arXiv:2601.13796v1 [cs.DS] 20 Jan 2026

局部引理范围内超图着色的零点自由区域与集中性不等式

刘景成，余一骁

摘要。我们证明，对于最大度为 Δ 的 k-均匀超图中的 q-着色，若 $k \geq 50$ 且 $q \geq 700\Delta^{\frac{5}{k-10}}$，则配分函数在区间 $[0,1]$ 周围存在一个“李-杨”无零条带，其中包括超图着色均匀枚举这一特例。由此立即可得，在上述条件下，超图 q-着色满足 Berry-Esseen 型不等式，这表明均匀随机着色中任意颜色类大小都具有渐近正态性。我们的框架还可扩展到对“Fisher 零点”的研究，从而得到在零点自由区域内近似配分函数的确定性算法。

我们的方法基于将 [Liu、Wang、Yin、Yu、STOC 2025] 最近关于一般约束满足问题（CSP）的研究加以拓展。我们重点研究通过向变量引入外场而为 CSP 定义的配分函数。我们方法中的一个关键组成部分是投影提升方案，它使我们能够实质上将针对马尔可夫链的信息渗流型分析从实数轴提升到复平面。最后，我们还证明了原子约束满足问题在采样 LLL 条件下满足切比雪夫型不等式。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 8 3. 通过解析渗流控制边缘测度 11 4. CSP 公式的零点自由性 15 5. 应用 28 致谢 44 参考文献 44 附录 A. 解析渗流的缺失证明 48 附录 B. CSP 公式的集中不等式 49 附录 C. 中心极限定理 52 附录 D. 局部中心极限定理 57 附录 E. Fisher 零点 64

新型软件技术国家重点实验室、新基石科学实验室，南京大学，中国江苏省南京市仙林大道163号，邮编210023。电子邮箱： liu@nju.edu.cn、 yixiaoyu@smail.nju.edu.cn。JL获国家自然科学基金委员会项目（批准号：62472212）资助。

1. 引言

配分函数复零点的位置与统计物理中相变的研究密切相关，这一研究可追溯至著名的李-杨计划 [LY52]。此后，该研究也在组合学 [HL72、Wag09], Chernoff 界 [KS18], 渐近正态性 [God81a], 中心极限定理 [LPRS16, MS24, JPSS22], 以及高效近似计数算法的设计中 [Bar16, PR17, LSS17]得到了应用。因此，确定零点自由区域备受关注；对于许多图多项式，尤其是独立集多项式 [SS03, PR19] 和单体-二聚体模型 [HL72]，人们已在实轴附近得到了紧致的零点自由结果。超图情形则远未得到充分理解，尤其是定义在 k-均匀超图上的自旋系统。

Erdős [Erd63], 提出的超图 q-着色，长期以来一直是概率组合学中最富有成果的试验场之一。举几个例子，它们出现在洛瓦兹局部引理（LLL） [EL73], 、啃噬技术 [Röd85], 、容器方法 [ST15, BMS18], 中，也常见于 Alon 和 Spencer 的教科书 [AS16]。LLL 的一个标准应用表明，对于最大度为 Δ 的 k-均匀超图，只要 $q > C\Delta^{\frac{1}{k-1}}$，就存在一个正常的 q-着色,_其中 C 为某个常数；而且可以通过高效算法找到这样的着色 [Bec91, Mos09, MT10]。对于简单超图（两个超边至多共享一个顶点），Frieze 等人 [FM11, FA17] 证明，只要 $q \geq \max\left\{ C_k \ln n, 500k^3\Delta^{\frac{1}{k-1}} \right\}$，标准格劳伯动力学就能快速混合。然而，对于非简单超图，q-着色空间可能变得不连通 [FM11], ，从而导致格劳伯动力学失效。这种连通性障碍并非超图着色所独有，在满足类似局部引理条件的约束满足问题中也普遍存在。

最近，一系列出色的研究探讨了针对约束满足问题的 LLL 计数/采样变体。具体而言，考虑对约束满足问题进行均匀随机赋值：令 p 为所有约束中的最大违反概率，令 D 为依赖图的最大度（即与给定约束共享变量的约束数量）。经典局部引理 [EL73, She85]指出，可满足性阈值渐近为 $\mathrm{e}pD \leq 1$；然而，近期一系列令人振奋的进展表明，只要 $pD^c \lesssim 1$ 对某个常数 $c \geq 2$ 成立，就足以在 LLL 条件下高效地对解进行均匀采样。研究对象包括超图独立集 [HSZ19, QWZ22]、 k-合取范式 [Moi19, FGYZ21a], 、超图 q-着色 [GLLZ18], 、随机 CNF 公式 [GGGHP22, HWY23b],, 以及一般约束满足问题实例 [FHY21, JPV21a, JPV21b, HSW21, FGW+23]。其中两个值得注意的情形是 k-合取范式和超图 q-着色，分别代表布尔约束满足问题和定义域足够大的约束满足问题。Wang 和 Yin 的一项突破性最新成果 [WY24] 在条件 $pD^{2+o_q(1)} \lesssim 1$（定义域大小为 q）下确立了 LLL 采样。对于足够大的 q，这一结果在渐近意义下是最优的，因为 [BGG+19, GGW23] 已证明 $pD^2 \gtrsim 1$具有 NP-困难性。

本文研究采样 LLL 区域内超图 q-着色配分函数的“李-杨零点”。建立零点自由区域的一个有趣前景是集中现象和中心极限定理。具体而言，对于超图 q-着色，我们关注均匀随机着色下任一颜色类的大小。在某种程度上，可以将 LLL 条件视为对独立性假设的放宽，但 LLL 的有界依赖结构能否带来集中性？在 $\mathrm{e}pD \leq 1$ 的存在阈值附近，集中现象很难出现，因为许多随机约束满足问题在可满足性阈值附近以高概率呈现刚性现象，此时几乎所有变量都被冻结（例如，见 [ACO08]）。我们证明，在更强的 $pD^{2+o_q(1)} \lesssim 1/q$条件下，原子约束满足问题仍可导出切比雪夫型不等式：对于均匀随机的满足赋值，任一颜色类的大小与其期望的偏差不超过 $1 \pm O(\frac{1}{n})$倍。这自然引出一个问题：在类似的采样 LLL 区域中，是否也能证明中心极限定理（CLT）和正态近似？此前也有人研究过各种局部依赖结构下的中心极限定理。事实上，如果只关注随机赋值中违背的约束数量，那么斯坦方法就已足够（例如， [CS04, CHA08]）。为了得到关于颜色类大小的中心极限定理，我们采用另一条路径，即复零点自由性 [LPRS16, MS24, JPSS22, LWYY25]。具体而言，我们为约束满足问题中的变量引入“外场”以构造配分函数，并证明

在点 1的复平面邻域内，配分函数不为零。随后，可以通过解析方法在 1的邻域内导出非渐近中心极限定理（CLT）和局部中心极限定理。在许多应用中，中心极限定理和局部中心极限定理都很有用，因为它们兼顾了集中性（随机变量不会偏离均值太多）和反集中性（随机变量是非退化的，仍可像高斯变量一样波动）。顺带一提，尽管已有研究为 Moser-Tardos 算法中的重新采样步骤数量建立了集中界 [KS11, AI16, HH17], ，但一般而言，这些结果似乎无法转化为 LLL 分布本身的集中性，极值 LLL 实例除外。

建立零点自由区域的经典技术包括 Lee-Yang 方法 [LY52] 及其扩展方法，例如 [Asa70、Rue71], ，以及基于自避行走树构造 [God81b、SS03] 和相关性衰减 [Wei06、BG08]的收缩方法 [PR19、LSS19、SS19] 。近年来，也有若干工作将这些方法扩展到了两两相互作用之外。值得注意的是，[Bar24] 研究了多体软相互作用下的 Fisher 零点，其中放宽了硬约束，转而为每个违反的约束引入一个“惩罚因子”。随后，研究点 1 附近关于“惩罚因子”的复零点。以 Fisher 零点表示的配分函数更适合研究最大约束满足问题中的优化景观，而不是约束满足问题中的解。这主要是因为在点 1 附近引入“惩罚因子”进行放宽（对应于“几乎没有相互作用”），而如何提取有关原始约束满足问题解空间的有用信息（对应于“最大相互作用”）尚不清楚。为了编码原始约束满足问题的解，标准方法是考虑李-杨零点，即向变量引入外场。此时，点 1 附近的邻域仍对应于“约束满足问题解上的近似均匀随机分布”。沿着同一思路的两项重要工作涉及超图独立集模型。 [GMP+24] 主要研究了原点附近的零点自由圆盘，而 [LWYY25] 则证明，在渐近最优的采样 LLL 条件 $pD^2 \lesssim 1$下，实区间$[0, 1]$ 附近存在一个零点自由条带。值得注意的是， [LWYY25] 引入了马尔可夫链的复扩展框架，用于定位超图独立集配分函数的复零点；除低阶因子外，该位置与格劳伯动力学快速混合的区域一致 [HSZ19]。李-杨零点也将是我们工作的重点，同时，我们的方法还可以扩展到研究整个区间 $[0, 1]$附近的 Fisher 零点。

事实上，马尔可夫链复数扩展框架 [LWYY25] 为研究类 LLL 条件下约束满足问题的李-杨零点提供了一个很有前景的起点。然而，一个明显的障碍是，满足类 LLL 条件的约束满足问题可能具有不连通的解空间，因此无法采用标准的格劳伯动力学马尔可夫链（例如，参见 [FM11，第 5] 节，关于超图 q 着色）。现有的马尔可夫链方法关键依赖于在原始实例的投影上运行格劳伯动力学，其中格劳伯动力学的每一步都通过拒绝采样近似模拟 [FHY21、JPV21a]。在投影后的约束满足问题实例上应用格劳伯动力学的复数扩展，只能控制投影测度；而要证明零点自由性，则必须将其提升回原始测度。对于超图 q着色，我们能够无损地完成投影和提升，并对投影上的格劳伯动力学复数扩展进行分析，从而在任意给定颜色的点 1 周围得到一个满足类 LLL 条件的零点自由区域。对于更一般的约束满足问题，例如 k-合取范式，我们目前只能证明一个大型子实例在点 1 周围具有零点自由性。我们将如何在不要求投影的情况下证明原始实例具有零点自由性，留作一个有趣的开放问题。

1.1. **我们的结果**。 接下来，我们将正式陈述我们的结果。我们重点关注超图 q-着色，同时还要指出，第 4 节中的框架也适用于更一般的约束满足问题，只要它们是原子的（也就是说，每个约束至多能被变量的一种赋值违反）。对于一般的约束满足问题，我们通过添加原子约束将其转化为原子约束满足问题。

令 $H = (V, E)$ 为一个最大度为 Δ 的 k 均匀超图。若顶点 H上的一种颜色着色满足每条超边都不是单色的，则称其为本质的。为研究李-杨零点，我们在颜色 1 上引入一个复外场。由于对称性，选择颜色 1 是任意的。形式上，

配分函数定义如下：

$$Z_H^{\mathrm{co}}(\lambda) \triangleq \sum_{\sigma\in[q]^V:\sigma \text{ is a proper coloring in } H} \lambda^{\left|\sigma^{-1}(1)\right|}, \qquad \text{where } \sigma^{-1}(1) \triangleq \{v \in V \mid \sigma(v) = 1\}.$$

定理 1.1. 任取整数 $k \geq 50$ 和 $q \geq 700\Delta^{k^{5}_{-10}}$。设 $H=(V,\mathcal{E})$ 是一个最大度为 Δ 的 k-均匀超图。那么，对于任意满足 $\exists\lambda_c \in [0,1]$的 $\lambda \in \mathbb{C}$，都有 $Z_H^{\mathrm{co}}(\lambda) \neq 0$，使得 $|\lambda - \lambda_c| \leq \frac{1}{16\Delta^2 k^5}$。

令 μ 为所有超图 q-着色上的均匀分布，并令 $\mathbf{X}_{\mathrm{co}}$ 为在 μ下颜色为 1 的顶点数量这一计数随机变量。

定理 1.2 (超图中一个颜色类的中心极限定理 q-着色)。 任取整数 $k \geq 50$ 和 $q \geq 700\Delta^{k^{5}_{-10}}$。令 $\bar{\mu}$ 为 $\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$的期望， $\bar{\sigma}$ 为 $\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$的标准差。那么，有

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\Pr\left[(\mathcal{X}_{\mathrm{co}} - \bar{\mu})\bar{\sigma}^{-1} \leq t\right] - \Pr\left[\mathcal{Z} \leq t\right]\right| \leq O_{q,\Delta,k}\left(\frac{\ln|V|}{\sqrt{|V|}}\right),$$

其中 $\mathcal{Z} \sim N(0,1)$ 是一个标准高斯随机变量。

定理 1.3 （超图 q-着色中颜色类的局部中心极限定理）。 任取整数 $k \geq 50$ 和 $q \geq 700\Delta^{k^{5}_{-10}}$。令 $\bar{\mu}$ 为$\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$的期望，令 $\bar{\sigma}$ 为$\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$的标准差。则有

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}} \left|\Pr\left[\mathcal{X}_{\mathrm{co}} = t\right] - \bar{\sigma}^{-1}\mathcal{N}((t-\bar{\mu})/\bar{\sigma})\right| \leq O_{q,\Delta,k}\left(\frac{\ln^{7/2}|V|}{|V|}\right),$$

其中，$\mathcal{N}(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ 表示标准正态分布的密度。

我们指出，只要常数外场 λ满足 q 足够大且满足 $q \gtrsim \max\left(\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1+o_q{}_{(1)}k-2}, \lambda\right)\Delta^{k^{5}_{-10}}$，中心极限定理和局部中心极限定理都可以推广到该情形。

我们还证明了一个适用范围更广的切比雪夫型不等式。具体而言，我们考虑任意原子的 (k,Δ)-约束满足问题公式 $\Phi = (V,[q]^V,C)$，其中每个约束涉及 k个变量，每个变量至多出现在 Δ 个约束中，且每个约束至多禁止其一个赋值（原子的）。令μ 为 Φ所有满足赋值上的均匀分布。我们关注有多少变量被赋值为 1。选择值 1 只是任意的，换成任何其他值也同样适用。令$\sigma \sim \mu$。对于每个变量 $v \in V$，记 σ_v为其在 σ下的赋值，并定义随机变量$X_v \triangleq \mathbb{I}[\sigma_v = 1]$，$\mathbf{X} \triangleq \sum_{v\in V} X_v$。

定理 *1.4*（原子 *CSP* 公式的切比雪夫型不等式）。设 $\Phi = (V,[q]^V,C)$ 是一个原子的（k,Δ）*-CSP* 公式。假设 $(8e)^3 \cdot \frac{1}{q^{k-1}} \cdot (\Delta k+1)^{2+\zeta} \leq 1$，其中 $\zeta = \frac{2\ln(2-1/q)}{\ln(q)-\ln(2-1/q)} = o_q(1)$。那么，

$$\forall\delta > 0, \quad \Pr_\mu\left[|\mathcal{X} - \mathbb{E}_\mu[\mathcal{X}]| \geq \delta\cdot\mathbb{E}_\mu[\mathcal{X}]\right] \leq \frac{1}{\delta^2}\cdot O_{q,\Delta,k}\left(\frac{1}{|V|}\right).$$

值得注意的是，上述定理实质上表明，在原子约束满足问题中，$pD^{2+o_{q(1)}} \lesssim 1/q$ 足以得到切比雪夫型不等式。

最后但同样重要的是，我们在第 4 节中的框架也可用于研究 Fisher 零点（关于化归为李-杨零点，见第 E节）。虽然已有基于扩展 Moitra 的线性规划方法 [Moi19] 的方法 [GLLZ18, JPV21b, WY24]，以及基于“向过去耦合”（CTTP）框架的方法 [FGW+23]，能够在满足局部引理条件时确定性地计算超图 q-着色的数量，但我们的零点自由性结果通过 Barvinok 插值方法 [Bar16, PR17, LSS17], 提供了另一种全多项式时间近似方案，该方法在复平面上同样适用。目前，基于零点自由性的全多项式时间近似方案仅适用于范围 $q \gtrsim \Delta^{k^{5}_{-2.5}}$。我们将弥合与 $q \gtrsim \Delta^{2+o_q(1)k-2}$（该结果见 [WY24]）之间的差距留作一个开放问题。

1.2. **技术概述**。证明零点自由性的起点是 [LWYY25] 的框架。下面我们以超图 q-着色为背景，介绍我们的主要技术。

1.2.1. 通过逐约束自归约实现零点自由性。标准的自归约可以将证明整个实例的零点自由性，转化为对某些复边缘测度的上界进行确立 [LY52, Asa70, Rue71, PR19, LSS19, SS19, LWYY25]。令 $\mathrm{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$，并且对于 $0 \le i \le m$，记 $\mathrm{E}_i = \{e_1, \ldots, e_i\}$ 和 $H_i = (V, \mathrm{E}_i)$。为了证明 $Z^{\mathrm{co}}_H(\lambda) \neq 0$，只需验证 $Z^{\mathrm{co}}_{H_0}(\lambda) \neq 0$（这是显然的，因为 H_0 没有边），并证明对于每个 $0 \le i < m$，$Z^{\mathrm{co}}_{H_{i+1}}(\lambda) / Z^{\mathrm{co}}_{H_i}(\lambda) \neq 0$。归纳地假设 $Z^{\mathrm{co}}_{H_i}(\lambda) \neq 0$，则该比值可解释为：$Z^{\mathrm{co}}_{H_{i+1}}(\lambda) / Z^{\mathrm{co}}_{H_i}(\lambda) = \mu_{H_i}(e_{i+1}\text{不是单色的})$，其中 μ_{H_i} 是相应的复 ~~Gibbs~~ 测度，并且只要 $Z^{\mathrm{co}}_{H_i}(\lambda) \neq 0$，它就是良定义的。因此，只需证明对于每个 i，

$$\left|\mu_{H_i}\left(e_{i+1} \text{ is monochromatic}\right)\right| < 1, \tag{1}$$

从而完成归纳。

1.2.2. 投影与提升方案。 Liu 等人 [LWYY25] 将格劳伯动力学的复数扩展作为超图独立集具有相似边缘分布的替代方法。正如引言中提到的，标准格劳伯动力学对于超图着色并非遍历的 [FM11, Wig19], 而且必须采用状态压缩方案 取而代之 [FHY21, JPV21a, HSW21]。具体而言，设计一种投影，将定义域字母表压缩为较小的字母表，使得：a）投影后字母表上的格劳伯动力学快速混合；b）可通过拒绝采样将投影后的格劳伯动力学提升回原始实例。关键的是，在给定投影符号的条件下，约束满足问题公式以高概率裂解为小型连通分量。这使得高效拒绝采样成为可能。

为了处理复测度，我们首先分析一个投影后的复测度。考虑以下投影 f，它将着色 $\sigma \in [q]^V$ 映射为颜色桶分配 $\tau = f(\sigma) \in \{1^\blacktriangle, 2^\blacktriangle, \ldots, B^\blacktriangle\}^V$，其中对于任意 $v \in V$，$\tau_v = f(\sigma_v)$。第一个颜色被投影到第一个颜色桶$1^\blacktriangle$（我们用 $\blacktriangle$ 表示颜色桶）。其余 $q-1$ 个颜色被均匀划分到其他 $B-1$ 个桶中，因此每个桶（除 $1^\blacktriangle$外）所含的原始颜色数量大致相同。然后，$\{1^\blacktriangle, 2^\blacktriangle, \ldots, B^\blacktriangle\}^V$上的投影测度定义为 $\psi_{H_i}(\tau) = \sum_{\sigma:\ f(\sigma)=\tau} \mu_{H_i}(\sigma)$，并将通过复马尔可夫链进行分析。但更棘手的是，要从 ψ_{H_i}中导出关于 μ_{H_i}的界。

为此，我们引入一种投影–提升方案（在第3.1节中形式化）。具体而言，我们将投影空间划分为互不相交的事件 $S_1, \ldots, S_\ell \subseteq \{1^\blacktriangle, 2^\blacktriangle, \ldots, B^\blacktriangle\}^V$，其中 $\bigcup_{j=1}^{\ell} S_j = \{1^\blacktriangle, 2^\blacktriangle, \ldots, B^\blacktriangle\}^V$。注意，根据定义，对于每个 $\psi_{H_i}(S_j) = \mu_{H_i}(S_j)$，均有 j。由全测度定律，

$$\mu_{H_i}\left(e_{i+1} \text{ is monochromatic}\right) = \sum_{j=1}^{\ell} \psi_{H_i}(S_j) \cdot \mu_{H_i}\left(e_{i+1} \text{ is monochromatic} \mid S_j\right). \tag{2}$$

将概率证明推广到复平面的一大难点在于，许多概率论证都以关键方式依赖单调性[1]，而复测度并不具有单调性。为了重新获得控制，我们设计划分 (S_j)，使得对于每个满足 $\psi_{H_i}(S_j) \neq 0$ 的 j，

$$\mu_{H_i}\left(e_{i+1} \text{ is monochromatic} \mid S_j\right) \in [0, 1].$$

将其与 (2) 及三角不等式结合，得到

$$\left|\mu_{H_i}\left(e_{i+1} \text{ is monochromatic}\right)\right| \le \sum_{j=1}^{\ell} \left|\psi_{H_i}(S_j)\right|. \tag{3}$$

因此，问题归结为对一组投影事件的总范数进行上界估计。

[1]在 $A \subseteq B$的意义下，对每个 $A \subseteq B$均有 $|\mu(A)| \le |\mu(B)|$。

接下来，我们对这些事件的定义方式作一些直观说明。我们通过一个称为 S_j 的局部组合对象来定义这些事件：坏簇（见定义4.7）。坏簇 $\mathbf{S}^{\text{bad}}$ 是一个包含 e_{i+1} 的连通超边子集，并且 $\mathbf{S}^{\text{bad}}$ 中的所有顶点都位于同一个颜色桶中，而每条与 $\mathbf{S}^{\text{bad}}$ 相交的超边都包含来自不同颜色桶的顶点（见图 1）。事件 S_j 由坏簇 $\mathbf{S}^{\text{bad}}$ 及其中的颜色桶分配共同定义。对于超边子集 S，我们用 $\mathbf{vbl}(S)$ 表示 S 中顶点的集合。固定一个超边子集 S 和一个颜色桶分配 $\tau_{\mathbf{vbl}(S)} \in \{1^{\blacktriangle}, 2^{\blacktriangle}, \ldots\ldots, B^{\blacktriangle}\}^{\mathbf{vbl}(S)}$，我们将证明，如果 $\psi_{H_i}(\mathbf{S}^{\text{bad}} = S \wedge \tau_{\mathbf{vbl}(S)}) \neq 0$，那么有

$$\mu_{H_i}\left(e_{i+1} \text{ is monochromatic} \mid \mathcal{S}^{\text{bad}} = S \wedge \tau_{\mathbf{vbl}(S)}\right) \in [0,1].$$

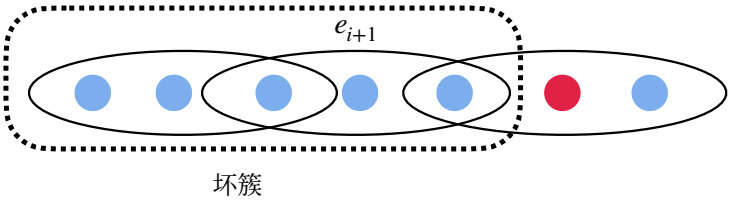

图 1. 每种显示的颜色代表状态压缩方案中的一个颜色桶。最左侧的两条超边构成一个坏簇，因为它们的顶点属于同一个颜色桶。

直观地说，对 $\mathcal{S}^{\text{bad}} = S$ 以及 $\mathbf{vbl}(S)$ 上的颜色桶分配进行条件化后，外场的所有贡献都会固定下来（因为外场仅作用于颜色桶），因此，事件“e_{i+1} 是单色的”的条件边缘概率为实数，且属于 $[0,1]$（见引理 4.8）。因此，我们得到

$$\left|\mu_{H_i}\left(e_{i+1} \text{ is monochromatic}\right)\right| \leq \sum_{S:|S|\geq 1} \sum_{\tau_{\mathbf{vbl}(S)} \in \{1^{\blacktriangle},\ldots,B^{\blacktriangle}\}^{\mathbf{vbl}(S)}} \left|\psi_{H_i}\left(\mathcal{S}^{\text{bad}} = S \wedge \tau_{\mathbf{vbl}(S)}\right)\right|. \tag{4}$$

1.2.3. 通过复 *Glauber* 动力学分析投影测度。 为了界定（4）右侧的大小，我们将 [LWYY25] 中发展的复数马尔可夫链框架推广到一般的约束满足问题。直观地说，要分析事件 ψ 的边缘测度 A，可以转而分析事件 A 相对于复 Glauber 动力学所得状态的情况。

固定任意整数 $T > 0$，考虑一个以平稳测度 ψ_{H_i} 为平稳测度的 T 步复 Glauber 动力学。设 $\mu : \Omega \to \mathbb{C}$ 为任意复测度（将在预备知识部分正式定义），且 $P \in \mathbb{C}^{\Omega\times\Omega}$ 为一个复值转移矩阵，则 T 步复马尔可夫链的复测度为 μP^T，记作 ψ_T^{GD}。我们将时间 0 视为“当前时刻”，并假设马尔可夫链在时刻$-T$启动。于是，对于时刻 0 的任意“结果” σ_0，$\psi_T^{\text{GD}}(\sigma_0)$ 都是良定义的；对于导向事件 A的结果的测度求和，我们简记为 $\psi_T^{\text{GD}}(\sigma_0 \in A)$。如果能够证明收敛，即

$$\psi_{H_i}(A) = \lim_{T\to\infty} \psi_T^{\text{GD}}(\sigma_0 \in A), \tag{5}$$

那么，对测度进行界定 ψ_T^{GD}也就界定了（4）右侧的值。

LWYY 的一项关键洞见 [25] 是采用“渗流”式论证，既证明收敛，又对 ψ_T^{GD}作出上界。在他们研究超图独立集的情形中，首先将马尔可夫链的每次转移分解为无偏更新部分和自适应（非无偏）更新部分。粗略地说，这相当于将复数转移矩阵分解为两部分之和。随后，只需证明无偏更新“主导”了对测度的贡献ψ_T^{GD}，即可得到收敛性。此外，无偏更新带来的贡献更容易控制，因此，本质上可以通过对以无偏更新结束的轨迹求和，得到 $\left|\psi_T^{\text{GD}}\right|$ 的上界。

为了使“渗流”式论证在复平面上奏效， [LWYY25] 提出了见证序列的概念。在给定该序列的条件下，复测度 $\psi_{\mathrm{GD}T}$呈现零一律： $\psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A \text{ |见证}) \in \{0, 1\}$。直观而言，见证序列有两个目的：a）它对复马尔可夫链的“轨迹”进行编码，使得最终事件 $\sigma_0 \in A$ 独立于初始状态；b）编码的测度不会远大于无偏更新的测度。

为了分析我们的投影测度 ψ_{H_i}，我们在精神上紧密遵循 [LWYY25]，但也必须在以下方面进行创新。

转移测度的分解：第一步是仔细将转移测度分解为无知转移和非盲转移，使无知转移接近真实的转移测度。

对于实概率测度的超图 q着色，类似的分解可通过局部均匀性 [GLLZ18、HSW21、FHY21、JPV21a], 得知，其大致含义是，在满足局部引理条件时，变量上的局部边缘分布接近均匀乘积分布。复数情形下的局部均匀性似乎极难处理，因为现有论证依赖于实数轴上的 LLL [HSS11] 。此外，为了对给定颜色（而非颜色桶）引入外场，我们的状态压缩方案要求指定一种特殊颜色；在这种情况下，即便在实数轴上，标准的局部均匀性也不再成立。

我们通过两点观察绕开这些困难。第一点是考察转移测度 的“局部均匀性”（而非平稳测度的局部均匀性）。在转移测度中，实值或复值外场 λ 之间的差异可以在区间$[0, 1]$的一个邻域内得到界定。具体而言，给定桶分配 $\tau \in \{1^\blacktriangle, 2^\blacktriangle, \ldots, B^\blacktriangle\}^{V\setminus v}$，对每个 $i \in [B]$，令 X_i表示与 τ一致且将 v 分配到桶 $i^\blacktriangle$的着色数。那么，转移测度 ψ_v^τ为：

$$\psi_v^\tau(1^\blacktriangle) = \frac{\lambda X_1}{\lambda X_1 + \sum_{i=2}^B X_i}, \qquad \text{and } \forall i \in [B] \setminus \{1\}, \quad \psi_v^\tau(i^\blacktriangle) = \frac{X_i}{\lambda X_1 + \sum_{i=2}^B X_i}. \tag{6}$$

因此， $\lambda \approx 1 \implies \psi_v^\tau(i^\blacktriangle) \approx \frac{X_i}{\sum_{i=1}^B X_i}$ ~~。接~~下来需要界定 $\frac{X_i}{\sum_{i=1}^B X_i}$。~~如前所~~述，在我们的状态压缩方案中，第一个桶 $1^\blacktriangle$只包含一种颜色，因此标准的局部均匀性不再成立。

我们的第二个观察是，弱化局部均匀性仍然成立：我们不再要求边缘分布接近均匀，而是要求除特殊颜色 $1^\blacktriangle$ 外的每个颜色桶 $i^\blacktriangle$， $j^\blacktriangle$ 都满足均匀性，即$\psi_v^\tau(i^\blacktriangle) \approx \psi_v^\tau(j^\blacktriangle)$；对于 $1^\blacktriangle$，我们要求 $\psi_v^\tau(1^\blacktriangle) = 0$ 或 $\psi_v^\tau(1^\blacktriangle) \approx 1/q$。为说明这一点，在给定桶分配 τ的情况下，如果存在一条超边，其中包含 v以及位于颜色桶 $1^\blacktriangle$中的 $k-1$ 个顶点，我们可以移除这条超边，并限制 v 不属于 $1^\blacktriangle$。在这个不含 $1^\blacktriangle$的约化超图上，每个顶点仍有较大的颜色桶，且该约化超图满足标准的局部均匀性。

我们针对弱化局部均匀性，专门设计了一种转移测度分解。值得注意的是 ψ_T^{GD}，它由向量-矩阵乘积 μP^T生成，也可以看作是在一个“时空薄片”上对长度为 T 的游走求和，其中每个节点都以转移矩阵中相应的元素作为权重。直观地说，我们希望证明，在逆时间揭示这些“时空游走”（对应于格劳伯动力学的“轨迹”）时，对 ψ_T^{GD}起主导作用的是那些在抵达初始状态之前已经遇到某些无偏更新的项。这一点通过 [LWYY25]中的见证序列进行了形式化。

见证序列的设计：我们先回顾一下见证序列背后的直觉。 [LWYY25]利用它们来编码在到达初始状态之前遇到无偏更新的“时空游走”。

性质 1.5。 由 设计的见证序列 *[LWYY25]* 满足以下条件：如果W是一个见证序列，那么

(1) $\psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A \wedge W)$与初始状态无关；*(2)* “零一”分布：将$W$ 视为一个“事件”，它完全确定了事件 $(\sigma_0 \in A)$。特别地，在定义良好的情况下，$\psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A \mid W) \in \{0, 1\}$； *(3)* $\left|\psi_T^{\mathrm{GD}}(W)\right|$ 可以显式计算（或界定），并且与初始状态无关； *(4)* $\lim_{T\to\infty} \left|\psi_{\mathrm{GD}T}(\text{非见证序列})\right| = 0$。

鉴于这些理想性质，可以按如下方式进行：

$$\psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A) = \sum_{W:\text{witnesses}} \psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A \wedge W) + \psi_T^{\mathrm{GD}}(\text{non-witness sequences})$$
$$= \sum_{W:\text{witnesses}} \psi_T^{\mathrm{GD}}(W)\psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A|W) + \psi_T^{\mathrm{GD}}(\text{non-witness sequences}).$$

然后，通过三角不等式可以推得

$$\left|\psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A)\right| \le \sum_{W:\text{witnesses}} \left|\psi_T^{\mathrm{GD}}(W)\right| \cdot \left|\psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A|W)\right| + \left|\psi_T^{\mathrm{GD}}(\text{non-witness sequences})\right|$$
$$\text{(by “zero-one” law)} \qquad \le \sum_{W:\text{witnesses}} \left|\psi_T^{\mathrm{GD}}(W)\right| + \left|\psi_T^{\mathrm{GD}}(\text{non-witness sequences})\right|. \tag{7}$$

取极限后，我们 在引理中证明3.10， ψ_T^{GD}收敛到 ψ_{H_i}， 证明见第A节。因此 ，

$$\left|\psi_{H_i}(A)\right| = \lim_{T\to\infty} \left|\psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A)\right| \le \lim_{T\to\infty} \sum_{W:\text{witnesses}} \left|\psi_T^{\mathrm{GD}}(W)\right|.$$

值得注意的是，上述推导，特别是方程（7）中的推导，使用了“零一”分布（性质 1.5 的第（2）部分），而非测度的单调性。相比之下，对于标准概率测度，得益于单调性，我们可以直接界定 $\psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A \wedge W) \le \psi_{\mathrm{GDT}}(W)$。

[LWYY25]通过坏分量这一概念，形式化地刻画了超图独立集情形下的见证序列坏分量。这自然推广到具有一种特殊颜色的超图着色。然而，由类似坏分量刻画的见证序列只能满足性质 1.5 的第（1）部分。为了恢复“零一”分布，我们还需要编码额外信息，使其与坏分量结合后发挥第（2）和第（3）部分的作用，进而用于证明第（4）部分。本质上，这种额外编码只是在推导方程（7）时引入了一个额外的条件。

接下来，我们将说明如何满足性质 1.5中的第 (1) 部分，并在超图着色中恢复“零一”律。我们回顾一下弱化局部均匀性：除特殊颜色 $1^{\blacktriangle}$ 之外，所有颜色的边缘分布都近似相等。因此，无知转移就是尝试以均匀随机的方式更新为一个非特殊颜色桶。我们用 $r_t \in \{2^{\blacktriangle}, 3^{\blacktriangle}, \ldots, B^{\blacktriangle}, \perp\}$ 表示时刻 t无知转移的结果，其中 $\perp$ 是一个占位符，表示仅凭时刻 t 的无知转移无法完全确定更新值，因此可能需要进行非无知更新。

为了了解如何满足性质 1.5 的第 (1) 部分，我们考虑时刻 t 的一次转移步骤，其中要更新顶点 v ；我们揭示时刻 s（紧邻 t之前）超前一跳的所有邻接顶点v对应的 r_s 无知颜色桶分配。如果包含 v的所有超边都没有因这些 r_s而成为单色的，那么我们就知道时刻 t 的更新与初始状态无关。事实上，在给定这些 r_s的条件下，由于所有邻接约束都已满足，复测度会分解为乘积（形式化表述见观察 4.15）。类似地，对于时刻 t的一次更新，如果包含 v的所有超边的最后一次更新都与初始状态无关，那么我们就知道时刻 t的更新也与初始状态无关。通过沿时间反向揭示无知颜色桶分配，这就在时空图上形成了一个渗流，其结构由坏分量 $\mathsf{C}^{\mathrm{bad}}$ 形式化刻画（见定义 4.14）。直观而言，当对应的 r_t构成见证序列（即满足第 (1) 部分）时，坏分量恰好是“小”的。

零一律：与 [LWYY25], 相比，要恢复“零一”律有两个难点。首先，坏分量 本身无法为一般的约束满足问题提供足够的信息，而 $\psi_T^{\mathrm{GD}}(\sigma_0 \in A \wedge C^{\mathrm{bad}})$ 仍然是一个极其复杂的复测度；其次，我们必须处理投影测度这一事实，也导致了复杂得多的事件 A （对应于投影提升过程中的一个坏簇），对此我们需要恢复“零一”律。我们的想法是在坏分量中也编码实际更新后的值。令 $\mathrm{BadTS}\left(C^{\mathrm{bad}}\right)$ 表示坏分量中涉及的更新时间

分量 C^{bad}，并令 $o_{\mathrm{BadTS}(C^{\mathrm{bad}})}$ 表示 BadTS (C^{bad})中的更新后的值。我们证明，给定 C^{bad}和 $o_{\mathrm{BadTS}(C^{\mathrm{bad}})}$，仍然可以恢复零一律（引理 4.16）。

然后，为满足性质 1.5 中的第（3）部分，我们还需要相较于 [LWYY25]更为精细的分析，从而为更复杂的事件 A（这些事件可能依赖于无界数量的变量）以及额外的编码留出空间。

我们结合第（1）、（2）和（3）部分，证明“较大”坏分量的贡献趋于 0，从而恢复性质 1.5 中的第（4）部分，当 $T \to \infty$时成立。该性质的这一部分被形式化为条件 3.9，我们将在第 4.2.4 节中对其进行形式验证。

1.2.4. 类 *LLL* 条件下的中心极限定理、局部中心极限定理和集中不等式。 给定我们的零点自由性，中心极限定理可由 [MS24] 以及方差的一个下界推出。根据方差的定义，只需证明每个顶点上的方差下界以及协方差的下界（见方程（50））。第一个下界由局部均匀性（引理 C.4 和推论 C.5）得到。对于第二个下界，我们利用采样 LLL 领域近期的突破 [WY24] 来界定总影响（引理 C.6），进而得到协方差的下界（见方程（51））。在第 D 节中，我们沿用 [JPSS22], 的思路，通过傅里叶反演将中心极限定理提升为局部中心极限定理（见引理 D.5）。对于常数 λ，我们将他们的分析扩展到一般的约束满足问题。

我们简单的切比雪夫型不等式由两个部分组成：期望的下界和方差的上界。期望的下界由局部均匀性得出，而上界则再次利用了 LLL 采样领域的一项最新突破 [WY24]。他们还证明了相对于某个约束的总影响存在一个常数上界。将其转化为相对于单个变量的上界，只会损失 k倍因子，随后便可用它来界定变量之间的协方差。在计算协方差时，由于对引入的顶点进行钉扎，我们还会损失一个 q 倍因子。由此可得在 $pD^{2+o_q(1)} \lesssim 1/q$条件下成立的切比雪夫不等式。

2. 预备知识

2.1. 复归一化测度。我们回顾复归一化测度的概念 [LWYY25]。设 $\mu\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 是定义在可测空间 (Ω, F) 上的复测度，其中 Ω 是有限集，F 中的元素称为事件。令 $\mathrm{supp}(\mu)$ 表示 μ 的支撑集，即 $\mathrm{supp}(\mu) \triangleq \{x \in \Omega \mid \mu(x) \neq 0\}$。如果 $\sum_{\omega\in\Omega} \mu(\omega) = 1$，则称 μ 为复归一化测度。对于任意事件 $A \in \mathrm{F}$，定义 A 上的测度为$\mu(A) \triangleq \sum_{\omega\in A} \mu(\omega)$。

与概率类似，对于任意满足 $\mu(A) \neq 0$ 的事件 $A \in \mathrm{F}$，我们将可测空间 (Ω, F_A) 上关于 A 的限制测度 $\mu(\cdot \mid A)$ 定义为 μ 的条件测度，其中 $\mathrm{F}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathrm{F}\}$，且对于任意事件 $B \in \mathrm{F}$，$\mu(B \mid A) = {}^{\mu(B\cap A)}/_{\mu(A)}$。注意，条件测度 $\mu(\cdot \mid A)$ 在定义良好时总是归一化的。

若两个事件 $A_1, A_2 \in \mathrm{F}$ 满足 $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2)$，则称它们独立。更一般地，对于有限事件序列 $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathrm{F}$，若对任意有限子集 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$，都有 $\mu(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mu(A_i)$，则称它们相互独立。

对于有限个事件的序列 A_1、A_2、……、$A_m \in \mathrm{F}$，若对任意 $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$，我们称它们两两不相交。全测度定律对这些复测度也成立。设 A_1、A_2、……、$A_m \in \mathrm{F}$ 是有限个两两不相交事件组成的序列，且 $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega$。那么对任意事件 $B \in \mathrm{F}$，有

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{m} \mu(B \cap A_i).$$

2.2. **图模型及其条件测度**。 令 V 为一个有限集，$Q = (Q_v)_{v\in V}$ 为一系列有限集。令 $H = (V, \mathrm{E})$为一个超图，其中每个顶点 $v \in V$表示一个随机变量，其取值来自集合 Q_v；每条超边 $e \in \mathrm{E}$表示变量集合 $e \subseteq V$ 上的一个局部约束。对于每个 $v \in V$，都有一个函数 $\phi_v\colon Q_v \to \mathbb{C}$，用于表示外场，并且

对于每个 $e \in \mathrm{E}$，都有一个函数 $\phi_e\colon \bigotimes_{v\in e} Q_v \to \mathbb{C}$，用于表示相互作用。一个图模型由元组 $\mathrm{G} = (H, (\phi_v)_{v\in V}, (\phi_e)_{e\in\mathcal{E}})$指定。对于每个构型 $\sigma \in \boldsymbol{Q}$，我们将其权重定义为

$$w_{\mathcal{G}}(\sigma) \triangleq \prod_{e\in\mathcal{E}} \phi_e(\sigma_e) \cdot \prod_{v\in V} \phi_v(\sigma_v).$$

并且 图模型 G 的配分函数 $Z\mathrm{G}$ 定义为 $Z = Z\mathrm{G} \triangleq \sum_{\sigma\in\boldsymbol{Q}} w\mathrm{G}(\sigma)$.

