arXiv:2601.13794v1 [math.AC] 20 Jan 2026

# 理想滤过的渐近性质

MEHRDAD NASERNEJAD[1,2] 和 JONATHAN TOLEDO*, [3]

[1]阿尔图瓦大学，*UR 2462*，朗斯数学实验室（*LML*），*F-62300* 朗斯，法国[2]卡昂诺曼底大学，*ENSICAEN*，法国国家科学研究中心，诺曼底大学，*GREYC UMR 6072*，*F-14000* 卡昂，法国[3]*INFOTEC* 信息与通信研究及创新中心，墨西哥城，*14050*，墨西哥

Abstract. 我们通过理想滤过为在交换代数中研究持久性现象引入了一个统一框架。对于一个滤过 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，我们定义了 $\mathcal{F}$-持久性和 $\mathcal{F}$-强持久性，从而扩展了理想的普通幂和符号幂的经典概念。我们证明，如果 $\mathcal{F}$ 是强持久的，那么 $\mathcal{F}_{\rm sym}$ 也是强持久的，其中 $\mathcal{F}_{\rm sym}$ 表示与滤过 $\mathcal{F}$相关联的符号滤过。此外，我们证明，如果 $\mathcal{F}$ 是强持久的，那么 $\mathcal{F}$ 是持久的。

## 1. Introduction

过去几十年来，对理想的幂和符号幂的持久性现象的研究一直在交换代数中发挥着核心作用。设 $I$ 是交换诺特环 $R$的一个理想。若存在一个元素 $h \in R$ 使得$\mathfrak{p} = (I :_R h)$，则称素理想 $\mathfrak{p} \subset R$为 $I$ 的一个关联素理想。与 $I$ 相关联的所有素理想组成的集合记作 $\mathrm{Ass}_R(R/I)$，称为 $I$的关联素理想集。我们关注的是随着指数 $t$ 变化，集合 $\mathrm{Ass}_R(R/I^t)$ 的行为。Brodmann [4] 的一个基本结果表明，序列 $\{\mathrm{Ass}_R(R/I^t)\}_{t\geq 1}$最终会稳定。更准确地说，存在一个正整数 $t_0$ ，使得对所有 $t \geq t_0.$ ，都有 $\mathrm{Ass}_R(R/I^t) = \mathrm{Ass}_R(R/I^{t_0})$。满足这一条件的最小整数 $t_0$称为 $I$的稳定指数，而公共值 $\mathrm{Ass}_R(R/I^{t_0})$称为 $I$ 的关联素理想的稳定集合，记作 $\mathrm{Ass}^\infty(I)$。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 13B25, 13F20, 13E05.

*Key words and phrases.* 理想的滤过；符号滤过；持久性；强持续性；符号强持续性。

*通讯作者。电子邮箱：m nasernejad@yahoo.com 和 jonathan.toledo@infotec.mx。

Brodmann 定理引发了各种进一步研究。一个自然而然的问题是，包含关系是否

$$\operatorname{Ass}_R(R/I^t) \subseteq \operatorname{Ass}_R(R/I^{t+1})$$

对所有 $t \geq 1$都成立。McAdam [8] 给出了一个反例，表明这一包含关系一般并不成立。若理想 $I \subset R$ 满足持续性，则称它具有该性质；这意味着上述包含关系对每个 $t \geq 1$都成立。此外，若理想 $I$ 满足强持续性，则称它具有该性质，即

$$(I^{t+1} :_R I) = I^t \quad \text{for all } t \geq 1.$$

不过，Ratliff [16] 证明，当 $t$充分大时，这个等式成立。值得注意的是，强持续性蕴含持续性（例如，参见 [10, 命题 2.9]的证明），而反向蕴含一般并不成立。

特别地，交换诺特环 $R$ 中的理想 $I$ 具有符号强持续性，如果

$$(I^{(t+1)} :_R I^{(1)}) = I^{(t)} \quad \text{for all } t \geq 1,$$

其中，$I^{(t)} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min}(I)}(I^t R_{\mathfrak{p}} \cap R)$表示 $I$的第 $t$个符号幂。

现在，设 $I$ 是域 $K$上的多项式环 $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ 中的一个单项式理想，其中 $x_1, \ldots, x_n$ 是不定元。即使在这种情况下，持续性也并非普遍成立。事实上，正如 [6]所示，即使在平方自由单项式理想中也存在反例。一般而言，单项式理想在理解组合学与交换代数之间的深刻联系方面发挥着核心作用。这种相互作用使得代数技巧能够应用于组合问题，反过来，组合学见解也能启发代数问题。特别是，该领域的早期贡献者之一 Villarreal 引入了边理想的概念。具体而言，对于一个简单有限无向图 $G$，在 [19], 中引入的边理想 $I(G)$由单项式$x_i x_j$生成，其中 $\{i, j\}$ 是 $G$的一条边。

迄今为止，已有大量采用组合方法的研究致力于确定满足持久性（见 [5, 9, 11, 12]）、强持续性（见 [1, 2, 3, 13]）和符号强持续性（见 [7, 14]）的单项式理想类。

本文的主要目标是介绍并发展一套关于理想滤过的统一且一般的持久性理论。给定一个交换环 $R$ 的滤过$\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，我们将 $\mathcal{F}$-持久性和 $\mathcal{F}$-强持久性 定义为经典持久性和强持久性性质的自然推广。在这一框架下，经典的持久性、强持久性和符号强持续性概念，都可作为特殊情形得到恢复，对应于由理想的普通幂和符号幂给出的滤过。特别地，受符号幂理论的启发，我们进一步引入与给定滤过 $\mathcal{F}$ 相关联的符号滤过 $\mathcal{F}_{\text{sym}}$ 。本文主要有两项

结果。首先，我们证明，如果 $\mathcal{F}$ 具有强持久性，那么 $\mathcal{F}_{\mathrm{sym}}$ 也具有强持久性（参见推论 3.6）。其次，我们证明，如果 $\mathcal{F}$ 具有强持久性，那么 $\mathcal{F}$ 具有持久性（参见推论 3.11）。最后，我们考察滤过在环上的标准运算（如直和）下的表现。特别地，作为一个应用，我们证明直和滤过 $\mathcal{F}\bigoplus\mathcal{G}$ 具有强持久性，当且仅当 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 都具有强持久性，参见命题4.5。

