。

在第4节中，我们将说明，当一个二度顶点恰好与三个方位顶点相邻时，为获得能够实现面积通用矩形布局的扩展图所需进行的扩充，取决于其邻居的相对位置。特别是，如果二度顶点的某个邻居恰好与两个方位顶点相邻，那么所得扩展外平面图便是唯一确定的，并且存在面积通用布局。在这种情况下，恰有四种不同的扩展外平面图能够实现面积通用矩形布局。

总之，对于给定的双连通外平面图，恰有 $|V(\mathcal{G})|+2$ 种面积通用矩形布局（旋转视为相同）能够实现该图。

6 结论与未来工作

本文研究了为双连通外平面图构造面积通用布局的问题。我们的主要贡献是确定了双连通外平面图可通过增广得到能够容纳面积通用布局的扩展外平面图所需的充要条件。具体而言，我们证明，适当图中恰好存在两个度为二的顶点是必要条件。然而，并非对这类图进行任意增广都能得到面积通用布局。为克服这一限制，我们根据适当图的顶点与方位顶点之间的邻接关系，对扩展外平面图进行了分类。（见图15和图16）。

本文的研究成果为构造外平面图的面积通用布局奠定了结构基础。基于这项工作，未来有若干值得探索的方向。一个重要方向是将面积通用布局的概念推广到更广泛的图类。具体而言，确定并刻画所有存在面积通用布局的图类，仍是一个开放问题。此外，为这类图开发高效的布局构造算法，也是未来研究中一项具有挑战性但前景广阔的工作。将这一方法扩展到更复杂的图结构，并改进算法以优化紧凑性和对称性等布局属性，可进一步提升其在实际问题中的适用性。

参考文献

1. Bruls, M., Huizing, K., Van Wijk, J.J.: 正方形化树图。载于：VisSym。第 33–42 页。Springer（2000） 2. Earl, C., March, L.: 图论的建筑应用。载于《图论的应用》，第 327–355 页（1979） 3. Eppstein, D., Mumford, E.: 正交多面体的 Steinitz 定理。载于：第二十六届年度计算几何研讨会论文集。第 429–438 页（2010） 4. Eppstein, D., Mumford, E., Speckmann, B., Verbeek, K.: 面积通用矩形布局。第二十五届计算几何年度研讨会论文集 41(3)，267—-276（2009） 5. Eppstein, D., Mumford, E., Speckmann, B., Verbeek, K.: 面积通用和受约束矩形布局。SIAM 计算杂志 41(3)，537–564（2012） 6. Fusy, ́E.: 三角剖分上的横截结构及其在直线绘制中的应用。载于：国际图绘制研讨会。第 177–188 页。Springer（2005） 7. Fusy, ́E.: 三角剖分上的横截结构：组合研究与直线绘图。离散数学 309(7)，1870–1894（2009）

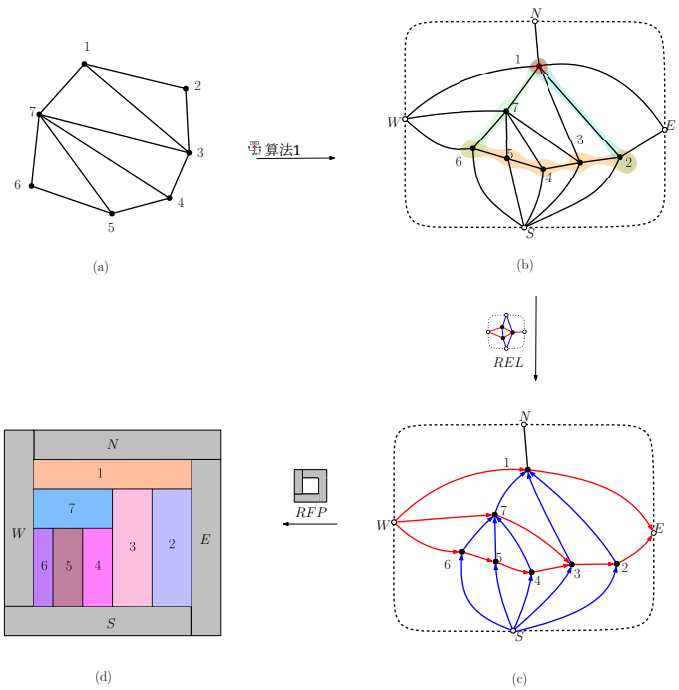


图16：（a）恰有两个度为 2 的顶点的外平面图；（b）通过算法 1 得到的扩展外平面图，其中四条连续路径用不同颜色区分；（c）该扩展外平面图的 REL；（d）与输入外平面图对应的面积通用布局。

8. Kant, G., He, X.: 四连通平面图的正则边标记及其在图绘制问题中的应用。理论计算机科学 172(1-2)，175–193（1997） 9. Ko´zmi´nski, K., Kinnen, E.: 平面图的矩形对偶。Networks 15(2)，145–157（1985） 10. Kumar, V., Shekhawat, K.: 可矩形对偶化图的变换。理论计算机科学（2021） 11. Mumford, E.: 面向制图应用的图绘制（2008） 12. Raisz, E.: 矩形统计变形地图。Geographical Review，第 292–296 页（1934） 13. Rinsma, I.: 不存在具有指定面积和邻接关系的某类矩形平面布局。Environment and Planning B: Planning and Design 14(2)，163–166（1987） 14. Rinsma, I.: 平面布置图的存在定理。Bulletin of the Australian Mathematical Society 37(3)，473–475（1988） 15. Rinsma, I.: 满足所需房间面积和树邻接关系的矩形与正交平面布置图。Environment and Planning B: Planning and Design 15(1)，111–118（1988） 16. Sun, Y., Yeap, K.H.: 矩形对偶平面布置中复杂三角形的边覆盖。Journal of Circuits, Systems, and Computers 3(03)，721–731（1993） 17. Van Kreveld, M., Speckmann, B.: 关于矩形变形地图。Computational Geometry 37(3)，175–187（2007） 18. Wimer, S., Koren, I., Cederbaum, I.: 平面布置图、平面图与布局。IEEE Transactions on Circuits and Systems 35(3)，267–278（2002） 19. Yeap, G.K., Sarrafzadeh, M.: 通过图对偶化实现可切割平面布置。SIAM Journal on Discrete Mathematics 8(2)，258–280（1995）