当配分函数 $Z\mathrm{G}$ 非零时，我们在可测空间 $(\boldsymbol{Q}, 2^{\boldsymbol{Q}})$ 上定义吉布斯测度 $\mu = \mu_{\mathcal{G}}$。对于变量的任意子集 $\Lambda \subseteq V$，我们定义 $\boldsymbol{Q}_\Lambda \triangleq \bigotimes_{v\in\Lambda} Q_v$；对于 Λ 上的部分限制 $\sigma \in \boldsymbol{Q}_\Lambda$，称 σ 为 Λ 上的钉扎。若其测度非零，则称 σ 是可容许的。对于 Λ 上的钉扎 $\tau \in \boldsymbol{Q}_\Lambda$，我们也将 $\mu(X_\Lambda = \tau) \triangleq \sum_{\sigma\in\boldsymbol{Q}:\ \sigma\succeq\tau} \mu(\sigma)$ 记为。对于任意不相交的 $S, \Lambda \subseteq V$，以及 Λ 上任意可容许的钉扎 $\sigma \in \boldsymbol{Q}_\Lambda$，我们用 μ_S^σ 表示在给定 σ 的条件下，由 μ 在 S 上诱导的边缘测度，即 $\forall \tau \in \boldsymbol{Q}_S, \mu_S^\sigma(\tau) = \mu(X_S=\tau \wedge X_\Lambda=\sigma)$。

2.3. 格劳伯动力学：随机扫描与系统扫描。 我们回顾标准的格劳伯动力学。设 μ 是定义在 $\boldsymbol{Q}$ 上的一个分布，其变量为 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$。*格劳伯动力学* 是构造平稳分布为 μ 的马尔可夫链的一种典型方法。从一个满足 $\mu(X_0) \neq 0$ 的初始状态 $X_0 \in \boldsymbol{Q}$ 出发，该链在每一步 t 按如下方式运行：

- 均匀随机地选择一个变量 $v \in V$，并对所有 $u \neq v$ 设置 $X_t(u) = X_{t-1}(u)$；
- 从分布 $\mu_v^{X_{t-1}(V\setminus\{v\})}$ 中采样，以更新 $X_t(v)$。

系统扫描 Glauber 动力学 是标准格劳伯动力学的一种变体。在每一步中，它不是随机更新一个变量，而是按固定的顺序更新变量。具体而言，在每一步 t，我们选择变量 $v = v_{i(t)}$，其中

$$i(t) \triangleq (t \mod n) + 1. \tag{8}$$

然后 X_{t-1} 使用与格劳伯动力学相同的规则，根据所选的 v进行更新 X_t .

众所周知，格劳伯动力学相对于 μ是非周期且可逆的。系统扫描格劳伯动力学并非时齐的，因为变量按循环顺序访问。不过，通过将 n 次连续更新捆绑在一起，我们可以得到一个非周期且可逆的时齐马尔可夫链。

2.4. 约束满足问题公式。约束满足问题（CSP）公式 Φ 是一个元组（V，$\boldsymbol{Q}$，C）。V是变量集。$\boldsymbol{Q} = (Q_v)_{v\in V}$是定义域集，对于每个变量 $v \in V$，Q_v 都是有限的，且 v 取值于 Q_v。而 C 是约束集。对于变量的任意子集 $S \subseteq V$，我们用$\boldsymbol{Q}_S = \bigotimes_{v\in S} Q_v$ 表示其定义域。每个约束 $c \in C$ 都定义在变量的一个子集 $\mathrm{vbl}(c) \subseteq V$ 上，并将每个赋值$\sigma_{\mathrm{vbl}(c)} \in \boldsymbol{Q}_{\mathrm{vbl}(c)}$映射为“真”或“假”，以表示 c是满足还是违反。令 c^{-1}（假）表示违反约束 c的、定义在 $\mathrm{vbl}(c)$ 上的部分赋值集合。令 Ω_Φ 表示所有满足赋值的集合，即，

$$\Omega_\Phi = \left\{ \sigma \in \bigotimes_{v\in V} Q_v \;\middle|\; \bigwedge_{c\in C} c(\sigma_{\mathrm{vbl}(c)}) \right\}.$$

注意到，每个约束满足问题公式都可以表示为图模型。我们聚焦于 k-一致的有界度约束满足问题公式。设 k, Δ为两个整数。若约束满足问题公式 $\Phi = (V, \boldsymbol{Q}, C)$ 满足：对每个约束 $c \in C$，都有 $|\mathrm{vbl}(c)| = k$，且每个变量至多属于 Δ 个约束，则称其为一个 (k, Δ)-约束满足问题公式 。

CSP 公式 $\Phi = (V, \boldsymbol{Q}, C)$ 的 依赖图 G_Φ^{dep}定义在顶点集 C 上，使得任意两个约束 c，$c' \in C$在 $\mathrm{vbl}(c) \cap \mathrm{vbl}(c') \neq \emptyset$且 $c \neq c'$时相邻。我们用 $\Gamma(c) \triangleq \{c' \in C\setminus\{c\} \mid \mathrm{vbl}(c) \cap \mathrm{vbl}(c') \neq \emptyset\}$ 表示 $c \in C$的邻域。

2.5. **洛瓦兹局部引理**。设 $\mathrm{R}=\{R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n\}$ 是一组相互独立的随机变量。对于任意事件 E，令 $\mathrm{vbl}(E) \subseteq \mathrm{R}$ 表示决定事件 E 的变量集。设 $\mathrm{B}=\{B_1, B_2, \ldots\ldots, B_m\}$ 是一组"坏"事件。对于每个事件 $B \in \mathrm{B}$，我们定义 $\Gamma(B) \triangleq \{B' \in \mathrm{B} \mid B' \neq B \text{ 且 } \mathrm{vbl}(B') \cap \mathrm{vbl}(B) \neq \emptyset\}$。令 $\mathrm{P}[\cdot]$ 表示 R 中变量的乘积分布。洛瓦兹局部引理给出了以正概率避开所有坏事件的一个充分条件。

定理 2.1 ([EL73]). 若存在函数 $x: \mathcal{B} \to (0,1)$ 使得

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \mathcal{P}[B] \leq x(B) \prod_{B' \in \Gamma(B)} (1 - x(B')), \tag{9}$$

则有

$$\mathcal{P}\left[\bigwedge_{B \in \mathcal{B}} \bar{B}\right] \geq \prod_{B \in \mathcal{B}} (1 - x(B)) > 0.$$

我们还给出洛瓦兹局部引理的以下非对称版本。对于约束集 C，我们用 $\mathrm{P}[\cdot \mid C]$ 表示在 C 中的所有约束均满足这一事件条件下的乘积分布 $\mathrm{P}[\cdot]$。

定理 *2.2*（[*HSS11*，定理 *2.1*]）。给定约束满足问题公式 $\Phi = (V, \boldsymbol{Q}, C)$，令 $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{|C|}\}$ 和 $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_{|C|}\}$，其中 B_i 是约束 c_i 被违反的事件。若存在函数 $x: B \to (0,1)$，使得方程 *(9)* 成立，则对于任何由变量子集 $vbl(A) \subseteq V$ 上的赋值决定的事件 A，

$$\mathcal{P}[\mathcal{A} \mid C] \leq \mathcal{P}[\mathcal{A}] \cdot \prod_{\substack{c \in C \\ \mathrm{vbl}(c) \cap \mathrm{vbl}(\mathcal{A}) \neq \emptyset}} (1 - x(c))^{-1}.$$

著名的 Moser-Tardos 算法 [MT10] 在相同假设下，构造出一个对 $\mathcal{P}$ 中所有随机变量的赋值，使其避开 $\mathcal{B}$ 中的所有坏事件。

定理 2.3 ([MT10]). 假设定理 *2.1* 中的非对称局部引理条件方程(9) 对函数 $x: \mathcal{B} \to (0,1)$ 成立。算法终止后，*Moser-Tardos* 算法会返回一个避开所有坏事件的赋值。*Moser-Tardos* 算法所需重新采样步骤总数的期望至多为 $\sum_{B \in \mathcal{B}} x(B) 1-x(B)$。

2.6. 2-树。我们还需要 2-树的概念 [Alo91]。给定一个图 $G=(V,E)$，其平方图 $G^2=(V,E_2)$ 具有相同的顶点集，而边 $(u,v) \in E_2$ 当且仅当 $1 \leq \mathrm{dist}_G(u,v) \leq 2$。

定义 2.4（2-树）。设 $G=(V, E)$ 为一个图。若顶点集合 $T \subseteq V$ 满足以下条件，则称其为 G 的 2-树：

- 对于任意 $u, v \in T$，$\mathrm{dist}_G(u, v) \geq 2$，并且
- T 在 G^2 上连通。

直观地说，2-树是不向远处扩散的独立集。我们可以在任意连通图中按如下方式构造一个较大的 2-树。

定义 2.5（极大 2-树的构造 [JPV21b，引理 4。5]）。设 $G=(V, E)$ 为一个最大度为 D 且 $v \in V$ 的连通图。我们可以确定性地构造一个 2-树 T，它是 V 的 v，满足 $|T| \geq \lfloor |V| / (D+1) \rfloor$ 如下：

- 将 V 中的顶点按字典序排列。从 $T=\{v\}$ 和 $U=V \setminus N^+(v)$ 开始，其中 $N^+(v) \triangleq N(v) \cup \{v\}$，且 $N(v) \triangleq \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$；
- 重复执行，直到 $U=\emptyset$：令 u 为 U 中与 T 距离最小的顶点；若距离相同，则按照 V 上的顺序打破平局。设置 $T \leftarrow T \cup \{u\}$ 和 $U \leftarrow U \setminus N^+(u)$。

下面的引理分别给出了包含给定顶点、大小为特定值的子树和 2-树的数量上界。

引理 2.6 ([BCKL13，引理 2.1],[FGYZ21b，推论 5.7])。 设 $G=(V,E)$ 是一个最大度为 D 的图，$v\in V$ 是一个顶点。 G 中包含 v、大小为 $k\geq 2$ 的子树数量至多为 $(eD)_2^{k-1}$，而 G 中包含 ~~v、大小为~~ $k\geq 2$ 的 2-树数量至多为 $(eD^2)_2^{k-1}$。

3. 通过解析渗流控制边缘分布

建立零点自由性的一个关键步骤，是界定某些复[LWYY25], 中提出的复马尔可夫链理论。本节将回顾该理论，该理论通过复马尔可夫链为分析复归一化测度提供了一种新工具。我们将展示如何分析复马尔可夫链的收敛性（引理3.10），以及如何界定边缘测度的范数（引理3.11）。

对于复马尔可夫链理论失效的情况——例如支撑集不连通时——我们提出一种投影提升方案。在该方法中，我们首先利用复马尔可夫链理论分析“投影复归一化测度”，然后通过全测度定律将结果提升回原始复归一化测度。

3.1. 投影提升方案。 为介绍我们的投影提升方案，我们首先定义投影测度。令 $\Sigma=(\Sigma_v)_{v\in V}$，其中对于任意 $v\in V$、 Σ_v， Σ_v 是一个有限字母表。令 $\boldsymbol{f}=(f_v)_{v\in V}$ 为一系列投影，其中 f_v：$Q_v\to\Sigma_v$。我们自然地将 $\boldsymbol{f}$ 解释为一个函数；对于任意 $\sigma\in Q$，有 $\boldsymbol{f}(\sigma)=(f_v(\sigma_v))_{v\in V}$。我们将 Σ 称为投影字母表或投影域。定义在投影字母表 Σ 上的投影测度 ψ 为：

$$\forall\sigma\in\Sigma,\quad \psi(\sigma)=\sum_{\tau\in Q:\sigma=\boldsymbol{f}(\tau)}\mu(\tau).$$

假设我们可以分析 ψ 的复数边缘测度，例如通过复马尔可夫链理论。回想一下，证明零点自由性的关键步骤是对复边缘测度的范数进行界定。设 $A\subseteq Q$ 为一个事件。现在我们展示如何通过投影测度 ψ 的边缘分布，对 $|\mu(A)|$ 给出上界。

我们首先定义一系列事件 $\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2,\ldots\ldots,\mathrm{B}_m$，其中对每个 $i\leq m$，$\mathrm{B}_i\subseteq\Sigma$。我们指出，根据投影测度的定义，对于任意 $1\leq i\leq m$，边缘分布 $\mu(\mathrm{B}_i)$ 是有定义的，并且 $\mu(\mathrm{B}_i)=\psi(\mathrm{B}_i)$。我们给出关于投影提升方案的以下条件。接下来，我们先展示如何利用该条件界定 $|\mu(A)|$，然后说明其直观含义。

条件 3.1。 设 $A\subseteq Q$ 为一个事件。成立：

(1) $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots,\mathcal{B}_m$ 两两不相交，即对于任意 $i\neq j$，$\mathcal{B}_i\cap\mathcal{B}_j=\emptyset$;*(2)* 事件 $A\cap(\Sigma\setminus(\bigcup_{j=1}^{m}\mathcal{B}_j))$ 的测度为零，也就是说，$A\cap\Sigma$ 中的任意结果都必须发生在事件 $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots,\mathcal{B}_m$ 之一中；*(3)* 对于任意 $1\leq i\leq m$，我们有

$$\psi(\mathcal{B}_i)=0\Rightarrow\mu(A\wedge\mathcal{B}_i)=0,\quad \psi(\mathcal{B}_i)\neq 0\Rightarrow\mu(A\mid\mathcal{B}_i)\in[0,1].$$

根据条件 3.1 和三角不等式，我们可以给 $|\mu(A)|$ 一个上界：

$$|\mu(A)|=\left|\sum_{i=1}^{m}\mu(A\wedge\mathcal{B}_i)\right|\leq\sum_{i=1}^{m}|\mu(A\wedge\mathcal{B}_i)|\leq\sum_{i=1}^{m}|\mu(\mathcal{B}_i)|=\sum_{i=1}^{m}|\psi(\mathcal{B}_i)|,$$

其中，第一个等号由条件 3.1-(1) 和条件 3.1-(2) 得出，第一个不等式由三角不等式得出，第二个不等式由条件 3.1-(3) 得出，最后一个等号则由 ψ 的定义得出。

条件 3.1 的直观含义是，我们在投影测度上找到互不相交的事件（1），它们“覆盖该事件 A”（2）。这样，我们就可以利用全测度定律和三角不等式，给出

的范数 A。接下来，如果我们能通过 ψ中的事件固定复外场的贡献，那么以该事件为条件后，条件测度就变成一个概率 $[0,1]$ (3)。

稍后，我们将使用渗流式分析来构造这些事件 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_m$。然后，在第 4.1 节中，我们使用复马尔可夫链理论来分析 $|\psi(\mathcal{B}_i)|$。

3.2. **马尔可夫链的复扩展**。我们回顾 [LWYY25]，中关于马尔可夫链复扩展的概念，并在此基础上作出本文所需的修改：格劳伯动力学仅应用于投影测度。

3.2.1. 复马尔可夫链。设 Ω 为有限状态空间。复值转移矩阵 $P \in \mathbb{C}^{\Omega\times\Omega}$满足 $\forall \sigma \in \Omega, \sum_{\tau\in\Omega} P(\sigma,\tau) = 1$。固定 $T \geq 1$。对于有限 Ω 的可测空间 (Ω, F)，记Ω^T为笛卡尔积，F^T为乘积 σ-代数。设 $\mathfrak{P}$ 是 (Ω^T, F^T) 上的复归一化测度，并设 $X_1, X_2, \ldots, X_T$ 是取值于 Ω 的可测函数序列，其依据的测度为 $\mathfrak{P}$。若存在复值转移矩阵 $P \in \mathbb{C}^{\Omega\times\Omega}$，使得对任意 $1 < j \leq T$ 以及任意 $x_1, x_2, \ldots, x_j \in \Omega$，则称序列 $(X_t)_{t=1}^T$ 为 T 步离散时间复马尔可夫链，

$$\mathfrak{P}\left(X_j = x_j \mid \bigwedge_{i=1}^{j-1} X_i = x_i\right) = \mathfrak{P}\left(X_j = x_j \mid X_{j-1} = x_{j-1}\right) = P(x_{j-1}, x_j).$$

我们用 P表示相应的马尔可夫链。对于定义在 Ω上的复归一化测度 $\nu \in \mathbb{C}^{\Omega}$，从 ν出发，经马尔可夫链一步转移得到的测度 νP为

$$\forall x \in \Omega, \quad (\nu P)(x) = \sum_{y\in\Omega} \nu(y)P(y,x).$$

复 定义在 Ω 上的测度 π是 P的平稳测度，如果 $\pi = \pi P$。接下来我们定义收敛 t.

定义 3.2（复马尔可夫链的收敛性）。若一个马尔可夫链具有复值转移矩阵 P和状态空间 Ω，则称其为收敛的，如果对于定义在 Ω上的任意两个复归一化测度μ和 μ^*，都有 $\lim_{T\to\infty} \left\|\mu P^T - \mu^* P^T\right\|_1 = 0$。

3.2.2. 复 *Glauber* 动力学。我们给出系统扫描 Glauber 动力学针对复归一化测度的复数扩展定义。

定义 3.3（系统扫描 Glauber 动力学的复数扩展）。设 $\mu \in \mathbb{C}^{\Omega_V}$ 为一个复归一化测度。目标测度 μ 的复系统扫描 Glauber 动力学由一列复值转移矩阵 $P_t \in \mathbb{C}^{\Omega\times\Omega}$ 组成，其中 $t \geq 1$，这里 $v = v_{i(t)}$（且 $i(t)$如方程（8）中所定义），转移矩阵 P_t 定义如下

$$P_t(\sigma,\tau) \triangleq \begin{cases} \mu_v^{\sigma(V\setminus\{v\})}(\tau_v) & \text{if } \forall u \neq v, \sigma_u = \tau_u, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

从初始状态 $\tau \in \mathrm{supp}(\mu)$开始，复马尔可夫链生成一个诱导复测度 $\mu_t \in \mathbb{C}^{\Omega_V}$，我们将在下文对其进行定义。在时间 $t = 0$，对于所有$\sigma \in \Omega_V \setminus \{\tau\}$，我们定义 $\mu_0(\tau) = 1$ 和 $\mu_0(\sigma) = 0$，并且对于 $t \geq 1$，我们定义 $\mu_t \triangleq \mu_{t-1}P_t$。

备注 3.4（复杂系统扫描 Glauber 动力学的良定义性）。如定义 3.3中所定义，只要对于每个 $\sigma \in \mathrm{supp}(\mu)$ 和任意 $v \in V$，条件测度$\mu_v^{\sigma_{(V\setminus\{v\})}}$都是良定义的，复杂系统扫描 Glauber 动力学就是良定义的。随后，诱导复测度 μ_t在任意时刻都保持归一化。

我们在算法 1 中给出了基于动力学的复杂系统扫描 Glauber 动力学表述。回顾一下，该动力学具有平稳测度 μ、初始状态 τ，我们将其诱导的复测度记为 $\mu_{T\,\tau,}^{\mathrm{GD}}$。为便于技术处理，我们平移动力学的时间线，使其从状态 σ_{-T}开始，最终状态为 σ_0。

我们指出，算法 1 （以及稍后介绍的算法 2）是分析工具，而非高效算法。

算法 1： 复杂系统扫描 Glauber 动力学**输入：** 任意初始构型 $\tau \in$ $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq Q$和一个整数 $T \geq 1$；1 设置 $\sigma_{-T} \leftarrow \tau$；2 **对** $t = -T+1, -T+2, \ldots, 0$ **执行** 3令 $\sigma_t \leftarrow \sigma_{t-1}$ 和 $v \leftarrow v_{i(t)}$, 其中 $i(t) = (t \bmod |V|) + 1$；4令 o_t 服从条件测度 $\mu_v^{\sigma_{t-1}(V\setminus\{v\})}$；5更新 $\sigma_t(v) \leftarrow o_t$；

注 3.5。 很容易验证，定义 3.3 和算法 1中描述的过程在以下意义上基本等价：对于任意 $\tau^* \in \mathrm{supp}(\mu)$, 对于所有 $-T \leq t \leq 0$，都有 $\mu_T^{\mathrm{GD}}{}_{,\tau}(\sigma_t = \tau^*) = \mu_{t+T}(\tau^*)$。通过对 t进行归纳法即可例行验证这一点。

我们还给出系统扫描 Glauber 动力学平稳版本的定义 .

定义 3.6 (平稳系统扫描 Glauber 动力学)。 考虑算法 1中定义的过程，但现在令初始状态 σ_{-T} 服从测度 μ。我们将这个修改后的过程称为 T 步平稳系统扫描 Glauber 动力学，并将其诱导的测度记为 μ_T^{GD}。

容易验证，对于所有 $t \in [-T, 0]$，在 μ_T^{GD}下诱导于 σ_t上的测度恰好服从测度 μ。由于缺乏关于具有复值转移矩阵的马尔可夫链的一般收敛定理，我们给出一个充分条件（条件 3.9），并通过与定义 3.6中的平稳过程进行比较来证明（见引理 3.10）。在该条件下，从任意初始状态出发的格劳伯动力学都会收敛到唯一的极限测度，该测度恰好是平稳测度 μ。

3.2.3. 分解方案。 我们还给出 [LWYY25中的分解方案，定义 3。7]。我们将复杂系统扫描 Glauber 动力学的每次转移分解为两个步骤：无关步骤，该步骤不依赖于当前构型；以及自适应步骤，它试图补足转移测度，使之达到正确结果。

对于 $t \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$，令 $i(t)$ 表示在时间 t 更新的顶点的索引，并令 $v = v_{i(t)}$。为描述第一个无关步骤，我们将顶点 v 与一个复归一化测度 b_v 相关联，其支撑集为 $Q_v \cup \{\perp\}$。而 b_v 和 S_v 的选择取决于具体模型。在第一个无关步骤中，令 $r_t \in Q_v \cup \{\perp\}$ 为服从复归一化测度 b_v 的随机变量。

第二个步骤是一个自适应步骤，它取决于第一步中采样的 r_t 以及当前构型。对于 $t \in \mathbb{Z}_{\leq t}$，令 σ_t 表示复马尔可夫链在时间 t 的构型。令 $v = v_{i(t)}$。

对于任意 $r_t \in Q_v \cup \{\perp\}$ 和任意可容许的 σ_{t-1}，令 τ 表示将 σ_{t-1} 投影到 $V\setminus\{v\}$ 上所得的构型。若 $r_t \neq \perp$，我们直接设置 $\forall u \in V\setminus\{v\}$、$\sigma_t(u) = \sigma_{t-1}(u)$ 和 $\sigma_t(v) = r_t$。否则，令 $\mu^{\tau}{}_{v}{}^{\perp}$: $Q_v \to \mathbb{C}$ 为一个函数；若 $b_v(r_t) \neq 0$，则进一步有 $\mu^{\tau}{}_{v}{}^{\perp}$ 是定义在 Q_v 上的归一化复测度。若 $b_v(r_t) \neq 0$，我们使用 $\mu^{\tau}{}_{v}{}^{\perp}$ 来描述第二个自适应步骤。令 $o_t \in Q_v$ 为服从复归一化测度 $\mu^{\tau}{}_{v}{}^{\perp}$ 的随机变量。然后设置 $\forall u \in V\setminus\{v\}$、$\sigma_t(u) = \sigma_{t-1}(u)$ 和 $\sigma_t(v) = o_t$。为使 $\sigma_t(v)$ 服从正确的边缘测度，我们进一步限制

$$\forall c \in Q_v, \quad \mu_v^{\tau}(c) = b_v(c) + b_v(\perp) \cdot \mu_v^{\tau,\perp}(c).$$

对于任意子集 $C \subseteq V$，令 F_C 为集合 C 上所有可延拓的 构型（可扩展为可行配置）的集合。通过适当选取 $(b_v)_{t\in V}$和 $(\mu^{\tau}{}_{v}{}^{\perp})_{v\in V,\tau\in\mathcal{F}_{V\setminus\{v\}}}$，由上述两个步骤生成的 o_t 遵循我们复马尔可夫链的转移测度。

上述直观认识引出了以下定义。

定义 3.7 (分解方案 [LWYY25，定义 3.7])。 设 $\mu \in \mathbb{C}^{\Omega}$ 为复归一化测度。对于每个 $v \in V$，我们关联一个复归一化测度 b_v： $Q_v \cup \{\perp\} \to \mathbb{C}$，并令$\boldsymbol{b} = (b_v)_{v\in V}$。我们定义 μ 上的 $\boldsymbol{b}$-分解方案如下。对于每个 $v \in V$及每个可扩展的$\tau \in \mathrm{F}^{V\setminus\{v\}}$，我们定义测度 $\mu^{\tau,\ v}{}^{\perp}$为

$$\forall c \in Q_v, \quad \mu_v^{\tau,\perp}(c) \triangleq \frac{\mu_v^{\tau}(c) - b_v(c)}{b_v(\perp)}. \tag{10}$$

然后，边缘测度 μ_v^{τ}可以分解为：

$$\forall c \in Q_v, \quad \mu_v^{\tau}(c) = b_v(c) + b_v(\perp) \cdot \mu_v^{\tau,\perp}(c), \tag{11}$$

其中我们约定 $0 \cdot \infty = 0$ 以确保方程（11）在 b_v（$\perp$） $= 0$时仍然成立。

给定一个 $\boldsymbol{b}$-分解方案，复杂系统扫描 Glauber 动力学可以重新解释为算法 2中的过程。对于 $T \geq 1$ 和 $\tau \in \mathrm{supp}$（μ），令 $\mu^{\mathrm{GD}}_{T\,\tau,\ ,\boldsymbol{b}}$ 为其诱导测度。根据定义 3.7，格劳伯动力学等价于分解后的 Glauber 动力学。

算法 2： $\boldsymbol{b}$-分解后的复杂系统扫描 Glauber 动力学

输入：任意初始构型 $\tau \in \mathrm{supp}(\mu) \subseteq \Omega$和一个整数 $T \geq 1$；1 设置 $\sigma_{-T} \leftarrow \tau$；2 对 $t = -T+1, -T+2, \ldots, 0$ 执行 3 令 $\sigma_t \leftarrow \sigma_{t-1}$和 $v \leftarrow v_i(t)$，其中 $i(t) = (t \bmod |V|) + 1$；4 令 $r_t \in Q_v \cup \{\perp\}$ 服从复归一化测度 b_v；5 如果 $r_t \neq \perp$，令 $o_t \leftarrow r_t$，否则令 o_t服从复归一化测度 $\mu^{\tau,\ v}{}^{\perp}$，其中 τ是将 σ_{t-1}的构型投影到 $V\setminus\{v\}$上；6 更新 $\sigma_t(v) \leftarrow o_t$；

如 [LWYY25], 适当地选择 $\boldsymbol{b}$ 后，我们可以推断复 Glauber 动力学的结果， σ_0而无需知道初始构型 σ_{-T}，从而 $T \to \infty$可以证明复 Glauber 动力学的收敛性，并界定复数边缘测度的范数，这将用于证明零点自由性。

3.2.4. 系统扫描 *Glauber* 动力学的收敛性。 在本三级小节中，我们概述证明 [LWYY25] 中系统扫描 Glauber 动力学收敛性的思路。

回顾复系统扫描 Glauber 动力学，对于 $t \in \{-T+1, -T+2, \ldots, 0\}$，我们用 $i(t)$ 表示在时间 t 更新的顶点的索引。给定一个 $\boldsymbol{b}$-分解的系统扫描 Glauber 动力学，令 $\boldsymbol{\rho}$ 表示 $\boldsymbol{r} = \{r_t\}_{t=-T+1}^{0}$ 的实现，其中 $r_t \in Q_{v_{i(t)}} \cup \{\perp\}$，如算法 2 中所用。若给定 $\boldsymbol{\rho}$ 时，结果 σ_0 不依赖于初始状态，则称 $\boldsymbol{\rho}$ 为见证序列。

定义 3.8 (见证序列)。 固定 $T \geq 1$。考虑一个 $\boldsymbol{b}$-分解的系统扫描 Glauber 动力学，如算法 2所示。对于任意事件 $A \subseteq \Omega$，若序列 $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_t\}_{t=-T+1}^{0}$其中 $\rho_t \in Q_{v_{i(t)}} \cup \{\perp\}$ 满足以下条件之一且仅满足其中一个条件，则称其为相对于事件 A 的见证序列：

(1) 该 事件 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}$ 的测度为零（注意，该事件与初始状态无关），即，

$$\mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) = 0,$$

(2) 事件 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}$ 的测度非零，且

$$\forall \sigma, \tau \in \mathrm{supp}(\mu), \quad \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \mid \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) = \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\tau,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \mid \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}).$$

当 $\boldsymbol{\rho}$ 是关于事件 A的见证序列 时，我们将其记为 $\boldsymbol{\rho} \Rightarrow A$。否则，我们记为$\boldsymbol{\rho} \nRightarrow A$。

我们无需证明复杂系统扫描 Glauber 动力学的收敛，只需证明边缘分布的收敛。对于任意事件 $A \subseteq Q$，只需证明见证序列的贡献占主导，而非见证序列的贡献在 $T \to \infty$时趋于 0。直观而言，只有非见证序列的贡献取决于初始状态。以下定义将上述直观认识形式化。

条件 3.9（收敛的充分条件）。 设 $A \subseteq Q$ 是一个事件。假设 b-分解的系统扫描格劳伯动力学（见算法 2）定义良好，则存在一个集合序列 $\{B(T)\}_{T\geq 1}$，使得对于每个 $T \geq 1$，$B(T) \subseteq \bigotimes_{t=-T+1}^{0} \left(Q_{v_{i(t)}} \cup \{\perp\}\right)$满足以下条件：

- 对于所有 $\boldsymbol{\rho} \nRightarrow A$，都有 $\boldsymbol{\rho} \in B(T)$；因此，$B(T)$ 包含 A 的所有非见证序列。
- 对于任意初始构型 $\sigma \in \mathrm{supp}(\mu)$，以下极限存在并满足：

$$\lim_{T\to\infty} \left| \sum_{\boldsymbol{\rho}\in B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) \right| = 0.$$

上述条件是事件 A收敛的充分条件；我们还包括以下引理，该引理在 [LWYY25]中是隐含的。为完整起见，我们在第 A 节给出其证明。

引理 3.10（复杂系统扫描格劳伯动力学的收敛性）。 设 $A \subseteq Q$ 是一个事件。假设存在一个 b-分解方案，使得条件 3.9 成立。则对于任意 $\tau \in \mathrm{supp}(\mu)$，都有 $\mu(A) = \lim_{T\to\infty} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\tau,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A)$。

3.2.5. 边缘测度的界。 接下来，我们概述在$A \subseteq Q$ 假设条件 3.9 于 [LWYY25]中的情况下，如何界定某个事件的边缘测度。稍后，我们将利用逐边自归约性，将零点自由性问题归约为界定边缘测度的范数。对于 $T \geq 1$，我们考虑平稳复杂系统扫描 Glauber 动力学（定义 3.6）。对于某个事件 A，我们考虑在算法 2 中枚举所有可能的序列 $\boldsymbol{\rho}$'s，将其作为 $\boldsymbol{r}$ 的实现，并考虑 $\sigma_0 \in A$ 在条件 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}$下的测度。

根据条件 3.9，我们考虑以下两种情况： $\boldsymbol{\rho} \in B(T)$；以及 $\boldsymbol{\rho} \notin B(T)$。对于 $\boldsymbol{\rho} \in B(T)$，根据条件 3.9，当 $T \to \infty$时，其贡献会趋于 0。因此，为了界定 $\mu(A)$，只需界定来自 $\boldsymbol{\rho} \notin B(T)$的贡献。为使这一论证形式化，我们给出以下引理，并在第 A节中给出其证明。

引理 3.11（边缘测度的上界）。 设 $A \subseteq Q$ 是一个事件。给定满足条件 b-分解方案3.9。对于任意初始构型 $\tau \in$ 支撑(μ)，有

$$|\mu(A)| \leq \lim_{T\to\infty} \left| \sum_{\rho\notin B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\tau,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) \right|.$$

4. CSP 公式的零点自由性

本节中，我们将分解方案（定义 3.7）应用于约束满足问题公式，并证明零点自由性的一个充分条件（定理 4.6）。需要指出的是，我们研究的是一般约束满足问题，但条件 4.4 隐式地将任意一般约束满足问题转化为原子约束满足问题。为确立零点自由性，我们从逐约束自归约入手，将零点自由性归约为分析复数边缘测度的范数。然后，我们应用投影提升方案（第 3.1 节），分析由标准状态压缩方案构造的投影测度。状态压缩方案及其特例“标记/取消标记”方法，广泛用于对约束满足问题公式的满足赋值进行采样 [Moi19, GLLZ18, FGYZ21a, FHY21, JPV21a, JPV21b, HSW21, GGGHP22, HWY22, HWY23a, HWY23b, CMM23]。对于实数情形，投影分布具有许多良好性质，例如局部均匀性；这些性质可用于证明投影分布上马尔可夫链的快速混合，并构造局部

采样器。对于我们的复数情形，我们使用分解方案（定义 3.7）来分析投影测度上的复杂系统扫描 Glauber 动力学。然后，我们将对投影测度的分析提升回原始测度，并界定复数边缘测度的范数。

我们首先定义状态压缩 方案的框架。

定义 4.1（状态压缩）。对于约束满足问题公式 $\Phi = (V, \boldsymbol{Q}, C)$，令 $\boldsymbol{f} = (f_v)_{v\in V}$。对于每个变量 $v \in V$，f_v 是从其定义域 Q_v 到有限字母表 Σ_v的映射。对于任意 $\Lambda \subseteq V$，我们定义$\Sigma_\Lambda = \bigotimes_{v\in\Lambda} \Sigma_v$。为简单起见，我们假设 $\text{—}_{v\in V} Q_v$ 和 $\text{—}_{v\in V} \Sigma_v$ 互不相交。

我们用 $\boldsymbol{Q}$ 表示原始字母表的集合，用 Σ 表示投影字母表。在本文余下部分中，我们将始终使用这些记号，不再另行说明。稍后在第 5节中，我们将用符号 $\blacktriangle$ 表示投影字母表 Σ中的投影符号。

接下来，我们定义一致性。设 $\Lambda' \subseteq \Lambda \subseteq V$。对于 $\sigma \in \bigotimes_{v\in\Lambda'} (Q_v \cup \Sigma_v)$ 和 $\tau \in \bigotimes_{v\in\Lambda} (Q_v \cup \Sigma_v)$，若 σ与 τ一致，则记作 $\tau \trianglelefteq \sigma$；若 $\forall v \in \Lambda'$，则有 $\tau_v = \sigma_v$或 $\tau_v = f_v(\sigma_v)$。

对于任意约束 $c \in \mathbf{C}$，以及变量 S 上的任意投影部分赋值 $\tau \in \Sigma_S$，我们称 c 被投影部分赋值 τ满足，当且仅当对于任意满足 $\tau \trianglelefteq \sigma$ 的 $\sigma \in Q_S$，c 都被 σ 满足。

设 $1^\blacktriangle \in \text{—}_{v\in V} \Sigma_v$，且 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是一个复数。我们的框架允许为每个具有投影符号 $1^\blacktriangle$ 的变量 v 添加一个复外场 λ。

定义 4.2（约束满足问题公式的复扩展）。给定状态压缩方案的投影 $\boldsymbol{f}$，设 $1^\blacktriangle \in \text{—}_{v\in V} \Sigma_v$，且 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是一个复数（复外场）。我们将权重函数 $w = w(\Phi, \lambda, \boldsymbol{f}, 1^\blacktriangle)$ 定义如下：

$$\forall \sigma \in \Omega_\Phi, \quad w(\sigma) \triangleq \lambda^{|\{v\in V | f_v(\sigma_v) = 1^\blacktriangle\}|}.$$

我们还将 $Z = Z(\Phi, \lambda, \boldsymbol{f}, 1^\blacktriangle)$ 记作所有赋值权重之和，即 $Z \triangleq \sum_{\sigma\in\Omega_\Phi} w(\sigma)$。当 $Z \neq 0$ 时，我们自然定义复测度 $\mu = \mu(\Phi, \lambda, \boldsymbol{f}, 1^\blacktriangle)$，即 $\forall \sigma \in \Omega_\Phi$，$\mu(\sigma) \triangleq {}^{w(\sigma)}\!/_{Z}$。并将其支撑集记为 $\mathrm{supp}(\mu) \triangleq \{\sigma \in \Omega_\Phi \mid \mu(\sigma) \neq 0\}$。

现在我们定义边缘测度。对于任意 $\Lambda \subseteq V$ 和任意 $\sigma \in \bigotimes_{v\in\Lambda} (Q_v \cup \Sigma_v)$，定义 $\mu(\sigma)$ 为

$$\mu(\sigma) \triangleq \sum_{\tau\in\Omega_\Phi : \sigma \trianglelefteq \tau} \mu(\tau).$$

我们还考虑投影 $\boldsymbol{f}$ 下的 投影测度，它在我们用于推导零点自由性的框架中发挥着重要作用。令 $\Omega_\Phi^{\boldsymbol{f}}$ 为投影 $\boldsymbol{f}$ 下满足赋值的集合，即 $\Omega_\Phi^{\boldsymbol{f}} = \{\boldsymbol{f}(\sigma) \mid \sigma \in \Omega_\Phi\}$。

定义 4.3（投影测度）。设 $Z \neq 0$，令 $\psi = \psi(\Phi, \lambda, \boldsymbol{f}, 1^\blacktriangle)$ 为一个复数归一化测度，即

$$\forall \sigma \in \Omega_\Phi^{\boldsymbol{f}}, \quad \psi(\sigma) \triangleq \sum_{\tau\in\Omega_\Phi : \boldsymbol{f}(\tau) = \sigma} \mu(\tau).$$

并且我们将 $\mathrm{supp}(\psi)$ 记为 ψ 的支撑集，即 $\mathrm{supp}(\psi) = \{\sigma \in \Omega_\Phi^{\boldsymbol{f}} \mid \psi(\sigma) \neq 0\}$。

对于任意 $\Lambda \subseteq V$，以及任意 $\sigma \in \Sigma_\Lambda$，我们定义 $\psi(\sigma)$ 为

$$\psi(\sigma) \triangleq \sum_{\tau\in\Omega_\Phi^{\boldsymbol{f}} : \sigma \trianglelefteq \tau} \psi(\tau).$$

我们还要指出，对于任意 $\Lambda \subseteq V$ 以及任意 $\sigma \in \Sigma_\Lambda$，条件测度 ψ^σ 有定义，当且仅当 $\psi(\sigma) \neq 0$。为保持记号的一致性，在本文余下部分，我们始终使用 μ 表示原始测度，使用 ψ 表示投影测度。