在全文中，符号 $\mathbb{N}$表示非负整数。此外，本文中的所有环都是交换诺特环。

## 2. Filtrations of ideals

本节将介绍并研究 $\mathcal{F}$-强持久性和 $\mathcal{F}$-持久性的概念，其中 $\mathcal{F}$ 是一个滤过。这些概念推广了强持续性和持续性。为此，我们先给出以下定义。

**定义 2.1**。设 $R$ 为一个环。若 $\mathcal{F}=\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $R$ 的理想族，则称其为 $R$ 的一个滤过，如果它满足以下条件：

(i) $I_0=R$；(ii) $I_{n+1}\subseteq I_n$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$成立；(iii) $I_nI_m\subseteq I_{n+m}$ 对所有 $n,m\in\mathbb{N}$成立。

**例 2.2**。 *([20, 练习 4.3。45])* 设 $I$ <style id='14}>是环 $R$中的一个理想。则以下各族定义了 $R$的滤过：

(a) $I_i=\overline{I^i}$，$I$的普通幂；(b) $I_i=I^i$，$I^i$的整闭包；

(c) $I_i=I^{(i)}$，$I$的符号幂；(d) $I_n=\bigoplus_{i\geq n}R_i$，其中 $R=\bigoplus_{i\geq 0}R_i$ 是一个分次环。

以下命题在命题 2.6的证明中起着关键作用。

**命题 2.3**。设 $\mathcal{F}=\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是环 $R$的一个滤过。则对所有 $i\geq 1$，都有 $\mathrm{Min}(I_i)=\mathrm{Min}(I_1)$，其中$\mathrm{Min}(L)$ 表示理想 $L$的极小素理想集合。

证明。固定 $i\geq 1$。首先，令 $\mathfrak{p}\in$Min$(I_1)$。由 $I_i\subseteq I_1$ 和 $I_1\subseteq\mathfrak{p}$，可推出 $I_i\subseteq\mathfrak{p}$。此外，根据定义可知$I_1^i\subseteq I_i$。由于 $I_i\subseteq\mathfrak{p}$，存在某个 $\mathfrak{p}'\in$ Min$(I_i)$，使得 $I_i\subseteq\mathfrak{p}'\subseteq\mathfrak{p}$。因为 $I_1^i\subseteq I_i\subseteq\mathfrak{p}'$，所以得到 $I_1\subseteq\mathfrak{p}'\subseteq\mathfrak{p}$。由 $\mathfrak{p}$ 在$I_1$上的极小性，可得 $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}$。这意味着 $\mathfrak{p}\in$ Min$(I_i)$。因此，Min$(I_1)\subseteq$Min$(I_i)$。

反之，设 $\mathfrak{p}\in$ Min$(I_i)$。再次，由于 $I_1^i\subseteq I_i$，我们得到 $I_1\subseteq\mathfrak{p}$。因此，存在某个 $\mathfrak{p}'\in$Min$(I_1)$，使得 $I_1\subseteq\mathfrak{p}'\subseteq\mathfrak{p}$。由 $I_i\subseteq I_1$，我们有 $I_i\subseteq\mathfrak{p}'\subseteq\mathfrak{p}$。这意味着，根据 $\mathfrak{p}$ 在 $I_i$ 上的极小性，$\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}$。因此，$\mathfrak{p}\in$Min$(I_1)$，从而 Min$(I_i)\subseteq$ Min$(I_1)$。证明至此完成。□

受符号幂这一概念的启发，我们引入符号滤过 $\mathcal{F}_{\mathrm{sym}}$ ，它与给定的滤过相关联 $\mathcal{F}$ ，见命题2.6。为此，我们需要回顾下面的定义。

**定义 2.4.** 设 $R$ 是一个环， $I$ 是 $R$ 的一个理想。假设

$$I = \bigcap_{j=1}^{r} Q_j$$

$I$ 是一个极小主分解。我们将 $I$ 的第一符号幂定义为

$$I^{(1)} := \bigcap_{\sqrt{Q_j} \in \mathrm{Min}(I)} Q_j.$$

特别地，不难证明我们总有

$$I^{(1)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)} (IR_{\mathfrak{p}} \cap R).$$

在陈述下一个命题之前，先回顾以下定理。

**定理 2.5.** *([18, 定理 3.61])* 设 $P_1, \ldots, P_n$，其中 $n > 2$, 是交换环 $R$ 的理想，且 $P_1, \ldots, P_n$ 中至多有两个不是素理想。设 $S$ 是 $R$ 的一个加法子群，并且对乘法封闭（例如， $S$ 可以是 $R$ 的一个理想，或 $R$的一个子环）。假设

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i.$$

于是，对于某个 $j$ ，有 $1 \leq j \leq n$。

**命题 2.6**。 设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是 $R$ 的一个滤过。则族

$$\mathcal{F}_{\mathrm{sym}} := \{I_{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad \textit{where } I_{(i)} := I_i^{(1)} \textit{ and } I_{(0)} := R,$$

也是 $R$ 的一个滤过。

证明。 我们验证滤过的定义性质。根据第一符号幂的定义和命题 2.3，可得

$$I_{(i)} = I_i^{(1)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I_i)} (I_i R_{\mathfrak{p}} \cap R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I_1)} (I_i R_{\mathfrak{p}} \cap R), \text{ where } i \geq 1.$$

由于 $I_{i+1} \subseteq I_i$，局部化得到

$$I_{i+1} R_{\mathfrak{p}} \subseteq I_i R_{\mathfrak{p}} \quad \text{for all } \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I_1).$$