随后，我们将建立投影测度 ψ 的一些性质，并利用这些性质证明原始测度 μ具有零点自由性。此外，我们还将给出一个充分条件，使 ψ的性质能够提升回 μ。

这里，我们的目标并非为一般的约束满足问题公式给出零自由条件。我们只关注 (k,Δ)-约束满足问题公式，并为零点自由性提供一个充分条件（定理 4.6）。首先介绍一些有用的记号。回顾一下，对于任意约束 $c \in C$，我们用 $\mathrm{vbl}(c)$ 表示c所依赖的变量，并用 c^{-1}(假) 表示 $\mathrm{vbl}(c)$ 上违反约束 c的部分赋值集合。对于投影下的任意赋值 $\sigma \in \Sigma$ 以及任意约束 c，回顾一下，若对任意违反约束的赋值 $\tau \in c^{-1}$(假)，都存在 $v \in \mathrm{vbl}(c)$ 使得 $f_v(\tau_v) \neq \sigma_v$，我们就称 c 被 σ 满足。这意味着，任何投影符号为 σ 的原始赋值都满足约束 c。令 $\Lambda \subseteq V$。对于投影下的赋值 $\sigma \in \Sigma_\Lambda$，如果其投影测度不为 0，即 $\psi(\sigma) \neq 0$，则称 σ 为投影下的可容许部分赋值。若 σ可以扩展为一个可容许的投影赋值，则称其为投影下的可扩展部分赋值。

在本节中，我们给出一个建立零点自由性的充分条件（定理 4.6）。我们的证明基于逐约束自归约。设 $\Phi = (V, \boldsymbol{Q}, C)$ 是一个 (k,Δ)-约束满足问题公式，并设 $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$。对于任意 $0 \leq i \leq m$，我们将 C_i定义为包含前 i 个约束的 C 子集，即 $C_i = \{c_1, c_2, \ldots, c_i\}$。设 $\Phi_i = (V, \boldsymbol{Q}, C_i)$ 是一个新的约束满足问题公式，并设 $Z_i = Z(\Phi_i, \lambda, \boldsymbol{f}, 1^\blacktriangle)$ 是其对应的配分函数。

归纳法的基例是 $Z_0 \neq 0$，由于不存在约束，因此可以立即验证。归纳假设是：对于整数 $1 \leq i \leq m$，我们假设 $Z_{i-1} \neq 0$。

对于归纳步骤，我们通过展示 $\frac{Z_i}{Z_{i-1}} \neq 0$来证明 $Z_i \neq 0$。接下来，基于归纳假设$Z_{i-1} \neq 0$，令 μ_{i-1} 为相应的复 Gibbs 测度，并令 ψ_{i-1} 为投影测度，我们将 $\frac{Z_i}{Z_{i-1}}$ 表示为 μ_{i-1}的复边缘分布：

$$\frac{Z_i}{Z_{i-1}} = \frac{Z_{i-1} - \sum_{\sigma \in \Omega_{\Phi_{i-1}} : \sigma \text{ violates } c_i} w(\sigma)}{Z_{i-1}} = 1 - \mu_{i-1}(c_i \text{ is violated}). \tag{12}$$

因此，我们使用投影提升方案（第 3.1节）来分析投影测度 ψ_{i-1} 并证明$|\mu_{i-1}$（c_i不成立）$| < 1$。从而 $|\frac{Z_i}{Z_{i-1}}| > 0$ 并且 $Z_i \neq 0$。下一个条件包含两项关键性质，用于通过解析渗流分析投影测度并完成归纳步骤。

对于任意子集 $S \subseteq V$，令 F_S为在投影下 S上的可延拓（部分）赋值集合。

条件 *4.4*（归纳步骤）。令 $\Phi = (V, \boldsymbol{Q}, C)$ 为一个具有 $|C| \geq 1$ 的 (k,Δ)-约束满足问题公式。令 $\boldsymbol{f}$为一个状态压缩方案（定义 *4.1*）。令 $c^* \in C$ 为具有最大编号的约束，并令$\Phi' = (V, \boldsymbol{Q}, C \setminus \{c^*\})$。如果 $Z(\Phi', \lambda, \boldsymbol{f}, 1^\blacktriangle) \neq 0$，令 $\psi = \psi(\Phi', \lambda, \boldsymbol{f}, 1^\blacktriangle)$ 为其投影测度，则有

(1)（复数转移的良定义性）对于任意变量 u，以及在投影 $\boldsymbol{f}$ 下、定义于 $V \setminus \{u\}$上的任意可扩展部分赋值 $\tau \in \Sigma_{V\setminus\{u\}}$，其在 u上的边缘分布 ψ_u^τ是良定义的。*(2)*（良好分解方案）存在一个 $\boldsymbol{b}$-分解方案。定义

$$\widehat{N} \triangleq \max_{c \in C_i} \sum_{\sigma \in c^{-1}(\mathrm{False})} \prod_{u \in \mathrm{vbl}(c)} \left(|b_u(f_u(\sigma_u))| + |b_u(\perp)| \cdot \max_{\tau \in \mathcal{F}_{V\setminus\{u\}}} \sum_{x \in \Sigma_u} |\psi_u^{\tau,\perp}(x)| \right); \tag{13}$$

$$\widehat{M} \triangleq \max_{u \in V} \left(\sum_{x \in \Sigma_u} |b_u(x)| + |b_u(\perp)| \cdot \max_{\tau \in \mathcal{F}_{V\setminus\{u\}}} \sum_{x \in \Sigma_u} |\psi_u^{\tau,\perp}(x)| \right). \tag{14}$$

成立：

$$4\mathrm{e}\Delta^2 k^4 \cdot \widehat{N} \cdot \widehat{M}^{4\Delta^2 k^5} \leq \frac{1}{4}. \tag{15}$$

下一个引理将证明归纳步骤。

引理 4.5（归纳步骤）。设 $\Phi = (V、\ \boldsymbol{Q}、\ C)$ 是一个带有 $|C| \geq 1$ 的（k、 Δ）-约束满足问题公式。设 $c^* \in C$ 是具有最大编号的约束，并设 $\Phi' = (V、\ \boldsymbol{Q}、\ C \setminus c^*)$。

如果 $Z = Z(\Phi', \lambda, f, 1^{\blacktriangle}) \neq 0$和条件 4.4成立，设 $\mu = \mu(\Phi', \lambda, f, 1^{\blacktriangle})$为其复 *Gibbs* 测度，则有 $|\mu(c^* \text{ 不成立})| < 1$。

假设归纳法的基础情形 $Z_0 \neq 0$成立，则上述引理就是证明下述零点自由性的归纳步骤。回顾一下，约束集为 $C = \{c_1, c_2, \ldots\ldots, c_m\}$。还要回顾一下，对于任意 $0 \leq i \leq m$，我们令 $C_i = \{c_1, c_2, \ldots\ldots, c_i\}$包含前 i 个约束、$\Phi_i = (V, Q, C_i)$ 和 $Z_i = Z(\Phi_i, \lambda, f, 1^{\blacktriangle})$。

定理 4.6 （零点自由性）。 设 $\Phi = (V, Q, C)$是一个 (k, Δ)-约束满足问题公式。设 f是状态压缩方案中的投影（定义 4.1），而 λ 是投影符号上的复外场（定义4.2）。假设

$$Z_0 = \prod_{v \in V} \sum_{\sigma \in Q_v} \left(\mathbb{I}[f_v(\sigma) \neq 1^{\blacktriangle}] + \lambda \cdot \mathbb{I}[f_v(\sigma) = 1^{\blacktriangle}] \right) \neq 0, \tag{16}$$

并且 $\Phi_1, \Phi_2, \ldots\ldots, \Phi_m$满足条件 4.4，则有 $Z = Z(\Phi, \lambda, f, 1^{\blacktriangle}) \neq 0$。

证明。我们用归纳法证明 $Z_m \neq 0$。归纳的基础情形是 $Z_0 \neq 0$，这由方程 (16) 得出。现在，我们考虑关于 Z_i 且满足 $1 \leq i \leq m$ 的归纳步骤。根据归纳假设 $Z_{i-1} \neq 0$，令 μ_{i-1} 为其复 Gibbs 测度。由条件 4.4 和引理 4.5，在引理 4.5 中将参数设为 $\Phi \leftarrow \Phi_i$ 和 $c^* \leftarrow c_i$，可得 $|\mu_{i-1}(c_i \text{ 被违反})| < 1$。回顾一下，$\frac{Z_i}{Z_{i-1}} = 1 - \mu_{i-1}(c_i \text{ 被违反})$（方程 (12)）。综合起来，我们有$|\frac{Z_i}{Z_{i-1}}| > 0$，因此 $Z_i \neq 0$，归纳至此完成。于是我们有$Z = Z(\Phi, \lambda, f, 1^{\blacktriangle}) \neq 0$。□

4.1. 归纳步骤的证明。本小节中，我们证明引理 4.5。为简单起见，我们考虑一个 (k, Δ)-约束满足问题公式 $\Phi = (V, Q, C)$，它带有一个额外约束 c^*，使得 $(V, Q, C \cup \{c^*\})$ 也是一个 (k, Δ)-约束满足问题公式。为了证明归纳步骤（引理 4.5），我们假设配分函数 $Z = Z(\Phi, \lambda, f, 1^{\blacktriangle}) \neq 0$。令 $\mu = \mu(\Phi, \lambda, f, 1^{\blacktriangle})$ 为吉布斯分布。只需证明 $|\mu(c^* \text{ 被违反})| < 1$。

接下来，我们使用投影提升方案（条件3.1）来界定这个范数。回顾一下，在我们的投影提升方案中，我们需要针对投影测度设计事件 ψ，使其固定复外场的贡献（条件3.1）。这里我们用钉扎来固定这些贡献，并使用以下组合结构来构造这些事件；之后，我们将使用复马尔可夫链来界定每个事件的范数。值得注意的是，这个论证也可以看作是惰性完美采样方案 [AJ22、FGW+23]的复数类比。

回顾一下，对于投影下的任意赋值 $\sigma \in \Sigma$ 和任意约束 c，若对任意违反约束的赋值 $\tau \in c^{-1}$（假），都存在 $v \in \mathrm{vbl}(c)$ 使得 $f_v(\tau_v) \neq \sigma_v$，则称 c 被 σ满足。这意味着，任何投影符号为 σ 的原始赋值都满足约束 c。否则，称 c 未被 σ满足。

定义 4.7（坏约束、坏簇）。设 $\Phi = (V, Q, C)$是一个约束满足问题公式，具有投影 f，采用状态压缩方案（回顾定义4.1），以及作用于符号 λ 上的复外场 $1^{\blacktriangle}$（定义4.2）。

令 c^* 为一个附加约束。给定投影下的一个赋值 $\sigma \in \Sigma_V$，我们在 $\Phi' = (V, Q, C \cup \{c^*\})$ 的依赖图 $G^{\mathrm{dep}}_{\Phi'}$ 上定义以下结构。

(1) 集合坏约束 $E^{\mathrm{bad}} = E^{\mathrm{bad}}(\sigma)$定义如下：

$$E^{\mathrm{bad}} \triangleq \{c \in C \cup \{c^*\} \mid c \text{ is not satisfied by } \sigma\}.$$

(2) 令 $G^{\mathrm{dep}}_{\Phi'}[E^{\mathrm{bad}}]$ 为由 E^{bad}诱导的 $G^{\mathrm{dep}}_{\Phi'}$ 子图。(3) 坏簇$\mathsf{S}^{\mathrm{bad}} = \mathsf{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma)$定义为 $G^{\mathrm{dep}}_{\Phi'}[E^{\mathrm{bad}}]$中包含附加约束 c^*的极大连通分量。若 $c^* \notin E^{\mathrm{bad}}$，则定义$\mathsf{S}^{\mathrm{bad}} = \emptyset$。

现在，我们使用坏簇来定义投影提升方案中的事件（第3.1节），并指出，如果“c^* 被违反”，那么坏簇一定不能是 $\emptyset$。根据上述定义，条件3.1-（1）以及

条件3.1-（2）成立。我们使用下面的引理来验证条件3.1-（3）。给定一个坏簇 $\mathrm{S}^{\mathrm{bad}}$，我们用 $\mathrm{vbl}(\mathrm{S}^{\mathrm{bad}}) \triangleq \bigcup_{c\in\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}} \mathrm{vbl}(c)$ 表示 $\mathrm{S}^{\mathrm{bad}}$ 中变量的集合。

引理 4.8。 对于投影下的任意部分赋值$\tau \in \Sigma_{\mathrm{vbl}(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}})}$，有

(1) 若 $\mu(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau) = 0$，则 $\mu(c^* \text{ 被违反 } \wedge \mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau) = 0$;

(2) 若 $\mu(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau) \neq 0$，则 $\mu(c^* \text{ 被违反 } | \mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau) \in [0,1]$。

证明。 为证明此引理，我们考虑所有同时满足 $\mathrm{S}^{\mathrm{bad}} = \mathrm{S}$ 和 τ的满足赋值的权重和。我们声称，这个和可以分解为来自$V\backslash\mathrm{vbl(S)}$ 和 $\mathrm{vbl(S)}$ 的贡献之积。

为此，令 $\mathcal{S}^*$ 表示与 $\mathcal{S}$ 中的某些约束相邻、但不属于 $\mathcal{S}$的约束集合。根据定义 4.7，我们知道 $\mathcal{S}^*$ 中的约束均已满足。并且根据 τ，对于每个约束 $c \in \mathcal{S}^*$，我们知道 c由 τ在 $\mathrm{vbl}(\mathcal{S})$ 上满足，或者 c由 $V \setminus \mathrm{vbl}(\mathcal{S})$满足。

现在我们构造一个新的约束满足问题公式 $\Phi' = (V', \mathcal{Q}', C')$，用于编码来自 $V\setminus \mathrm{vbl(S)}$ 的贡献。令 $C' = C\setminus \mathrm{S}$ 和 $V' = V\setminus \mathrm{vbl(S)}$ 和 $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}_{V'}$。对于 S^* 中的每个约束 c，如果 c被 τ满足，我们就从 C'中移除 c；否则，我们在投影下将该约束限制为由 $\mathrm{vbl}(c) \cap V'$上的值满足。我们将 Φ' 的配分函数记为 Z'。

对于来自 $\mathrm{vbl(S)}$ 的贡献，由于 S^* 均已满足，我们只需考虑 S 中的约束。注意，根据 τ 以及我们对约束满足问题公式的复数扩展（定义 4.2），我们可以确定复外场的贡献。因此，这部分贡献可以表示为 $\lambda^{|\{v\in\mathrm{vbl}(\mathcal{S})|\tau_v=1^\blacktriangle\}|}$ 与在部分赋值 τ下满足 S 的满足赋值数量的乘积。令 A_1 为在部分赋值 τ下，变量 $\mathrm{vbl(S)}$ 关于 S 的满足赋值数量；令 A_2 为在部分赋值 τ下，变量 $\mathrm{vbl(S)}$ 关于 S 以及附加约束“c^* 被违反”的满足赋值数量。

对于（1），根据 $\mu(\mathrm{S}^{\mathrm{bad}} = \mathrm{S} \wedge \tau) = 0$，我们有 $A_1 \cdot \lambda^{|\{v\in\mathrm{vbl}(\mathcal{S})|\tau_v=1^\blacktriangle\}|} \cdot Z' = 0$。令 Z为 Φ的配分函数，结合 $A_2 \le A_1$这一事实，我们得到 $\mu(c^*\text{is violated} \wedge \mathrm{S}^{\mathrm{bad}} = \mathrm{S} \wedge \tau) = \frac{A_2 \cdot \lambda^{|\{v\in\mathrm{vbl}(\mathcal{S})|\tau_v=1^\blacktriangle\}|} \cdot Z'}{Z} = 0$。

对于（2），我们有 $\mu(c^*\text{is violated} \mid \mathrm{S}^{\mathrm{bad}} = \mathrm{S} \wedge \tau) = \frac{A_2 \cdot \lambda^{|\{v\in\mathrm{vbl}(\mathcal{S})|\tau_v=1^\blacktriangle\}|} \cdot A_1 \lambda^{|\{v\in\mathrm{vbl}(\mathcal{S})|\tau_v=1^\blacktriangle|} \cdot Z'}{A_1 \cdot Z'} = \frac{A_2}{A_1} \in [0,1]$。 □

现在我们可以使用我们的投影提升方案来证明定理*4.6*（第3.1节），并使用下面这个用于界定坏事件范数的引理。

引理 4.9。假设定理4.6中的条件成立，则有 $\sum_{\mathcal{S}:|S|\ge 1} \sum_{\tau\in\Sigma_{\mathrm{vbl}(\mathcal{S})}} \left|\psi(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = S \wedge \tau)\right| < 1$。

我们首先用这个引理证明归纳步骤（引理4.5），并将在下一小节通过复马尔可夫链证明上述引理。

引理4.5的证明。只需证明 $|\mu(c^* \text{ 被违反})| < 1$。根据全测度定律、三角不等式，以及若事件“$c^*$ 被违反”发生，则 $|\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}| \ge 1$，我们有

$$|\mu(c^* \text{ is violated})| \le \sum_{\mathcal{S}:|\mathcal{S}|\ge 1} \sum_{\tau\in\Sigma_{\mathrm{vbl}(S)}} |\mu(c^* \text{ is violated} \wedge \mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau)|.$$

若 $\mu(c^* \text{ 被违反 } \wedge \mathrm{S}^{\mathrm{bad}} = \mathrm{S} \wedge \tau) \neq 0$，根据条件测度，我们有

$$|\mu(c^* \text{ is violated} \wedge \mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau)| = |\mu(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau) \cdot \mu(c^* \text{ is violated} \mid \mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau)|.$$

根据引理 4.8，右端可由以下上界控制：$|\mu(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau)|$。根据 ψ(定义 4.3)，其等于 $|\psi(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau)|$。综合可得：

$$\sum_{\mathcal{S}:|\mathcal{S}|\ge 1} \sum_{\tau\in\Sigma_{\mathrm{vbl}(S)}} |\mu(c^* \text{ is violated} \wedge \mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau)| \le \sum_{\mathcal{S}:|\mathcal{S}|\ge 1} \sum_{\tau\in\Sigma_{\mathrm{vbl}(S)}} |\psi(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{S} \wedge \tau)|.$$

结合引理 4.9，即可得出此引理。 □

4.2. **坏事件测度的界定。** 本小节将说明如何界定坏事件 $\left|\psi\left(S^{\mathrm{bad}}=S\wedge\tau\right)\right|$ 的测度，并通过投影测度上的复杂系统扫描格劳伯动力学证明引理 4.9 （定义 4.3）。我们的策略是运行系统扫描格劳伯动力学足够长的时间。然后我们可以证明，所得状态由投影测度导出。令 σ_0 为系统扫描格劳伯动力学的所得状态。为了了解 ψ，我们考虑测度 ψ_{GDT}以及相应的事件：$\mathrm{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)=S$，且对于任意 $v\in\mathrm{vbl}(S)$，$\sigma_0(v)=\tau_v$。

4.2.1. 投影测度上的复 *Glauber* 动力学。在本三级小节中，我们首先介绍一些有用的条件和组合结构，以分析投影测度上的系统扫描 Glauber 动力学。设 $T\geq 1$，并设 $\sigma\in\Sigma$ 是投影 f 下的一个赋值，满足 $\psi(\sigma)\neq 0$，我们考虑在 ψ 上进行的 T 步复系统扫描 Glauber 动力学，其初始状态为 σ。

为了应用解析渗流框架分析复 Glauber 动力学，我们回顾条件 4.4，其中包含关于分解方案的条件（定义 3.7）。

关于 ***b***-分解方案，我们有以下两条观察。

观察 4.10。对于任意变量 $u\in V$ 以及投影下任意可扩展的部分赋值 $\tau\in\Sigma_{V\setminus\{u\}}$，都有 $\psi^{\tau,\,u^{\perp}}$ 仅取决于 ψ_u^{τ}。

观察 4.11。设 $T>0$ 是一个整数。考虑 T 步 ***b***-分解的复系统扫描 *Glauber* 动力学（条件 *4.4*），令 $\boldsymbol{r}=\{r_t\}_{t=-T+1}^{0}$ 和 $\boldsymbol{o}=\{o_t\}_{t=-T+1}^{0}$按算法 *2*定义。对于任意$t$：$-T+1\leq t\leq 0$，若 $r_t\neq\perp$，则 $o_t=r_t$。

我们使用分解复马尔可夫链来研究之前定义的坏事件。我们遵循 [LWYY25]中的基本思路。接下来，我们定义一些有用的结构来分析系统扫描 Glauber 动力学，然后利用这些结构刻画见证序列并分析坏事件。

4.2.2. 见证图。一种有助于分析经典 Glauber 动力学的结构 [HSZ19、HSW21、QWZ22、FGW+23] 以及复 Glauber 动力学 [LWYY25] 是所谓的见证图，我们接下来将介绍它。

对于任意 $u\in V$和整数 t，我们将 $\mathrm{pred}_u(t)$ 记为 t之前 u最后一次更新的时间，即

$$\mathrm{pred}_u(t)\triangleq\max\{s\mid s\leq t\text{ such that }v_{i(s)}=u\}.$$

对于任意变量子集 $U\subseteq V$和 $t\in\mathbb{Z}_{\leq 0}$，定义

$$\mathrm{TS}(U,t)\triangleq\{\mathrm{pred}_v(t)\mid v\in U\}$$

作为截至时间 的 U中各变量最近一次更新的“时间戳”集合 t.

现在我们给出见证图的定义。见证图的每个顶点都是一个元组，包含一组“时间戳”及其对应的约束。为了分析附加约束 c^* 上的复边缘测度，我们还加入一个额外顶点 $(\mathrm{TS}(\mathrm{vbl}(c^*),0)\ c^*)$。

定义 4.12（见证图）。给定一个约束满足问题公式 $\Phi=(V,\ \boldsymbol{Q},\ C)$，并设 c^* 是一个附加约束，满足 $|\mathrm{vbl}(c^*)|=k$，则见证图 $G_\Phi^{c^*}=\left(V_\Phi^{c^*},E_\Phi^{c^*}\right)$是一个无限图，其顶点集为

$$V_\Phi^{c^*}=\{(\mathrm{TS}(c,t),c)\mid c\in C,t\in\mathbb{Z}_{\leq 0}\}\cup\{(\mathrm{TS}(\mathrm{vbl}(c^*),0),c^*)\},$$

对于 $V_\Phi^{c^*}$ 中的任意顶点 x，我们用 $x(0)$ 表示 x 的第一个坐标，用 $x(1)$ 或 c_x 表示 x 的第二个坐标。

$E_\Phi^{c^*}$ 由 顶点 $x,\ y\in V_\Phi^{c^*}$ 之间的无向边组成，其中 $x\neq y$ 和 $x(0)\cap y(0)\neq\emptyset$.

回顾一下，$(V、\ \boldsymbol{Q}、\ C\cup\{c^*\})$仍然是一个$(k、\ \Delta)$-约束满足问题公式。见证图的以下结构性质已在 [FGW+23、LWYY25] 中通过超图建立。

引理 4.13 ([FGW+23，推论 6.15], [LWYY25，引理 4.5])。 假设 $\Phi=(V、\ Q、\ C\cup\{c^*\})$ 是一个$(k、\ \Delta)$-约束满足问题公式。那么，在见证图 $G_\Phi^{c^*}=\left(V_\Phi^{c^*},E_\Phi^{c^*}\right)$中，对于任意 $x\in V_\Phi^{c^*}$， x的度数至多为 $2\Delta k^2-2$。

按照第 3 节中的总体思路，我们现在定义上述见证图中的一些结构，稍后将用它们来刻画见证序列（定义 3.8）。令 σ_0 为复杂系统扫描格劳伯动力学的所得状态。回想一下，为了证明零点自由性，对于定义在 S 和 $\tau\in\Sigma_{\mathrm{vbl}(S)}$ 上的任意约束子集，其中 变量(S) 采用投影字母表，我们关注事件 (1) $\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)=S$，以及 (2) 对任意 $v\in$变量(S)， $\sigma_0(v)=\tau_v$。

回顾算法 2 中 o_t 和 r_t 的定义。对于任意变量 $v\in V$，$\sigma_0(v)$ 由相应的 o_t 决定。对于任意时间 t，回想一下， $i(t)$ 表示在时间 t 更新的变量的索引；而 $\mathrm{pred}_v(0)$ 表示截至时间 0， v 的最后更新时间。对于任意变量 $v\in V$，有 $\sigma_0(v)=o_{\mathrm{pred}_v(0)}$。因此，我们关注 o_t。

对于任意时刻 t，注意到若 $r_t\neq\perp$，则有 $o_t=r_t$（观察 4.11）；否则，若 $r_t=\perp$，则根据条件 4.4 中的分解方案定义、观察 4.10 和算法 2，令 σ_{t-1} 为时刻 $t-1$的赋值，则 o_t取决于 σ_{t-1}。具体而言，令 $u=v_{i(t)}$为时刻 t更新的变量，只需考虑满足 $u\in\mathrm{vbl}(c)$ 的约束 c。

接下来，我们进一步缩小需要考虑的约束集合。回顾一下，对于任意时刻 t'，若 $r_{t'}\neq\perp$，则有 $o_{t'}=r_{t'}$。另请注意， r_t不依赖于初始状态。我们可以利用 r_t的信息来缩小约束集合，以便计算 o_t。对于约束 c，回顾一下，我们用 c^{-1}(假) 表示违反约束 c的部分赋值集合。根据观察 4.10，对于任意包含变量 u的 $c\in C$，若 c被变量 u之外的变量上的 r_t满足，即 $\mathrm{vbl}(c)\backslash\{u\}$ 中的变量，

$$\forall c\in C \text{ and } \mathrm{vbl}(c)\ni u,\exists u'\in\mathrm{vbl}(c)\backslash\{u\},\ \text{s.t. } r_{\mathrm{pred}_{u'}(t)}\notin f_{u'}(c^{-1}(\mathrm{False})_{u'}) \text{ and } r_{\mathrm{pred}_{u'}(t)}\neq\perp,$$

那么在计算 o_t 时，我们无需考虑这个约束。

因此，我们希望找到一个“连通分量”，使其所有“边界”都满足上述限制。这样，我们就知道该“连通分量”内的所有更新都不依赖于该“连通分量”之外的 o_t 和 r_t。此外，如果这个“连通分量”足够小，我们就可以论证其中的 o_t 不依赖于初始状态。因此，事件 (1) $\mathrm{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)=S$以及 (2) 对任意 $v\in\mathrm{vbl}(S)$， $\sigma_0(v)=\tau_v$，都不依赖于初始状态。

我们通过见证图上的以下组合结构将上述直觉形式化（定义 4.12）。稍后，我们将展示以下结构与此前定义的坏簇之间的联系（引理 4.16），并利用这些结构刻画见证序列（引理 4.19）。

回想一下，对于任意顶点 $x\mathrm{in}V_\Phi^{c^*}$，我们用 $x(0)$ 表示 $x\mathrm{and}\ x(1)$ 或 c_x 的第一个坐标，用 x 表示第二个坐标。我们用 t_x 表示 $x(0)$ 中最大的时间戳，即 $t_x=\max_{t'\in x(0)}t'$。对于由算法 2 构造的任意 $\boldsymbol{r}=(r_t)_{t=-T+1}^{0}\in\bigotimes_{t=-T+1}^{0}\Sigma_{v_{i(t)}}\cup\{\perp\}$，如果顶点 x 满足以下条件，我们就称其被 $\boldsymbol{r}$ 满足： $x(1)$ 被 $\boldsymbol{r}$ 在时间 $x(0)$ 的部分赋值满足，即 $\forall\sigma\in c_x^{-1}$(假)；存在一个 $v\in\mathrm{vbl}(c_x)$，使得 $r_{\mathrm{pred}_v}(t_x)\neq f_v(\sigma(v))$ 且 $r_{\mathrm{pred}_v}(t_x)\neq\perp$。否则，我们称 x 不被 $\boldsymbol{r}$ 满足。

定义 4.14（坏顶点、坏分量和坏树）。设 $\Phi=(V,Q,C)$ 是一个约束满足问题公式，且 c^* 是一个附加约束，其中 $|\mathrm{vbl}(c^*)|=k$。设 $G_\Phi^{c^*}=(V_\Phi^{c^*},E_\Phi^{c^*})$ 是定义 4.12 中的见证图。令 $T\geq1$，并考虑 T 步、 $\boldsymbol{b}$ 分解的复杂系统扫描 Glauber 动力学（条件 4.4）。令 $\boldsymbol{r}=(r_t)_{t=-T+1}^{0}\in\bigotimes_{t=-T+1}^{0}\Sigma_{v_{i(t)}}\cup\{\perp\}$ 由算法 2 构造。

- 坏顶点 $V_{\text{坏}}=V_{\text{坏}}(\boldsymbol{r})$ 定义如下：

$$V^{\mathrm{bad}}\triangleq\{x\in V_\Phi^{c^*}\mid\forall t\in x(0),-T+1\leq t\leq0\text{ and }x\text{ is not satisfied by }\boldsymbol{r}\},$$

  其中包含见证图中约束未被 r_t 满足的顶点。
- 令 $G_\Phi^{c^*}\left[V_{\text{坏}}\right]$表示由 $V_{\text{坏}}$在见证图 $G_\Phi^{c^*}$中诱导的子图。

- 坏分量 $C_{\text{坏}}=C_{\text{坏}}(\boldsymbol{r}) \subseteq V_{\text{坏}}$ 定义为 $V_{\text{坏}}$ 中包含 $(\mathrm{TS}(\mathrm{vbl}(c^*),0)c^*)$ 且连通的最大顶点集合。若 $(\mathrm{TS}(\mathrm{vbl}(c^*),0)\ c^*) \notin V_{\text{坏}}$，则令 $C_{\text{坏}}=\emptyset$。

- 该坏树$\mathcal{T}_{\text{坏}}=\mathcal{T}_{\text{坏}}(\boldsymbol{r}) \subseteq V_{\text{坏}}$定义为诱导子图2-树 $G_{\Phi}^{c^*}[C_{\text{坏}}]$，其中包含$(\mathrm{TS}(\mathrm{vbl}(c^*),\ 0)\ c^*)$，使用定义2.5确定性地构造而成。我们进一步将这一确定性构造表示为从坏分量 $\mathbb{T}$ 到映射，其中 $T_{\text{坏}}=\mathbb{T}(C_{\text{坏}})$。

根据坏分量的定义，我们知道，所有跨越坏分量的约束都已经由 r_t's 满足。因此，我们得到如下观察结果，这意味着坏分量内的更新值不依赖于坏分量外的更新值。对于任意坏分量 C^{bad}，令 $\mathrm{BadTS}\ (C^{\mathrm{bad}})$ 表示坏分量中涉及的时间戳集合，即 $\mathrm{BadTS}\ (C^{\mathrm{bad}}) \triangleq \bigcup_{x\in C^{\mathrm{bad}}} x(0)$。

观察 4.15。 对于任意 $\boldsymbol{r}=(r_t)_{t=-T+1}^{0} \in \bigotimes_{t=-T+1}^{0}\Sigma_{v_{i(t)}} \cup\{\perp\}$，令 $C^{\mathrm{bad}}=C^{\mathrm{bad}}(\boldsymbol{r})$。对于任意 $t \in \mathrm{BadTS}\ (C^{\mathrm{bad}})$ 和 $s \notin \mathrm{BadTS}\ (C^{\mathrm{bad}})$，有 o_t 与 o_s相互独立。换言之，

$$\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau,\boldsymbol{b}}(o_t \wedge o_s)=\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau,\boldsymbol{b}}(o_s)\cdot\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau,\boldsymbol{b}}(o_t).$$

4.2.3. 坏簇与坏分量之间的联系。 本小节将说明我们之前定义的坏簇（定义 4.7）与上文定义的坏分量（定义 4.14）之间的联系。回顾我们的复杂系统扫描 Glauber 动力学（算法 2）中的 o_t，并回顾 σ_0 是我们的复马尔可夫链的所得状态。我们首先证明，给定坏分量以及坏分量中涉及的，即可确定 $\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}=\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$，并且对于任意 $v \in \mathrm{vbl}$)，可以确定 $\sigma_0(v)$的值。随后，我们给出两个技术引理，证明收敛性并给出边缘测度范数的上界。最后，我们利用这两个技术引理证明引理 4.9。

我们先 介绍一个关于确定 $S^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$ 及其中涉及的赋值的引理 .

引理 4.16. 固定坏分量 C^{bad} 以及涉及该坏分量的 o_t's，即 $o_t, \forall t \in \mathrm{BadTS}\ (C^{\mathrm{bad}})$。存在一个算法，返回 $\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}=\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$和 $\tau \in \Sigma_{\mathrm{vbl}(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}})}$，满足对于任意 $v \in \mathrm{vbl}(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}),\sigma_0(v)=\tau_v$，若 $|C^{\mathrm{bad}}|=0$，则 $|\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}|=0$。

因此，对于任意约束子集 S 和部分赋值 $\tau \in \Sigma_{\mathrm{vbl}(S)}$，以下事件完全确定：$\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)=S$以及 $\forall v \in \mathrm{vbl}(S)$, $\sigma_0(v)=\tau_v$。

证明。令 $\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C^{\mathrm{bad}})}$ 表示涉及该坏分量的 o_t's。回顾一下，对于任意约束 c，我们用 $\mathrm{TS}(c,t)$ 表示截至时间 t，$\mathrm{vbl}(c)$ 中变量的最新更新的时间戳集合。在此证明中，我们将关注 $\mathrm{TS}(c,0)$，它是截至系统扫描 Glauber 动力学结束时，$\mathrm{vbl}(c)$ 中变量的最新更新的时间戳集合。我们关注最后 $|V|$ 次更新时间中的 o_t's，因为根据算法 2，对于任意 $v \in V$，设 t 为其截至时间 0 的最后更新时间，则有 $\sigma_0(v)=o_t$。我们通过以下过程给出一个算法来构造 $S^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$ 和 $\sigma_0(\mathrm{vbl}(S))$，从而确定上述事件。

(1) 初始化 $B=\emptyset$。如果 $(\mathrm{TS}(\mathrm{vbl}(c^*),\ 0)\ c^*) \in C^{\mathrm{bad}}$ 且也不满足于 $\boldsymbol{o}_{\mathrm{TS}(c^*,0)}$，则我们更新$B \leftarrow \{c^*\}$，否则终止此过程。(2) 如果存在满足以下条件的约束 $c \in C$：(1) $c \notin B$且 $\mathrm{vbl}(c) \cap \mathrm{vbl}(B) \neq \emptyset$；(2) $(\mathrm{TS}\ (\mathrm{vbl}(c),\ 0)\ \ c) \in C^{\mathrm{bad}}$；以及 (3) c不满足于 $\boldsymbol{o}_{\mathrm{TS}(c,0)}$，则我们更新 $B \leftarrow B \cup \{c\}$。我们持续执行此步骤，直到不存在这样的约束为止。

接下来，我们证明 $B=S^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$。首先证明 $B \subseteq S^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$。根据步骤 (2)， B中的所有约束都未被对应的 o_t满足，这意味着 B中的所有约束都未被 σ_0满足。回顾 $\Phi'=(V,\ \mathcal{Q},\ C \cup \{c^*\})$，以及依赖图 $G^{\mathrm{dep}}_{\Phi'}$ 的定义。根据步骤 (2)，我们还声称 B 是依赖图 $G^{\mathrm{dep}}_{\Phi'}$ 中的一个连通分量。为此，当

一个新约束被添加到 B中时，该约束与 B共享一些变量。根据坏簇的定义（定义 4.7），我们有 $B \subseteq \mathcal{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$。

然后，我们用反证法证明 $\mathsf{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0) \subseteq B$。假设 $\mathsf{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0) \setminus B \neq \emptyset$，根据 $B \subseteq \mathsf{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$ 以及坏簇的定义，存在一个约束 c，使得 $\mathrm{vbl}(B) \cap \mathrm{vbl}(c) \neq \emptyset$，且$c$未被 σ_0 满足，但 $c \notin B$。根据步骤 (2) 中的条件，有 $(\mathrm{TS}(\mathrm{vbl}(c), 0)\ c) \notin \mathsf{C}^{\mathrm{bad}}$。因此，相应的 r_t's 满足 c。根据观察 4.11，对于任意 $t \leq 0$，若 $r_t \neq \perp$，则有 $o_t = r_t$。因此，相应的 o_t's 满足 c，从而 c 被 σ_0 满足，这与假设 $c \in \mathsf{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$ 矛盾。

现在，我们完成 $\mathsf{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$ 的构造。根据步骤 (2) 中的条件 (2) 和 (3)，我们只需对 $t \in$ 检查 o_t，$\mathrm{BadTS}\ (\mathsf{C}^{\mathrm{bad}})$。因此，$(\mathrm{vbl}(S))$ 的 σ_0 可由相应的 o_t's 得出。
注意，根据步骤 (1)，如果 $|\mathsf{C}^{\mathrm{bad}}| = 0$，$\mathsf{S}^{\mathrm{bad}} = B = \emptyset$。 □

接下来，我们给出关于复杂系统扫描 Glauber 动力学的两个技术引理。第一个引理证明收敛性，其证明推迟到第 4.2.4 节。第二个引理给出边缘测度范数之和的上界，其证明推迟到第 4.2.5 节。接下来，我们用这两个技术引理证明引理 4.9。

引理 *4.17*。假设条件 *4.4*。对于任意约束子集 S 以及定义在涉及 S 的变量上的任意部分赋值 $\tau \in \Sigma_{\mathrm{vbl}(S)}$，令 A为事件，使得 $\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0) = S$且 $\forall v \in \mathrm{vbl}(S)$，$\sigma_0(v) = \tau_v$，则条件 *3.9* 成立；并且对于任意 $\tau' \in \mathrm{supp}(\psi)$，有 $\psi(A) = \lim_{T\to\infty} \psi^{GD}_{T,\tau',\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A)$。

引理 4.18。 假设条件 4.4成立。则有

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{C:|C|\geq 1} \sum_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}} \left| \psi^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}} \left(C^{\mathrm{bad}} = C \wedge \boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)} \right) \right| < 1.$$

引理 4.9的证明。 对于任意 S和 $\tau \in \Sigma_{\mathrm{vbl}(S)}$，我们用 $A_{S,\tau}$表示事件：$\mathsf{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0) = S$且$\forall v \in \mathrm{vbl}(S)$，$\sigma_0(v) = \tau_v$。令 $T > |V|$。我们考虑从 $\tau' \in \mathrm{supp}(\psi)$出发、作用于投影测度 ψ 上的复杂系统扫描 Glauber 动力学。根据引理 4.17，只需给出 $\lim_{T\to\infty} \sum_{|S|\geq 1} \sum_{\tau\in\Sigma_{\mathrm{vbl}(S)}} \left| \psi^{\mathrm{GD}}{}_{T,\tau',\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A_{S,\tau}) \right|$的上界。

回顾引理 4.16，给定坏分量 $\mathsf{C}^{\mathrm{bad}}$以及 $\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(\mathsf{C}^{\mathrm{bad}})} = (o_t)_{t\in\mathrm{BadTS}(\mathsf{C}^{\mathrm{bad}})}$，我们可以确定性地构造 $\mathsf{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)$ 和 $\tau \in \Sigma_{\mathrm{vbl}(\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0))}$，并将此构造记为函数$\mathfrak{P}(\mathsf{C}^{\mathrm{bad}}, \boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(\mathsf{C}^{\mathrm{bad}})}) = (\mathsf{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0)\ \tau)$。只需给出上界

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{S:|S|\geq 1} \sum_{\tau\in\Sigma_{\mathrm{vbl}(S)}} \left| \sum_{\substack{C,\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)} \\ \mathfrak{P}(C,\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)})=(S,\tau)}} \psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}} \left(C^{\mathrm{bad}} = C \wedge \boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)} \right) \right|.$$

根据三角不等式，我们可以将绝对范数向内移。此外，注意到 $\mathfrak{P}$是一个确定性过程，因此每一对 $(C, \boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)})$恰好对应一对 $(S,\ \tau)$。根据引理 4.16，要使 $|\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}| \geq 1$，我们需要 $|\mathcal{C}^{\mathrm{bad}}| \geq 1$。结合三角不等式，只需对以下量给出上界

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{C:|C|\geq 1} \sum_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}} \left| \psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}} \left(C^{\mathrm{bad}} = C \wedge \boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)} \right) \right|.$$

那么这个引理可由引理 4.18得出。 □

4.2.4. 收敛。 在本三级小节中，我们利用引理 4.17 和引理 3.10证明引理。只需验证条件 3.9。我们首先利用下面的引理来刻画见证序列。

引理 4.19 (见证序列的刻画)。 固定 S 为约束子集，并令 $\tau \in \Sigma_{\mathsf{vbl}(S)}$ 为定义在涉及 S 的变量上的部分赋值。令 $\Phi = (V, \boldsymbol{Q}, C)$ 为一个约束满足问题公式，令 c^* 为附加约束，令 A 为满足以下条件的事件：$\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0) = S$ 且 $\forall v \in \mathsf{vbl}(S)$, $\sigma_0(v) = \tau_v$。

令 $G_\Phi^{c^*} = (V_\Phi^{c^*}, E_\Phi^{c^*})$ 为定义 4.12 中的见证图。令 $T \geq |V|$，并考虑 T 步、按 $\boldsymbol{b}$ 分解的复杂系统扫描 *Glauber* 动力学（条件 4.4）。令 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_t)_{t=-T+1}^{0} \in \bigotimes_{t=-T+1}^{0} \Sigma_{v_{i(t)}} \uplus \{\perp\}$。若见证图 $G_\Phi^{c^*}$ 中相应的坏树 $\mathcal{T}_{\mathrm{bad}}(\boldsymbol{\rho})$ 满足：$\left|\mathcal{T}_{\mathrm{bad}}(\boldsymbol{\rho})\right| \leq \frac{T}{2|V|} - 2$，则有 $\boldsymbol{\rho} \Rightarrow A$，即 $\boldsymbol{\rho}$ 是关于事件 A 的见证序列。

证明。 当事件 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}$ 的测度为零时，根据见证序列的定义（定义 3.8），该引理显然成立。因此，我们考虑事件 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}$ 的测度非零的情形。由引理 4.16，只需证明 $\mathsf{C}^{\mathrm{bad}} = \mathsf{C}^{\mathrm{bad}}(\boldsymbol{\rho})$ 和 $\boldsymbol{o}_{\mathsf{BadTS}(C^{\mathrm{bad}})}$ 与初始状态无关。对于坏分量，这显然成立，因为根据坏分量的定义，它取决于 r_t，而它们与初始状态无关。接下来，我们证明 $\boldsymbol{o}_{\mathsf{BadTS}(C^{\mathrm{bad}})}$ 也与初始状态无关。

根据 $\mathrm{pred}_u(t)$ 的定义、$G_\Phi^{c^*}$ 以及系统扫描，对于每个 $x \in V_\Phi^{c^*}$，我们有，

$$\max\{t : t \in x(0)\} - \min\{t : t \in x(0)\} \leq |V|. \tag{17}$$

注意，根据定义 4.14 中 $\mathsf{T}\,\mathrm{bad}\,(\boldsymbol{\rho})$ 的定义，$\mathsf{T}\,\mathrm{bad}\,(\boldsymbol{\rho})$ 在 $G_\Phi^{c^*}$ 的平方图中是连通的。因此，若有 $\lceil \mathsf{T}\,\mathrm{bad}(\boldsymbol{\rho})| \leq T/(2|V|) - 2$，则对所有 $t \in x(0)$ $x \in \mathsf{T}\,\mathrm{bad}\,(\boldsymbol{\rho})$，都有 $t \geq -T + 1 + 2|V|$。此外，根据定义 2.4，$t \geq -T + 1 + 2|V|$ 对所有 $t \in x(0)$ $x \in \mathsf{T}\,\mathrm{bad}\,(\boldsymbol{\rho})$ 成立，这意味着对所有 $t \in x(0)$ $x \in \mathsf{C}^{\mathrm{bad}}(\boldsymbol{\rho})$，都有 $t \geq -T + 1 + |V|$。为此，首先注意到，根据定义 2.5 中的构造，每个 $x \in \mathsf{C}^{\mathrm{bad}}(\boldsymbol{\rho})$ 必定与 $G_\Phi^{c^*}$ 中某个 $y \in \mathsf{T}\,\mathrm{bad}(\boldsymbol{\rho})$ 共享时间戳。然后应用公式（17）即可得到这一结论。

接下来，根据定义4.14和观察4.11，对于任意 $t \in x(0)$，$x \in \mathsf{C}^{\mathrm{bad}}(\boldsymbol{\rho})$，令$u = v_{i(t)}$，若 $c \in C, c \ni u$且 $(\mathsf{TS}(c,t)\ c) \notin \mathsf{C}^{\mathrm{bad}}(\boldsymbol{\rho})$，则满足 c；也就是说，对于任意 $\sigma \in c^{-1}$(假)，存在 $t' \in \mathsf{TS}(c,t)$，使得：$r_{t'} \neq f_{i(t')}(\sigma_{i(t')})$ 且 $r_{t'} \neq \perp$。

接下来，我们通过归纳法证明，坏分量中的 o_t's 与初始状态无关。我们按递增顺序枚举 $t \in \mathsf{BadTS}\ (\mathsf{C}^{\mathrm{bad}})$。对于最小时间戳 t，令 $u = v_i(t)$ 为时间 t 更新的变量。根据上述论证，对于任何满足 $u \in \mathsf{vbl}(c)$ 的约束 c，c 均成立。因此，o_t 与初始状态无关。接下来，假设对于某个时间戳 $t_0 \in \mathsf{BadTS}\ (\mathsf{C}^{\mathrm{bad}})$，任意时间戳 $t < t_0$ 和 $t \in \mathsf{BadTS}\ (\mathsf{C}^{\mathrm{bad}})$，$o_t$ 均与初始状态无关。我们证明 o_{t_0} 与初始状态无关。令 $u = v_{i(t_0)}$ 为时间 t_0 更新的变量。对于任何满足 $u \in c$ 的约束 c，若 $(\mathsf{TS}\ (\mathsf{vbl}(c)\ t_0)\ \ c) \notin \mathsf{C}^{\mathrm{bad}}$，根据上述论证，相应的 r_t's 均满足 c。回顾算法 2 和观察 4.10 中 o_{t_0} 的定义，在考虑 o_{t_0} 时可以移除此约束；否则，若 $(\mathsf{TS}\ (\mathsf{vbl}(c)\ t_0)\ \ c) \in \mathsf{C}^{\mathrm{bad}}$，则所有时间戳都属于 $\mathsf{BadTS}\ (\mathsf{C}^{\mathrm{bad}})$，且不大于 t_0。根据归纳假设，我们知道它们的 o_t's 与初始状态无关。综合以上，我们得到 o_{t_0} 与初始状态无关。□

令 S为一组约束，且 $\tau \in \Sigma_{\mathsf{vbl}(S)}$为定义在 变量$(S)$ 上的部分赋值。令 A为满足以下条件的事件：(1) $\mathcal{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0) = S$；(2) 对任意 $v \in$变量(S)，都有 $\sigma_0(v) = \tau_v$。根据上述引理，为了验证条件 3.9，只需证明对于任意初始状态 $\tau' \in \mathrm{supp}(\psi)$，

$$\lim_{T\to\infty} \left| \sum_{\mathcal{T}:|\mathcal{T}|>T/(2|V|)-2} \psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}} \left(\sigma_0 \in A \wedge \mathcal{T}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{T}\right) \right| = 0.$$

回顾定义 4.14中，我们使用 $\mathbb{T}$ 表示从坏分量到坏树的函数。结合三角不等式，只需证明

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{\mathcal{T}:|\mathcal{T}|>T/(2|V|)-2} \sum_{C:\mathbb{T}(C)=\mathcal{T}} \sum_{\boldsymbol{y}_{\mathsf{BadTS}(C)}} \left| \psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}} \left(\sigma_0 \in A \wedge C^{\mathrm{bad}} = C \wedge \boldsymbol{o}_{\mathsf{BadTS}(C)} = \boldsymbol{y}_{\mathsf{BadTS}(C)}\right) \right| = 0.$$

另请回顾引理 4.16，可知 A由 $(\mathsf{C}^{\mathrm{bad}},\ \boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(\ C^{\mathrm{bad}})})$ 确定。也就是说，如果

$$\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}}\left(C^{\mathrm{bad}}=C\wedge\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)}=\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\right)\neq 0,$$

那么我们有

$$\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}}\left(\sigma_0\in A\mid C^{\mathrm{bad}}=C\wedge\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)}=\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\right)\in\{0,1\}\,. \tag{18}$$

综合起来，我们有

$$\left|\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}}\left(\sigma_0\in A\wedge C^{\mathrm{bad}}=C\wedge\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)}=\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\right)\right|\leq\left|\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}}\left(C^{\mathrm{bad}}=C\wedge\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)}=\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\right)\right|.$$

综合起来，只需给出……的上界

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{\mathcal{T}:|\mathcal{T}|>T/(2|V|)-2}\ \sum_{C:\mathbb{T}(C)=\mathcal{T}}\ \sum_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}}\left|\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}}\left(C^{\mathrm{bad}}=C\wedge\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)}=\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\right)\right|=0. \tag{19}$$

我们使用下面的引理，它对固定大小的坏树的贡献给出界限，以说明这个极限并证明引理4.17。

引理 *4.20.* 假设条件 *4.4* 成立，并令 $\boldsymbol{b}$-分解方案由条件 *4.4* 构造。令 c^* 为附加变量，并令 $T\geq|V|$。考虑见证图 $G^{c^*}_{\Phi}$、坏分量 $C^{\mathrm{bad}}=C^{\mathrm{bad}}(\boldsymbol{r})$ 和坏树 $T\,bad=T\,bad\,(\boldsymbol{r})\ =\mathbb{T}(C^{\mathrm{bad}})$，其中 $\boldsymbol{r}=(r_t)_{t=-T+1}^{0}\in\bigotimes_{t=-T+1}^{0}\Sigma_{v_{i(t)}}\cup\{\perp\}$ 按照算法 *2* 构造。

那么，对于 $G^{c^*}_{\Phi}$ 中任意有限的 2-树 $\mathcal{T}$，若其包含 $(\mathrm{TS}(\mathrm{vbl}(c^*),0)\ c^*)$，且满足 $|\mathcal{T}|>T/(2|V|)-1$，我们有

$$\sum_{C:\mathbb{T}(C)=\mathcal{T}}\ \sum_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}}\left|\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}\left(C^{\mathrm{bad}}=C\wedge\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)}=\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\right)\right|\leq\widehat{N}^{|\mathcal{T}|}\widehat{M}^{4\Delta^2k^5|\mathcal{T}|+|V|}.$$

我们利用上述引理和下一个引理来证明方程 (19)，并证明引理 4.17。回顾$\Phi'=(V,\boldsymbol{Q},C\cup\{c^*\})$仍然是一个 (k,Δ)-约束满足问题公式。我们给出下一个引理，讨论固定大小 2-树的数量。

引理 4.21 ([LWYY25，引理 4.10])。令 $\mathcal{T}_j$ 表示2-树的集合，其大小为 j，位于$G^{c^*}_{\Phi}$ 且包含顶点 $(\mathrm{TS}(\mathrm{vbl}(c^*),0)\ c^*)$。则有 $|\mathcal{T}_j|\leq\left(4\mathrm{e}\Delta^2k^4\right)^{j-1}$。

现在，我们证明引理 4.17。

引理 *4.17* 的证明。 根据本三级小节开头的分析，只需证明方程 (19)。由引理 4.20可知，方程 (19) 的上界为 $\lim_{T\to\infty}\sum_{i=T/(2|V|)-2}^{\infty}\left(4\mathrm{e}\Delta^2k^4\right)^{i-1}\cdot\widehat{N}^{i}\widehat{M}^{4\Delta^2k^5i+|V|}$。结合条件 15中的方程 (4.4，可知方程 (19) 还可进一步被上界为

$$\widehat{M}^{|V|}\lim_{T\to\infty}\sum_{i=T/(2|V|)-2}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}.$$

因此，这个极限为 0。 □

最后，我们以证明引理 4.20 来结束本三级小节。

引理 *4.20* 的证明。 回想一下，在算法 2 中，对于整数 t，我们用 $o_t\in\Sigma_{v_{i(t)}}$ 表示时间 t 的更新值。令 $\boldsymbol{o}=(o_t)_{t=-T+1}^{0}$，对于见证图 $G^{c^*}_{\Phi}$ 中的任意分量 C，令 $\mathrm{BadTS}\ (\mathsf{C})\ =\!\!-_{x\in C}\ x(0)$，其中包含分量 C 中的所有时间戳。我们用 $\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)}$ 表示分量 C 中各时间戳的更新值。令 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\in\bigotimes_{t\in\mathrm{BadTS}(C)}\Sigma_{v_{i(t)}}$ 为一个序列，使得对于任意时间戳 $t\in\mathrm{BadTS}\ (\mathsf{C})$，都有 $y_t\in\Sigma_{v_{i(t)}}$。令 $\mathrm{Y}=\bigotimes_{t\in\mathrm{BadTS}(C)}\Sigma_{v_{i(t)}}$ 为所有可能的 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}$ 的集合。

对于较大的 2-树，即 $|\mathcal{T}|>T/(2\,|V|)-2$，$o_t$在可能的坏分量内的 可能取决于初始状态（引理 4.19）。因此，我们枚举 $\{-T+1,-T+2,\ldots,-T+|V|\}$ 中各时间戳对应的更新值，并利用三角不等式考察它们的贡献。我们声称这一

部分的贡献至多为 $\widehat{}M^{|V|}$。为说明这一点，回顾条件 $\widehat{}M$中的定义 4.4，$\widehat{}M$在邻居的任意赋值下，使 r和 o的所有可能更新值达到最大。因此，该结论可由从 $-T+1$ 到 $-T+|V|$的归纳过程得出。

固定 $t \in \{-T+1, -T+2, \ldots, -T+|V|\}$ 的 o_t。根据定义 2.5 中用于构造 2-树 $\mathrm{T}^{\mathrm{bad}} = \mathbb{T}(\mathrm{C}^{\mathrm{bad}})$ 的确定性过程，所有 $\mathrm{C} \in \mathbb{T}^{-1}(\mathrm{T}^{\mathrm{bad}})$ 都必须仅包含 $G_\Phi^{c^*}$ 中距离 $\mathrm{T}^{\mathrm{bad}}$ 为距离 1 的顶点；根据定义 4.14，要确定 $\mathrm{C}^{\mathrm{bad}}$，只需检查 $G_\Phi^{c^*}$ 中距离 $\mathrm{T}^{\mathrm{bad}}$ 为距离 2 的所有顶点。

对于 T 中的顶点，令 $\mathrm{BadTS}(\mathrm{T}) \triangleq \bigcup_{x \in \mathcal{T}} x(0)$ 为 T 中所有时间戳的集合。要使事件 $\mathrm{C}^{\mathrm{bad}} = \mathrm{C}$ 发生，T 中关联的约束必须不满足 $\boldsymbol{r}$。我们枚举$\boldsymbol{r}_{\mathrm{BadTS}(\mathcal{T})}$。

令 $D(\mathrm{T})$ 为 $G_\Phi^{c^*}$中位于 T 的距离为 2 的邻居范围内的顶点。令 $\mathrm{BadTS}(D(\mathrm{T})) \triangleq \bigcup_{x \in D(\mathcal{T})} x(0)$ 为 $D(\mathrm{T})$ 中所有时间戳的集合。然后我们枚举 $\mathrm{BadTS}(D(\mathrm{T})) \setminus \mathrm{BadTS}(\mathrm{T})$ 中的 r_t。根据 $\mathrm{BadTS}(D(\mathrm{T}))$ 中的 r_t，我们使用定义 4.14构造坏分量 $\mathrm{C}^{\mathrm{bad}}$。如果构造失败，或 $\mathbb{T}(\mathrm{C}^{\mathrm{bad}}) \neq \mathrm{T}$，我们就忽略这种情况。我们只考虑坏分量构造成功且 $\mathbb{T}(\mathrm{C}^{\mathrm{bad}}) = \mathrm{T}$ 的情况。然后，我们按时间戳从小到大的顺序枚举 $\mathrm{BadTS}(\mathrm{C}^{\mathrm{bad}})$ 中的 o_t。令 t 为当前时间戳，并令 $v = v_{i(t)}$。我们考虑以下三种情况：

(1) 如果 o_t是通过对 $t \in \{-T+1, -T+2, \ldots, -T+|V|\}$进行枚举而赋值的，我们就考虑下一个 t；(2) 如果 $r_t \neq \perp$，那么根据观察 4.11，$o_t = r_t$；(3) 如果 $r_t = \perp$。我们考虑每个满足 $v \in \mathrm{vbl}(c)$ 的约束 $c \in C$。注意 $t > -T + |V|$。因此，如果 $(\mathrm{TS}(c,t)\ c) \notin \mathrm{C}^{\mathrm{bad}}$，则 c 满足条件。我们将 X 记为满足 $v \in c$ 且 $(\mathrm{TS}(c,t)\ c) \in \mathrm{C}^{\mathrm{bad}}$ 的约束集合 c's。令 $\mathrm{BadTS}(X) \triangleq \bigcup_{c \in X} \mathrm{TS}(c,t)$，并且我们知道 $o_{\mathrm{BadTS}(X)}$ 已由先前的枚举固定。因此，我们可以基于 $o_{\mathrm{BadTS}(X)}$ 枚举 o_t。

最后，根据三角不等式及上述分析，我们将$\mathrm{BadTS}(\mathcal{T})$的最终贡献上界估计为 $\widehat{}N^{|\mathcal{T}|}$(方程 (13) 中的条件 4.4)。类似地，结合引理 4.13，我们将以下集合的最终贡献上界估计为 $\mathrm{BadTS}(D(\mathcal{T})) \setminus \mathrm{BadTS}(\mathcal{T})$的 $\widehat{}M^{4\Delta^2 k^5 |\mathcal{T}|}$ (方程 (14) 中的条件 4.4)。

因此我们有

$$\sum_{C:\mathbb{T}(C)=\mathcal{T}} \sum_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)} \in \mathcal{Y}} \left| \psi^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}} \left(\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)} \wedge C^{\mathrm{bad}} = C \right) \right| \leq \widehat{N}^{|\mathcal{T}|} \widehat{M}^{4\Delta^2 k^5 |\mathcal{T}| + |V|}.$$

□

4.2.5. 边缘测度范数的上界。 在本三级小节中，我们采用与上一个三级小节类似的策略来证明引理 4.18。

设 S 为一组约束，$\tau \in \Sigma_{\mathrm{vbl}(S)}$ 是定义在 $\mathrm{vbl}(S)$ 上的部分赋值，并设 A 为满足以下条件的事件：(1) $\mathrm{S}^{\mathrm{bad}}(\sigma_0) = S$，且 (2) 对任意 $v \in \mathrm{vbl}(S)$，都有 $\sigma_0(v) = \tau_v$。令 $\tau' \in \mathrm{supp}(\psi)$。由引理 4.17 和引理 3.11，只需对以下内容给出上界

$$\lim_{T\to\infty} \left| \sum_{\mathcal{T}:|\mathcal{T}| \leq T/(2|V|)-2} \psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}} \left(\sigma_0 \in A \wedge \mathcal{T}^{\mathrm{bad}} = \mathcal{T} \right) \right|.$$

通过前一个三级小节中的类似论证，只需给出上界

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{\mathcal{T}:|\mathcal{T}| \leq T/(2|V|)-2} \sum_{C:\mathbb{T}(C)=\mathcal{T}} \sum_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}} \left| \psi^{\mathrm{GD}}_{T,\tau',\boldsymbol{b}} \left(C^{\mathrm{bad}} = C \wedge \boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)} \right) \right|. \tag{20}$$

我们利用下面的引理，以类似于引理4.20证明中的论证，分析固定大小的小坏树所产生的贡献。

引理 4.22. 假设条件 4.4成立，并令 $\boldsymbol{b}$-分解方案由条件 4.4构造。令 c^* 为附加变量，并令 $T \geq |V|$。考虑见证图 $G_\Phi^{c^*}$、坏分量 $C^{\mathrm{bad}} =$

$C^{\text{bad}}(\boldsymbol{r})$、坏树 $\mathcal{T}_{\text{坏}}=\mathcal{T}_{\text{坏}}(\boldsymbol{r}) = \mathbb{T}(C^{\text{bad}})$，其中 $\boldsymbol{r} =(r_t)_{t=-T+1}^{0} \in \bigotimes_{t=-T+1}^{0} \Sigma_{v_{i(t)}} \cup\{\perp\}$按算法 2构造。

那么，对于任意有限的2-树$\mathcal{T}$，若其在 $G_\Phi^{c^*}$ 中包含$(\mathrm{TS}(\mathrm{vbl}(c^*), 0)\ c^*)$，且满足 $|\mathcal{T}| \le T/(2|V|) - 1$，则有

$$\sum_{C:\mathbb{T}(C)=\mathcal{T}} \sum_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}} \left|\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}\left(C^{\text{bad}} = C \wedge \boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\right)\right| \le \widehat{N}^{|\mathcal{T}|}\widehat{M}^{4\Delta^2k^5|\mathcal{T}|}.$$

我们首先利用上述引理和引理4.13 对上述极限进行界定，并证明引理4.18。

引理*4.18*的证明。根据引理4.17，只需考虑小坏树的贡献。根据引理4.22 和引理2.6，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathcal{T}:|\mathcal{T}|\le T/(2|V|)-2} \sum_{C:\mathbb{T}(C)=\mathcal{T}} \sum_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}} \left|\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}\left(C^{\text{bad}} = C \wedge \boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\right)\right| \\
\le &\sum_{i=1}^{T/(2|V|)-2} \left(4\mathrm{e}\Delta^2k^4\right)^i \cdot \widehat{N}^i\widehat{M}^{4\Delta^2k^5i+|V|}.
\end{aligned}$$

重新整理右端可得 $\sum_{i=1}^{T/(2|V|)-2}\left(4\mathrm{e}\Delta^2k^4\cdot \mathrm{b}N\cdot \mathrm{b}_M{}^{4\Delta^2k^5}\right)^{i-1}$。结合条件4.4中的方程（15），可知其上界为 $\sum^{i=T}/(_0\ \ 2|V|\ -2\ (\frac{1}{4})^i)$。代入 $T\to\infty$，可得其上界为$1\ 2$。因此引理得证。□

–

最后，我们给出引理 4.22 的略去证明。

引理 *4.22* 的证明。回忆一下，在算法 2 中，对于一个整数 t，我们用 $o_t \in \Sigma_{v_{i(t)}}$ 表示时间 t时的更新值。令 $\boldsymbol{o} =(o_t)_{t=-T+1}^{0}$，对于见证图 $G_\Phi^{c^*}$ 中的任意分量 C，令 BadTS (C) $=\!\!-_{x\in C}\, x(0)$，其中包含分量 C 中涉及的所有时间戳。我们用 $\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)}$表示分量 C 中各时间戳对应的更新值。令 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)} \in \bigotimes_{t\in\mathrm{BadTS}(C)} \Sigma_{v_{i(t)}}$为一个序列，使得对于任意时间戳 $t \in$BadTS (C)，$y_t \in \Sigma_{v_{i(t)}}$。令 $\mathrm{Y} = \bigotimes_{t\in\mathrm{BadTS}(C)} \Sigma_{v_{i(t)}}$为所有可能的$\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}$'的集合。

对于较小的 2-树，即 $|\mathcal{T}| \le T/(2|V|)-2$，其中可能的坏分量内的 o_t 不依赖于初始状态（引理 4.19）。

根据定义 2.5 中用于构造 2-树 $\mathcal{T}^{\text{bad}} = \mathbb{T}(C^{\text{bad}})$ 的确定性过程，所有 $C \in \mathbb{T}^{-1}(\mathcal{T}_{\text{bad}})$ 都只能包含位于 $G_\Phi^{c^*}$ 且与 1 距离以内的 T bad；要确定^{bad}，只需检查 $G_\Phi^{c^*}$ 中所有与 2 距离以内的 T，依据定义 4.14。

对于 T 中的顶点，令 BadTS (T) $\triangleq\!\!-_{x\in\mathcal{T}}\, x(0)$ 为 T 中所有时间戳组成的集合。要使事件 C ^{bad} = C 发生，T 中相关的约束必须不被 $\boldsymbol{r}$ 满足。我们枚举$\boldsymbol{r}_{\mathrm{BadTS}(\mathcal{T})}$。

令 D(T) 表示 $G_\Phi^{c^*}$ 中距离 T 为 2 的邻居中的顶点。令 BadTS (D(T)) $\triangleq\!\!-_{x\in D(\mathcal{T})}\, x(0)$ 表示 D (T) 中所有时间戳的集合。然后，我们枚举 BadTS (D(T)) \ BadTS (T) 中的 r_t。根据 BadTS (D (T)) 中的 r_t，我们使用定义 4.14 构造坏分量 C^{bad}。如果构造失败，或者 $\mathbb{T}$(C^{bad}) $\neq$ T，我们就忽略这种情况。我们只考虑坏分量构造成功且 $\mathbb{T}$(C^{bad}) = T 的情况。然后，我们按照时间戳从小到大的顺序，枚举 BadTS (C^{bad}) 中的 o_t。令 t 为当前时间戳，并令 $v = v_{i(t)}$。我们考虑以下两种情况：

(1) 若 $r_t \neq \perp$，则根据观察4.11</style}有；(2) 若 。我们考虑每个满足 vbl() 的约束 。注意到 。因此，如果 (TS(, t) c) $\notin$ C^{bad}，那么 c 就成立。我们将 X记为满足 $v \in c$ 和 (TS(c, t) c) $\in$ C^{bad} 的约束 c' 的集合。令 BadTS (X) $\triangleq\!\!-_{c\in X}$TS(c, t)，并且我们知道 $o_{\mathrm{BadTS}(X)}$已由先前的枚举固定。因此，我们可以根据 $o_{\mathrm{BadTS}(X)}$枚举 o_t。

最后，根据三角不等式和上述分析，我们将以下各项对最终结果的贡献上界估计为BadTS$(\mathcal{T})$的 $\widehat{}_{N^{|\mathcal{T}|}}$（方程 (13)，条件 4.4）。类似地，结合引理 4.13，我们将以下各项对最终结果的贡献上界估计为 BadTS$(D(\mathcal{T}))\setminus$BadTS$(\mathcal{T})$的 $\widehat{}_{M^{4\Delta^2k^5|\mathcal{T}|}}$（方程 (14)，条件 4.4）。因此，我们有

$$\sum_{C:\mathbb{T}(C)=\mathcal{T}}\sum_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\in\mathcal{Y}}\left|\psi^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}\left(\boldsymbol{o}_{\mathrm{BadTS}(C)}=\boldsymbol{y}_{\mathrm{BadTS}(C)}\wedge C^{\mathrm{bad}}=C\right)\right|\le \widehat{N}^{|\mathcal{T}|}\widehat{M}^{4\Delta^2k^5|\mathcal{T}|}.$$

□

5. 应用

本节中，我们应用第4 节中的框架，并研究超图q-着色和(k,Δ)-合取范式公式的零点自由性，分别证明定理1.1 和定理5.15 。

5.1. 超图 q-使用一种特殊颜色的着色。本小节中，我们考虑带有颜色 1 上复外场的超图 q-着色的复数扩展。我们证明，在一定条件下，复配分函数是零点自由的。我们正式定义配分函数如下。

定义 5.1 （带有一种特殊颜色的超图 q-着色的复数扩展）。设 $H=(V,\mathrm{E})$ 是一个最大度为 Δ 的 k-均匀超图。配分函数定义为:

$$Z^{\mathrm{co}}_H(\lambda)\triangleq\sum_{\sigma\in[q]^V:\sigma\text{ is a proper coloring in }H}\lambda^{\left|\sigma^{-1}(1)\right|},\qquad\text{where }\sigma^{-1}(1)\triangleq\{v\in V\mid\sigma(v)=1\}.$$

当 $Z_{\mathrm{co}H}(\lambda)\neq 0$ 时，我们自然定义一个复测度 $\mu=\mu(H,\ \lambda)$，即，$\forall\sigma\in[q]^V,\ \mu(\sigma)\triangleq\frac{\lambda^{|\sigma^{-1}(1)|}}{Z^{\mathrm{co}}_H\ \lambda}$()。我们将其支撑集记为 $\mathrm{supp}(\mu)\triangleq\{\sigma\in\Omega_\Phi\mid\mu(\sigma)\neq 0\}$。

为了应用第 4 节中的技术，我们考虑 (k,Δ)-约束满足问题公式 $\Phi=(V,[q]^V,C)$，它编码了超图 q 在 H 上的着色。每个约束 $c\in C$对应一条超边，并要求 $\mathsf{vbl}(c)$ 中的变量（即超边中的顶点）不能被赋予相同的颜色。随后，我们利用定理 4.6 证明零点自由性，并利用引理 5.5 验证条件 4.4。

我们首先建立状态压缩方案（定义 4.1），将 q 种颜色投影到不同的“颜色桶”中，其中第一个颜色桶仅包含颜色 1。我们只将复外场添加到第一个颜色桶中。我们用上标 ▲ 表示投影符号。

定义 5.2 （带一种特殊颜色的超图 q-着色的状态压缩方案）。对于每个$v\in V$，令 $\Sigma_v=\{1^▲,2^▲,\ldots,B^▲,(B+1)^▲\}$，并令 $f=(f_v)_{v\in V}$。对于每个变量 $v\in V$，f_v 是从其定义域 $[q]$ 到有限字母表 Σ_v 的映射。令 $\Sigma\triangleq\bigotimes_{v\in V}\Sigma_v$。对于任意 $\Lambda\subseteq V$，记作$\Sigma_\Lambda\triangleq\bigotimes_{v\in\Lambda}\Sigma_v$。

对于每个 $v\in V$，我们设定 $f_v(1)=1^▲$；对于任意 $i\in\{2、3、\ldots\ldots、q\}$，我们设定 $f_v(i)=(((i-2)\bmod B)+2)^▲$。

事实 5.3 (颜色桶的大小)。令 $s\triangleq\lfloor(q-1)/B\rfloor$。根据定义 5.2中的状态压缩方案，对于每个颜色桶 $j^▲$，其中 $j\in\{2、3、\ldots\ldots、B+1\}$ 以及每个变量 $v\in V$，都有$s\le|f_v^{-1}(j^▲)|\le s+1$。

注意，由上述投影与复外场 λ 在第一个颜色桶 $1^▲$ 所诱导的配分函数等价于定义 5.1。我们给出零点自由性的一项充分条件。

条件 5.4。满足

(1) $s^k\ge 608eq^2\Delta^3k^5$;

(2) $16e^2\Delta^2k^4\cdot q\left(\frac{4s}{q}\right)^k\le 1$;

(3) 设 λ 为定义 *5.1* 中定义的复参数，并且存在 $\lambda_c \in [0,1]$ 使得 $|\lambda-\lambda_c| \le \gamma$ 其中 $\gamma = \frac{1}{16\Delta^2 k^5}$。

引理 *5.5*。设 $H=(V,E)$ 是一个最大度为 Δ 的 k-均匀超图。设 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 是在状态压缩方案 f（定义 *5.2*）下，对超图 q-着色进行编码的约束满足问题公式，其中颜色桶 $1^\blacktriangle$ 上的复外场为 λ。记 $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$，并对每个 $i\le m$，定义 $C_i=\{c_1,c_2,\ldots,c_i\}$ 和 $\Phi_i=(V,[q]^V,C_i)$。

若条件 *5.4* 成立，Φ_1，Φ_2，$\ldots$，Φ_m 则满足条件 *4.4*。

下面关于零点自由性的定理可直接由上述引理推出。

定理 5.6（零点自由性）。设 $H=(V,\mathcal{E})$ 是一个 k-均匀超图，其最大度为 Δ。假设条件 *5.4* 成立。那么 $Z_H^{\mathrm{co}}(\lambda)\neq 0$。

证明。设 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 是一个约束满足问题公式，它用状态压缩方案 f（定义 5.2）和颜色桶 $1^\blacktriangle$ 上的复外场 λ，对超图 q 在 H 上的着色进行编码。我们使用定理 4.6 来证明该定理。首先验证方程 (16)。由条件 5.4-(3)，对任意 $v\in V$，$\sum_{i\in[q]}\mathrm{R}(\mathbb{I}[f_v(i)\neq 1^\blacktriangle]+\lambda\cdot\mathbb{I}[f_v(i)=1^\blacktriangle])>0$，该结论成立。因此方程 (16) 成立。接下来，由引理 5.5，条件 4.4 成立。于是该定理由定理 4.6 得证。□

我们首先利用上述定理证明定理1.1。

定理 *1.1* 的证明。设 $\gamma=\frac{1}{16\Delta^2k^5}$ 我们令 $B=\lfloor q^{2/5}\rfloor$，$s=\lfloor (q-1)/B\rfloor$。接下来，给定 $k\ge 50$ 和 $q\ge 700\Delta^{\frac{5}{k-10}}$，对任意 $\lambda_c\in[0,1]$ 和 λ：$|\lambda-\lambda_c|\le\gamma$，我们验证条件 5.4。

对于条件 5.4-(1), 我们注意到 $s=\lfloor\frac{q-1}{\lfloor q^{2/5}\rfloor}\rfloor\ge\frac{q-1}{q^{2/5}}-1\ge q^{3/5}-2\ge\frac{q^{3/5}}{2}$ 其中最后一个不等式是由 $q\ge 700$得出的。为了满足 $s^k\ge 608\mathrm{e}q^2\Delta^3k^5$，只需满足 $(q^{3/5}/2)^k\ge 608\mathrm{e}q^2\Delta^3k^5$，这等价于 $q\ge(608\mathrm{e}2^kk^5)^{\frac{5}{3k-10}}\Delta^{\frac{15}{3k-10}}$。结合 $k\ge 50$，只需满足 $q\ge 10\Delta^{\frac{5}{k-4}}$。

接下来，我们考虑条件 5.4-(2)，并验证 $16\mathrm{e}^2\Delta^2k^4\cdot q(4s/q)^k\le 1$。由 $s=\lfloor\frac{q-1}{\lfloor q^{2/5}\rfloor}\rfloor\le 2\lfloor\frac{q-1}{q^{2/5}}\rfloor\le 2q^{3/5}$可知。因此，只需满足 $16\mathrm{e}^2\Delta^2k^4 8^k\le q^{2k/5-1}$。整理后，这等价于$q\ge(16\mathrm{e}^2 8^k k^4)^{\frac{5}{2k-5}}\Delta^{\frac{10}{2k-5}}$。结合 $k\ge 50$，只需满足 $q\ge 700\Delta^{\frac{10}{2k-5}}$。

结合 $q\ge 700\Delta^{\frac{5}{k-10}}$，条件 5.4 成立。根据定理 5.6，定理 1.1 成立。□

剩余的小节将用于证明引理 5.5。设 Φ 为对超图 q-着色进行编码的约束满足问题公式，该着色定义在超图 H上。假设条件 5.4 成立。注意，在逐约束自归约下，新产生的约束满足问题公式也满足条件 (k,Δ)-约束满足问题公式以及条件 5.4，并且它们也对不同超图的超图 q-着色进行编码。因此，我们证明一个更强的结果：对于任意一个对超图 q-着色进行编码的约束满足问题公式，若该公式满足条件 5.4，则条件 4.4 也成立。因此，我们有 Φ_1，Φ_2，……，Φ_m 满足条件 4.4。

我们首先验证条件 4.4-（1）。

引理 *5.7*（良定义性）。设 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 是一个对超图q-着色进行编码的 (k,Δ)-约束满足问题公式，f 是状态压缩方案（定义 *5.2*），而 λ 是颜色桶 $1^\blacktriangle$ 上的复外场。设 $c^*\in C$ 的编号最大，并令 $\Phi'=(V,[q]^V,C\setminus\{c^*\})$。

假设由 ψ 导出的 Φ' 和 f 所诱导的投影测度具有非零配分函数，即 $Z(\Phi',\lambda,f,1^\blacktriangle)\neq 0$，且条件 *5.4* 成立，则条件 *4.4-(1* 成立。

为了分析投影测度 ψ 的转移测度，我们首先引入下面这个简化的 CSP 公式。给定变量 v 和定义在投影下 $V\setminus\{v\}$ 上的可扩展部分赋值 $\tau\in\Sigma_{V\setminus\{v\}}$。我们使用部分赋值 τ 来简化约束满足问题公式 Φ'，即移除所有已满足的约束，以及所有不属于任何约束的冗余变量。令 $\Phi^\tau=(V^\tau,Q^\tau,C^\tau)$ 表示简化后的 CSP 公式。对于 $V\setminus\{v\}$ 中的任意变量 u，令 $Q_u^\tau=f_u^{-1}(\tau_u)$。并令 $Q_v^\tau=[q]$。对于

任意满足 $\mathrm{vbl}(c)$ 和 $\mathrm{vbl}(c)\setminus\{v\}$ 的约束 c，若 $\tau_u = 1^\blacktriangle$，则移除约束 c，并从字母表 Q_v^τ 中移除 $f_v^{-1}(1^\blacktriangle)$。

如果 $Q_v^\tau = [q]\setminus f_v^{-1}(1^\blacktriangle)$，我们就称 v 是受阻的。否则 $Q_v^\tau = [q]$，我们称 v 是自由的。下面给出一个引理。

引理 5.8. 对于任意变量 v，以及定义在 $V\setminus\{v\}$ 上、满足投影条件的任意可扩展部分赋值 $\tau \in \Sigma_{V\setminus\{v\}}$，令 $\Phi^\tau = (V^\tau, Q^\tau, C^\tau)$ 为简化的 *CSP* 公式。那么对于任意变量 $u \in V^\tau\setminus\{v\}$，都有 $|Q_u| \geq s$。

证明。结合事实 5.3，只需证明对于任意约束 $c \in C^\tau$，都有 c 不包含颜色桶 $1^\blacktriangle$。

对于满足 $v \notin \mathrm{vbl}(c)$ 的约束 c，该约束中的任意变量都属于同一个颜色桶。这是因为，如果其中包含不同的颜色桶，那么 c 就已经满足，因此 c 会被移除。接下来，我们证明 c 不包含颜色桶 $1^\blacktriangle$。如果它包含该颜色桶，回想一下，颜色桶 $1^\blacktriangle$ 中只有一种颜色，因此 c 必然会被违反。这与 τ 是可扩展的事实相矛盾。

对于约束 c（其中 $v \in \mathrm{vbl}(c)$），基于类似的理由，c 中除变量 v 之外的所有变量都属于同一个颜色桶。接着回顾 Φ^τ 的构造，如果某个这样的约束 c 包含颜色桶 $1^\blacktriangle$，那么 c 也会被移除。

该引理由上述两种情况推出。 □

接下来，我们介绍以下引理，它表明，在考虑投影测度 ψ 的转移测度时，只需在待更新的变量上考虑复外场。

引理 5.9. 对于任意变量 $v \in V$，以及投影下定义在 $V\setminus\{v\}$ 上的任意可扩展部分赋值 $\tau \in \Sigma_{V\setminus\{v\}}$，令 $\Phi^\tau = (V^\tau, Q^\tau, C^\tau)$ 为简化的 *CSP* 公式。令 $(X_i)_{i\in[B+1]}$ 表示 Φ^τ 中取值与 $i^\blacktriangle$ 一致的 v 的满足赋值数量。