对所有这样的 $\mathfrak{p}$ 取交，我们得到 $I_{(i+1)} \subseteq I_{(i)}$. 。接下来只需证明，对于所有 $i$, $j \geq 1$，都有 $I_{(i)} I_{(j)} \subseteq I_{(i+j)}$。令 $\mathrm{Min}(I_1) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$。考虑以下极小主分解

$$I_i = \bigcap_{k=1}^{s} Q_{ik}, \qquad I_j = \bigcap_{\ell=1}^{t} Q_{j\ell}, \qquad I_{i+j} = \bigcap_{m=1}^{u} Q_{(i+j)m}.$$

根据命题 2.3，不失一般性，我们可以假设

$$\mathfrak{p}_k = \sqrt{Q_{ik}} = \sqrt{Q_{jk}} = \sqrt{Q_{(i+j)k}} \quad \text{for all } 1 \le k \le r.$$

这意味着

$$I_{(i)} = \bigcap_{k=1}^{r} Q_{ik} \quad \text{and} \quad I_{(j)} = \bigcap_{k=1}^{r} Q_{jk}.$$

对于每个 $k$满足 $r < k \le s$的情形，选取一个元素 $x_k \in \sqrt{Q_{ik}} \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r)$（定理 2.5 保证此类元素存在），并对于每个 $\ell$满足 $r < \ell \le t$的情形，选取一个元素 $y_\ell \in \sqrt{Q_{j\ell}} \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r)$（定理 2.5保证此类元素存在）。由 $x_k \in \sqrt{Q_{ik}}$可知，存在 $a_k > 0$ 使得 $x_k^{a_k} \in Q_{ik}$ 对所有 $r \prec k \le s$均成立。同理，由于$y_\ell \in \sqrt{Q_{j\ell}}$，存在 $b_\ell > 0$ 使得 $y_\ell^{b_\ell} \in Q_{j\ell}$ 对所有 $r < \ell \le t$均成立。取一个元素 $z \in I_{(i)}I_{(j)}$，并定义

$$z' := z\left(x_{r+1}^{a_{r+1}} \cdots x_s^{a_s}\right)\left(y_{r+1}^{b_{r+1}} \cdots y_t^{b_t}\right).$$

于是 $z' \in I_iI_j \subseteq I_{i+j}$。这里，固定 $1 \le k \le r$。由于 $Q_{(i+j)k}$ 是 $\mathfrak{p}_k$-主的，且对所有 $k' \in \{r+1, \ldots, s\}$都有$x_{k'}^{a_{k'}} \notin \mathfrak{p}_k$，因此可得

$$z\left(y_{r+1}^{b_{r+1}} \cdots y_t^{b_t}\right) \in Q_{(i+j)k}.$$

再次，由于对于所有 $\ell' \in \{r+1, \ldots, t\}$ 和 $Q_{(i+j)k}$， $y_{\ell'}^{b_{\ell'}} \notin \mathfrak{p}_k$ 是 $\mathfrak{p}_k$-准素的，我们得出 $z \in Q_{(i+j)k}$。由于这对每个 $1 \le k \le r$ 都成立，我们得到

$$z \in \bigcap_{k=1}^{r} Q_{(i+j)k} = I_{(i+j)}.$$

由此得到 $I_{(i)}I_{(j)} \subseteq I_{(i+j)}$，从而完成证明。 □

我们以如下结果结束本节。

**命题 2.7**。设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是环 $R$ 的一个滤过。那么

$$I_{i-j} \subseteq (I_i : I_j) \quad \textit{for all } i, j \in \mathbb{N}, i - j > 0.$$

证明。根据滤过的定义，对于所有满足 $i - j > 0$ 的 $i$， $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$I_jI_{i-j} \subseteq I_i.$$

因此，对于每个 $x \in I_{i-j}$ 和每个 $y \in I_j$，我们得到 $xy \in I_i$，这意味着 $x \in (I_i : I_j)$。所以，我们可以得出 $I_{i-j} \subseteq (I_i : I_j)$。□

## 3. Strongly Persistent filtrations

本节提出的若干论证受到经典情形下相关技术的启发，也可视为这些技术的自然推广与改编；该经典情形研究的是理想的普通幂，见 [5]。特别是，我们对冒号理想、素理想处的局部化以及关联素理想的刻画的运用，秉承了理想幂持久性理论的相同理念，同时也需要格外谨慎

以应对任意滤过更大的灵活性。本文给出的证明将这些思想从幂的刚性结构推广开来，在保留其核心机制的同时，将其调整到更广泛的滤过框架中。我们从以下定义开始。

**定义 3.1**。 设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是环 $R$的一个滤过。若满足以下条件，我们称$\mathcal{F}$为强持久：

$$(I_{i+1} : I_1) = I_i \quad \textit{for all } i \in \mathbb{N}.$$

**定义 3.2**。 设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是环 $R$的一个滤过。若满足以下条件，我们称$\mathcal{F}$为持续:

$$\operatorname{Ass}(R/I_i) \subseteq \operatorname{Ass}(R/I_{i+1}) \quad \textit{for all } i \in \mathbb{N}.$$

这些概念推广了理想的幂和符号幂的经典持续性概念。事实上，当 $\mathcal{F} = \{I^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是由理想 $I$的普通幂给出的滤过时，条件

$$(I^{i+1} : I) = I^i \text{ for } i \geq 1,$$

恢复了幂的强持续性的通常定义。特别地，对于由理想 $I$的普通幂 $\{I^i\}_{i\geq 0}$ 和符号幂 $\{I^{(i)}\}_{i\geq 0}$ 给出的滤过，情况也是如此。类似地，当 $\mathcal{F} = \{I^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是与 $I$相关联的符号滤过时，等式

$$(I^{(i+1)} : I) = I^{(i)} \text{ for } i \geq 1,$$

对应于符号强持续性。因此，滤过的持久性提供了一个统一框架，将普通幂和符号幂都纳为特例。对于理想的普通幂和符号幂，强持续性和符号强持续性都蕴含以下性质

$$(I^i : I^j) = I^{\,i-j} \quad \text{for all } i \geq j \geq 1,$$

and

$$(I^{(i)} : I^{(j)}) = I^{(\,i-j)} \quad \text{for all } i \geq j \geq 1,$$

参见 [15, 命题 2。1] 以及 [17, 命题 12]了解更多信息。

基于这些结果，我们将在接下来的命题中证明，这一性质在任意滤过的一般情形下也成立。

**命题 3.3**。 设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\geq 1}$ 是环 $R$的一个滤过。那么，对所有$i \geq j \geq 1$，$(I_i : I_j) = I_{i-j}$ 成立，当且仅当对所有 $k \geq 1$.，$(I_{k+1} : I_1) = I_k$ 成立