则有

$$\forall i \in [B+1],\quad \psi_v^\tau(i^\blacktriangle) = \frac{\mathbb{I}[i^\blacktriangle = 1^\blacktriangle]\cdot\lambda X_i + \mathbb{I}[i^\blacktriangle \neq 1^\blacktriangle]\cdot X_i}{\sum_{j\in[B+1]}\left(\mathbb{I}[j^\blacktriangle = 1^\blacktriangle]\cdot\lambda X_j + \mathbb{I}[j^\blacktriangle \neq 1^\blacktriangle]\cdot X_j\right)}.$$

˜证明。对于任意 $i \in [B+1]$，令 $(X_i)_{i\in[B+1]}$ 表示原始 CSP 公式 Φ' 在字母表 $[q]^V$ 下，与 τ 一致的满足赋值的数量，且 v 的取值与 $i^\blacktriangle$ 一致。我们˜声称，存在一个常数整数 $\zeta \geq 1$，使得对于任意 $i \in [B+1]$，都有 $X_i = \zeta\cdot X_i$。

根据定义 5.1，我们只在颜色桶 $1^\blacktriangle$ 上添加复外场。而来自 $V\setminus\{v\}$ 的所有外场贡献都由部分赋值 τ 确定。因此，我们只需考虑变量 v 的外场。由此可得该引理。

最后，我们证明这一断言。对于任意 $i \in [B+1]$，我们证明，每个对 X_i˜有贡献的赋值，都对应于通过添加新变量而得到的、对 X_i 有贡献的 ζ 个不同赋值。而每个对 X_i 有贡献的赋˜值，都对应于通过移除变量而得到的一个对 X_i 有贡献的赋值。

令 ζ 表示变量 $V\setminus V^\tau$ 上的部分赋值数量，这些赋值与部分赋值 τ 一致。注意，这些变量实际上独立于约束满足问题公式 Φ'。这是因为在简化的 CSP 公式 Φ^τ 中，它们不属于任何约束。

对于任意对 X_i 有贡献的赋值 $\sigma \in [q]^{V^\tau}$，我们枚举变量 $V\setminus V^\tau$ 上的部分赋值，这些赋值与部分赋值 τ 一致。然后将它们附加到 σ 中。这样得到的赋值就是相对于 Φ' 的满足赋值。

对于任意将 $\sigma \in [q]^V$ 赋给 $\tilde{X}_i$ 的赋值，我们移除 $V\setminus V^\tau$ 上的值。我们证明，σ 是关于 Φ^τ 的满足赋值。注意到 $C^\tau \subseteq C$，因此 σ 满足 C^τ 中的所有约束。接下来考虑 Q_v。如果 v 受阻（$Q_v = [q]\setminus\{f_v^{-1}(1^\blacktriangle)\}$），根据 Φ^τ 的构造，对于 $i = 1$，有 $\tilde{X}_i = X_i = 0$；对于 $i \neq 1$，有 $\sigma_v \notin f_v^{-1}(1^\blacktriangle)$。如果 v 自由（$Q_v = [q]$），则显然有 $\sigma_v \in [q]^V$。

˜结合上述两种情况，我们得到存在一个整数 $\zeta \geq 1$，使得 $\forall i \in [B+1],\ X_i = \zeta \cdot X_i$。 □

我们还纳入了以下有用的引理，该引理由 [GLLZ18、FGW22]建立。

引理 *5.10*（[*GLLZ18*，引理 7]和 [*FGW22*，引理 6]）。设 $\Phi = (V, \mathcal{Q}, C)$ 编码了一个超图 q-着色。假设 $q_0 \leq |Q_v| \leq q_1$ 对任意 $v \in V$ 均成立。设 μ 为所有合法超图着色上的均匀分布。对于任意 $\varrho \geq k \geq 2$，若 $q_0^k \geq e \cdot q_1 \cdot \varrho \cdot \Delta$，则对于任意 $v \in V$ 以及任意颜色 $c \in Q_v$，

$$\frac{1}{|Q_v|}\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right) \leq \mu_v(c) \leq \frac{1}{|Q_v|}\left(1 + \frac{4}{\varrho}\right).$$

接下来，我们利用上述两个引理证明引理 5.7。

引理 *5.7* 的证明。 在假设 ψ 定义良好的前提下，我们证明对于任意 $v \in V$，任意可扩展的部分赋值 $\tau \in \Sigma_{V\setminus\{v\}}$ 在投影下，ψ_v^τ 定义良好。

设 $\Phi^\tau = (V^\tau, \mathcal{Q}^\tau, C^\tau)$ 为简化的 CSP 公式。令 $(X_i)_{i\in[B+1]}$ 表示 Φ^τ 中满足条件且 v 的取值与 $i^\blacktriangle$ 一致的赋值数量。注意，在该投影下，$\tau \in \Sigma_{V\setminus\{v\}}$ 是可扩展部分赋值。因此，存在 $j \in [B+1]$ 使得 $X_j > 0$。

根据引理 5.9，可得

$$\forall i \in [B+1],\quad \psi_v^\tau(i^\blacktriangle) = \frac{\mathbb{I}[i^\blacktriangle = 1^\blacktriangle] \cdot \lambda X_i + \mathbb{I}[i^\blacktriangle \neq 1^\blacktriangle] \cdot X_i}{\sum_{j\in[B+1]} \left(\mathbb{I}[j^\blacktriangle = 1^\blacktriangle] \cdot \lambda X_j + \mathbb{I}[j^\blacktriangle \neq 1^\blacktriangle] \cdot X_j\right)}.$$

因此，只需证明 $\sum_{j\in[B+1]} \left(\mathbb{I}[j^\blacktriangle = 1^\blacktriangle] \cdot \lambda X_j + \mathbb{I}[j^\blacktriangle \neq 1^\blacktriangle] \cdot X_j\right) = \lambda \cdot X_1 + \sum_{j\in[B+1]\setminus\{1\}} X_j \neq 0$。对于复数 x，我们用 $\mathrm{R}(x)$ 表示其实部。只需证明 $\mathrm{R}(\lambda \cdot X_1 + \sum_{j\in[B+1]\setminus\{1\}} X_j) \geq -\gamma \cdot X_1 + \sum_{j\in[B+1]\setminus\{1\}} X_j > 0$。我们用反证法证明这一点。假设 $-\gamma \cdot X_1 + \sum_{j\in[B+1]\setminus\{1\}} X_j \leq 0$。若 $X_1 = 0$，回想存在一个 $j \in [B+1]$ 满足 $X_j > 0$，于是 $-\gamma \cdot X_1 + \sum_{j\in[B+1]\setminus\{1\}} X_j > 0$，这就导出矛盾。因此，我们假设 $X_1 \geq 1$。由 $\sum_{j\in[B+1]\setminus\{1\}} X_j \leq \gamma \cdot X_1$，可得 $\frac{X_1}{\sum_{j\in[B+1]} X_j} \geq \frac{1}{1+\gamma}$。

接下来，我们使用引理 5.10 证明一个上界，使得 $\frac{X_1}{\sum_{j\in[B+1]} X_j} < \frac{1}{1+\gamma}$，由此得到矛盾。如果 v 受阻，则实际上有 $\frac{X_1}{\sum_{j\in[B+1]} X_j} = 0$。如果 ~~$v$ 自由，~~注意在简化的 CSP 公式 Φ^τ 中，对于任意 $u \in V^\tau$，都有 $|Q_u^\tau| \geq s$（引理 5.8）。令 $\varrho = 608q\Delta^2k^5$。注意，$s^k \geq eq\varrho\Delta$ 由条件 5.4-(1) 保证成立。根据引理 5.10，可得 $\frac{X_1}{\sum_{j\in[B+1]} X_j} \leq \frac{1}{q}\left(1 + \frac{4}{\varrho}\right) < \frac{1}{1+\gamma}$。

因此，我们有 ψ_v^τ 定义良好，且条件 4.4-(1) 成立。 □

现在，我们构造满足条件 b 分解方案 4.4。随后，我们将对其提供一些直观解释（备注 5.12）。

定义 5.11（b-分解方案）。设 $\Phi = (V, [q]^V, C)$ 是一个编码超图 q-颜色的（k, Δ）-约束满足问题公式，f 是状态压缩方案（定义 5.2），而 λ 是颜色桶 $1^\blacktriangle$ 上的复外场。设 $c^* \in C$ 为具有最大编号的索引，并令 $\Phi' = (V, [q]^V, C\setminus\{c^*\})$。

假设由 Φ' 和 f 诱导的投影测度 ψ 具有非零配分函数，即 $Z(\Phi', \lambda, f, 1^\blacktriangle) \neq 0$，且条件 5.4 成立。令 $\varrho = 608q\Delta^2k^5$。对于任意变量 $v \in V$，以及任意 $x \in \Sigma_v \cup \{\perp\}$，定义

$$b_v(x) \triangleq \begin{cases} 0 & x = 1^\blacktriangle \\ \frac{|f_v^{-1}(x)|}{q+(\lambda-1)}\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right) & x \neq 1^\blacktriangle \\ \frac{\lambda}{q-1+\lambda} + \frac{q-1}{\varrho(q-1+\lambda)} & x = \perp \end{cases}.$$

现在我们对如何设置 b_v 提供一些直观解释。

注 5.12。 考虑复杂系统扫描 Glauber 动力学的一步转移。设 $v \in V$ 为我们正在更新的变量，$\tau \in \Sigma_{V\setminus\{v\}}$ 为投影下当前的可扩展部分赋值。设 $\Phi^\tau = (V^\tau, Q^\tau, C^\tau)$ 为简化的 CSP 公式。设 $(X_i)_{i\in[B+1]}$ 为 Φ^τ 的满足赋值数，其中 v 的取值与 $i^\blacktriangle$ 一致。根据引理 5.9，我们有

$$\forall i \in [B+1], \quad \psi_v^\tau(i^\blacktriangle) = \frac{\mathbb{I}[i^\blacktriangle = 1^\blacktriangle]\cdot \lambda X_i + \mathbb{I}[i^\blacktriangle \neq 1^\blacktriangle]\cdot X_i}{\sum_{j\in[B+1]}\left(\mathbb{I}[j^\blacktriangle = 1^\blacktriangle]\cdot \lambda X_j + \mathbb{I}[j^\blacktriangle \neq 1^\blacktriangle]\cdot X_j\right)}.$$

为便于说明，我们假设 v 是自由的。根据引理5.10，我们预期 $\frac{X_1}{\sum_{j\in[B+1]} X_i} = \frac{1}{q}$，并且对于任意 $i \in \{2、3、\ldots\ldots、B+1\}$，我们预期 $\frac{X_i}{\sum_{j\in[B+1]} X_i} = \frac{|f_v^{-1}(i^\blacktriangle)|}{q}$。然后，将这些 X_i' 代入 ψ_v^τ 的表达式，即可得到 b_v 的设定。

接下来，我们证明条件 5.4 蕴含条件 4.4。

引理 5.13。 设 $\Phi = (V, [q]^V, C)$ 是一个 (k,Δ)-约束满足问题公式，用于编码超图 q-着色； f 是状态压缩方案（定义 *5.2*），而 λ 是颜色桶 $1^\blacktriangle$ 上的复外场。令 $c^* \in C$ 具有最大编号，并令 $\Phi' = (V, [q]^V, C\setminus\{c^*\})$。

假设由 ψ 和 Φ' 诱导的投影测度 f 具有非零配分函数，即 $Z(\Phi', \lambda, f, 1^\blacktriangle) \neq 0$ 且条件*5.4* 成立，设 $\boldsymbol{b}$ 为定义*5.11*中定义的分解方案，则条件*4.4-(2)*成立。

在证明上述引理之前，我们先用它证明引理5.5。

引理*5.5*的证明。 注意，在逐约束自归约下， Φ_1， Φ_2，……， Φ_m 也都是 (k,Δ)-约束满足问题公式，并编码超图 q-着色。因此，结论可直接由引理5.7 和引理5.13推出。 □

最后，我们证明引理5.13。

$\widehat{M}$ 在方程（14）中4.4的定义。我们声称 $\widehat{N} \le eq\left(\frac{4s}{q}\right)^k$，且 $\widehat{M} \le 1 + \frac{1}{4\Delta^2 k^5}$。由条件5.4-(2)，条件15中的方程（4.4 成立。

$\widehat{N}$ 引理*5.13*的证明。 回顾条件 N 的方程（13）中4.4对

b b 接下来，我们给出 N 和 M 的上界。我们分两种稍后定义的情况来给出这些量的上界。对于投影字母表下任意可扩展部分赋值 $\tau \in \mathrm{F}^{V\setminus\{v\}}$，令 $\Phi^\tau = (V^\tau, Q^\tau, C^\tau)$ 为简化的 CSP 公式。

现在考虑以下两种情况：(1) v 受阻；(2) v 自由。

- v **受阻：** 我们处理第一种情况，其中 v 的值无法更新为 $1^\blacktriangle$。

  对于任意 $i \in \{2, 3, \ldots, B+1\}$，我们沿用 X_i 的记号，将 X_i 定义为在 Φ^τ 的所有满足赋值上的均匀分布下， v 的值属于颜色桶 $i^\blacktriangle$ 的概率。令 $\boldsymbol{X} = (X_i)_{i\in\{2,3,\ldots,B+1\}}$。根据引理 5.8 和引理 5.10，取 $\varrho = 608q\Delta^2k^5$，可得对于任意 $i \in \{2, 3, \ldots, B+1\}$，

$$\frac{|f_v^{-1}(i^\blacktriangle)|}{q-1}\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right) \le X_i \le \frac{|f_v^{-1}(i^\blacktriangle)|}{q-1}\left(1 + \frac{4}{\varrho}\right). \tag{21}$$

  对于任意 $v \in V$，定义 J 如下：

$$J \triangleq \max_{\boldsymbol{X},\lambda} \sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}} \left| X_i - \frac{|f_v^{-1}(i^\blacktriangle)|/q}{1 + (\lambda-1)/q}\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)\right|.$$

  根据定义5.11 以及三角不等式，有

$$|b_v(\perp)| \cdot \max_{\tau\in\mathcal{F}_{V\setminus\{v\}}} \sum_{x\in\Sigma_v} |\psi_v^{\tau,\perp}(x)| \le J. \tag{22}$$

现在，根据上述不等式和三角不等式，我们对 J 进行界定，得到

$$J \le \max_{\lambda} \frac{1}{|1+(\lambda-1)/q|} \max_{X,\lambda} \sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}} \left| X_i - \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q} + \frac{(\lambda-1)X_i}{q} + \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{\varrho q} \right|$$

$$\le \max_{\lambda} \frac{1}{|1+(\lambda-1)/q|} \left(\max_{X,\lambda} \sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}} \left| \frac{(q+\lambda-1)X_i}{q} - \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q} \right| + \frac{1}{\varrho} \right),$$

其中，第二个不等式由$\sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}} |f_v^{-1}(i^{\blacktriangle}| \le 1$)得出。结合$|\lambda-\lambda_c| \le \gamma$和 $\lambda_c \in [0,1]$这一事实，我们得到

$$J \le \frac{1}{1+(\lambda_c-\gamma-1)/q} \left(\max_{X,\lambda} \sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}} \left| \frac{(q+\lambda-1)X_i}{q} - \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q} \right| + \frac{1}{\varrho} \right). \tag{23}$$

接下来，我们对右侧作上界估计。首先考虑求和

$$\max_{X,\lambda} \sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}} \left| \frac{(q+\lambda-1)X_i}{q} - \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q} \right|.$$

由 $|\lambda-\lambda_c| \le \gamma$和方程 (21)，可得

$$\left| \frac{(q+\lambda-1)X_i}{q} - \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q} \right| \le \max \left\{ \left| \frac{q+\lambda_c+\gamma-1}{q} \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q-1} \left(1+\frac{4}{\varrho}\right) - \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q} \right|, \right.$$
$$\left. \left| \frac{q+\lambda_c-\gamma-1}{q} \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q-1} \left(1-\frac{1}{\varrho}\right) - \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q} \right| \right\}$$

我们分别对这两项作上界估计。对于第一项，由三角不等式可得

$$\left| \frac{q+\lambda_c+\gamma-1}{q} \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q-1} \left(1+\frac{4}{\varrho}\right) - \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q} \right| \le \left(\left| \frac{\lambda_c+\gamma}{q-1} \right| + \frac{8}{\varrho} \right) \cdot \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q}.$$

类似地，我们对第二项作上界估计，

$$\left| \frac{q+\lambda_c-\gamma-1}{q} \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q-1} \left(1-\frac{1}{\varrho}\right) - \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q} \right| \le \left(\left| \frac{\lambda_c-\gamma}{q} \right| + \frac{8}{\varrho} \right) \cdot \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q}.$$

结合方程 (22)、方程 (23) 和 $\lambda_c \in [0,1]$，可得

$$|b_v(\perp)| \cdot \max_{\tau\in\mathcal{F}_{V\setminus\{v\}}} \sum_{x\in\Sigma_v} |\psi_v^{\tau,\perp}(x)| \le \frac{(\lambda_c+\gamma)/q + 9/\varrho}{1+(\lambda_c-\gamma-1)/q} = \frac{\lambda_c+\gamma+9q/\varrho}{q+\lambda_c-\gamma-1}. \tag{24}$$

接下来，对于 $i \in [B+1]$，我们给出 $|b_v(i^{\blacktriangle})|$的上界。根据定义 5.11，有

$$\left|b_v(i^{\blacktriangle})\right| \le \left| \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q+\lambda-1} \left(1-\frac{1}{\varrho}\right) \right| \le \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q+\lambda_c-\gamma-1} \left(1-\frac{1}{\varrho}\right) \le \frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q+\lambda_c-\gamma-1}. \tag{25}$$

And

$$\sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}} \left|b_v(i^{\blacktriangle})\right| \le \frac{q-1}{q+\lambda_c-\gamma-1} \left(1-\frac{1}{\varrho}\right) \le \frac{q-1}{q+\lambda_c-\gamma-1}. \tag{26}$$

接下来，我们给出 N 的上界。回顾 N 在方程（13）中的定义，该定义见条件 4.4。结合方程（25）、事实 5.3 和方程（24），有

$$\begin{aligned}\widehat{N} &\le q\cdot\left(\frac{s+1}{q+\lambda_c-\gamma-1}+\frac{\lambda_c+\gamma+9q/\varrho}{q+\lambda_c-\gamma-1}\right)^k\\ &\le q\cdot\left(\frac{s+1+\lambda_c+\gamma+9q/\varrho}{q+\lambda_c-\gamma-1}\right)^k\le q\cdot\left(\frac{s+4}{q-2}\right)^k.\end{aligned}$$

当 $s\ge 4$ 和 $q\ge 2$ 时，有 $N\le q(4s/q)^k$。

接下来，我们对其进行界定。结合方程 (24) 和方程 (26)，可得

$$\begin{aligned}\widehat{M} &\le \frac{q-1}{q+\lambda_c-\gamma-1}+\frac{\lambda_c+\gamma+9q/\varrho}{q+\lambda_c-\gamma-1}\\ &\le \frac{q-1+\lambda_c+\gamma+9q/\varrho}{q+\lambda_c-\gamma-1}\le 1+\frac{9q}{\varrho}.\end{aligned}$$

结合 $\varrho=608q\Delta^2k^5$，可得 $M\le 1+\frac{1}{4\Delta^2k^5}$。

- **v 是自由的：**接下来，我们处理第二种情况。同样地，我们滥用 X_i 的记号，定义 X_i 为 v 的取值属于颜色桶 $i^{\blacktriangle}$ 的概率，其中概率取自 Φ^τ 的所有满足赋值上的均匀分布。令 $\boldsymbol{X}=(X_i)_{i\in[B+1]}$。根据事实 5.3 和引理 5.10，其中令 $\varrho=608q\Delta^2k^5$，对于任意 $i\in[B+1]$，

$$\frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q}\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)\le X_i\le\frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q}\left(1+\frac{4}{\varrho}\right).\tag{27}$$

对于任意 $v\in V$，令 J 定义如下：

$$J\triangleq\max_{\boldsymbol{X},\lambda}\left(\left|\frac{\lambda X_1}{\lambda X_1+\sum_{j\in[B+1]\setminus\{1\}}X_j}\right|+\sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}}\left|\frac{X_i}{\lambda X_1+\sum_{j\in[B+1]\setminus\{1\}}X_j}-\frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|/q}{1+(\lambda-1)/q}\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)\right|\right).$$

根据引理 5.9、定义 3.7 和定义 5.11，可得

$$|b_v(\perp)|\cdot\max_{\tau\in\mathcal{F}_{V\setminus\{v\}}}\sum_{x\in\Sigma_v}|\psi_v^{\tau,\perp}(x)|\le J.\tag{28}$$

如前所述，我们给出 J 的一个上界。我们首先考虑第一部分 $\max_{\boldsymbol{X},\lambda}\left|\frac{\lambda X_1}{\lambda X_1+\sum_{j\in[B+1]\setminus\{1\}}X_j}\right|$。由 $\sum_{i\in[B+1]}X_i=1$ 这一事实可知，它等于 $\max_{\boldsymbol{X},\lambda}\left|\frac{\lambda X_1}{1+(\lambda-1)X_1}\right|$。回忆 $|\lambda-\lambda_c|\le\gamma$。结合方程（27），可得

$$\max_{\boldsymbol{X},\lambda}\left|\frac{\lambda X_1}{\lambda X_1+\sum_{j\in[B+1]\setminus\{1\}}X_j}\right|\le\max_{\boldsymbol{X},\lambda}\left|\frac{\lambda X_1}{1+(\lambda-1)X_1}\right|\le\frac{(\lambda_c+\gamma)\cdot 1/q\cdot(1+4/\varrho)}{1+(\lambda_c-\gamma-1)\cdot 1/q\cdot(1+4/\varrho)}.\tag{29}$$

接下来，我们对 J 的第二项进行界定：

$$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{X},\lambda}\sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}}\left|\frac{X_i}{1+(\lambda-1)X_1}-\frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|/q}{1+(\lambda-1)/q}\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)\right|\\ =&\max_{\boldsymbol{X},\lambda}\sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}}\left|\frac{X_i\cdot(1+(\lambda-1)/q)-(1+(\lambda-1)X_1)\cdot|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|/q\cdot(1-1/\varrho)}{(1+(\lambda-1)X_1)(1+(\lambda-1)/q)}\right|\\ \le&\frac{\max_{\boldsymbol{X},\lambda}\sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}}\left|X_i\cdot(1+(\lambda-1)/q)-(1+(\lambda-1)X_1)\cdot|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|/q\cdot(1-1/\varrho)\right|}{\min_{\boldsymbol{X},\lambda}|(1+(\lambda-1)X_1)(1+(\lambda-1)/q)|},\end{aligned}\tag{30}$$

最后一个不等式得自 $|\lambda-\lambda_c|\le\gamma$、 $\lambda_c\in[0,1]$ 以及方程（27）。接着，我们考察方程（30）的分母。回顾一下， $\gamma=\frac{1}{16\Delta^2k^5}$ （条件 5.4-（3））以及 $\varrho=608q\Delta^2k^5$。现在我们给出分母的一个上界：

$$\frac{1}{\min_{X,\lambda}|(1+(\lambda-1)X_1)(1+(\lambda-1)/q)|}\le\frac{1}{(1-4/q)(1-2/q)}\le 4, \tag{31}$$

其中，最后一个不等式在以下条件下成立 $q\ge 8$。接下来，我们考虑方程（30）的分子。对于求和中的每一项，根据三角不等式，有

$$\begin{aligned}&\left|X_i\cdot\left(1+\frac{\lambda-1}{q}\right)-(1+(\lambda-1)X_1)\cdot\frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q}\cdot\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)\right|\\ \le&\left|\left(X_i-\frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q}\cdot\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)\right)\right|+\frac{|\lambda-1|}{q}\left|X_i-X_1\cdot|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|\cdot\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)\right|.\end{aligned} \tag{32}$$

结合方程（27），我们将第一部分界定为 $|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|/q\cdot 5/\varrho$。结合 $|\lambda-\lambda_c|\le\gamma$，我们将第二部分界定如下：

$$\frac{|\lambda-1|}{q}\left|X_i-X_1\cdot|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|\cdot\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)\right|\le\frac{1+\gamma}{q}\cdot\frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q}\cdot\frac{6}{\varrho}. \tag{33}$$

结合方程（32）和方程（33），可得

$$\begin{aligned}&\max_{X,\lambda}\sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}}\left|X_i\cdot\left(1+\frac{\lambda-1}{q}\right)-(1+(\lambda-1)X_1)\cdot\frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q}\cdot\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)\right|\\ \le&\sum_{i\in[B+1]\setminus\{1\}}\frac{|f_v^{-1}(i^{\blacktriangle})|}{q\cdot\varrho}\cdot\left(5+\frac{6(1+\gamma)}{q}\right)\le\frac{17}{\varrho}.\end{aligned} \tag{34}$$

结合方程（28）、方程（29）、方程（32）和方程（34），可得

$$|b_v(\perp)|\cdot\max_{\tau\in\mathcal{F}_{V\setminus\{v\}}}\sum_{x\in\Sigma_v}|\psi_v^{\tau,\perp}(x)|\le\frac{(\lambda_c+\gamma)\cdot(1+4/\varrho)}{q+(\lambda_c-\gamma-1)\cdot(1+4/\varrho)}+\frac{68}{\varrho}. \tag{35}$$

接下来，对于任意 $i\in[B+1]$，回顾 $|b_v(i^{\blacktriangle})|$（方程（25））和 $\sum_{i\in[B+1]}|b_v(i^{\blacktriangle})|^{\frown}$（方程（26））的上界。然后，我们给出 N 的上界（回顾条件13中的定义，条件4.4）。结合方程（35）、方程（25）、事实5.3 以及 $\lambda_c\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}\widehat{N}&\le q\cdot\left(\frac{s+1}{q+\lambda_c-\gamma-1}\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)+\frac{(\lambda_c+\gamma)\cdot(1+4/\varrho)}{q+(\lambda_c-\gamma-1)\cdot(1+4/\varrho)}+\frac{68}{\varrho}\right)^k\\ &\le q\cdot\left(\frac{s+1+(\lambda_c+\gamma)\cdot(1+4/\varrho)}{q+(\lambda_c-\gamma-1)\cdot(1+4/\varrho)}+\frac{68}{\varrho}\right)^k\\ &\le q\cdot\left(\frac{s+1+(1+\gamma)\cdot(1+4/\varrho)}{q-(\gamma+1)\cdot(1+4/\varrho)}+\frac{68}{\varrho}\right)^k\le q\cdot\left(\frac{s+4}{q-2}+\frac{68}{\varrho}\right)^k.\end{aligned} \tag{36}$$

当 $s\ge 4$和 $q\ge 4$ 时，有 $\mathrm{b}N\le q\cdot\left(\frac{4s}{q}+\frac{68}{\varrho}\right)^k$。结合 $\varrho=608q\Delta^2k^5$，可得 $\mathrm{b}N\le \mathrm{e}q(4s/q)^k$。

^然后，我们对 M 进行上界估计（回顾其在条件14的方程 (4.4) 中的定义）。结合方程 (35)、方程 (26)、 $\lambda_c \in [0,1]$， $\gamma = \frac{1}{16\Delta^2 k^5}$ 以及 $\varrho = 608q\Delta^2 k^5$，有

$$\begin{aligned}\widehat{M} &\le \frac{q-1}{q+\lambda_c-\gamma-1}\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)+\frac{(\lambda_c+\gamma)\cdot(1+4/\varrho)}{q+(\lambda_c-\gamma-1)\cdot(1+4/\varrho)}+\frac{68}{\varrho}\\ &\le \frac{(q-1)\cdot(1-1/\varrho)+(\lambda_c+\gamma)\cdot(1+4/\varrho)}{q+(\lambda_c-\gamma-1)\cdot(1+4/\varrho)}+\frac{68}{\varrho}\\ &\le \frac{q-1+(\lambda_c+\gamma)\cdot(1+4/\varrho)}{q+(\lambda_c-\gamma-1)\cdot(1+4/\varrho)}+\frac{68}{\varrho}\\ &= 1+\frac{2\gamma(1+4/\varrho)+4/\varrho}{q+(\lambda_c-\gamma-1)\cdot(1+4/\varrho)}+\frac{68}{\varrho} \le 1+2\gamma+\frac{76}{\varrho} \le 1+\frac{1}{4\Delta^2k^5}.\end{aligned} \tag{37}$$

在这两种情况下，我们都有 ^$N \le eq\left(\frac{4s}{q}\right)^k$ 和 ^$M \le 1+\frac{1}{4\Delta^2k^5}$。结合条件 5.4-(2)，条件 4.4中的方程（15）成立。 □

5.2. (k,Δ)**-合取范式公式**。 在本小节中，我们研究 (k,Δ)-合取范式公式的零点自由性。(k,Δ)-合取范式是一个公式 $\Phi=(V,\{0,1\}^V,C)$，其中每个子句恰好含有 k个变量，且每个变量最多属于 Δ 个子句。我们用 0 表示“假”，用 1 表示“真”。令 $\Omega_\Phi \subseteq \{0,1\}^V$ 为公式 Φ的解集。对于变量集合 M $\subseteq V$，我们在这些变量 M 上引入复外场。我们形式化地定义配分函数。

定义 5.14 （CNF 公式的复数扩展）。 给定一个 CNF 公式 $\Phi=(V,\ \{0,\ 1\}^V,\ C)$ 以及变量的一个子集 M $\subseteq V$。我们将配分函数记为*partition function*

$$Z^{\mathrm{CNF}}_{\Phi,\mathcal{M}}(\lambda) \triangleq \sum_{\sigma\in\Omega_\Phi}\lambda^{|\mathcal{M}\cap\sigma^{-1}(1)|}, \qquad \text{where } \sigma^{-1}(1)\triangleq\{v\in V\mid\sigma(v)=1\}.$$

当 $Z_{\mathrm{CNF}\Phi,\ \mathcal{M}}(\lambda)\neq 0$ 时，我们自然地定义一个复测度 $\mu=\mu(\Phi,\ \lambda,\ \mathrm{M})$，即 $\forall\sigma\in\Omega_\Phi,\ \mu(\sigma)$ $\triangleq \frac{\lambda^{|\mathcal{M}\cap\sigma^{-1}(1)|}}{Z^{\mathrm{CNF}}_{\Phi}\ \lambda}$，$_{,\ \mathcal{M}()}$。我们将其支撑集*support set* 记为 $\mathrm{supp}(\mu)\triangleq\{\sigma\in\Omega_\Phi\mid\mu(\sigma)\neq 0\}$。

当 CNF 公式 Φ、子集 $\mathcal{M}$和复外场 λ 在上下文中明确时，我们可以省略下标 Φ、 $\mathcal{M}$和 λ。令 log 表示 $\log_2$。在本小节中，我们通过验证条件 4.4 并应用定理4.6来证明以下定理。

定理 5.15 ((k,Δ)-合取范式)。 设 k和 $\Delta\ge 2$ 是两个整数。设 $\gamma=\frac{1}{2000\Delta^2k^5}$。假设

$$k \ge 12\log(\Delta)+24\log(k)+57. \tag{38}$$

对于任意 (k,Δ)-合取范式公式 Φ，存在一个变量集合 $\mathcal{M}\subseteq V$，满足 $|V|/6\le|\mathcal{M}|\le 4|V|/5$，使得$Z_{\text{合取范式}\ \Phi,\ \mathcal{M}}(\lambda)\neq 0$对任意 $|\lambda-1|\le\gamma$都成立。

此外，在 k和 Δ满足上述相同条件的情况下，设 $\lambda_c\ge 0$满足 $\left(\text{最大值}\{\frac{1\ \lambda_c+\gamma}{1+\lambda_c-\gamma}\right)^{0.17k}\le{}_{16}\frac{1,\ }{}\mathrm{e}$ $^{3}\Delta^2k^4$。那么对于任意满足 $|\lambda-\lambda_c|\le\gamma$的 λ，有 $Z_{\text{合取范式}\ \Phi,\ \mathcal{M}}(\lambda)\neq 0$。

我们指出，与超图 q 着色的零点自由区域不同，合取范式公式的零点自由范围不包含0。在本小节余下部分，我们证明定理5.15。我们利用引理5.18 验证定理4.4 中的条件4.6。我们先介绍一些有用的记号。

子集 M 通过状态压缩方案构造，该方案也被称为针对合取范式公式的“标记/取消标记”方法。它在洛瓦兹局部引理的采样/计数中发挥着非常重要的作用 [Moi19, GLLZ18, FGYZ21a, FHY21, JPV21a, JPV21b, HSW21, GGGHP22, HWY22, HWY23a, HWY23b, CMM23]。我们将变量分为两部分：已标记变量 M 和未标记变量 $V\setminus$ M，并在已标记变量 M 上加入复外场 λ。

随后，为了证明零点自由性，我们考虑仅定义在已标记变量上的投影测度 $\mathcal{M}$，以及该投影测度上的复杂系统扫描 Glauber 动力学。接着，我们利用定理 4.6 证明零点自由性。我们在引理 4.4 的条件中验证定理 5.18。

为形式化状态压缩方案，我们将未标记变量 $V\setminus \mathrm{M}$ 上的取值投影到一个新符号 ▲。因此，在该投影下，未标记变量 $V\setminus \mathrm{M}$ 上的取值始终为 ▲，而格劳伯动力学只改变已标记变量 M 上的取值。

定义 5.16（合取范式公式的状态压缩方案）。设 $\mathrm{M}\subseteq V$ 为已标记变量 的集合。设 $f=(f_v)_{v\in V}$ 为一个投影。对于每个变量 $v\in V$, f_v 是从定义域 $\{0,1\}$ 到有限字母表 Σ_v 的映射。设 $\Sigma\triangleq\bigotimes_{v\in V}\Sigma_v$。对于任意 $\Lambda\subseteq V$，记 $\Sigma_\Lambda\triangleq\bigotimes_{v\in\Lambda}\Sigma_v$。

对于 M 中的每个变量 v，设 $\Sigma_v=\{0^{\blacktriangle},\ 1^{\blacktriangle}\}$，并设 $f_v(0)=0^{\blacktriangle}$ 和 $f_v(1)=1^{\blacktriangle}$。
对于每个变量 $v\in V\setminus \mathrm{M}$，令 $\Sigma_v=\{\blacktriangle\}$，并令 $f_v(0)=f_v(1)=\blacktriangle$。

注意，由上述投影以及复外场 λ 作用于符号 $1^{\blacktriangle}$ 所定义的配分函数等价于定义 5.14。令 $k_{\mathrm{mk}}\geq 1$，$k_{\mathrm{umk}}\geq 1$ 为两个满足以下条件的整数$k_{\mathrm{mk}}+k_{\mathrm{umk}}\leq k$。定义 $0\leq\alpha,\ \beta\leq 1$ 为 $\alpha\triangleq\frac{k_{\mathrm{mk}}}{k}$，并令 $\beta\triangleq\frac{k_{\mathrm{umk}}}{k}$。我们给出零点自由性的一项充分条件。

条件 5.17。设 $\Phi=(V,\ \{0,\ 1\}^V,\ C)$ 是一个 $(k,\ \Delta)$-合取范式公式。令 $\mathcal{M}\subseteq V$ 为已标记变量的集合，并令 λ 为定义 5.14中定义的复参数。令 $\lambda_c\geq 0$ 为实数。则有

(1) 对于任意子句，至少有 k_{mk} 个已标记变量和至少 k_{umk} 个未标记变量；此外，总共有至少 $\alpha\cdot|V|$ 个已标记变量和至少 $\beta\cdot|V|$ 个未标记变量；

(2)

$$2^k\geq(4\mathrm{e}\Delta k)^{\frac{6\ln(2)\cdot(1+\alpha-\beta)}{(1-\alpha-\beta)^2}},\quad \left(\frac{\max\{1,\lambda_c+\gamma\}}{1+\lambda_c-\gamma}\right)^{k_{\mathrm{mk}}}\leq\frac{1}{16\mathrm{e}^3\Delta^2k^4},\quad 2^{k_{\mathrm{umk}}}\geq 4000\mathrm{e}\Delta^3k^5;$$

(3) λ 位于以 λ_c 为圆心、半径为 $\gamma=\frac{1}{2000\Delta^2k^5}$ 的~~圆盘内，~~ 即 $|\lambda-\lambda_c|\leq\gamma$。

引理 *5.18*。设 $\Phi=(V,\{0,1\}^V,C)$ 是一个采用状态压缩方案 f（定义 *5.16*）的 (k,Δ)-*CNF* 公式，并且在投影符号 $1^{\blacktriangle}$ 上具有复外场 λ。令 $M\subseteq V$。记 $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$。对于任意 $i\leq m$，定义 $C_i=\{c_1,c_2,\ldots,c_i\}$ 和 $\Phi_i=(V,\{0,1\}^V,C_i)$。

假设 $(\Phi,\ \Lambda,\ \lambda)$ 满足条件 *5.17*，那么 Φ_1、Φ_2、$\ldots$、Φ_m 满足条件 *4.4*。

根据定理 4.6 和引理 5.18，我们得到关于 $(k,\ \Delta)$-CNF 公式的以下零点自由性结果。

定理 5.19（零点自由性）。设 $\Phi=(V,\{0,1\}^V,C)$ 是一个 (k,Δ)-合取范式公式，$\mathcal{M}\subseteq V$ 和 λ 是复外场。假设 (Φ,Λ,λ) 满足条件*5.17*，则 $Z_\Phi^{\mathrm{CNF}}{}_{,\mathcal{M}}(\lambda)\neq 0$。

证明。设 f 为状态压缩方案（定义 5.16）。因此，我们有 $Z_\Phi^{\mathrm{CNF}}{}_{,\mathcal{M}}(\lambda)=Z(\Phi,f,\lambda,1^{\blacktriangle})$。只需验证定理 4.6中的条件。对于复数 x，我们用 $\mathrm{R}(x)$ 表示其实部。首先考虑方程（16）。根据条件 5.17-（3），我们有

$$\forall v\in V,\quad \sum_{\sigma\in\{0,1\}}\mathfrak{R}(\mathbb{I}[f_v(\sigma)\neq 1^{\blacktriangle}]+\lambda\cdot\mathbb{I}[f_v(\sigma)=1^{\blacktriangle}])>0.$$

因此，定理 16中的方程（4.6 ）成立。

接下来，条件 成立由引理 4.4 5.18。结合定理 4.6，我们有 $Z_\Phi^{\mathrm{CNF}}{}_{,\mathrm{M}}(\lambda)\neq 0$。 □

接下来，我们使用定理 5.19 来证明定理 5.15。我们先给出下面这个有用的引理，以说明条件 5.17-(2) 蕴含条件 5.17-(1)

引理 *5.20*。设 $\Phi = (V, \{0,1\}^V, C)$ 是一个 (k,Δ)-合取范式公式。假设条件 *5.17-(2)* 成立。存在一种算法，使得对于任意 $\delta > 0$，它以至少 $1-\delta$ 的概率返回满足条件 *5.17-(1)* 的集合 $M \subseteq V$，且时间复杂度为 $O\left(|V|^2 \cdot |C| \cdot \log \frac{1}{\delta}\right)$。

证明。我们使用 Moser-Tardos 算法（定理 2.3）来找到 $\mathcal{M}$。我们首先检查 Moser-Tardos 算法（定理 2.3）的条件。令 C 为子句集合，并令 $\mathcal{P}[\cdot]$ 表示乘积分布，其中每个变量都独立地以概率 $\mathcal{M}$ 被选入 $\frac{1+\alpha-\beta}{2}$。令 $n = |V|$ 和 $m = |C|$。

对于每个子句 $c \in C$，令 A_c 表示如下事件：对于子句 c，属于 M 的变量少于 k_{mk} 个，或者不属于 M 的变量少于 k_{umk} 个。令 B 表示总标记变量少于 $\alpha \cdot n$ 个，或者总未标记变量少于 $\beta \cdot n$ 个的事件。根据 Chernoff 界，我们有

$$\forall c \in C, \quad \mathcal{P}[A_c] \le 2\exp\left(-\frac{(1-\alpha-\beta)^2}{6(1+\alpha-\beta)} \cdot k\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(1-\alpha-\beta)^2}{6\ln(2)\cdot(1+\alpha-\beta)} \cdot k},$$

类似地，我们有

$$\mathcal{P}[B] \le 2\exp\left(-\frac{(1-\alpha-\beta)^2}{6(1+\alpha-\beta)} \cdot n\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(1-\alpha-\beta)^2}{6\ln(2)\cdot(1+\alpha-\beta)} \cdot n}.$$

接下来，我们定义函数 x。对于任意子句 c，令 $x(A_c) \triangleq \frac{1}{2e\Delta k}$，并令 $x(B) \triangleq \exp\left(-\frac{m}{\Delta}\right)$。对于任意事件 A_c，我们用 $\Gamma(A_c)$ 表示与 A_c 不独立的事件集合，但不包括其自身 A_c。我们首先验证，对于任意子句 c，有 $\mathrm{P}[A_c] \le x(A_c)(1-x(B))\prod_{A_{c'}\in\Gamma(A_c)}(1-x(A_{c'}))$。根据 $m \ge \Delta$ 这一事实，我们有 $1-x(B) \ge 1-\exp(-1) \ge 1/2$。对于任意子句 c，我们有

$$x(A_c)(1-x(B)) \prod_{A_{c'}\in\Gamma(A_c)} (1-x(A_{c'})) \ge \frac{1}{2\Delta k} \cdot \left(1-\frac{1}{2\Delta k}\right)^{\Delta k} \ge \frac{1}{2e\Delta k}.$$

根据假设，我们有 $\mathrm{P}[A_c] \le \frac{1}{2e\Delta k} \le x(A_c)(1-x(B))\prod_{A_{c'}\in\Gamma(A_c)}(1-x(A_{c'}))$。接下来我们验证 $\mathrm{P}[B] \le x(B)\prod_{A_c}(1-x(A_c))$。根据事实 $\Delta k \ge 1$，我们有

$$x(B)\prod_{A_c}(1-x(A_c)) = x(B)\cdot\left(1-\frac{1}{\Delta k}\right)^m \ge x(B)\cdot\exp\left(-\frac{m}{2\Delta k}\right) \ge \exp\left(-\frac{m}{\Delta}-\frac{m}{2\Delta k}\right).$$

根据假设以及 $n \ge k, k \ge 3$，我们有 $\mathrm{P}[B] \le 2\cdot(4e\Delta k)^{-n/k} \le \exp\left(-\frac{2n}{k}\right)$。根据事实 $n\Delta \ge km$，我们有 $\mathrm{P}[B] \le \exp\left(-\frac{2n}{k}\right) \le \exp\left(-\frac{2m}{\Delta}\right) \le x(B)\prod_{A_c}(1-x(A_c))$。Since 子句总数至多为 Δn，重新采样步骤的期望数量至多为

$$\sum_{c\in C}\frac{x(A_c)}{1-x(A_c)} + \frac{x(B)}{1-x(B)} \le 3n.$$

我们运行 Moser-Tardos 算法（定理 2.3）进行 $6n$ 次重新采样步骤。根据马尔可夫不等式，该算法以至少 $\frac{1}{2}$ 的概率返回满足条件 5.17-(1) 的集合 M。因此，独立运行 $\lceil \log\frac{1}{\delta} \rceil$ 个 Moser-Tardos 算法的副本后，以至少 $1-\delta$ 的概率，我们可以在总计 $6n\lceil\log\frac{1}{\delta}\rceil$ 次重新采样步骤内找到集合 M。

注意，在每次重新采样步骤中，我们至多需要对 n 个变量进行重新采样，并检查是否发生了 $m+1$ 个坏事件。因此，总时间复杂度为 $O\left(n^2 m \log\frac{1}{\delta}\right)$。

□

现在，我们证明定理 5.15。

定理的证明 *5.15*。我们使用引理 5.18 来验证条件 4.4。然后，我们使用定理 4.6 来证明这个引理。根据引理 5.18，只需验证条件 5.17。

我们首先考虑以下情形：$\lambda_c = 1$。根据假设，条件 5.17-(3) 成立。由引理 5.20，只需证明条件 5.17-(2) 成立。

设 $\alpha = 0.171562, \beta = 0.257342$。为使 $2^k \geq (4\mathrm{e}\Delta k)^{6\ln(2)(1+\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)^2}$，只需满足

$$k \geq 12\log(\Delta) + 12\log(k) + 41.$$

为了使 $\left(\frac{1+\gamma}{2-\gamma}\right)^{k_{\mathrm{mk}}} \leq \frac{1}{16}^{1}\mathrm{e}^{3}\Delta^{2}k^{4}$，回顾一下 $\gamma = \frac{1}{2000\Delta^2 k^5}$ 和 $k_{\mathrm{mk}} \geq \alpha k$，只需满足

$$k \geq 12\log(\Delta) + 24\log(k) + 57.$$

为了使 $2^{k_{\mathrm{umk}}} \geq 4000\mathrm{e}\Delta^3 k^5$，回顾一下 $k_{\mathrm{umk}} \geq \beta k$，只需满足

$$k \geq 12\log(\Delta) + 20\log(k) + 53.$$

结合方程 (38)，条件 5.17 成立。

对于一般的 $\lambda_c \geq 0$，还需假设 $\left(\frac{\max\{1,\lambda_c+\gamma\}}{1+\lambda_c-\gamma}\right)^{k_{\mathrm{mk}}} \leq \frac{1}{16}^{1,}\}\mathrm{e}^{3}\Delta^{2}k^{4}$。此时，验证条件 5.17的过程完全相同。

最后，该定理由定理 5.19推出。 □

接下来，剩余的小节主要用于证明引理 5.18。回顾一下，我们将约束集写作 $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$。还需回顾的是，对于任意 $i \leq m$，$C_i = \{c_1, c_2, \ldots, c_i\}$ 和 $\Phi_i = (V, \{0,1\}^V, C_i)$。假设 (Φ, Λ, λ) 满足条件 5.17，可以验证，对于任意 $i \leq m$，$(\Phi_i, \Lambda, \lambda)$ 均满足条件 5.17。因此，我们证明一个更强的结果：如果任意公式满足条件 5.17，那么它就满足条件 4.4。

我们从条件 4.4-(1) 开始。

引理 *5.21*（良定义性）。设 $\Phi = (V, \{0,1\}^V, C)$ 是一个 (k, Δ)-合取范式公式，具有状态压缩方案 f（定义 *5.16*），且在投影符号 $1^{\blacktriangle}$ 上的复外场为 λ。设 $c^* \in C$ 为最大编号，并令 $\Phi' = (V, \{0,1\}^V, C \setminus \{c^*\})$

假设由 ψ和 Φ'以及 f诱导的投影测度具有非零配分函数，即 $Z(\Phi', \lambda, f, 1^{\blacktriangle}) \neq 0$，且 (Φ, Λ, λ) 满足条件 *5.17*，那么条件 *4.4-(1)* 成立。

为了证明引理 5.21，我们引入以下引理，它表明，在考虑投影测度 ψ的转移测度时，只需考虑正在更新的变量上的复外场。

引理 5.22. 对于任意变量 $v \in \mathcal{M}$，以及任意在投影下定义于 $\tau \in \Sigma_{V\setminus\{v\}}$ 上的可扩展部分赋值 $V \setminus \{v\}$，令 $(X_i)^{i\in\{0,1\}}$ 表示字母表为 $\{0,1\}^V$ 且与 τ 一致的满足赋值数量，并且 v 的取值与 $i^{\blacktriangle}$一致。

则有

$$\psi_v^{\tau}(0^{\blacktriangle}) = \frac{X_0}{X_0 + \lambda X_1}, \quad \psi_v^{\tau}(1^{\blacktriangle}) = \frac{\lambda X_1}{X_0 + \lambda X_1}.$$

证明. 根据合取范式公式的复数扩展的定义（定义 5.14），我们只在投影符号 $1^{\blacktriangle}$ 上添加复外场。因此，对于任何与 $\tau \in \Sigma_{V\setminus\{v\}}$一致的满足赋值 $\sigma \in \{0,1\}^V$，复外场对权重 $\lambda^{|\mathcal{M}\cap\sigma^{-1}(1)|}$的贡献总是相同的，唯有变量 v 的贡献例外。因此，考虑转移测度 ψ_v^{τ}时，我们只需考虑变量 v 处的 λ。引理得证。□

我们还摘录了下一个有用的引理，出自 [FGYZ21a]，它建立了边际概率的局部均匀性。

引理 5.23 ([FGYZ21a，推论 2。2])。设 $\Phi = (V, \{0,1\}^V, C)$ 是一个合取范式公式。假设每个子句至少包含 k_1 个变量，至多包含 k_2 个变量，且每个变量至多属于 Δ 个子句。

令 $\mathfrak{X}$ 为所有满足赋值的均匀分布，其中赋值满足 Φ。对于任意 $s \geq k_2$，如果 $2^{k_1} \geq 2\mathrm{e}\Delta s$，那么存在一个满足赋值满足 Φ，且对于任意 $v \in V$，

$$\max\left\{\Pr_{\sigma\sim\mathfrak{X}}\left[\sigma_v = 0\right], \Pr_{\sigma\sim\mathfrak{X}}\left[\sigma_v = 1\right]\right\} \leq \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{s}\right).$$

现在证明引理 5.21。

引理 *5.21*的证明。 在假设 ψ 定义良好的前提下，根据我们的状态压缩方案（定义 5.16），只需检查：对于任意 $v \in \mathcal{M}$，以及定义在 $V\setminus\{v\}$ 上的任意可扩展部分赋值 $\tau \in \Sigma_{V\setminus\{v\}}$，在投影下，$\psi_v^\tau$定义良好。

令 X_0 为与 τ一致的 Φ' 满足赋值的数量，且 v 取值为 0。令 X_1 为与 τ一致的 Φ' 满足赋值的数量，且 v 取值为 1。由引理 5.22，可得

$$\psi_v^\tau(0^\blacktriangle) = \frac{X_0}{X_0 + \lambda X_1}, \quad \psi_v^\tau(1^\blacktriangle) = \frac{\lambda X_1}{X_0 + \lambda X_1}.$$

接下来，我们证明它们定义良好（$\lambda X_1 + X_0 \neq 0$）。对于复数 x，我们用 $\mathrm{R}(x)$ 表示其实部。只需证明 $\mathrm{R}(\lambda X_1 + X_0) > 0$。回忆一下，存在实数 $\lambda_c \geq 0$ and$|\lambda - \lambda_c| \leq \gamma$。因此 $\mathrm{R}(\lambda) \geq -\gamma$and $\mathrm{R}(\lambda X_1 + X_0) = \mathrm{R}(\lambda)X_1 + X_0 \geq X_0 - X_1\cdot\gamma$。只需证明$X_0 > X_1\cdot\gamma$。我们用反证法证明这一点。假设 $X_0 \leq X_1\cdot\gamma$。若 $X_1 = 0$，回忆一下，τ是一个可扩展部分赋值，因此 $X_0 \geq 1$。于是我们有 $X_0 > X_1\cdot\gamma$，这就得到了矛盾。因此我们进一步假设 $X_1 \geq 1$。根据~~$X_0 \leq X_1\cdot\gamma$~~，可得 $\frac{X_1}{X_0+X_1} \geq \frac{1}{1+\gamma}$。

然而，我们可以利用引理 5.23 建立上界 $\frac{X_1}{X_0+X_1} < \frac{1}{1+\gamma}$。因此，~~我们得出了~~矛盾。注意，$(\Phi, \Lambda, \lambda)$ 满足条件 5.17，因此 $(\Phi', \Lambda, \lambda)$ 也满足条件 5.17。为了应用引理 5.23，我们使用部分赋值 $\tau \in \Sigma_{V\setminus\{v\}}$ 简化合取范式公式 Φ'，即删除已满足的子句，并移除 $V\setminus\{v\}$ 中已固定的标记变量。注意，对于任意未标记变量 u，其投影符号为 $\tau_u = \blacktriangle$，这并未提供关于其原始取值 u 的任何信息。因此，未标记变量并未被固定。根据条件 5.17-(1)，在简化后的合取范式公式 Φ'' 中，对于任意子句 c，其中至少有 k_{umk} 个变量，至多有 k 个变量。令 $s = 2000\Delta^2k^5$，注意 $s \geq k$ 和 $2^{k_{\mathrm{umk}}} \geq 2\mathrm{e}\Delta s$。结合条件 5.17-(2)，可得 $\frac{X_1}{X_0+x_1} \leq \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{s}\right) < \frac{1}{1+\gamma}$。

因此，ψ_v^τ是良定义的，并且条件 4.4-（1）成立。 □

接下来，为了验证条件 4.4-（2），我们构造 $\boldsymbol{b}$-分解。随后，我们给出对它的一些直观解释（备注 5.25）。

定义 5.24（关于（k, Δ）-CNF 公式的 $\boldsymbol{b}$-分解方案）。设 $\Phi = (V, \{0,1\}^V, C)$ 是一个带有状态压缩方案 $\boldsymbol{f}$（定义 5.16）以及复外场 λ（作用于投影符号 $1^\blacktriangle$）的（k, Δ）-CNF 公式。设 $\mathrm{M} \subseteq V$ 为已标记变量的集合。设 $c^* \in C$ 为具有最大编号的变量，并令 $\Phi' = (V, \{0,1\}^V, C\setminus\{c^*\})$。

假设由 Φ' 和 $\boldsymbol{f}$诱导的投影测度 ψ具有非零配分函数，即 $Z(\Phi', \lambda, \boldsymbol{f}, 1^\blacktriangle) \neq 0$，并且（$\Phi, \Lambda, \lambda$）满足条件 5.17。令 $s = 2000\Delta^2k^5$。对于任意未标记变量 $v \in V\setminus\mathrm{M}$，我们令$b_v(\blacktriangle) \triangleq 1$，$b_v(\perp) \triangleq 0$。对于任意已标记变量 $v \in \mathrm{M}$，我们令

$$b_v(x) \triangleq \begin{cases} \frac{1-1/2\exp(1/s)}{1+1/2\cdot\exp(1/s)\cdot(\lambda-1)} & x = 0^\blacktriangle \\ \frac{\lambda\cdot(1-1/2\cdot\exp(1/s))}{1+1/2\cdot\exp(1/s)\cdot(\lambda-1)} & x = 1^\blacktriangle \\ \frac{\lambda(\exp(1/s)-1)}{1+1/2\cdot\exp(1/s)\cdot(\lambda-1)} & x = \perp \end{cases}.$$

现在，我们来简要说明如何为标记变量 $v \in \mathrm{M}$ 设置 b_v。

注记 5.25。考虑复杂系统扫描 Glauber 动力学的一步转移，设 $v \in \mathrm{M}$ 为我们正在更新的变量，τ 为当前在 $V\setminus\{v\}$ 上的赋值；根据投影，该赋值是一个可扩展部分赋值。

对于任意 $j \in \{0, 1\}$，设 $\psi_v^\tau(j^\blacktriangle)$为此次转移中 v更新为 $j^\blacktriangle$的复测度；设 X_j为整个变量集 V上与 τ在变量 $V\setminus\{v\}$上的赋值一致的满足赋值数量，且 v的赋值为 j。根据引理 5.22，有

$$\psi_v^\tau(0^\blacktriangle) = \frac{X_0}{X_0 + \lambda X_1}, \quad \psi_v^\tau(1^\blacktriangle) = \frac{\lambda X_1}{X_0 + \lambda X_1}.$$

根据局部均匀性（引理 5.23），我们预期 $X_0 \approx X_1 \approx 1 - \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{s}\right)$，这导致了 b_v的设定。

接下来，我们验证条件 4.4-(2)。

引理 *5.26.* 设 $\Phi = (V, \{0,1\}^V, C)$ 是一个 (k, Δ)-合取范式公式，具有状态压缩方案 f（定义 *5.16*），且复外场 λ 作用于投影符号 $1^\blacktriangle$。令 $M \subseteq V$ 为标记变量集合。设 $c^* \in C$为最大编号，并令 $\Phi' = (V, \{0,1\}^V, C \mid \{c^*\})$。

假设由 ψ和 Φ'诱导的 f投影测度具有非零配分函数，即 $Z(\Phi', \lambda, f, 1^\blacktriangle) \neq 0$且 (Φ, Λ, λ)满足条件 *5.17*。设 b为定义 *5.24* 中定义的分解方案*5.24*，则条件 *4.4-(2)* 成立。

在证明上述引理之前，我们先利用它证明引理 5.18。

引理 *5.18* 的证明。注意，$(\Phi_1, \Lambda, \lambda)$、$(\Phi_2, \Lambda, \lambda)$……、$(\Phi_m, \Lambda, \lambda)$满足条件 5.17。该引理直接由引理 5.21 和引理 5.26得出。□

最后，我们证明引理 5.26。

引理 5.26 的证明。设 $\gamma = \frac{1}{2000\Delta^2 k^5}$回忆一下，存在一个实数 $\lambda_c \geq 0$，使得 $|\lambda - \lambda_c| \leq \gamma$b，或等价地，$\lambda \in$D$(\lambda_c, \gamma)$。回忆条件 4.4 的方程 (13) 中 N 的定义，以及条件 4.4 的方程 (14) 中 bM 的定义。我们声称，b$N \leq$e$\left(\max\{\frac{1+\lambda_c+\gamma}{1+\lambda_c-\gamma}\right)^{k_{\text{mk}}}$，}，且 b$M \leq 1 + \frac{1}{4\Delta^2 k^5}$。于是，由条件 5.17-(2)，该引理得证：

$$4\mathrm{e}\Delta^2 k^4 \cdot \widehat{N} \cdot \widehat{M}^{4\Delta^2 k^5} \leq 4\mathrm{e}^3 \Delta^2 k^4 \cdot \left(\frac{\max\{1, \lambda_c + \gamma\}}{1 + \lambda_c - \gamma}\right)^{k_{\text{mk}}} \leq \frac{1}{4}.$$

b b 现在我们对 N和 M进行界定，并证明这一断言。

对于每个变量 v，令 $\mathrm{F}_{V\setminus\{v\}} \subseteq \Sigma_{V\setminus\{v\}}$表示投影下可扩展的部分赋值集合。我们先对以下量进行界定：

$$|b_v(\perp)| \cdot \max_{\sigma \in \mathcal{F}_{V\setminus\{v\}}} (|\psi_v^{\sigma,\perp}(0^\blacktriangle)| + |\psi_v^{\sigma,\perp}(1^\blacktriangle)|). \tag{39}$$

之后，我们考虑 $\max_{v\in\mathcal{M}} |b_v(0^\blacktriangle)|$ 和 $\max_{v\in\mathcal{M}} |b_v(1^\blacktriangle)|$的上界。然后，我们利用这些量对 N和 M进行上界估计。

我们先考虑方程 (39)。回想一下，如果 v 是未标记变量，那么 $|b_v(\perp)| = 0$，且上述量为 0。因此，我们假设 v 是已标记变量。

根据引理 5.23，令 $\mathfrak{X}$ 为 Ω_Φ 中与 $\sigma \in \mathcal{F}^{V\setminus\{v\}}$相一致的所有满足赋值上的均匀分布。我们使用部分赋值 σ来简化合取范式公式 Φ'，即删除已满足的子句，并移除 $V \setminus \{v\}$ 中的已标记变量，因为它们已被固定。注意，对于任意未标记变量u，其投影符号 $\tau_u = \blacktriangle$ 不会提供任何关于u原始取值的信息。因此，未标记变量不会被固定。根据条件 5.17-(1)，在简化后的合取范式公式 Φ''中，对于任意子句 c，至少有 k_{umk} 个变量，至多有 k 个变量。

令 $s = 2000\Delta^2 k^5$，注意 $s \geq k$ 以及 $2^{k_{\text{umk}}} \geq 2\mathrm{e}\Delta s$ (条件 5.17-(2))，可得

$$\max\left\{\Pr_{\tau\sim\mathfrak{X}}[\tau_v = 0], \Pr_{\tau\sim\mathfrak{X}}[\tau_v = 1]\right\} \leq \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{s}\right).$$

令 $x = \Pr_{\tau\sim\mathfrak{x}}[\tau_v = 1]$。可得

$$\begin{aligned}
&|b_v(\perp)| \cdot \max_{\sigma\in\mathcal{F}_{V\setminus\{v\}}} \left(|\psi_v^{\sigma,\perp}(0^{\blacktriangle})| + |\psi_v^{\sigma,\perp}(1^{\blacktriangle})|\right) \\
\le &\max_{\substack{1-1/2\exp(1/s)\le x\le 1/2\exp(1/s)\\ \lambda\in\mathcal{D}(\lambda_c,\frac{1}{2000\Delta^2k^5})}} \left(\left|\frac{1-x}{1+(\lambda-1)x} - b_v(0)\right| + \left|\frac{\lambda x}{1+(\lambda-1)x} - b_v(1)\right|\right).
\end{aligned}$$

我们如下定义 J_0 和 J_1。

$$J_0 \triangleq \max_{\substack{1-1/2\exp(1/s)\le x\le 1/2\exp(1/s)\\ \lambda\in\mathcal{D}(\lambda_c,\frac{1}{2000\Delta^2k^5})}} \left|\frac{1-x}{1+(\lambda-1)x} - \frac{1-1/2\exp(1/s)}{1+1/2\cdot\exp(1/s)\cdot(\lambda-1)}\right|,$$

$$J_1 \triangleq \max_{\substack{1-1/2\exp(1/s)\le x\le 1/2\exp(1/s)\\ \lambda\in\mathcal{D}(\lambda_c,\frac{1}{2000\Delta^2k^5})}} \left|\frac{\lambda x}{1+(\lambda-1)x} - \frac{\lambda\cdot(1-1/2\cdot\exp(1/s))}{1+1/2\cdot\exp(1/s)\cdot(\lambda-1)}\right|.$$

我们首先考虑 J_0。为简单起见，我们省略约束 $1-1/2\exp(1/s) \le x \le 1/2\exp(1/s)$ 和 $\lambda\in\mathrm{D}(\lambda_c, \frac{1}{2000\Delta^2k^5})$；有

$$J_0 = \max_{x,\lambda}\left|\frac{1/2\cdot\lambda(\exp(1/s)-2x)}{(1+(\lambda-1)x)(1+(\lambda-1)/2\cdot\exp(1/s))}\right|.$$

回忆一下，$\gamma = \frac{1}{2000\Delta^2k^5}$。我们通过考虑以下两种情况来给出 J_0 的上界：(1) $|\lambda|\le 2\gamma$，以及 (2) $|\lambda| > 2\gamma$。

对于第一种情况，即 $|\lambda|\le 2\gamma$，有

$$J_0 \le \frac{2\gamma}{(1-(1+2\gamma)x)(1-(1+2\gamma)/2\cdot\exp(1/s))} \le 32\gamma,$$

其中，第二个不等式是由以下事实得出的：当 $s = 2000\Delta^2k^5$ 且 $|\lambda| \le 2\cdot\frac{1}{2000\Delta^2k^5}$时，我们有 $(1+2\gamma)x \le \frac{3}{4}$且 $(1+2\gamma)/2\cdot\exp(1/s) \le \frac{1}{4}$。

对于第二种情况 $|\lambda| > 2\gamma$，我们有 $\mathrm{R}(\lambda) > 0$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
J_0 &= \max_{x,\lambda}\left|\frac{1/2\cdot\lambda(\exp(1/s)-2x)}{(1+(\lambda-1)x)(1+(\lambda-1)/2\cdot\exp(1/s))}\right| \\
&= \max_{x,\lambda}\left|\frac{1/2\cdot(\exp(1/s)-2x)}{((1-x)/\lambda+x)(1+(\lambda-1)/2\cdot\exp(1/s))}\right| \\
&\le \max_{x}\frac{1/2\cdot|\exp(1/s)-2x|}{x\cdot(1-1/2\exp(1/s))},
\end{aligned}$$

最后一个不等式源于以下事实：$|(1-x)/\lambda+x| \ge x$且 $|1+(\lambda-1)/2\exp(1/s)| \ge 1-1/2\exp(1/s)$。根据 $s = 2000\Delta^2k^5$，在这种情况下我们有 $J_0 \le 8|\exp(1/s) - 2x|$。综合起来，我们有

$$J_0 \le 32\gamma + 8\max_x|\exp(1/s)-2x|. \tag{40}$$

接下来我们给出上界 bound J_1，类似地，考虑以下两种情况：(1) $|\lambda|\le 2\gamma$，以及 (2) $|\lambda| > 2\gamma$。

$$J_1 = \max_{x,\lambda}\left|\frac{\lambda((\exp(1/s)-2)(1/2-x)+\lambda x(\exp(1/s)-1))}{(1+(\lambda-1)x)(1+(\lambda-1)/2\cdot\exp(1/s))}\right|.$$

对于 $|\lambda|\le 2\gamma$，有 $(1+(\lambda-1)x)(1+(\lambda-1)/2\cdot\exp(1/s)) \ge (1-(1+2\gamma)x)(1-(1+2\gamma)/2\cdot\exp(1/s))$。并且我们有 $|\lambda((\exp(1/s)-2)(1/2-x)+\lambda x(\exp(1/s)-1))| \le 2\gamma(2|1/2-x|+2\gamma\cdot|1-\exp(1/s)|)$。回顾一下，$\gamma = \frac{1}{2000\Delta^2k^5}$和 $s = 2000\Delta^2k^5$，因此我们有 $(1+2\gamma)x \le \frac{3}{4}$，$(1+2\gamma)/2\cdot\exp(1/s) \le \frac{3}{4}$，$|1/2-x| \le \frac{1}{2}$和$2\gamma|1-\exp(1/s)| \le 1$。综上，我们有

$$J_1 \le 64\gamma.$$

对于 $|\lambda| > 2\gamma$，注意到 $\mathrm{R}(\lambda) > 0$，我们有

$$J_1 \le \max_{x,\lambda} \left| \frac{\lambda(\exp(1/s)-2)(1/2-x)}{(1+(\lambda-1)x)(1+(\lambda-1)/2\exp(1/s))} \right| + \max_{x,\lambda} \left| \frac{\lambda^2 x(\exp(1/s)-1)}{(1+(\lambda-1)x)(1+(\lambda-1)/2\exp(1/s))} \right|. \quad (41)$$

对于方程（41）的第一部分，我们将分子和分母都除以 λ。分子可由 $2|1/2-x|$作为上界。对于分母，有$\left|\left(\frac{1-x}{\lambda}+x\right)\left(1-\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{s}\right)+\frac{\lambda}{2}\exp\left(\frac{1}{s}\right)\right)\right| \ge |x\cdot(1-1/2\exp(1/s))|$。结合 $s = 2000\Delta^2k^5$和$1-1/2\exp(1/s) \le x \le 1/2\exp(1/s)$，分母可由$1/16$作为下界。因此，这部分可由$32\max_x|1/2-x|$作为上界。

对于方程（41）的第二部分，我们将分数的分子和分母都除以 λ^2。对于分子，其上界为 $|1-\exp(1/s)|$。对于分母，有 $\left|\left(\frac{1-x}{\lambda}+x\right)\left(\frac{1-1}{2\exp(1/s)\lambda}+1/2\exp(1/s)\right)\right| \ge 1/2\exp(1/s)x$。结合 $s = 2000\Delta^2k^5$和 $1-1/2\exp(1/s) \le x \le 1/2\exp(1/s)$，分母的下界为 $1/16$。因此，这部分的上界为 $16|1-\exp(1/s)|$。

综合起来，我们得到 J_1 的上界如下：

$$J_1 \le 64\gamma + 16|1-\exp(1/s)| + 32\max_x|1/2-x|. \quad (42)$$

结合方程 (40)、方程 (42)以及三角不等式，我们有

$$\begin{aligned} |b_v(\perp)| \cdot \max_{\sigma\in\mathcal{F}_{V\setminus\{v\}}} (|\psi_v^{\sigma,\perp}(0^\blacktriangle)| + |\psi_v^{\sigma,\perp}(1^\blacktriangle)|) &\le 96\gamma + 24|1-\exp(1/s)| + 48\max_x|1/2-x| \\ &\le 96\gamma + \frac{192}{s}, \end{aligned} \quad (43)$$

其中，第二个不等式由 $s = 2000\Delta^2k^5$和 $1-1/2\exp(1/s) \le x \le 1/2\exp(1/s)$ 得出。接下来，对于任意$j \in \{0,1\}$，我们对 $\max_{v\in\mathcal{M}}|b_v(j^\blacktriangle)|$取上界。回顾定义 5.24 中定义的分解方案。另请回顾 $\gamma = \frac{1}{2000\Delta^2k^5}$和 $|\lambda-\lambda_c| \le \gamma$。不失一般性，我们考虑 $j = 0^\blacktriangle$；另一种情况可以类似处理。只需对以下表达式取上界

$$\begin{aligned} \max_\lambda \frac{(1-1/2\exp(1/s))}{|1-1/2\exp(1/s)+\lambda/2\exp(1/s)|} &\le \frac{1-1/2\exp(1/s)}{1-1/2\exp(1/s)+(\lambda_c-\gamma)/2\exp(1/s)} \\ &= \frac{1}{1+\lambda_c-\gamma}\cdot\frac{(1+\lambda_c-\gamma)(1-1/2\exp(1/s))}{1-1/2\exp(1/s)+(\lambda_c-\gamma)/2\exp(1/s)} \\ &= \frac{1}{1+\lambda_c-\gamma}\cdot\left(1+\frac{(\lambda_c-\gamma)(1-\exp(1/s))}{1-1/2\exp(1/s)+(\lambda_c-\gamma)/2\exp(1/s)}\right). \end{aligned}$$

接下来，我们对第二部分的第二项取上界。分两种情况考虑：(1) $|\lambda_c-\gamma| \le 2\gamma$和 (2)$\lambda_c-\gamma > 2\gamma$。

对于情形（1），有

$$\frac{(\lambda_c-\gamma)(1-\exp(1/s))}{1-1/2\exp(1/s)+(\lambda_c-\gamma)/2\exp(1/s)} \le \frac{2\gamma(\exp(1/s)-1)}{1-1/2\exp(1/s)-\gamma\exp(1/s)} \le 8\gamma,$$

其中，最后一个不等式是基于以下事实：$s = 2000\Delta^2k^5$ 和 $\gamma = \frac{1}{2000\Delta^2k^5}$满足 $\exp(1/s)-1 \le 1$，且 $1-1/2\exp(1/s)-\gamma\exp(1/s) \ge \frac{1}{4}$。

对于情形（2），注意到 $\lambda_c-\gamma > 2\gamma > 0$, $1-1/2\exp(1/s)+(\lambda_c-\gamma)/2\exp(1/s) > 0$，且 $1-\exp(1/s) < 0$。因此，我们可以将这一项的上界取为 0。

综合起来，我们得到

$$\max_{v\in V}|b_v(0^\blacktriangle)| \le \frac{1}{1+\lambda_c-\gamma}\cdot(1+8\gamma) \le \frac{1}{1+\lambda_c-\gamma} + 16\gamma. \quad (44)$$

同理，我们有

$$\max_{v\in V}|b_v(1^{\blacktriangle})| \le \frac{\lambda_c+\gamma}{1+\lambda_c-\gamma}\cdot(1+8\gamma) \le \frac{\lambda_c+\gamma}{1+\lambda_c-\gamma}+16\gamma. \tag{45}$$

b b b 现在，我们可以对 N 和 M（定义见方程 (13) 和方程 (14)）给出上界。我们先对 N 给出上界。对于任意约束 $c\in C$，在 vbl(c) 上只有一个违反约束 c 的部分赋值，即 $|c^{-1}$（假）$|=1$。还需回顾，Φ' 是一个 (k,Δ)-合取范式公式。因此，每个约束都依赖于 k 个变量。根据条件 5.17-(条目 1)，每个约束至少包含 k_{mk} 个已标记变量。结合方程 (43)、方程 (44) 和方程 (45)，可得

$$\widehat{N} \le \left(\frac{\max\{1,\lambda_c+\gamma\}}{1+\lambda_c-\gamma}+112\gamma+\frac{192}{s}\right)^{k_{\mathrm{mk}}} \le \mathrm{e}\left(\frac{\max\{1,\lambda_c+\gamma\}}{1+\lambda_c-\gamma}\right)^{k_{\mathrm{mk}}}, \tag{46}$$

这里不等式成立，是因为 $\frac{\text{最大值}\{1,\lambda_c+\gamma\}}{1+\lambda_c-\gamma} \ge \frac{1}{2}$ 且 $(1+224\gamma+\frac{284}{s})^{k_{\mathrm{mk}}} \le \mathrm{e}$（其中 $\gamma=\frac{1}{2000\Delta^2k^5}$ 和 $s=2000\Delta^2k^5$）。

b接下来，我们对 M 进行界定。对于任意未标记变量 v，由于 v 的投影字母表包含 ▲，且满足 $b_v(\blacktriangle)=1$ 和 $b_v(\perp)=0$，它们的贡献为 1。因此，我们只考虑标记变量。对于任意未标记变量 v，投影字母表 $\Sigma_v=\{0^{\blacktriangle},1^{\blacktriangle}\}$ 成立。分解方案定义于定义 5.24。结合方程 (43)、方程 (44) 和方程 (45)，我们得到

$$\widehat{M} \le \frac{1+\lambda_c+\gamma}{1+\lambda_c-\gamma}+128\gamma+\frac{192}{s} \le 1+132\gamma+\frac{192}{s} \le 1+\frac{1}{4\Delta^2k^5}, \tag{47}$$

其中，第二个不等式成立是因为 $\frac{2\gamma}{1+\lambda_c-\gamma} \le 4\gamma$，最后一个不等式成立是因为 $\gamma=\frac{1}{2000\Delta^2k^5}$ 和 $s=2000\Delta^2k^5$。□

致谢

我们感谢 Chunyang Wang 和 Yitong Yin 富有启发性的讨论和有益的评论。

参考文献

[ACO08] Dimitris Achlioptas 和 Amin Coja-Oghlan。相变产生的算法障碍。载于*2008*年第*49*届*IEEE*计算机科学基础研讨会，第793–802页。IEEE，2008年。[AI16] Dimitris Achlioptas 和 Fotis Iliopoulos。能够找到完美对象的随机游走与洛瓦兹局部引理。*ACM*学报（*JACM*），63(3):1–29，2016年。[AJ22] Konrad Anand 和 Mark Jerrum。通过强空间混合对无限自旋系统进行完美采样。*SIAM*计算杂志，51(4):1280–1295，2022年。[Alo91] Noga Alon。局部引理的并行算法版本。载于*FOCS*，第586–593页。IEEE，1991年。[AS16] Noga Alon 和 Joel H Spencer。概率方法。John Wiley & Sons，2016年。[Asa70] Taro Asano。李-杨定理与各向异性Heisenberg铁磁体的Griffiths不等式。*Phys. Rev.Lett.*，24:1409–1411，1970年。[Bar16] Alexander Barvinok。配分函数的组合学与复杂性，第30卷，收录于算法与组合学。Springer，Cham，2016年。[Bar24] Alexander Barvinok。关于具有多自旋相互作用的配分函数的零点。*arXiv*预印本 *arXiv:2406.04179*，2024年。[BCKL13] Christian Borgs、Jennifer Chayes、Jeff Kahn 和 László Lovász。有界度图的左收敛与右收敛。随机结构与算法，42(1):1–28，2013年。[Bec91] József Beck。洛瓦兹局部引理的算法方法（一）。随机结构与算法，2(4):343–365，1991年。

[BG08] Antar Bandyopadhyay 和 David Gamarnik。无采样计数：某些统计物理模型对数配分函数的渐近行为。随机结构与算法，33(4):452–479，2008年。[BGG+19] Ivona Bezáková、Andreas Galanis、Leslie Ann Goldberg、Heng Guo 和 Daniel Stefankovic。当强空间混合失效时，基于相关性衰减的近似。SIAM计算杂志，48(2):279–349，2019年。[BMS18] József Balogh、Robert Morris 和 Wojciech Samotij。超图容器方法。载于《国际数学家大会论文集：里约热内卢2018》，第3059–3092页。世界科技出版公司，2018年。[CHA08] Sourav CHATTERJEE。一种新的正态近似方法。概率年刊，36(4):1584–1610，2008年。[CMM23] Zongchen Chen、Nitya Mani 和 Ankur Moitra。从算法到连通性，再回到算法：在随机 k-SAT 中寻找巨型连通分量。载于2023年 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA）论文集，第3437–3470页。SIAM，2023年。[CS04] Louis HY CHEN 和 Qi-Man SHAO。局部依赖下的正态近似。概率年刊，32(3A):1985–2028，2004年。[EL73] Paul Erdős 和 Lovász László。关于3-色超图及相关问题的若干问题与结果。Coll Math Soc J Bolyai，10，1973年1月。[Erd63] Paul Erdös。一个组合问题。Nordisk Matematisk Tidskrift，第5–10页，1963年。[FA17] Alan Frieze 和 Michael Anastos。用较少颜色对简单超图进行随机着色。信息处理快报，126:39–42，2017年。[FGW22] Weiming Feng、Heng Guo 和 Jiaheng Wang。改进简单超图随机着色的界。arXiv预印本 arXiv:2202.05554，2022年。[FGW+23] Weiming Feng、Heng Guo、Chunyang Wang、Jiaheng Wang 和 Yitong Yin。迈向马尔可夫链蒙特卡罗的去随机化。载于2023年 IEEE 第64届计算机科学基础年会（FOCS）论文集，第1963–1990页。IEEE，2023年。[FGYZ21a] Weiming Feng、Heng Guo、Yitong Yin 和 Chihao Zhang。在局部引理范围内快速采样并计数 k-SAT 解。ACM学报（JACM），68(6):1–42，2021年。[FGYZ21b] Weiming Feng、Heng Guo、Yitong Yin 和 Chihao Zhang。超越布尔域的谱独立性所带来的快速混合。载于SODA，第1558–1577页。SIAM，2021年。[FHY21] Weiming Feng、Kun He 和 Yitong Yin。在局部引理范围内对约束满足解进行采样。载于第53届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集，第1565–1578页，2021年。[FM11] Alan Frieze 和 Páll Melsted。对简单超图进行随机着色。信息处理快报，111(17):848–853，2011年。[GGGHP22] Andreas Galanis、Leslie Ann Goldberg、Heng Guo 和 Andrés Herrera-Poyatos。从随机 *k*-sat中快速采样满足赋值。arXiv电子预印本，第arXiv–2206页，2022年。[GGW23] Andreas Galanis、Heng Guo 和 Jiaheng Wang。超图着色计数的不可近似性。ACM计算理论汇刊，14(3-4):1–33，2023年。[GLLZ18] Heng Guo、Chao Liao、Pinyan Lu 和 Chihao Zhang。在局部引理范围内计数超图着色。载于第50届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集，第926–939页，2018年。[GMP+24] David Galvin、Gwen McKinley、Will Perkins、Michail Sarantis 和 Prasad Tetali。关于超图独立多项式的零点。Comb. Probab. Comput.，33(1):65–84，2024年。[God81a] Chris D Godsil。匹配行为渐近服从正态分布。Combinatorica，1(4):369–376，1981年。[God81b] Christopher David Godsil。图中的匹配与游走。图论杂志，5(3):285–297，1981年。