证明。 正向蕴含显然。为证明逆向蕴含，我们对 $j \geq 1$进行归纳。设 $j = 1$。根据我们的假设，对所有 $i \geq 1$，都有 $(I_i : I_1) = I_{i-1}$. 因此，该结论对 $j = 1$成立。

现在，假设对于某个 $j \geq 1$，我们有 $(I_i : I_j) = I_{i-j}$ 对所有 $i \geq j$.均成立。我们证明 $(I_i : I_{j+1}) = I_{i-(j+1)}$ 对所有 $i \geq j + 1$. 均成立。为此，我们首先取 $x \in I_{i-(j+1)}$。 由于 $\{I_k\}_{k\geq 1}$ 是一个滤过，我们有 $I_m I_n \subseteq I_{m+n}$ 对所有

$m$, $n \geq 1$。取 $m = i-(j+1)$ 和 $n = j+1$，得到 $I_{i-(j+1)}I_{j+1} \subseteq I_i$。这表明 $xI_{j+1} \subseteq I_i$，因此 $x \in (I_i : I_{j+1})$。所以，我们得到

$$I_{i-(j+1)} \subseteq (I_i : I_{j+1}).$$

为完成证明，令 $x \in (I_i : I_{j+1})$，即 $xI_{j+1} \subseteq I_i$。由假设可知 $(I_{j+1} : I_1) = I_j$，因此 $I_jI_1 \subseteq I_{j+1}$。于是，对于任意$a \in I_j$，有 $x(aI_1) \subseteq xI_{j+1} \subseteq I_i$。这意味着 $(xa)I_1 \subseteq I_i$.。根据基例 $(I_i : I_1) = I_{i-1}$，可知对所有 $a \in I_j$，$xa \in I_{i-1}$。由此得到 $xI_j \subseteq I_{i-1}$.。因此，$x \in (I_{i-1} : I_j)$。根据关于$j$ 的归纳假设（注意 $i-1 \geq j$），有 $(I_{i-1} : I_j) = I_{(i-1)-j} = I_{i-(j+1)}$.。因此我们得到$x \in I_{i-(j+1)}$，从而 $(I_i : I_{j+1}) \subseteq I_{i-(j+1)}$，如所需。结合这些包含关系，我们得到 $(I_i : I_{j+1}) = I_{i-(j+1)}$.

这就完成了归纳步骤；对 $j$作归纳可知，该结论对所有 $i \geq j \geq 1$都成立。□

为证明定理 3.5，我们需要以下辅助结果。

**命题 3.4.** *([14, 命题 4.1])* 设 $I$ 是交换诺特环 $R$中的一个理想。此外，设 $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t \cap Q_{t+1} \cap \cdots \cap Q_r$ 是 $I$的极小主分解，其中 $\mathfrak{p}_i = \sqrt{Q_i}$ 对于 $i = 1, \ldots, r$，且$\mathrm{Min}(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t\}$。则 $I_{\mathfrak{p}_i} = (Q_i)_{\mathfrak{p}_i}$ 对于 $i = 1, \ldots, t$。

**定理 3.5.** 设 $I$、$J$ 和 $L$ 是环 $R$ 的理想，满足

$$\mathrm{Min}(I) = \mathrm{Min}(J) = \mathrm{Min}(L) \quad \textit{and} \quad (I : J) = L.$$

*Then*

$$(I^{(1)} : J^{(1)}) = L^{(1)}.$$

证明。 令 $\mathrm{Min}(I) := \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$. 考虑以下极小主分解

$$I = \bigcap_{k=1}^{s} Q_{1k}, \qquad J = \bigcap_{\ell=1}^{t} Q_{2\ell}, \qquad L = \bigcap_{m=1}^{u} Q_{3m}.$$

由于 $\mathrm{Min}(I) = \mathrm{Min}(J) = \mathrm{Min}(L)$，不失一般性，我们可以假设

$$\mathfrak{p}_k = \sqrt{Q_{1k}} = \sqrt{Q_{2k}} = \sqrt{Q_{3k}} \quad \text{for all } 1 \leq k \leq r.$$

因此，我们得到以下结论

$$I^{(1)} = \bigcap_{k=1}^{r} Q_{1k} \qquad \text{and} \qquad J^{(1)} = \bigcap_{k=1}^{r} Q_{2k}.$$

对于每个 $k$满足 $r < k \leq s$的，选取一个元素 $x_k \in \sqrt{Q_{1k}} \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r)$（根据定理2.5，此类元素必然存在）。由于$x_k \in \sqrt{Q_{1k}}$，存在 $a_k > 0$ 使得

$$x_k^{a_k} \in Q_{1k} \quad \text{for all } r < k \leq s.$$

现在，令 $x \in (I^{(1)} : J_{(1)})$。那么，对于每个 $y \in J_{(1)}$， $xy \in I^{(1)}$。由于 $J \subseteq J^{(1)}$，可知对于所有 $y \in J.$， $xy \in I^{(1)}$。因此，我们得到

$$x\big(x_{r+1}^{a_{r+1}} \cdots x_s^{a_s}\big)y \in I \quad \text{for all } y \in J,$$

这表明 $x\big(x_{r+1}^{a_{r+1}} \cdots x_s^{a_s}\big) \in (I : J)$。由于 $(I : J) = L$，这意味着 $x\big(x_{r+1}^{a_{r+1}} \cdots x_s^{a_s}\big) \in L.$。特别地，我们可以推得

$$x\big(x_{r+1}^{a_{r+1}} \cdots x_s^{a_s}\big) \in Q_{3k} \quad \text{for all } 1 \leq k \leq r.$$

这里，固定 $1 \leq k \leq r$。鉴于 $Q_{3k}$ 是 $\mathfrak{p}_k$-主的，且 $x_{k'} \notin \mathfrak{p}_k$ 对所有$k' \in \{r+1, \ldots, s\}$均成立，可以得出 $x \in Q_{3k}.$。由于此结论对每个 $1 \leq k \leq r$ 都成立，我们得出

$$x \in \bigcap_{k=1}^{r} Q_{3k} = L^{(1)}.$$

因此，我们得到 $(I^{(1)} : J^{(1)}) \subseteq L^{(1)}$.