[HH17] Bernhard Haeupler 和 David G Harris。《通过见证有向无环图实现洛瓦兹局部引理的并行算法与集中界》。ACM 算法汇刊（TALG），13(4):1–25，2017。[HL72] Ole J. Heilmann 和 Elliott H. Lieb。《单体-二聚体系统理论》。Commun. Math. Phys.，27:166，1972。[HSS11] Bernhard Haeupler、Barna Saha 和 Aravind Srinivasan。《洛瓦兹局部引理的新的构造性方面》。ACM学报（JACM），58(6):1–28，2011。[HSW21] Kun He、Xiaoming Sun 和 Kewen Wu。《（原子）洛瓦兹局部引理的完美采样》。arXiv 预印本 arXiv:2107.03932，2021。[HSZ19] Jonathan Hermon、Allan Sly 和 Yumeng Zhang。《超图独立集的快速混合》。随机结构与算法，54(4):730–767，2019。[HWY22] Kun He、Chunyang Wang 和 Yitong Yin。《近线性时间内对一般约束满足解进行洛瓦兹局部引理采样》。载于：2022 IEEE 第63届计算机科学基础年会（FOCS），第147–158页。IEEE，2022。[HWY23a] Kun He、Chunyang Wang 和 Yitong Yin。《超越线性规划的洛瓦兹局部引理确定性计数》。载于：2023年 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA）论文集，第3388–3425页。SIAM，2023。[HWY23b] Kun He、Kewen Wu 和 Kuan Yang。《随机 CNF 公式解采样的改进界》。载于：2023年 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA）论文集，第3330–3361页。SIAM，2023。[JPSS22] Vishesh Jain、Will Perkins、Ashwin Sah 和 Mehtaab Sawhney。《通过局部中心极限定理实现近似计数与采样》。载于：第54届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集，第1473–1486页，2022。[JPV21a] Vishesh Jain、Huy Tuan Pham 和 Thuy-Duong Vuong。《原子约束满足问题的洛瓦兹局部引理采样》。arXiv 预印本 arXiv:2102.08342，2021。[JPV21b] Vishesh Jain、Huy Tuan Pham 和 Thuy Duong Vuong。《迈向洛瓦兹局部引理采样》。载于：FOCS，第173–183页。IEEE，2021。[KS11] Kashyap Babu Rao Kolipaka 和 Mario Szegedy。《Moser 和 Tardos 遇上洛瓦兹》。载于：第43届 ACM 计算理论研讨会论文集，第235–244页，2011。[KS18] Rasmus Kyng 和 Zhao Song。《强 Rayleigh 分布的矩阵 Chernoff 界及由少量随机生成树构造的谱稀疏化器》。载于：FOCS，第373–384页。IEEE，2018。[LPRS16] Joel L. Lebowitz、Boris Pittel、David Ruelle 和 Eugene R. Speer。《中心极限定理、李-杨零点与图计数多项式》。组合理论杂志 A 辑，141:147–183，2016。[LSS17] Jingcheng Liu、Alistair Sinclair 和 Piyush Srivastava。《伊辛配分函数：零点与确定性近似》。J. Stat. Phys.，174:287–315，2017。[LSS19] Jingcheng Liu、Alistair Sinclair 和 Piyush Srivastava。《相关性衰减与配分函数零点：算法与相变》。SIAM J. Comput.，第200–252页，2019。[LWYY25] Jingcheng Liu、Chunyang Wang、Yitong Yin 和 余一骁。《通过马尔可夫链的复数扩展研究相变》。载于：第57届 ACM 计算理论研讨会论文集，第903–914页，2025。[LY52] T. D. Lee 和 Chen Ning Yang。《状态方程与相变的统计理论：II. 晶格气体与伊辛模型》。Phys. Rev.，87:410–419，1952。[Moi19] Ankur Moitra。《近似计数、洛瓦兹局部引理与图模型中的推断》。ACM学报（JACM），66(2):1–25，2019。[Mos09] Robin A Moser。《洛瓦兹局部引理的构造性证明》。载于：第41届 ACM 计算理论研讨会论文集，第343–350页，2009。

[MS24] Marcus Michelen 和 Julian Sahasrabudhe。《中心极限定理与多项式的几何》。欧洲数学会杂志，2024。[MT10] Robin A Moser 和 Gábor Tardos。《一般洛瓦兹局部引理的构造性证明》。ACM学报（JACM），57(2):1–15，2010。[PR17] Viresh Patel 和 Guus Regts。《配分函数与图多项式的确定性多项式时间近似算法》。SIAM J. Comput.，46(6):1893–1919，2017。[PR19] Han Peters 和 Guus Regts。《关于 Sokal 有关独立集多项式的根的猜想》。Michigan Math. J.，68(1):33–55，2019。[QWZ22] 邱国良、王彦恒 和 Chihao Zhang。《超图独立集的完美采样器》。载于：ICALP，第103:1–103:16页。Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心，2022。[Röd85] Vojtěch Rödl。《关于一个装填与覆盖问题》。欧洲组合学杂志，6(1):69–78，1985。[Rue71] David Ruelle。《李-杨圆定理的扩展》。Phys. Rev. Lett.，26(6):303，1971。[She85] J. B. Shearer。《关于 Spencer 问题》。Combinatorica，5(3):241–245，1985。[SS03] Alex D. Scott 和 Alan D. Sokal。《排斥晶格气体、独立集多项式与洛瓦兹局部引理》。J. Stat. Phys.，118:1151–1261，2003。[SS19] 邵帅 和 孙雨欣。《收缩：相关性衰减与二自旋系统零点自由性的统一视角》。J. Stat. Phys.，185，2019。[ST15] David Saxton 和 Andrew Thomason。《超图容器》。数学新进展，201(3):925–992，2015。[Wag09] David G Wagner。《带度约束的生成子图加权计数》。J. Comb. Theory, Ser B，99(2):347–357，2009。[Wei06] Dror Weitz。《计数直至树阈值的独立集》。载于：STOC，第140–149页。ACM，2006。[Wig19] Avi Wigderson。《数学与计算：一场革新技术与科学的理论革命》。普林斯顿大学出版社，2019。[WY24] Chunyang Wang 和 Yitong Yin。《适用于大定义域的洛瓦兹局部引理采样》。载于：2024 IEEE 第 65 届计算机科学基础年会（FOCS），第129–150页。IEEE，2024。

附录 A. 解析渗流的缺失证明

本节给出引理 3.10 和 3.11的证明。

引理 *3.10* 的证明。 我们断言，对于任意两个初始构型 σ， $\sigma' \in \mathrm{supp}(\mu)$，以下结论总是成立：

$$\lim_{T\to\infty} \left|\mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A) - \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma',\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A)\right| = 0. \tag{48}$$

假设方程 (48成立，我们将从任意初始构型 $\mu^{\mathrm{GD}}_{T\,\sigma,,\boldsymbol{b}}$ 出发的链 $\sigma \in \mathrm{supp}(\mu)$与平稳链（定义 3.6）进行比较。根据三角不等式，

$$\begin{aligned}\left|\mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A) - \mu(A)\right| &= \left|\mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A) - \sum_{\sigma'\in\mathrm{supp}(\mu)} \mu(\sigma')\mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma',\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A)\right| \\ &\le \sum_{\sigma'\in\mathrm{supp}(\mu)} |\mu(\sigma')| \left|\mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A) - \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma',\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A)\right|.\end{aligned}$$

根据方程 (48，当 $T \to \infty$时，右端趋于 0。因此，复杂系统扫描 Glauber 动力学收敛到 μ。

现在，我们通过证明方程 (48来完成证明。对于任意 $T \ge 1$，令 $B(T)$ 为满足条件 3.9的非见证序列集合。我们有：

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} \left|\mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A) - \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma',\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A)\right| \\ (\star)\quad &= \lim_{T\to\infty} \left|\sum_{\boldsymbol{\rho}} \left(\mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) - \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma',\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho})\right)\right| \\ (\blacktriangle)\quad &= \lim_{T\to\infty} \left|\sum_{\boldsymbol{\rho}\in B(T)} \left(\mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) - \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma',\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho})\right)\right| \\ (\blacksquare)\quad &\le 0,\end{aligned}$$

这就推出方程 (48)。这里，$(\star)$ 不等式由全测度定律以及以下观察得到：$\mu^{\mathrm{GD}}_{T\,\sigma,,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho})$ 不依赖于 σ。$(\blacktriangle)$ 等式由定义 3.8 以及所有 $\boldsymbol{\rho} \notin B(T)$ 均满足 $\rho \Rightarrow A$ 得出。 $(\blacksquare)$不等式由三角不等式和条件 3.9 得出。证明至此完成。 □

现在我们证明引理 3.11。

引理 *3.11* 的证明。 我们有

$$\begin{aligned}|\mu(A)| &= \left|\sum_{\sigma\in\mathrm{supp}(\mu)} \mu(\sigma) \left(\sum_{\rho\notin B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) + \sum_{\rho\in B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho})\right)\right| \\ &\le \left|\sum_{\sigma\in\mathrm{supp}(\mu)} \mu(\sigma) \sum_{\rho\notin B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho})\right| \\ &\quad + \left|\sum_{\sigma\in\mathrm{supp}(\mu)} \mu(\sigma) \sum_{\rho\in B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho})\right|,\end{aligned}$$

其中第二个不等式源于三角不等式。对于任意 $\boldsymbol{\rho} \notin B(T)$，由于 $\boldsymbol{\rho}$ 是 A 的见证序列，我们有对于任意 $\sigma,\ \tau \in \mathrm{supp}(\mu)$，

$$\sum_{\rho \notin B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\tau,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) = \sum_{\rho \notin B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}).$$

根据该方程，并且由于 μ 是复归一化测度，固定任意 $\tau \in \mathrm{supp}(\mu)$ 后，$|\mu(A)|$ 的前一个上界可表示如下：

$$\begin{aligned}
|\mu(A)| &\le \left| \sum_{\rho \notin B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\tau,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) \right| + \left| \sum_{\sigma \in \mathrm{supp}(\mu)} \mu(\sigma) \sum_{\rho \in B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) \right| \\
&\le \left| \sum_{\rho \notin B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\tau,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) \right| + \sum_{\sigma \in \mathrm{supp}(\mu)} |\mu(\sigma)| \left| \sum_{\rho \in B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) \right|.
\end{aligned}$$

由于 $T \to \infty$，根据条件 3.9，我们知道，对任意 $\sigma \in \mathrm{supp}(\mu)$，

$$\lim_{T \to \infty} \left| \sum_{\boldsymbol{\rho} \in B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\sigma,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) \right| = 0.$$

因此，由于 $T \to \infty$，我们有

$$|\mu(A)| \le \lim_{T \to \infty} \left| \sum_{\rho \notin B(T)} \mu^{\mathrm{GD}}_{T,\tau,\boldsymbol{b}}(\sigma_0 \in A \wedge \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}) \right|.$$

□

附录 B. 约束满足问题公式的集中性不等式

本节通过切比雪夫不等式，推导原子约束满足问题公式中取值为 1 的变量数量的集中不等式，并证明定理1.4。

要使用切比雪夫不等式，只需推导期望的下界和方差的上界。对于期望的下界，我们利用局部均匀性。对于方差，根据方差的定义，我们考虑逐变量方差和协方差（见方程（49））。对于逐变量方差，我们再次利用局部均匀性。对于协方差，我们采用 [WY24]中的递归耦合来给出总影响的上界。

设 $\Phi = (V, [q]^V, C)$ 是一个 (k, Δ)-约束满足问题公式。设 $\lambda > 0$ 为取值 1 时的外场，配分函数为 $Z = Z(\Phi, \lambda) = \sum_{\sigma \in \Omega_\Phi} \lambda^{|\sigma^{-1}(1)|}$。设 μ 为对应的吉布斯分布，并设 $\sigma \sim \mu$。对于任意 $v \in V$，令 $\mathbf{X}_v = \mathbb{I}[\sigma_v = 1]$ 为一个随机变量。令 $\mathbf{X} = \sum_{v \in V} \mathbf{X}_v$。我们证明，在下述条件下，可以推出一个集中不等式。

条件 B.1。 $\Phi = (V, [q]^V, C)$ 是一个原子的 (k, Δ)-约束满足问题公式。令 $r_{\max} \triangleq \text{最大值}_{\{1,\lambda\}} q^{-1+\lambda}$。有

$$(8\mathrm{e})^3 \cdot \max\{1, 1/\lambda\} \cdot r_{\max}^{k-1} \cdot (\Delta k + 1)^{2+\zeta} \le 1, \text{其中 } \zeta = \frac{2 \ln(2 - r_{\max})}{\ln(1/r_{\max}) - \ln(2 - r_{\max})}.$$

我们指出，当 λ 为常数且 q 足够大时，上述条件可由以下条件渐近地推出

$$q \gtrsim \max\left\{ \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \lambda \right\} \cdot \Delta^{\frac{2+o_q(1)}{k-1}}.$$

定理 B.2。 设 $\Phi=(V,\ [q]^V,\ C)$ 是一个原子的 $(k,\ \Delta)$-约束满足问题公式，并设 μ 为定义在 Ω_Φ 上的吉布斯分布，其外场为 λ。假设条件 *B.1* 成立，则有

$$\forall\delta>0,\quad \Pr_\mu\left[|X-\mathbb{E}_\mu[X]|\geq\delta\cdot\mathbb{E}_\mu[X]\right]\leq\frac{4\Delta k(\Delta k+1)}{\delta^2\cdot\left(\frac{\lambda}{q-1+\lambda}\cdot(1-1/(\Delta k))\right)^2\cdot|V|}.$$

在证明该定理之前，我们先证明该定理蕴含定理1.4。

定理 *1.4*的证明。 注意，在 Ω_Φ 上的均匀分布是外场为 $\lambda=1$的吉布斯分布。在这种情况下，有 $r_{\max}=1/q$。定理 1.4 得证。 □

接下来，我们使用切比雪夫不等式证明上述定理。只需对期望$\mathbb{E}_\mu[X]$ 和方差 $\mathrm{Var}_\mu[X]$进行界定。我们先界定期望，并回顾洛瓦兹局部引理（定理 2.1）、其条件方程（9）以及定理2.2。

引理 B.3。 假设满足条件 *B.1*，设 μ 是 Ω_Φ 上的吉布斯分布，外场为 λ。对于任意变量 $v\in V$，有

$$\frac{\lambda}{q-1+\lambda}-\frac{\lambda}{(q-1+\lambda)\Delta k}\leq\Pr_\mu[X_v=1]\leq\frac{\lambda}{q-1+\lambda}+\frac{\lambda}{(q-1+\lambda)\Delta k}.$$

证明。回顾 $\sigma\sim\mu$。令 P 为 $[q]^V$ 上的乘积分布。我们先验证条件方程 (9)。对于每个约束 $c\in C$，令 B_c 为事件： c 不满足，即 $B_c=\neg c$，并令 $x(B_c)\triangleq\min\{1,\lambda\}\,2(\Delta k)^2\cdot\max\{\frac{1}{q-1+\lambda},\frac{\lambda}{q-1+\lambda}\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda}{q-1+\lambda}(\Delta k)^2$。接下来，~~根据条件 B.1，可以验证~~

$$\mathcal{P}[B_c]\leq\left(\frac{\lambda}{q-1+\lambda}\right)^k\leq\frac{\min\{1,\lambda\}\cdot\max\{1,\lambda\}}{2(q-1+\lambda)(\Delta k)^2}\left(1-\frac{\min\{1,\lambda\}\cdot\max\{1,\lambda\}}{2(q-1+\lambda)(\Delta k)^2}\right)^{\Delta k}.$$

由 $|\Gamma(B_c)|\leq k\Delta$，可得 $\mathcal{P}[B_c]\leq x(B_c)\cdot\prod_{B'\in\Gamma(B_c)}(1-x(B'))$。最后，根据定理 2.2，对于任意变量 v，有

$$\Pr_\mu[X_v\neq1]\leq\left(1-\frac{\lambda}{q-1+\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda}{2(q-1+\lambda)(\Delta k)^2}\right)^{-\Delta k}\leq1-\frac{\lambda}{q-1+\lambda}+\frac{\lambda}{(q-1+\lambda)\Delta k},$$

and

$$\Pr_\mu[X_v=1]\leq\frac{\lambda}{q-1+\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{2(q-1+\lambda)(\Delta k)^2}\right)^{-\Delta k}\leq\frac{\lambda}{q-1+\lambda}+\frac{\lambda}{(q-1+\lambda)\Delta k}.$$

□

作为推论，我们有

推论 B.4. 假设条件 *B.1* 成立，并令 μ 为定义在 Ω_Φ 上的吉布斯分布，其外场为 λ。我们有 $\mathbb{E}_\mu[X]\geq\left(\frac{\lambda}{q-1+\lambda}-\frac{\lambda}{q-1+\lambda()\Delta k}\right)\cdot|V|=\frac{\lambda}{q-1+\lambda}\cdot(1-1/(\Delta k))\cdot|V|$。

接下来，我们界定方差。根据方差的定义，可得

$$\mathrm{Var}_\mu[X]=\sum_{v\in V}\mathrm{Var}_\mu[X_v]+\sum_{u\neq v}\mathrm{Cov}_\mu[X_u,X_v].\tag{49}$$

接下来，我们处理逐变量方差。

引理 B.5. 假设条件 *B.1* 成立，并令 μ 为定义在 Ω_Φ 上的吉布斯分布，其外场为 λ。对于任意变量 v，有 方差$_\mu[X_v]\leq\frac{\lambda}{q-1+\lambda}+\frac{\lambda}{q-1+\lambda()\Delta k}$。

证明。 该引理 f 由方差的定义可得$_\mu[X_v]=\Pr_\mu[X_v=1]-\Pr_\mu[X_v=1]^2$ 以及引理 B.3 .

□

接下来我们对 $\sum_{u\neq v}\mathrm{Cov}_\mu[X_u,X_v]$ 进行界定。注意，对于 $u,v\in V$，我们有

$$\text{协方差}_\mu[X_u,X_v]=\text{概率}_\mu[X_u=X_v=1]-\Pr_\mu[X_u=1]\Pr_\mu[X_v=1]\le|\Pr_\mu[X_u=1\mid X_v=1]-\Pr_\mu[X_u=1]|.$$

接下来，对于任意 $v\in V$，我们利用 $\sum_{v\neq u}|\text{概率}_\mu[X_u=1\mid X_v=1]-\text{概率}_\mu[X_u=1]|$ 来进行界定，该界由 $\mu(\cdot\mid\sigma_v=1)$ 与 $\mu(\cdot)$ 在 [WY24]中的递归耦合给出。我们先概述其直观含义。设$(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 为该耦合的一种实现。我们用 $d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 表示$\mathcal{A}$ 与$\mathcal{B}$之间的汉明距离。于是有

$$\begin{aligned}\sum_{v\neq u}|\Pr_\mu[X_u=1\mid X_v=1]-\Pr_\mu[X_u=1]|&\le\sum_{v\neq u}\mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}|\mathbb{I}[\mathcal{A}_v=1]-\mathbb{I}[\mathcal{B}_v=1]|\\&\le\mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})],\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由耦合引理得出，最后一个不等式则由期望的线性性得出。接下来，我们给出以下引理来界定 $\mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}[d_{\mathrm{Ham}}(\mathrm{A},\mathrm{B})]$。对于两个约束满足问题公式$\Phi=(V,Q,C)$和$\Phi'=(V,Q,C\setminus\{c\})$，其中 $c\in C$，我们稍微滥用记号 μ：将 μ_C表示为外场为 λ时，Φ 所有满足赋值上的吉布斯分布；将$\mu_{C\setminus\{c\}}$ 表示为外场为 λ时，Φ' 所有满足赋值上的吉布斯分布。

我们加入以下条件，它是对 [WY24 中条件 1] 的具体说明。我们指出，该表述不同于 [WY24 中的条件 1]。在 [WY24], 中，他们考虑所有满足赋值上的均匀分布，这等价于 $\lambda=1$ 的情形。加入外场 λ 会隐式地改变违反概率，并显式地改变 ζ 的定义。沿用相同的证明过程，我们得到以下条件。我们还指出，当 $\lambda=1$ 时，$r_{\max}$（定义见下一个条件）等价于 $1/q$。因此，我们可以推出 [WY24 中的条件 1] 所述结论。

条件 B.6 ([WY24，条件 1])。 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 是一个约束满足问题公式。

- 令 $k_{\min}$ 表示约束的最小规模，即 $k_{\min}\triangleq\min_{c\in C}|\mathrm{vbl}(c)|$;
- 令 D表示依赖度，即 $D\triangleq\max_{c\in C}|\{c'\in C\setminus\{c\}|\mathrm{vbl}(c)\cap\mathrm{vbl}(c')\neq\emptyset\}|$;
- 令 $r_{\max}\triangleq\max\{1,\lambda\}q^{-1+\lambda}$，并令 $p\triangleq r^{k_{\min}\max}$。注意，$p$ 是乘积分布下 C 中任意约束的违反概率上界。

成立的是

$$(8\mathrm{e})^3\cdot p\cdot(D+1)^{2+\zeta}\le1,\ \textit{where}\ \zeta=\frac{2\ln(2-r_{\max})}{\ln(1/r_{\max})-\ln(2-r_{\max})}.$$

我们指出，条件 B.1 强于条件 B.6。沿用 [WY24，定理 3。1], 的证明，可得以下定理。

定理 B.7 ([WY24，定理 3。1])。 设约束满足问题公式 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 满足条件 *B.6*。令k 为约束的最大大小，即 $k\triangleq\max_{c\in C}|\mathrm{vbl}(c)|$。令 $c_0\in C$ 为任意约束。存在 μ_C 和$\mu_{C\setminus\{c_0\}}$之间的耦合$(\mathcal{A},\mathcal{B})$，使得对于任意整数 $K\ge1$,

$$\Pr[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})\ge k\cdot(D+1)\cdot K]\le2^{-K},$$

其中，$d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 表示$\mathcal{A}$ 与$\mathcal{B}$之间的汉明距离。

作为一个推论，我们有

引理 B.8. 设约束满足问题公式 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 满足条件 *B.1.* 设 $v\in V$是任意一个变量。存在一个耦合 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$，其耦合对象为 $\mu(\cdot)$和 $\mu(\cdot\mid\sigma_v=1)$，使得

$$\mathbb{E}[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})]\le2\Delta k\cdot(\Delta k+1).$$

证明。 令 C' 为新的约束集，通过设定 $\sigma_v=1$对其进行简化，即移除已被 $\sigma_v=1$ 满足的约束，并从其他约束中移除变量 v。注意，C' 中的每个约束都至少包含 $k-1$ 个变量。现在，我们使用三角不等式构造 μ_C与 $\mu_{C'}$之间的耦合。令 $S=C\oplus C'$为 C与 C'之间的对称差。并注意 $|S|\le2\Delta$。我们首先逐个移除 $C\setminus C'$ 中的约束。然后逐个添加 $C'\setminus C$中的约束。对于步骤 i，令 A_i，B_i为

定理中的耦合B.7。根据条件 B.1，可以验证条件 B.6 成立。接下来，根据定理B.7，我们有

$$\mathbb{E}_{(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i)}[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i)] \le \sum_{K=1}^{\infty} \frac{k\cdot(\Delta k+1)}{2^K} \le k\cdot(\Delta k+1).$$

那么由三角不等式可得此引理。 □

最后，我们证明定理 B.2。

定理 *B.2* 的证明。 由推论 B.4，可得 $\mathbb{E}_\mu[X] \ge \frac{\lambda}{q-1+\lambda}\cdot(1-1/\cancel{(\Delta k)})\cdot|V|$。由引理 B.5 和引理 B.8，可得 $\mathrm{Var}_\mu[X] \le 4\Delta k(\Delta k+1)|V|$。由切比雪夫不等式，可得

$$\forall\delta>0,\quad \Pr_\mu\left[|X-\mathbb{E}_\mu[X]| \ge \delta\cdot\mathbb{E}_\mu[X]\right] \le \frac{4\Delta k(\Delta k+1)}{\delta^2\cdot\left(\frac{\lambda}{q-1+\lambda}\cdot(1-1/(\Delta k))\right)^2\cdot|V|}.$$

□

附录 C. 中心极限定理

本节建立约束满足问题公式的中心极限定理框架。作为应用，我们推导超图 q-着色的中心极限定理，并证明定理 1.2。为建立中心极限定理，我们使用以下引理，该引理出自 [MS24]。

引理 *C.1 ([MS24，定理 1.2])*。设 $X\in\{0,\dots,n\}$ 是一个均值为 $\bar{\mu}$、标准差为$\bar{\sigma}$且概率母函数为 g的随机变量，并令 $X^*=(X-\bar{\mu})\,\bar{\sigma}^{-1}$。对于满足条件 $|1-\zeta|\ge\delta$的 $\delta\in(0,1)$，以及 g的所有根 ζ，

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|\Pr[X^*\le t]-\Pr[\mathcal{Z}\le t]| \le O\left(\frac{\log n}{\delta\bar{\sigma}}\right),$$

其中，$\mathcal{Z}\sim N(0,1)$ 是一个标准高斯随机变量。

只需证明零点自由性和方差下界。对于零点自由性，我们已在第 4 节建立了一个框架。本节首先建立一个条件，以给出方差的下界（引理 C.3）。我们主要通过 局部均匀性 （引理 C.4）以及通过 递归耦合 得到的总影响 界（引理 C.6）。

设 $\Phi=(V,\ [q]^V,\ C)$是一个原子的 $(k,\ \Delta)$-约束满足问题公式。再次考虑采用投影 $\boldsymbol{f}=(f_v)_{v\in V}$ 的状态压缩方案（定义 4.1），其中 $f_v:\ [q]\to\Sigma_v$。我们考虑 Ω_Φ 上带有外场 λ、作用于投影符号 $1^\blacktriangle$ 的吉布斯分布，并将其记为 μ（定义 4.2，其中 λ 是一个实数）。

我们考虑具有投影符号 $1^\blacktriangle$ 的变量数量的中心极限定理。令 $\sigma\sim\mu$ 如下 μ。令Y_v 表示 v 的投影符号是否为$1^\blacktriangle$的随机变量；即，如果 $\sigma_v\in f_v^{-1}(1^\blacktriangle)$，则 $Y_v=1$；否则，$Y_v=0$。令 $\mathrm{Y}=\sum_{v\in V}Y_v$。

为简单起见，我们假设对于任意 $v\in V$，如果 $1^\blacktriangle\in\Sigma_v$，则 $|f_v^{-1}(1^\blacktriangle)|=q^*$ 且 $0<q^*<q$。我们首先给出方差的界。

条件 C.2。 $\Phi=(V、[q]^V、C)$ 是一个原子的（k、Δ）-约束满足问题公式。令 $r_{\max}\triangleq\underline{\text{最大值}\{1,\ \lambda\}}\,q-q^*+q^*\lambda$。则有

$$16\mathrm{e}^2\cdot\frac{(q-q^*+q^*\lambda)^2}{\lambda\cdot(q-q^*)}\cdot r_{\max}^{\frac{2(k-1)}{2+\zeta}}\cdot(\Delta k+1)^4\le 1,\quad \textit{where}\ \zeta=\frac{2\ln(2-r_{\max})}{\ln(1/r_{\max})-\ln(2-r_{\max})}.$$

我们指出，对于常数 λ、q^*，以及充分大的 q，上述条件渐近地由以下条件蕴含：

$$q\gtrsim\max\left\{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1+o_q(1)}{k-2}},\lambda\right\}\Delta^{\frac{4+o_q(1)}{k-2}}.$$

引理 C.3. 假设满足条件 C.2，设 μ 是定义在 Ω_Φ 上的吉布斯分布，其外场为 λ。设 N^*为投影字母表包含 $1^\blacktriangle$的变量数，即 $N^* = |\{v \in V \mid 1^\blacktriangle \in \Sigma_v\}|$。则有

$$\mathrm{Var}_\mu[\mathcal{Y}] \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(q^*\lambda)\cdot(q-q^*)}{(q-q^*+q^*\lambda)^2} \cdot \left(\frac{\Delta k - 1}{\Delta k}\right)^2 \cdot N^*$$

在证明该引理之前，我们先建立超图着色的中心极限定理，如定理 1.2 中所述，现将其重述如下。给定一个 k-均匀超图 $H=(V,\mathcal{E})$，其最大度为 Δ。我们考虑 q-着色在 H上的情形。令 $\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$ 为一个随机变量，表示在所有可能的着色服从均匀分布时，颜色为 1 的顶点数。

定理 1.2 （超图中颜色类的中心极限定理 q-着色）。 固定任意整数 $k \geq 50$ 和 $q \geq 700\Delta^{\frac{5}{k-10}}$。令 $\bar{\mu}$ 为 $\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$的期望，令 $\bar{\sigma}$ 为$\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$的标准差。则有

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\Pr\left[(\mathcal{X}_{\mathrm{co}}-\bar{\mu})\bar{\sigma}^{-1} \leq t\right] - \Pr[\mathcal{Z}\leq t]\right| \leq O_{q,\Delta,k}\left(\frac{\ln|V|}{\sqrt{|V|}}\right),$$

其中，$\mathcal{Z} \sim N(0,1)$ 是一个标准高斯随机变量。

定理 1.2 的证明。我们结合引理 C.1 和引理 C.3。形式化地说，引理 C.1 中的概率母函数 g按如下方式选取。令 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 为超图 q-着色在 H上的对应约束满足问题公式。根据定理 1.1，令 $\lambda \in \mathrm{D}\left(1, \frac{1}{16\Delta^2 k^5}\right)$。我们知道，配分函数$Z_H^{\mathrm{co}}(\lambda) \neq 0$。令 $g(\lambda) = Z_H^{\mathrm{co}}(\lambda)\, Z_H^{\mathrm{co}}(1)$ 为一个概率母函数。可以验证，相对于 g 的概率分布恰好是 X_{co}的分布。零点自由性由定理 1.1 推出。

接下来，我们使用引理 C.3 验证 X_{co} 的方差下界。注意，$\mathrm{Var}[\mathrm{X}_{\mathrm{co}}] = \mathrm{Var}_\mu[\mathrm{Y}]$。为了使用引理 C.3，我们首先构造一个新的原子约束满足问题 $\Phi' = (V,[q]^V,C')$。具体而言，对于每个限制一条超边不能为单色的约束 $c \in C$，我们在 C'中构造 q 个约束，其中每个约束限制一种单色的颜色赋值。注意， C' 中的每个约束恰好包含 k 个变量，并且每个变量最多属于 $q\Delta$ 个约束。可以验证， Φ 和 Φ'等价地表示超图 H 上的超图 q-着色。

为了使用引理 C.3，只需验证 $k \geq 50$、 $q \geq 700\Delta^{\frac{5}{k-10}}$ 蕴含条件 C.2。注意，当 $q^* = 1$ 且 $\lambda = 1$时，只需证明 $16\mathrm{e}^2q^2\left(\frac{1}{q}\right)^{k-1}\cdot(q\Delta k+1)^{4(2+\zeta)} \leq 1$，其中 $\zeta = 2\ln(2-1/q)\ln(q) - \ln(2-1/q)$。将 $16\mathrm{e}^2q^2\left(\frac{1}{q}\right)^{k-1}\cdot(q\Delta k+1)^{4(2+\zeta)} \leq 1$ 重新排列可得 $q \geq (16\mathrm{e}^2)^{\frac{2+\zeta}{2k-14-6\zeta}}\left(\Delta k+\frac{1}{q}\right)^{\frac{8+4\zeta}{2k-14-6\zeta}}$。只需证明 $q \geq (256\mathrm{e}^2)^{\frac{2+\zeta}{2k-14-6\zeta}}(\Delta k)^{\frac{8+4\zeta}{2k-14-6\zeta}}$。根据 $\Delta \geq 1$ 和 $k \geq 50$，可得$^{8+4\zeta}q \geq 700$，因此有 $\zeta \leq 0.23638$。结合 $k \geq 50$，只需证明 $q \geq 2\Delta^{\frac{4.5}{2k-14-6\zeta}}$。根据 $\zeta \leq 0.23638$，只需证明 $q \geq \Delta^{\frac{4.5}{k-8}}$。因此条件 C.2 成立。由引理 C.3 可知，$\mathrm{Var}_\mu[\mathrm{X}_{\mathrm{co}}] = \Theta_{q,\Delta,k}(|V|)$。因此，该定理由引理 C.1 得证。 □

C.1. **方差界定**。 现在，我们考虑如何界定方差并证明引理 C.3。回想一下， μ 是定义在 Ω_Φ 上的吉布斯分布，其外场为 λ。注意

$$\mathrm{Var}_\mu[\mathcal{Y}] = \sum_{v\in V}\mathrm{Var}_\mu[Y_v] + \sum_{\substack{u,v\in V\\ u\neq v}}\mathrm{Cov}_\mu[Y_u,Y_v]. \tag{50}$$

我们通过利用局部均匀性给出各变量方差之和 $\sum_{v\in V}\mathrm{Var}_\mu[Y_v]$ 的下界，并通过总影响给出协方差绝对值的上界，从而建立方差的下界。

下一个引理建立了局部均匀性。

Lem引理 C.4. 假设条件 C.2成立，则对于任意变量 $v \in V$ 满足 $1^{\blacktriangle} \in \Sigma_v$，我们有

$$\frac{q^*\lambda}{q-q^*+q^*\lambda} - \frac{q^*\lambda}{(q-q^*+q^*\lambda)\Delta k} \le \Pr_\mu[Y_v = 1] \le \frac{q^*\lambda}{q-q^*+q^*\lambda} + \frac{q-q^*}{(q-q^*+q^*\lambda)\Delta k}.$$

证明。我们使用定理 2.2 来证明此引理。令 $\sigma \sim \mu$ 服从带有外场 λ 的吉布斯分布 μ。令 P 为定义在 $[q]^V$ 上的乘积分布。我们首先验证条件方程 (9)。回顾一下，$r_{\max} \triangleq \max\{1,\lambda\}^{q-q^*+q^*\lambda}$。对于每个约束 $c \in C$，令 B_c 为~~约~~束 c 被违反的事件，即$B_c = \neg c$，并令 $x(B_c) \triangleq \mathrm{e} \cdot r_{\max}^k$。根据条件 C.2，可以验证

$$\mathcal{P}[B_c] \le r_{\max}^k \le \mathrm{e} \cdot r_{\max}^k \cdot \left(1 - \mathrm{e} \cdot r_{\max}^k\right)^{\Delta k}.$$

鉴于 $|\Gamma(B_c)| \le k\Delta$，可得 $\mathcal{P}[B_c] \le x(B_c) \cdot \prod_{B' \in \Gamma(B_c)} (1-x(B'))$。最后，根据定理 2.2，对于任意变量 v，有

$$\Pr_\mu[Y_v = 0] \le \frac{q-q^*}{q-q^*+q^*\lambda}\left(1 - \mathrm{e}r_{\max}^k\right)^{-\Delta k} \le \frac{q-q^*}{q-q^*+q^*\lambda} + \frac{q^*\lambda}{(q-q^*+q^*\lambda)\Delta k},$$

and

$$\Pr_\mu[Y_v = 1] \le \frac{q^*\lambda}{q-q^*+q^*\lambda}\left(1 - \mathrm{e}r_{\max}^k\right)^{-\Delta k} \le \frac{q^*\lambda}{q-q^*+q^*\lambda} + \frac{q-q^*}{(q-q^*+q^*\lambda)\Delta k}.$$

□

作为推论，我们得到 $\mathrm{Var}_\mu[Y_v]$ 的如下界。

Co推论 C.5. 假设条件 C.2成立，则对于任意变量 v 满足 $1^{\blacktriangle} \in \Sigma_v$，我们有 t

$$\mathrm{Var}_\mu[Y_v] \ge \frac{(q^*\lambda)\cdot(q-q^*)}{(q-q^*+q^*\lambda)^2} \cdot \left(\frac{\Delta k - 1}{\Delta k}\right)^2.$$

证明。根据方差$_\mu[Y_v]$的定义，有 方差$_\mu[Y_v] = \Pr_\mu[Y_v = 1] - \Pr_\mu[Y_v = 1]^2$。然后，将引理 C.4中的界代入即可得到下界。□

为了处理方程 (50中的协方差，我们再次利用 [WY24] 中的递归耦合来界定协方差。然而，为了推导方差的下界，我们需要一个强得多的总影响上界。与上一节不同，我们需要修改 [WY24]中的条件。我们首先概述总影响如何为协方差提供上界的基本思路。需要指出的是，这部分与我们在上一节中的做法几乎相同。之后，我们将从较高层次介绍如何修改 [WY24]中的证明。

令 $u, v \in V$和 $u \ne v$。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_\mu[Y_u, Y_v] &= \Pr_\mu\left[\sigma_u \in f_u^{-1}(1^{\blacktriangle}) \wedge \sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})\right] - \Pr_\mu\left[\sigma_u \in f_u^{-1}(1^{\blacktriangle})\right] \cdot \Pr_\mu\left[\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})\right] \\
&= \sum_{x \in f_u^{-1}(1^{\blacktriangle})} \Pr_\mu[\sigma_u = x]\left(\Pr_\mu\left[\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle}) \mid \sigma_u = x\right] - \Pr_\mu\left[\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})\right]\right) \\
&\ge -\sum_{x \in f_u^{-1}(1^{\blacktriangle})} \left|\Pr_\mu\left[\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle}) \mid \sigma_u = x\right] - \Pr_\mu\left[\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})\right]\right|.
\end{aligned}$$

则有

$$\sum_{\substack{u,v \in V \\ u \ne v}} \mathrm{Cov}_\mu[Y_u, Y_v] \ge -\sum_{u \in V} \sum_{x \in f_u^{-1}(1^{\blacktriangle})} \sum_{v \in V : u \ne v} \left|\Pr_\mu\left[\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle}) \mid \sigma_u = x\right] - \Pr_\mu\left[\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})\right]\right|. \quad (51)$$

稍后在引理 C.6 ，对于所有 $u \in V$和 $x \in f_u^{-1}(1^{\blacktriangle})$，我们给出了总数的一致上界

总影响：

$$\max_{u \in V} \sum_{v \in V : u \ne v} \left|\Pr_\mu\left[\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle}) \mid \sigma_u = x\right] - \Pr_\mu\left[\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})\right]\right|. \quad (52)$$

我们指出，这是标准总影响的一种变体。

引理 C.6。 设 $\Phi=(V,\ [q]^V,\ C)$ 是满足条件 $(k,\ \Delta)$ 的约束满足问题公式，并且令 C.2，μ 为在外场 λ 下定义在 Ω_Φ 上的吉布斯分布。对于任意 $x\in f_v^{-1}(1^\blacktriangle)$，总影响方程 (52) 的上界为 $\frac{1}{2q^*}\cdot\frac{(q^*\lambda)\cdot(q-q^*)}{(q-q^*+q^*\lambda)^2}\cdot\left(\frac{\Delta k-1}{\Delta k}\right)^2$。

我们将在下一小节证明该引理。首先利用它证明引理 C.3。

引理 *C.3* 的证明。 回顾方程（50）。结合推论 C.5，我们得到

$$\sum_{v\in V}\mathrm{Var}_\mu\left[Y_v\right]\geq\frac{(q^*\lambda)\cdot(q-q^*)}{(q-q^*+q^*\lambda)^2}\cdot\left(\frac{\Delta k-1}{\Delta k}\right)^2\cdot N^*.$$

结合引理 C.6 和方程（51），我们得到

$$\mathrm{Var}_\mu\left[\mathcal{Y}\right]\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{(q^*\lambda)\cdot(q-q^*)}{(q-q^*+q^*\lambda)^2}\cdot\left(\frac{\Delta k-1}{\Delta k}\right)^2\cdot N^*.$$

□

C.2。 **总影响的上界**。 本小节中，我们证明引理 C.6。我们指出，该证明与引理 B.8 的证明类似。

关键在于利用 [WY24] 中的递归耦合。对于两个满足 $c\in C$ 的约束满足问题公式 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 和 $\Phi'=(V,[q]^V,C\backslash\{c\})$，我们再次稍微滥用记号 μ，用 μ_C 表示 Φ 的所有满足赋值上的吉布斯分布，用 $\mu_{C\backslash\{c\}}$ 表示 Φ' 的所有满足赋值上的吉布斯分布。与引理 B.8 的证明类似，我们构造原始 CSP 公式与一个在某个变量的部分赋值条件下得到的新 CSP 公式之间的耦合。形式地，给定 $v\in V$、$x\in[q]$ 和约束满足问题公式 $\Phi=(V,[q]^V,C)$，我们考虑在 $\sigma_v=x$ 条件下得到的新约束满足问题公式 $\Phi'=(V\backslash\{v\}\ \ [q]^V\backslash\{v\}C')$。显然，如果原始 Φ 满足条件 C.2，那么新的 Φ' 满足以下条件：

条件 C.7。 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 是一个约束满足问题公式，其中每个约束包含 $k-1$ 个或 k 个变量，且每个变量至多属于 Δ 个约束。令 $r_{\max}\triangleq$ 最大值$_{\{1,\lambda\}}\frac{q-q^*}{q-q^*+q^*\lambda}$ 则有

$$16\mathrm{e}^2\cdot\frac{(q-q^*+q^*\lambda)^2}{\lambda\cdot(q-q^*)}\cdot r_{\max}^{\frac{2(k-1)}{2+\zeta}}\cdot(\Delta k+1)^4\leq 1,\quad where\ \zeta=\frac{2\ln\left(2-r_{\max}\right)}{\ln\left(1/r_{\max}\right)-\ln\left(2-r_{\max}\right)}.$$

我们还注意到，简化公式本身不会破坏该条件。

观察 C.8。 如果 Φ' 满足条件 *C.7*，则移除所有已满足的约束，并从其他约束中删除被固定的变量 Φ''后得到的公式 v 也满足条件 *C.7*。

在条件 C.7下，存在一种具有有界汉明距离的耦合。

引理 C.9。 设 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 是一个满足条件 *C.7*的约束满足问题公式。则对任意约束 $c\in C$，存在 μ_C 和 $\mu_{C\backslash\{c\}}$的一个耦合 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$，使得

$$\mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}\left[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})\right]\leq\frac{1}{4q^*\Delta}\cdot\frac{(q^*\lambda)\cdot(q-q^*)}{(q-q^*+q^*\lambda)^2}\cdot\left(\frac{\Delta k-1}{\Delta k}\right)^2,$$

其中 $d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})\triangleq\sum_{v\in V}\mathbb{I}[\mathcal{A}_v\neq\mathcal{B}_v]$ 表示$\mathcal{A}$ 与$\mathcal{B}$之间的汉明距离

wh

.