现在我们证明反向包含关系 $L^{(1)} \subseteq (I^{(1)} : J^{(1)})$。令 $z \in L^{(1)}$ 且 $y \in J^{(1)}$。固定 $1 \leq k \leq r$。在 $\mathfrak{p}_k$处局部化后，可由命题3.4 推出

$$I_{\mathfrak{p}_k} = (Q_{1k})_{\mathfrak{p}_k}, \quad J_{\mathfrak{p}_k} = (Q_{2k})_{\mathfrak{p}_k}, \quad L_{\mathfrak{p}_k} = (Q_{3k})_{\mathfrak{p}_k}.$$

由于 $(I : J) = L$，局部化可得 $L_{\mathfrak{p}_k} = (I_{\mathfrak{p}_k} : J_{\mathfrak{p}_k})$。因此，

$$(Q_{3k})_{\mathfrak{p}_k} \cdot (Q_{2k})_{\mathfrak{p}_k} \subseteq (Q_{1k})_{\mathfrak{p}_k}.$$

收缩回 $R$，并利用 $Q_{1k}$、$Q_{2k}$ 和 $Q_{3k}$ 都是 $\mathfrak{p}_k$-主的这一事实，可得 $Q_{3k}Q_{2k} \subseteq Q_{1k}.$。因此，由于 $z \in Q_{3k}$ 且 $y \in Q_{2k}$，我们有$zy \in Q_{1k}$。由于这对每个 $1 \leq k \leq r$都成立，故

$$zy \in \bigcap_{k=1}^{r} Q_{1k} = I^{(1)}.$$

因此 $z \in (I^{(1)} : J^{(1)})$，从而证明了所需的包含关系。证明至此完成。□

以下结果直接由定理 3.5 得出。

**推论 3.6**。设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是环 $R$的一个滤过，且设 $\mathcal{F}_{\mathrm{sym}} = \{I_{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是与 $\mathcal{F}$ 关联的符号滤过。那么，如果 $\mathcal{F}$ 是强持久的，则 $\mathcal{F}_{\mathrm{sym}}$ 也是强持久的。

这些结果表明，强持久性在转向符号滤过时仍是一种稳健的性质。特别是，持久滤过理论提供了一个统一框架，将经典的理想幂持久性和符号持久性概念加以推广。

强持久性和持续性与符号强持续性类似，分别是上述概念在滤过 $\{I^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\{I^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$下的特例。

引理 *3.7.* 设 $\mathcal{F} = \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是环 $R$的一个滤过。固定 $k \in \mathbb{N}$，并令 $\mathfrak{p} \in V(I_1)$，其中 $V(I_1)$表示 $I_1$的簇。那么，元素$f \in ((I_k)_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}) \setminus (I_k)_{\mathfrak{p}}$，当且仅当 $\big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$，其中$(I_k)_{\mathfrak{p}}$ 表示 $I_k$ 在 $\mathfrak{p}$处的局部化，而 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ 是局部环 $R_{\mathfrak{p}}$的极大理想。

证明。 ($\Rightarrow$) 假设 $f \in \big((I_k)_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}\big) \setminus (I_k)_{\mathfrak{p}}$. 那么，根据定义，我们有 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} f \subseteq (I_k)_{\mathfrak{p}}$，这意味着 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \subseteq \big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big)$.

反过来，设 $x \in \big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big)$，于是 $xf \in (I_k)_{\mathfrak{p}}$。若 $x \notin \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$，则 $x$ 是局部环 $R_{\mathfrak{p}}$ 中的单位。因此，$f = x^{-1}(xf) \in (I_k)_{\mathfrak{p}}$，这与假设 $f \notin (I_k)_{\mathfrak{p}}$ 矛盾。因此，必有 $x \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$，从而得到 $\big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big) \subseteq \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$. 结合两个包含关系，我们得出

$$\big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}.$$

($\Leftarrow$) 反过来，假设 $\big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$. 这意味着 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} f \subseteq (I_k)_{\mathfrak{p}}$，因此 $f \in \big((I_k)_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}\big)$。此外，若 $f \in (I_k)_{\mathfrak{p}}$，则 $\big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big) = R_{\mathfrak{p}}$，这与假设 $\big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ 矛盾。因此，必有 $f \in \big((I_k)_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}\big) \setminus (I_k)_{\mathfrak{p}}$. 论证完毕。□

**注记 3.8.** 前述刻画表明，存在元素 $f \in \big((I_k)_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}\big) \setminus (I_k)_{\mathfrak{p}}$ 当且仅当 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = \big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big)$. 等价地，该条件成立当且仅当 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$-模 $R_{\mathfrak{p}}/(I_k)_{\mathfrak{p}}$的关联素理想。特别地，存在这样的元素 $f$ 当且仅当 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I_k)$。

**命题 3.9.** 设 $\mathcal{F} = \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是环 $R$的一个滤过。固定 $k \in \mathbb{N}$。假设对于任意 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I_k)$ 以及任意元素 $f \in \big((I_k)_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}\big) \setminus (I_k)_{\mathfrak{p}}$，存在元素 $g \in (I_1)_{\mathfrak{p}}$ 使得 $fg \notin (I_{k+1})_{\mathfrak{p}}$. 。则 $\operatorname{Ass}(R/I_k) \subseteq \operatorname{Ass}(R/I_{k+1})$。

证明。取 $\mathfrak{p} \in$ 关联素理想集$(R/I_k)$。于是，根据局部化，极大理想 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$属于关联素理想集$(R_{\mathfrak{p}}/(I_k)_{\mathfrak{p}})$。因此，存在一个元素 $f \in R_{\mathfrak{p}}$ 使得$\big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$. 由引理 3.7 可知，$f \in \big((I_k)_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}\big) \setminus (I_k)_{\mathfrak{p}}$.此外，根据我们的假设，存在一个元素 $g \in (I_1)_{\mathfrak{p}}$ 使得$fg \notin (I_{k+1})_{\mathfrak{p}}$. 由于 $fg \notin (I_{k+1})_{\mathfrak{p}}$，我们得到 $\big((I_{k+1})_{\mathfrak{p}} : fg\big) \subseteq \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$. 我们断言$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \subseteq \big((I_{k+1})_{\mathfrak{p}} : fg\big)$. 由于 $\mathcal{F}$是一个滤过，我们有 $I_k \cdot I_1 \subseteq I_{k+1}$。在 $\mathfrak{p}$处局部化，得到 $(I_k)_{\mathfrak{p}} \cdot (I_1)_{\mathfrak{p}} \subseteq (I_{k+1})_{\mathfrak{p}}$. 令 $x \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = \big((I_k)_{\mathfrak{p}} : f\big)$。那么 $xf \in (I_k)_{\mathfrak{p}}$，并且由于 $g \in (I_1)_{\mathfrak{p}}$，我们可以推出

$$xfg \in (I_k)_{\mathfrak{p}}(I_1)_{\mathfrak{p}} \subseteq (I_{k+1})_{\mathfrak{p}}.$$

因此，$x \in \big((I_{k+1})_{\mathfrak{p}} : fg\big)$，从而 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \subseteq \big((I_{k+1})_{\mathfrak{p}} : fg\big)$. 。由此得到 $\big((I_{k+1})_{\mathfrak{p}} : fg\big) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$，这意味着 $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(R_{\mathfrak{p}}/(I_{k+1})_{\mathfrak{p}})$。最后，根据局部化下关联素理想之间的对应关系，我们得出 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I_{k+1})$，因此 $\operatorname{Ass}(R/I_k) \subseteq \operatorname{Ass}(R/I_{k+1})$，如所需。□

**定理 3.10**。 设 $\mathcal{F} = \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是环 $R$的一个滤过。固定 $k \geq 1$。那么$(I_{k+1} : I_1) = I_k$ 当且仅当对每个 $\mathfrak{p} \in$ 关联素理想集$(R/I_k)$以及每个

元素 $f \in \big((I_k)\mathfrak{p} : \mathfrak{m}_\mathfrak{p}\big) \setminus (I_k)\mathfrak{p}$，都存在一个元素 $g \in (I_1)\mathfrak{p}$ 使得$fg \notin (I_{k+1})\mathfrak{p}$·

证明。我们首先假设，对于所有 $k \geq 1$.，$k \geq 1$ 都有 $(I_{k+1} : I_1) = I_k$ 。固定 $k \geq 1$。在素理想 $\mathfrak{p}$ 处局部化，可推出 $((I_{k+1})\mathfrak{p} : (I_1)\mathfrak{p}) = (I_k)\mathfrak{p}$。设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I_k)$。那么极大理想 $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ 属于 $\mathrm{Ass}(R_\mathfrak{p}/(I_k)\mathfrak{p})$，因此存在一个元素 $f \in \big((I_k)\mathfrak{p} : \mathfrak{m}_\mathfrak{p}\big) \setminus (I_k)\mathfrak{p}$·

反过来，假设所述条件成立，但存在某个 $fg \in$，使得对于所有 $g \in (I_1)\mathfrak{p}$·，$I_{k+1})\mathfrak{p}$ 。那么$f \in ((I_{k+1})\mathfrak{p} : (I_1)\mathfrak{p}) = (I_k)\mathfrak{p}$，这与 $f$ 的选取矛盾。因此，存在 $g \in (I_1)\mathfrak{p}$，使得 $fg \notin ($ $I_{k+1})\mathfrak{p}$。

反过来，假设所述条件成立，但存在某个$k \geq 1$，使得$(I_{k+1} : I_1) \neq I_k$.。那么，$R$-模 $M := (I_{k+1} : I_1)/I_k$ 非零。因此，$\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$。由于 $\mathrm{Ass}(M)$ $\subseteq \mathrm{Supp}(M)$，这意味着 $\mathrm{Supp}(M) \neq \emptyset$。在该模的支集中取一个极小素理想 $\mathfrak{p}$ 。在 $\mathfrak{p}$ 处局部化后，我们得到以下 $R_\mathfrak{p}$-模

$$M_\mathfrak{p} = \left(\frac{(I_{k+1} : I_1)}{I_k}\right)_\mathfrak{p} = \frac{((I_{k+1})_\mathfrak{p} : (I_1)_\mathfrak{p})}{(I_k)_\mathfrak{p}}$$

非零。由于 $\mathfrak{p}$ 是 $M$ 的支集中的一个极小素理想，在 $\mathfrak{p}$ 处局部化会消去支集中的其他所有素理想。事实上，若 $\mathfrak{q} \in$ 属于 $^{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$，则 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'R_\mathfrak{p}$，其中存在某个素理想 $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{p}$，使得 $\mathfrak{q}' \in$ 属于 $M$ 的支集。由 $\mathfrak{p}$ 是 $M$ 的支集中的极小素理想这一点可知，必有 $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$。所以，$M_\mathfrak{p}$ 的支集 $^{R_\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{m}_\mathfrak{p}\}$.。由于 $M_\mathfrak{p} \neq 0$，可得 $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} \in$ 属于 $^{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$。因此，存在一个非零元素 $f \in M_\mathfrak{p}$，使得 $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} f = 0$.。令 $f \in \big((I_{k+1})\mathfrak{p} : (I_1)\mathfrak{p}\big)$ 为 $f$ 的一个代表元。于是，$f \neq 0$推出 $f \notin (I_k)\mathfrak{p}$，而消灭条件给出 $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} f \subseteq (I_k)\mathfrak{p}$·。特别地，我们有 $f \in \big((I_k)\mathfrak{p} : \mathfrak{m}_\mathfrak{p}\big) \setminus (I_k)\mathfrak{p}$·。根据我们的假设，存在一个元素 $g \in (I_1)\mathfrak{p}$，使得 $fg \notin (I_{k+1})\mathfrak{p}$，这与 $f \in ((I_{k+1})\mathfrak{p} : (I_1)\mathfrak{p})$ 这一事实矛盾。因此，我们推出 $(I_{k+1} : I_1) = I_k$，证毕。□

**推论 3.11.** 设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是环 $R$的一个滤过。若 $\mathcal{F}$ 是强持久的，则 $\mathcal{F}$ 是持续的。

证明. 结论可由命题 3.9和定理 3.10直接推出。□

## 4. Filtrations under operations

本节简要探讨滤过在环上的标准运算（如直和）下的行为。我们还将证明，环的直积上的滤过可以分解为各个因子上的滤过。特别地，作为一个应用，我们证明直和滤过 $\mathcal{F} \bigoplus \mathcal{G}$是强持久的，当且仅当 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 都是强持久的。

**命题 4.1**。设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\mathcal{G} = \{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 分别是环 $R$ 和 $R'$ 的滤过。那么，族 $\{I_i \oplus J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是环 $R \oplus R'$ 的一个滤过。

证明。 回顾一下， $R \oplus R'$ 上的环结构是按分量定义的：

$$(r_1, r_1')(r_2, r_2') = (r_1 r_2, r_1' r_2') \quad \text{for all } r_1, r_2 \in R,\ r_1', r_2' \in R'.$$

由于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 都是滤过，因此我们有 $I_0 = R$ , $J_0 = R'$，并且

$$I_i I_j \subseteq I_{i+j}, \qquad J_i J_j \subseteq J_{i+j} \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{N}.$$

显然， $I_0 \oplus J_0 = R \oplus R'$. 设 $(a,\ b) \in I_i \oplus J_i$ 和 $(c,\ d) \in I_j \oplus J_j$。 则$a \in I_i$, $c \in I_j$, $b \in J_i$和 $d \in J_j$，并且 $(a,\ b)(c,\ d) = (ac,\ bd)$，其中 $ac \in I_i I_j$和 $bd \in J_i J_j$。 这表明

$$(I_i \oplus J_i)(I_j \oplus J_j) \subseteq I_i I_j \oplus J_i J_j.$$

反过来， $I_i I_j \oplus J_i J_j$ 中的每个元素都是形如 $(ac,\ bd)$ 的元素的有限和，其中 $a \in I_i$, $c \in I_j$, $b \in J_i$和 $d \in J_j$，因此属于 $(I_i \oplus J_i)(I_j \oplus J_j)$。因此，我们可以得出结论：

$$(I_i \oplus J_i)(I_j \oplus J_j) = I_i I_j \oplus J_i J_j.$$

由此可得

$$(I_i \oplus J_i)(I_j \oplus J_j) \subseteq I_{i+j} \oplus J_{i+j} \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{N},$$

因此， $\{I_i \oplus J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是 $R \oplus R'$的一个滤过，正如所声称的那样。 □

在陈述下一个命题之前，我们需要回顾以下事实：

**事实 4.2.** 设 $R$ 和 $R'$ 为环。对于理想 $I$、 $I' \subseteq R$ 以及 $J$、 $J' \subseteq R'$，有

$$(I \oplus J)(I' \oplus J') = II' \oplus JJ'.$$

**事实 4.3.** 设 $R$ 和 $R'$ 为环。对于理想 $A$、 $A' \subseteq R$ 以及 $B$、 $B' \subseteq R'$，有

$$A \oplus B \subseteq A' \oplus B' \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq A' \ and \ B \subseteq B'.$$

**命题 4.4.** 设 $\mathcal{F} = \{\mathcal{I}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是环 $R \oplus R'$的一个滤过。那么对每个 $i \in \mathbb{N}$ ，都存在理想 $I_i \subseteq R$ 和 $J_i \subseteq R'$ ，使得

$$\mathcal{I}_i = I_i \oplus J_i.$$

此外， $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 和 $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 分别是 $R$ 和 $R'$的滤过。

证明。 由于直积 $R \oplus R'$ 的每个理想都具有 $I \oplus J$的形式，其中 $I \subseteq R$ 和 $J \subseteq R'$ 是理想，因此，对每个 $i \in \mathbb{N}$ ，都存在理想 $I_i \subseteq R$和 $J_i \subseteq R'$ ，使得 $\mathcal{I}_i = I_i \oplus J_i$.。 由于 $\mathcal{F}$是一个滤过，我们有 $\mathcal{I}_0 = R \oplus R'$。因此， $I_0 \oplus J_0 = R \oplus R'$.。对于任意 $a \in R$，元素 $(a, 0)$ 属于 $R \oplus R'$，从而 $(a, 0) \in I_0 \oplus J_0$，这意味着 $a \in I_0$。 因此 $I_0 = R$。类似地，考虑形如 $(0, b)$ 的元素可得 $J_0 = R'$。此外，由于 $\mathcal{F}$ 是一个滤过，对所有 $i$，我们有 $\mathcal{I}_{i+1} \subseteq \mathcal{I}_i$ ，于是

$$I_{i+1} \oplus J_{i+1} \subseteq I_i \oplus J_i.$$

因此，根据事实 4.3，我们得到 $I_{i+1} \subseteq I_i$ 以及 $J_{i+1} \subseteq J_i$。最后，乘法性质 $\mathcal{I}_i\mathcal{I}_j \subseteq \mathcal{I}_{i+j}$ 给出

$$(I_i \oplus J_i)(I_j \oplus J_j) \subseteq I_{i+j} \oplus J_{i+j}. \tag{1}$$

此外，根据事实4.2，我们有

$$(I_i \oplus J_i)(I_j \oplus J_j) = I_iI_j \oplus J_iJ_j. \tag{2}$$

现在由（1）、（2）以及事实4.3 可得

$$I_iI_j \subseteq I_{i+j} \quad \text{and} \quad J_iJ_j \subseteq J_{i+j}.$$

因此，$\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $R$ 的一个滤过，而 $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $R'$的一个滤过。 □

我们以如下命题结束本节的讨论。

**命题 4.5.** 设 $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\mathcal{G} = \{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是交换环 $R$的理想滤过。则直和滤过 $\mathcal{F}\bigoplus\mathcal{G}$ 是强持久的，当且仅当 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 都强持久。

证明。 根据命题 4.1，族 $\mathcal{F}\bigoplus\mathcal{G} = \{I_i \oplus J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $R \oplus R$的一个滤过。我们首先假设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 均为强持久。令 $(x, y) \in (I_{i+1} \oplus J_{i+1} : I_1 \oplus J_1)$。那么

$$(x, y)(a, b) \in I_{i+1} \oplus J_{i+1} \quad \text{for all } (a, b) \in I_1 \oplus J_1.$$

特别地，对于每个 $a \in I_1$ 和 $b \in J_1$，都有 $xa \in I_{i+1}$ 和 $yb \in J_{i+1}$。因此，$x \in (I_{i+1} : I_1)$ 且 $y \in (J_{i+1} : J_1)$。由于滤过 $\mathcal{F}$ 和$\mathcal{G}$ 均为强持久，因此 $x \in I_i$ 和 $y \in J_i$。这意味着 $(x, y) \in I_i \oplus J_i$.。因此，直和滤过 $\mathcal{F}\bigoplus\mathcal{G}$是强持久的。

反过来，假设 $x \in (I_{i+1} : I_1)$ 且 $y \in (J_{i+1} : J_1)$。那么，对于每个 $(a, b) \in I_1 \oplus J_1$，都有

$$(x, y)(a, b) = (xa, yb) \in I_{i+1} \oplus J_{i+1},$$

这意味着 $(x, y) \in (I_{i+1} \oplus J_{i+1} : I_1 \oplus J_1)$. 由于 $\mathcal{F}\bigoplus\mathcal{G}$ 是强持久的，我们有 $(I_{i+1} \oplus J_{i+1} : I_1 \oplus J_1) = I_i \oplus J_i$. 由此得到 $(x, y) \in I_i \oplus J_i$, 因此 $x \in I_i$ 和 $y \in J_i$。这意味着 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 都是强持久的，正如所声称的那样。□

**致谢**

作者谨向 Rafael H. Villarreal 教授致以诚挚的谢意，感谢他提出通过滤过扩展持久性性质这一宝贵建议；该建议启发了本研究的开展。

开放研究者与贡献者身份识别码

- Mehrdad Nasernejad：0000-0003-1073-1934
- Jonathan Toledo：0000-0003-3274-1367

## References

[1] I. Al-Ayyoub、M. Nasernejad 和 L. G. Roberts, *On the normality and associated primes of cover ideals of a class of imperfect graphs* **26 76** ，《布加勒斯特数学报告》（）（2024年），第1期，59–69。[2] I. Al-Ayyoub、M. Nasernejad 和 L. G. Roberts, *On the strong persistence property and normality of cover ideals of theta graphs* 2023 **51** 2023 ，，《代数通讯》（），第9期，3782 3791–。[3] A. Bretto、M. Nasernejad 和 J. Toledo, *On the strong persistence property and normally torsion-freeness of square-free monomial ideals* **22** 2025 ，《地中海数学杂志》（），第6期，论文编号158，共33页。[4] M. Brodmann, *Asymptotic stability of* Ass($M/I^nM$), 《美国数学会会刊》74（1979年），16–18。[5] J. Herzog 和 A. A. Qureshi, *Persistence and stability properties of powers of ideals*, 《纯粹与应用代数》219（2015年），530–542。[6] T. Kaiser、M. Stehlík 和 R. Škrekovski, *Replication in critical graphs and the persistence of monomial ideals* **123** 2014 239 251 ，《组合论杂志A辑》（），–。[7] K. Khashyarmanesh、M. Nasernejad 和 J. Toledo, *Symbolic strong persistence property under monomial operations and strong persistence property of cover ideals* ，《罗马尼亚数学科学会通报》（新系列）64(112)（2021年），第2期，105–131。[8] S. McAdam, 《渐近素因子》，《数学讲义》103，施普林格出版社，纽约，1983年。[9] J. Martinez-Bernal、S. Morey 和 R. H. Villarreal, *Associated primes of powers of edge ideals* **63** 2012 361 374 ，《集合数学》（），–。[10] M. Nasernejad, *Asymptotic behaviour of associated primes of monomial ideals with combinatorial applications* **2** 2014 15 25 ，《代数与相关主题杂志》（）–。[11] M. Nasernejad, *Persistence property for associated primes of a family of ideals*, 《东南亚数学通报》40（2016年），第4期，571–575。[12] M. Nasernejad, *Persistence property for some classes of monomial ideals of a polynomial ring* **16**, 5 2017 1750105 17 ，《代数及其应用》第（）（页）。[13] M. Nasernejad、K. Khashyarmanesh 和 I. Al-Ayyoub, *Associated primes of powers of cover ideals under graph operations* **47** 2019 5, 1985 1996 ，《代数通讯》（），第–期。[14] M. Nasernejad、K. Khashyarmanesh、L. G. Roberts 和 J. Toledo, *The strong persistence property and symbolic strong persistence property* ，《捷克斯洛伐克数学杂志》72(147)（2022年），第1期，209–237。[15] S. Rajaee、M. Nasernejad 和 I. Al-Ayyoub, *Superficial ideals for monomial ideals*, 《代数及其应用》16(2)（2018年）1850102（28页）。[16] L. J. Ratliff, Jr., *On prime divisors of $I^n$, $n$ large*, 《密歇根数学杂志》23（1976年），337–352。[17] E. Reyes 和 J. Toledo, *On the strong persistence property for monomial ideals*, 《罗马尼亚数学科学会通报》（新系列）60(108)（2017年），293–305。[18] R. Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*, 第二版。伦敦数学会学生文本，51。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。xii+355 页。[19] R. H. Villarreal, *Cohen-Macaulay graphs*, 《数学手稿》66（1990年），277–293。[20] R. H. Villarreal, 《单项式代数》。第2版，《数学专著与研究札记》，CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2015年。