我们首先利用这个引理证明引理 C.6。

引理 *C.6* 的证明。 我们利用 C 部分赋值 $\sigma_u=x$ 进行化简，并将新的约束集记为 C'，即移除所有已被 $\sigma_u=x$ 满足的约束，并从其他约束中消去变量 u。注意，在这个新的约束满足问题公式中，C' 中的每个约束至少包含 $k-1$ 个变量

且至多包含 k 个变量，并且每个变量至多属于 Δ 个约束。根据观察 C.8，这个新的约束满足问题公式满足条件C.7。

令 μ' 为 C' 所有满足赋值上的吉布斯分布，外场为 λ。注意，$\mu'(\cdot) = \mu(\cdot \mid \sigma_u = x)$。我们声称存在 μ 和 μ' 的一个耦合 (A，B)，使得

$$\mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})] \le \frac{1}{2q^*} \cdot \frac{(q^*\lambda)\cdot(q-q^*)}{(q-q^*+q^*\lambda)^2} \cdot \left(\frac{\Delta k-1}{\Delta k}\right)^2 .$$

引理C.6 由此　　可得，因为总影响可以用汉明距离来界定　　：

$$\begin{aligned}
&\sum_{v\in V:u\neq v} \left|\mu(\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle}) \mid \sigma_u = x) - \mu(\sigma_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle}))\right| \\
&\le \sum_{v\in V:u\neq v} \mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}\left[\left|\mathbb{I}[\mathcal{A}_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})] - \mathbb{I}[\mathcal{B}_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})]\right|\right] \\
&= \mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}\left[\sum_{v\in V:u\neq v} \left|\mathbb{I}[\mathcal{A}_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})] - \mathbb{I}[\mathcal{B}_v \in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})]\right|\right] \\
&\le \mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})],
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由标准耦合引理得出，而等式则由期望的线性性得出。

最后，我们证明所声称的耦合。回忆一下，C 或 C' 中的每个变量至多属于 Δ 个约束。令 $C \oplus C'$ 为 C 与 C'之间的对称差。我们有 $|C \oplus C'| \le 2\Delta$。利用这一事实和引理 C.9，我们通过三角不等式对 $\mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})]$ 进行界定。首先逐一移除 $C\backslash C'$ 中的所有约束，然后逐一添加 $C'\backslash C$ 中的约束。根据三角不等式，有

$$\mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})] \le \frac{1}{2q^*} \cdot \frac{(q^*\lambda)\cdot(q-q^*)}{(q-q^*+q^*\lambda)^2} \cdot \left(\frac{\Delta k-1}{\Delta k}\right)^2 .$$

□

我们通过概述引理 C.9 的证明来结束本小节；该证明几乎与 [WY24, 引理 3.10] 的证明完全相同。我们使用 [WY24, 算法 1] 中 μ_C 与 $\mu_{C\backslash\{c\}}$ 之间的耦合 (A, B)。他们在 [WY24, 定义 3.4] 中定义了一个集合 B，作为耦合过程不一致性的见证。根据 [WY24, 引理 3.5]，，他们证明，对于任意满足 d_{Ham}(A, B) $= K$ 的耦合实现 (A, B)，都有 $|B| \ge \lfloor K/(k\cdot(\Delta k+1))\rfloor$。并且，$|B| = 0$ 当且仅当 $d_{\mathrm{Ham}}(X,Y) = 0$。

因此，若 $|B| = K$，则有 d_{Ham}(A，B) $\le k\cdot(\Delta k+1)\cdot K$。所以有

$$\mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})] \le k\cdot(\Delta k+1)\cdot\sum_{i=1}^{|V|}\Pr[|B|\ge i] .$$

回顾一下，$r_{\max} = \max\{1,\lambda\}\, q-q^*+q^*\lambda$ 并且 $\zeta = \dfrac{2\ln(2-r_{\max})}{\ln(1/r_{\max})-\ln(2-r_{\max})}$。通过逐步推演 [WY24，引理 3。10], 我们得到

$$\Pr[|B|\ge i] \le \left(\mathrm{e}(\Delta k)^2\cdot r_{\max}^{\frac{2(k-1)}{2+\zeta}}\cdot\left(1-\mathrm{e}\cdot r_{\max}^{k-1}\right)^{-2(\Delta k+1)}\right)^i \le \left((\mathrm{e}\Delta k)^2\cdot r_{\max}^{\frac{2(k-1)}{2+\zeta}}\right)^i ,$$

其中，最后一个不等式是由条件 C.2 得出的。因此，结合条件 C.2，我们有

$$\sum_{i=1}^{|C|}\Pr[|B|\ge i] \le \frac{(\mathrm{e}\Delta k)^2\cdot r_{\max}^{\frac{2(k-1)}{2+\zeta}}}{1-(\mathrm{e}\Delta k)^2\cdot r_{\max}^{\frac{2(k-1)}{2+\zeta}}} \le 2(\mathrm{e}\Delta k)^2\cdot r_{\max}^{\frac{2(k-1)}{2+\zeta}} .$$

因此，我们有

$$\sum_{i=1}^{|C|} \Pr\left[|B| \geq i\right] \leq \frac{1}{4q^*\Delta \cdot (k(k\Delta+1))} \cdot \frac{(q^*\lambda)\cdot(q-q^*)}{(q-q^*+q^*\lambda)^2} \cdot \left(\frac{\Delta k-1}{\Delta k}\right)^2.$$

结合上述不等式，我们得到

$$\mathbb{E}_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}\left[d_{\mathrm{Ham}}(\mathcal{A},\mathcal{B})\right] \leq \frac{1}{4q^*\Delta} \cdot \frac{(q^*\lambda)\cdot(q-q^*)}{(q-q^*+q^*\lambda)^2} \cdot \left(\frac{\Delta k-1}{\Delta k}\right)^2.$$

附录 D. 局部中心极限定理

本节中，我们从中心极限定理推导出约束满足问题公式的局部中心极限定理。作为应用，我们在第 D.1 节证明了单个特殊颜色的超图着色的局部中心极限定理。我们沿用 [JPSS22] 中相同的总体思路（另见 [LWYY25]）。值得注意的是，在 [JPSS22、LWYY25], 中，外场 λ 不必是常数，并且可以依赖于 $|V|$。这使他们能够推导出一种用于计数固定大小独立集的算法。对于超图着色等一般约束满足问题公式，处理任意小的λ 似乎需要新的思路，因此本文着重研究常数外场 λ 。

设 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 是一个原子的 (k,Δ)-约束满足问题公式。我们的局部中心极限定理涉及 Φ 在投影下的情形。同样，我们考虑状态压缩方案（定义 4.1），其投影为 $\boldsymbol{f}=(f_v)_{v\in V}$，其中$f_v:\ [q]\to\Sigma_v$。设 μ 是定义在 Ω_Φ 上、在投影符号 $1^\blacktriangle$ 处外场为 λ 的吉布斯分布（定义 4.2，其中 λ 是一个实数）。我们考虑关于被赋值为投影符号 $1^\blacktriangle$ 的变量数量的局部中心极限定理。令 $\sigma\sim\mu$ 遵循 μ，并令Y_v 为指示 v 的投影符号是否为 $1^\blacktriangle$ 的随机变量；也就是说，若 $\sigma_v\in f_v^{-1}(1^\blacktriangle)$，则 $Y_v=1$；否则，$Y_v=0$。令 $\mathrm{Y}=\sum_{v\in V}Y_v$ 为该求和。我们假设，对于任意变量 $v\in V$，若 $1^\blacktriangle\in\Sigma_v$，则有 $|f_v^{-1}(1^\blacktriangle)|=q^*$，其中$0<q^*<q$。令 N^* 为满足 $1^\blacktriangle\in\Sigma_v$ 的变量数量，即 $N^*=|\{v\in V\mid 1^\blacktriangle\in\Sigma_v\}|$。

本节中，我们为 $\mathcal{Y}$建立局部中心极限定理。首先，我们需要中心极限定理的一种抽象形式，该形式已在 C 节中建立。

条件 D.1（中心极限定理）。$\Phi=(V,[q]^V,C)$ 是一个 (k,Δ)-约束满足问题公式，其吉布斯分布为μ，外场为 λ，投影符号为 $1^\blacktriangle$。令 $\bar{\mu}$ 为$\mathcal{Y}$的期望，$\bar{\sigma}$ 为$\mathcal{Y}$的标准差。定义 $\mathcal{Y}^*\triangleq(\mathrm{Y}-\bar{\mu})\,\bar{\sigma}^{-1}$。则有

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\Pr\left[\mathcal{Y}^*\leq t\right]-\Pr\left[\mathcal{Z}\leq t\right]\right|\leq\xi(q,q^*,\lambda,\Delta,k,N^*),$$

其中$\mathcal{Z}\sim N(0,1)$是一个标准高斯随机变量，ξ是一个函数。

我们的第二个要素来自 LLL 型条件。在此之前，我们先介绍两步投影方案。

定义 D.2（两步投影方案）。令 $\boldsymbol{h}=(h_v)_{v\in V}$ 为一个新的投影，其中 $h_v:\ \Sigma_v\to\Sigma'_v$。我们称 $\boldsymbol{f}$为第一投影，称 $\boldsymbol{h}$ 为第二投影。对于任意子集 $S\subseteq V$，$\Sigma'_S=\bigotimes_{v\in S}\Sigma'_v$。我们称 Σ'_S 为两步投影下的定义域/字母表。对于任意约束 $c\in C$ 以及两步投影下的任意赋值$\tau\in\Sigma'_V$，我们称 c 被 τ满足，当且仅当对于任意满足 $\forall v\in V$的赋值 $\tau'\in[q]^V$，$h(\tau'(v))=\tau(v)$，均有 $c(\tau')=$真。

条件 D.3（LLL 型条件）。给定一个原子的（k,Δ）-约束满足问题公式 $\Phi=(V,[q]^V,C)$，其两步投影为 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{h}$。设 $\mathcal{P}$ 为 V 上的乘积分布，其在投影符号 $1^\blacktriangle$ 上的外场为 λ。

(1) 令 p_{proj} 表示在两步投影后，按照乘积分布进行赋值时某个约束未被满足的最大概率，即，

$$p_{\mathrm{proj}}\triangleq\max_{c\in C}\Pr_{\tau\sim\mathcal{P}}\left[c\ \textit{is not satisfied by}\ (\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{f})(\tau)\right].$$

成立：$2\mathrm{e}^2\cdot p_{\mathrm{proj}}\cdot(\Delta k)^2\leq 1$。

(2) 令 p_{cond} 表示在乘积分布下进行两步投影后，给定一个赋值时违反某个约束的最大概率，即

$$p_{\text{cond}} \triangleq \max_{c\in C}\max_{J\in\Sigma'} \Pr_{\tau\sim\mathcal{P}}\left[c \text{ is violated by } \tau \mid \boldsymbol{h}(\tau)=J\right].$$

成立：$2\mathrm{e}\cdot p_{\text{cond}}\cdot q\Delta k \le 1$。

(3) 令 $r_{\max} \triangleq \max\{1,\lambda\}\, q=q^*+q^*\lambda$。成立：

$$(8\mathrm{e})^3\cdot\frac{q-q^*+q^*\lambda}{\min\{q-q^*,q^*\lambda\}}\cdot r_{\max}^{k-1}\cdot(\Delta k+1)^{2+\zeta}\le 1,\ \textit{where}\ \zeta=\frac{2\ln(2-r_{\max})}{\ln(1/r_{\max})-\ln(2-r_{\max})}.$$

例如，对于常数 λ 且 q 充分大时，通过选择均匀两步投影，其中第一个投影将 q 个符号映射为 $\Theta(q^{3/4})$ 个符号，第二个投影再将它们映射为 $\Theta(q^{1/2})$ 个符号，上述条件渐近地可由 $q \gtrsim \max\left\{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/(k-7/4)}, \lambda\right\}\Delta^{\frac{4+o_q(1)}{k-7}}$ 推出。

现在我们可以陈述局部中心极限定理的结果了。

定理 D.4. 假设条件 D.1 和条件 D.3 成立。令 $\mathcal{N}(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ 表示标准正态分布的密度。若 $N^*=\Theta(V)$，则有

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}}\left|\Pr[\mathcal{Y}=t]-\bar{\sigma}^{-1}\mathcal{N}((t-\bar{\mu})/\bar{\sigma})\right| = O\left(\zeta\cdot\frac{\log^{5/2}|V|}{\sqrt{|V|}}\right)+\mathrm{e}^{-\pi^2\bar{\sigma}^2/2}.$$

The 将中心极限定理提升为局部中心极限定理的关键，是以下傅里叶逆变换界 .

引理 D.5。 设 X 为一个支撑在格 $\mathcal{L}=\alpha+\beta\mathbb{Z}$ 上的随机变量，并令 $\mathcal{N}(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ 表示标准正态分布的密度。那么

$$\sup_{x\in\mathcal{L}}|\beta\mathcal{N}(x)-\Pr[X=x]|\le\beta\int_{-\pi/\beta}^{\pi/\beta}\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX}\right]-\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Z}}\right]\right|\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\pi^2/(2\beta^2)},$$

其中，$\mathcal{Z}\sim N(0,1)$ 是一个标准正态高斯随机变量。

总体而言，我们基本沿用 [JPSS22、LWYY25]中的论证。核心思想是，通过组合论证，可以忽略高傅里叶相位 $\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}^*}\right]\right|$（其中 t 较大）。对于低傅里叶相位，我们可以利用中心极限定理证明它们可以忽略。

引理 D.6。 假设条件 D.1 成立。对于任意 $t\in\mathbb{R}$ 以及任意 $\eta>0$，有

$$\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}^*}\right]-\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Z}}\right]\right|\le(2|t|\eta+1)\cdot\xi(q,q^*,\lambda,\Delta,k,N^*)+4\mathrm{e}^{-\eta^2/2}.$$

证明。 令 Y' 为与一个方差无穷小的中心高斯分布卷积后的 Y^*，从而 Y' 相对于 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度具有密度函数；只需考虑 Y'，然后再取极限。接下来，我们将 $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}'}\right]$ 表示为积分。令 $p_{\mathcal{Y}'}$ 为 Y'的分布。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}'}\right]&=\int_{\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{itz}p_{\mathcal{Y}'}(z)\,\mathrm{d}z\\&=\int_{|z|\le\eta}\mathrm{e}^{itz}p_{\mathcal{Y}'}(z)\,\mathrm{d}z\pm\mathrm{e}^{i\theta'}\Pr[|\mathcal{Y}'|\ge\eta]\\&=\left[\mathrm{e}^{itz}\left(\int_{-\eta}^{z}p_{\mathcal{Y}'}(z')\,\mathrm{d}z'\right)\right]_{z=-\eta}^{z=\eta}-\int_{-\eta}^{\eta}it\mathrm{e}^{itz}\left(\int_{-\eta}^{z}p_{\mathcal{Y}'}(z')\,\mathrm{d}z'\right)\mathrm{d}z\pm\mathrm{e}^{i\theta'}\Pr[|\mathcal{Y}'|\ge\eta].\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}'}\right] &= \mathrm{e}^{it\eta} - \int_{-\eta}^{\eta} it\mathrm{e}^{itz}\Pr\left[\mathcal{Y}' \in [-\eta, z]\right]\,\mathrm{d}z \pm \mathrm{e}^{i\theta'}\Pr\left[|\mathcal{Y}'| \geq \eta\right] - \mathrm{e}^{it\eta}\Pr\left[|\mathcal{Y}'| \geq \eta\right] \\ &= \mathrm{e}^{it\eta} - \int_{-\eta}^{\eta} it\mathrm{e}^{itz}\Pr\left[\mathcal{Y}' \in [-\eta, z]\right]\,\mathrm{d}z + \mathrm{e}^{i\theta}\Pr\left[|\mathcal{Y}'| \geq \eta\right],\end{aligned}$$

对于某个 $\theta, \theta \in [0, 2\pi)$。我们也对 Z 而非 Y 进行相同的计算′并取两者之差，根据三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}'}\right] - \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Z}}\right]\right| \\ &\leq |t|\int_{-\eta}^{\eta}\left|\Pr\left[\mathcal{Y}' \in [-\eta, z]\right] - \Pr\left[\mathcal{Z} \in [-\eta, z]\right]\right|\,\mathrm{d}z + \Pr\left[|\mathcal{Y}'| \geq \eta\right] + \Pr\left[|\mathcal{Z}| \geq \eta\right].\end{aligned}$$

结合 $\mathcal{Y}^*$（条件 D.1）的中心极限定理，可得

$$\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}^*}\right] - \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Z}}\right]\right| \leq (2|t|\eta + 1)\cdot\xi(q, q^*, \lambda, \Delta, k, N^*) + 4\mathrm{e}^{-\eta^2/2}.$$

□

接下来，我们控制高傅里叶相位 $\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}^*}\right]\right|$ 中具有较大 t 值的部分。注意，$\mathrm{Y}^* = (\mathrm{Y} - \bar{\mu})/\bar{\sigma}$。因此 $\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}^*}\right]\right| = \left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}/\bar{\sigma}}\right]\right|$。基本思路是构造一个事件 J，使得在给定条件 J 下，Y 可以分解为 ℓ 个独立随机变量 X_1，X_2，……，X_ℓ 的乘积，即 $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}/\bar{\sigma}} \mid J\right] = \prod_{j=1}^{\ell}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX_j} \mid J\right]$。我们证明，当 J 是“良好”的时候，可以控制 X_1，X_2，……，X_ℓ 的贡献，而且 J 以高概率是“良好”的。因此，我们有

$$\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\mathcal{Y}/\bar{\sigma}}\right]\right| = \left|\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{\ell}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX_j/\bar{\sigma}} \mid J\right]\right]\right| \leq \Pr\left[J \text{ is not “good”}\right] + \max_{J \text{ is “good”}}\prod_{j=1}^{\ell}\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX_j/\bar{\sigma}} \mid J\right]\right|. \tag{53}$$

接下来，对于任意 J 和任意 $j \in [\ell]$，令 X', j 为 X_j 的一个独立副本。则有

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX_j/\bar{\sigma}} \mid J\right]\right|^2 &\leq \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it(X_j - X_j')/\bar{\sigma}} \mid J\right] \\ &= \Pr\left[X_j = X_j' \mid J\right] + \sum_{k=1}\Pr\left[\left|X_j - X_j'\right| = k \mid J\right]\cos(k\cdot t/\bar{\sigma}) \\ &\leq \Pr\left[X_j = X_j' \mid J\right] + \sum_{k=2}\Pr\left[\left|X_j - X_j'\right| = k \mid J\right] + 2\Pr\left[X_j - X_j' = 1 \mid J\right]\cos(t/\bar{\sigma}).\end{aligned}$$

因此，有

$$\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX_j/\bar{\sigma}} \mid J\right]\right|^2 \leq 1 - 2\Pr\left[X_j - X_j' = 1 \mid J\right](1 - \cos(t/\bar{\sigma})) \leq 1 - \frac{1}{4}\Pr\left[X_j - X_j' = 1 \mid J\right](t/\bar{\sigma})^2. \tag{54}$$

接下来，我们通过两步投影方案（定义 D.2）构造事件 J。J 实际上是在两步投影下对 V 中所有变量的一个赋值，即 $J \in \Sigma_V'$。接下来，我们使用 J 简化约束满足问题公式，即移除 C 中所有已满足的约束。令简化后的约束满足问题公式为 $\Phi' = (V, [q]^V, C')$。Φ' 分裂为 ℓ 个互不相交的子约束满足问题公式 $\Phi_1 = (V_1, [q]^{V_1}, C_1)$ $\Phi_2 = (V_2, [q]^{V_2}, C_2)\ldots, \Phi_\ell = (V_\ell, [q]^{V_\ell}, C_\ell)$。我们进一步假设，任意子约束满足问题公式的依赖图都是连通的。

当且仅当满足以下条件时，我们称 J 是良好的：(1) 对于任意 $j \in [\ell]$，都有 $|C_j| \leq (\Delta k + 1)\log(4\Delta|V|^2)$；以及 ~~(2) 至少存在 $\ell^* \triangleq$~~ $\mathrm{l}_{2k\ \Delta k+1}^{C_{\mathrm{D.11}}N^*}()\log(4\Delta|V|^2)$ m 个包含变量 v 的子 CSP 公式，其中 $1^{\blacktriangle} \in h_v^{-1}(J_v)$，且相对于引理 D.11 中定义的 q、q^*、λ、Δ 和 k 而言，$C_{\mathrm{D.11}}$ 是一个常数。

我们证明，以高概率，J 是良好的。其证明推迟至第D.2节。

引理 D.7。 假设条件D.3成立。则有

$$\Pr[J \text{ is good}] \geq 1 - \frac{4C_{D.7}}{N^*} - \frac{1}{|V|}, \text{ where } C_{D.7} = \frac{4q^*\Delta k(\Delta k+1)}{\left(\frac{q^*\lambda}{q-q^*+q^*\lambda}\cdot(1-1/(\Delta k))\right)^2},$$

接下来，对于那些 Φ_j 中带有变量 v 满足 $1^\blacktriangle \in h_v^{-1}(J_v)$ 的情形，我们通过给出 $\Pr\left[X_j - X'_j = 1 \mid J\right]$ 的下界，得到 $\left|\mathbb{E}\left[e^{itX_j} \mid J\right]\right|^2$ 的上界。其证明推迟至第 D.3 节。

引理 D.8。 假设条件 D.3 成立。对于任意良好的 J，以及任意带有变量 v 满足 $1^\blacktriangle \in h_v^{-1}(J_v)$ 的 Φ_j，有 $\Pr\left[X_j - X'_j = 1 \mid J\right] \geq \min\{\lambda, 1/\lambda\}\cdot e^{-1}/(2k(\Delta k+1)\log(4\Delta|V|^2))^2$。

结合上述两个引理，我们给出高傅里叶相位的上界。

引理 D.9. 假设条件 D.1 和条件 D.3成立。对于任意 $t \in [-\pi\bar{\sigma}, \pi\bar{\sigma}]$，存在一个常数 $C_{D.9}$，使得 $\left|\mathbb{E}\left[e^{it\mathcal{Y}^*}\right]\right| \leq \frac{4C_{D.7}}{N^*} + \frac{1}{|V|} + \exp\left(-\frac{C_{D.9}\cdot N^*}{C_{D.11}N^*\log(|V|)^3}\cdot(t/\bar{\sigma})^2\right)$。

证明。 回顾一下，$\ell^* = \left\lceil \frac{2k}{\Delta k+1}\log(4\Delta|V|^2)\right\rceil$。结合方程 (53) 和方程 (54)，可得

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[e^{it\mathcal{Y}^*}\right]\right| &\leq \frac{4C_{D.7}}{N^*} + \frac{1}{|V|} + \left(1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{\min\{\lambda,1/\lambda\}\cdot e^{-1}}{(2k(\Delta k+1)\log(4\Delta|V|^2))^2}\cdot(t/\bar{\sigma})^2\right)^{\ell^*} \\ &\leq \frac{4C_{D.7}}{N^*} + \frac{1}{|V|} + \exp\left(-\frac{\ell^*}{4}\cdot\frac{\min\{\lambda,1/\lambda\}\cdot e^{-1}}{(2k(\Delta k+1)\log(4\Delta|V|^2))^2}\cdot(t/\bar{\sigma})^2\right).\end{aligned}$$

□

现在，我们可以推导局部中心极限定理（定理D.4）。

定理 D.4 的证明。 将引理 D.5 应用于 $\mathcal{Y}^* = (\mathcal{Y} - \bar{\mu})/\bar{\sigma} \in \alpha + \beta\mathbb{Z}$，其中 $\alpha = -\bar{\mu}$ 且 $\beta = 1/\bar{\sigma}$，我们有

$$\sup_{t\in\mathcal{L}}|\beta N(t) - \Pr[\mathcal{Y}^* = t]| \leq \frac{1}{\bar{\sigma}}\int_{-\pi\bar{\sigma}}^{\pi\bar{\sigma}}\left|\mathbb{E}\left[e^{it\mathcal{Y}^*}\right] - \mathbb{E}\left[e^{it\mathcal{Z}}\right]\right| dt + e^{-\pi^2\bar{\sigma}^2/2}.$$

结合引理 D.6 和引理 D.9，对于任意 $\eta > 0$，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\bar{\sigma}}\int_{-\pi\bar{\sigma}}^{\pi\bar{\sigma}}\left|\mathbb{E}\left[e^{it\mathcal{Y}^*}\right] - \mathbb{E}\left[e^{it\mathcal{Z}}\right]\right| dt \\ &\leq \frac{1}{\bar{\sigma}}\int_{-\pi\bar{\sigma}}^{\pi\bar{\sigma}}\min\left\{(2|t|\eta+1)\cdot\xi(q,q^*,\lambda,\Delta,k,N^*) + 4e^{-\eta^2/2}, \frac{4C_{D.7}}{N^*} + \frac{1}{|V|} + \exp\left(-\frac{C_{D.9}\cdot N^*}{\log(|V|)^3}\cdot(t/\bar{\sigma})^2\right)\right\} dt.\end{aligned}$$

接下来，令 $\eta = \sqrt{2\log|V|}$，并将积分截断在 $t^* = \Theta\left(\bar{\sigma}\cdot\sqrt{\log^2|V|}\right)$ 处。因此，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\bar{\sigma}}\int_{-\pi\bar{\sigma}}^{\pi\bar{\sigma}}\left|\mathbb{E}\left[e^{it\mathcal{Y}^*}\right] - \mathbb{E}\left[e^{it\mathcal{Z}}\right]\right| dt \\ &\leq \frac{1}{\bar{\sigma}}\int_{-t^*}^{t^*}4|t|\cdot\sqrt{2\log|V|}\cdot\xi\,dt + \frac{1}{\bar{\sigma}}\int_{t^*\leq|t|\leq\pi\bar{\sigma}}\exp\left(-\frac{C_{D.9}\cdot N^*}{\log(|V|)^3}\cdot(t/\bar{\sigma})^2\right)dt + \Theta\left(\frac{1}{|V|}\right) \\ &\leq O\left(\xi\cdot\frac{\log^{5/2}|V|}{\sqrt{|V|}}\right).\end{aligned}$$

□

D.1. **超图着色的局部中心极限定理**。 在本小节中，我们证明带有一种特殊颜色的超图着色的局部中心极限定理。给定一个 k-均匀超图$H=(V,\ \mathrm{E})$，其最大度为 Δ。我们考虑 H 上的超图 q-着色。令 X_{co}为在均匀随机选取的合法着色中，颜色为 1 的顶点数量这一随机变量。

定理 1.3 （超图中颜色类的局部中心极限定理 q-着色）。 任取整数 $k \geq 50$ 和 $q \geq 700\Delta^{\frac{5}{k-10}}$。令 $\bar{\mu}$ 为$\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$的期望， $\bar{\sigma}$ 为$\mathcal{X}_{\mathrm{co}}$的标准差。则

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}}\left|\Pr\left[\mathcal{X}_{\mathrm{co}}=t\right]-\bar{\sigma}^{-1}\mathcal{N}((t-\bar{\mu})/\bar{\sigma})\right|\leq O_{q,\Delta,k}\left(\frac{\ln^{7/2}|V|}{|V|}\right),$$

其中，$\mathcal{N}(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ 表示标准正态分布的密度。

定理*1.3*的证明。 我们使用定理 D.4 来证明该定理。注意，沿用第 C 节中的相同证明过程，可得 $\bar{\sigma}=\Theta\left(\sqrt{|V|}\right)$ 且 $N^*=|V|$。

令 $\Phi=(V,\ [q]^V,\ C)$ 表示超图 q 在H上的着色所对应的原子（k，$q\Delta$）约束满足问题公式。只需验证条件D.1 和条件D.3。注意，由定理1.2，条件D.1 成立，且 $\xi=O\left(\ln\frac{|V|}{\sqrt{|V|}}\right)$。

为了验证条件 D.3，我们首先定义投影 f和 h。设 B_1、 B_2 为两个整数。对于任意变量 $v\in V$，我们设 $f_v(1)\triangleq 1^{\blacktriangle}$，并且对任意 $j\neq 1$，设 $f_v(j)\triangleq((j-2)\bmod B_1+2)^{\blacktriangle}$。我们用上标 $\blacktriangle$ 表示在 f下的投影符号。注意，在 f下， q种颜色被分配为 B_1+1个投影符号。除了 $1^{\blacktriangle}$之外，每个投影符号对应至少 $\lfloor\frac{q-1}{B_1}\rfloor$种、至多$\lceil\frac{q-1}{B_1}\rceil$ 种原始颜色。

对于任意变量 $v\in V$，我们设 $h_v(1^{\blacktriangle})=1^{\star}$，并且对任意 $j\in\{2,3,\ldots,B_1+1\}$，设 $h_v(j^{\blacktriangle})\triangleq((j-2)\bmod B_2+1)^{\star}$。我们用上标 $\star$ 表示两步投影符号。注意，每个两步投影符号对应至少 $\lfloor\frac{B_1}{B_2}\rfloor$个、至多 $\lceil\frac{B_1}{B_2}\rceil+1$个投影符号，或者至少$\left(\lfloor\frac{B_1}{B_2}\rfloor-1\right)\cdot\lfloor\frac{q-1}{B_1}\rfloor$个、至多 $\left(\lceil\frac{B_1}{B_2}\rceil+1\right)\cdot\lceil\frac{q-1}{B_1}\rceil$种原始颜色。

由于 μ 是所有可能着色上的均匀分布，我们有 $\lambda=1$。并且在f的设定下，有 $q^*=1, N^*=|V|$。综上可得

$$p_{\mathrm{proj}}\leq\left(\frac{\left(\lceil\frac{B_1}{B_2}\rceil+1\right)\cdot\lceil\frac{q-1}{B_1}\rceil}{q}\right)^k,\quad p_{\mathrm{cond}}\leq\left(\frac{1}{\left(\lfloor\frac{B_1}{B_2}\rfloor-1\right)\cdot\lfloor\frac{q-1}{B_1}\rfloor}\right)^k,\quad \text{and } r_{\max}=\frac{1}{q}.$$

设 $B_1=\lfloor q^{3/4}\rfloor$ 且 $B_2=\lfloor q^{1/2}\rfloor$。现在我们分别验证条件 D.3 。

对于条件 D.3-（1），结合 $q\geq 700$这一事实，有

$$p_{\mathrm{proj}}\leq\left(\frac{(\lceil 4q^{1/4}\rceil+1)\cdot\lceil\frac{q-1}{\lfloor q^{3/4}\rfloor}\rceil}{q}\right)^k\leq\left(\frac{20q^{1/2}}{q}\right)^k.$$

只需满足 $2\mathrm{e}^2\cdot(20/q^{1/2})^k\cdot(\Delta k)^2\leq 1$。整理该不等式可得 $q\geq 400\left(2\mathrm{e}^2k^2\right)^{2/k}\cdot\Delta^{4/k}$。由 $k\geq 50$这一事实，只需验证 $q\geq 640\Delta^{4/k}$，而根据假设该式成立。

对于条件 D.3-(2)，结合以下事实 $q\geq 700$，可得

$$p_{\mathrm{cond}}\leq\left(\frac{1}{(\frac{1}{2}q^{1/4}-1)\cdot\frac{1}{4}q^{1/4}}\right)^k\leq\left(\frac{16}{q^{1/2}}\right)^k.$$

只需满足 $2\mathrm{e}\cdot(16/q^{1/2})^k\cdot q\Delta k\le 1$。重排该不等式可得 $q\ge\left(2\mathrm{e}\cdot 16^k\cdot k\right)^{\frac{2}{k-2}}\cdot\Delta^{\frac{2}{k-2}}$。结合以下事实 $k\ge 50$，只需验证 $q\ge 410\Delta^{\frac{2}{k-2}}$，而根据假设，该条件成立。

对于条件 D.3-(3)，只需验证 $(8\mathrm{e})^3q^{-k+2}(\Delta k+1)^{2+\zeta}\le 1$ 其中 $\zeta=\frac{2}{\ln(2-1/q)\ln(q)}$ ~~$\ln(2-1/q)$。由~~事实 $q\ge 700$，可得 $\zeta\le 0.23628$。因此，只需验证 $(8\mathrm{e})^3q^{-k+2}(\Delta k+1)^{2.24}\le 1$。所以，只需验证 $q\ge\left((8\mathrm{e})^3\cdot 2^{2.24}\cdot k^{2.24}\right)^{\frac{1}{k-2}}\Delta^{\frac{2.24}{\Delta-2}}$，而这由假设可知成立。

□

D.2. **引理 D.7的证明**。在本小节中，我们证明引理 D.7。回顾一下，使用 $\Phi=(V,[q]^V,C)$ 简化约束满足问题公式 J后，它会裂解为 ℓ个子 CSP 公式。对于任意 $v\in V$，令 $\Phi_v=(V_v,[q]^{V_v},C_v)$表示包含变量 v的子 CSP 公式。我们首先给出 $\Pr[|C_v|\ge i]$的尾界。

引理 D.10. *假设满足条件 D.3-(1) 和条件 D.3-(3). 对任意变量 $v\in V$ 以及任意 $i\ge 1$，有*

$$\Pr[|C_v|\ge i]\le 2\Delta\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor\frac{i}{\Delta k+1}\rfloor}.$$

证明. 给定由两步投影 $J=(\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{f})(\tau)$构造的 $\tau\sim\mu$和 J。我们可以通过以下广度优先搜索过程构造 Φ_v：

(1) 令 $V_v=\{v\}$ 和 $C_v=\emptyset$；(2) 令 $c\in C\backslash C_v$为一个约束，满足：(1) c未被 J满足；(2) c与 V_v相交，即 $\mathrm{vbl}(c)\cap V_v\neq\emptyset$且 $\mathrm{vbl}(c)\cap V\backslash V_v\neq\emptyset$。若不存在这样的约束 c，则终止此过程；(3) 设 $V_v\leftarrow V_v\cup\mathrm{vbl}(c)$ 和 $C_v\leftarrow C_v\cup\{c\}$。转到步骤 (2)。

接下来，对于任意 $i\ge 1$，我们使用 2-树论证来考察 $\Pr[|C_v|\ge i]$ 的上界。考虑 Φ_v 的依赖图 $G=(V,E)$。回顾一下，G 的顶点集 V 是约束的集合；当且仅当 $\mathrm{vbl}(c_1)\cap\mathrm{vbl}(c_2)\neq\emptyset$ 且 $c_1\neq c_2$ 时，我们称两个约束 c_1、c_2 相邻。令 r 为 C_v 中包含变量 v 的任意约束。注意，若 $|C|\neq 0$，则该 r 存在。令 $\mathrm{T}\subseteq C_v$ 为依赖图 G 上的一个 2-树，它是通过 C_v 构造的，并使用定义 2.4 包含 r。有$|\mathrm{T}|\ge\frac{|C_v|}{\Delta k+1}$。根据广度优先搜索过程，对于 2-树 T 中的任意约束 c，c 都未被 J 满足。回顾条件 D.3-(1) 和条件 D.3-(3)。结合 T 中变量两两不相交这一事实以及定理 2.2，对于任意 $c\in C$，令 $x(c)=\mathrm{e}r_{\max}^k$，这些约束合起来至多贡献$\left(p_{\mathrm{proj}}\cdot(1-x(c))^{-\Delta k}\right)^{|\mathrm{T}|}\le(\mathrm{e}p_{\mathrm{proj}})^{|\mathrm{T}|}$。因此，我们有 $\Pr[|C_v|\ge i]\le\Delta\cdot\sum_{\mathrm{T}:|\mathrm{T}|\ge\lfloor\frac{i}{\Delta k+1}\rfloor}(\mathrm{e}p_{\mathrm{proj}})^{|\mathrm{T}|}$，其中第一因子 Δ 枚举了可能的 r。结合条件 D.3-(1) 和引理 2.6，可得

$$\Pr[|C_v|\ge i]\le\Delta\cdot\sum_{j=\lfloor\frac{i}{\Delta k+1}\rfloor}\left(\mathrm{e}(\Delta k)^2\cdot\mathrm{e}p_{\mathrm{proj}}\right)^j\le 2\Delta\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor\frac{i}{\Delta k+1}\rfloor}.$$

□

接下来，我们将证明一个关于满足 $1^{\blacktriangle}\in h_v^{-1}(J_v)$ 的变量数量的集中不等式。令 $\tau\sim\mu$ 服从投影符号 $1^{\blacktriangle}$ 上、外场为 λ 的吉布斯分布 μ。回顾一下，对于任意变量 $v\in V$，Y_v 是一个随机变量，用于指示是否满足 $\tau_v\in f_v^{-1}(1^{\blacktriangle})$，且 $\mathrm{Y}=\sum_{v\in V}Y_v$。我们针对两步投影定义新的随机变量。令$W_v$ 为一个随机变量，用于指示是否满足 $1^{\blacktriangle}\in h_v^{-1}(J_v)$。令 $\mathrm{W}=\sum_{v\in V}W_v$。

我们通过切比雪夫不等式建立一个集中不等式。对于期望的下界 $\mathbb{E}[\mathcal{W}],$，通过采用与引理 C.4 相同的证明但使用不同的条件，我们得到下一个引理。

引理 D.11。 假设条件 D.3-(3)，则有

$$\mathbb{E}[\mathcal{W}] \geq C_{D.11} N^*, \text{ where } C_{D.11} = \frac{q^*\lambda}{q - q^* + q^*\lambda} - \frac{q^*\lambda}{(q - q^* + q^*\lambda)\Delta k}.$$

对于方差 $\mathrm{Var}[\mathcal{W}]$, 的上界，通过在不同条件下重复第 C 节中的类似证明，我们得到以下引理。

引理 D.12。 假设条件 D.3-(3)，则有

$$\mathrm{Var}[\mathcal{W}] \leq 4q^*\Delta k(\Delta k + 1)N^*.$$

综合可得

引理 D.13。 假设条件 D.3-(3)，则有

$$\forall \delta > 0, \quad \Pr[|\mathcal{W} - \mathbb{E}[\mathcal{W}]| \geq \delta \cdot \mathbb{E}[\mathcal{W}]] \leq \frac{C_{D.7}}{\delta^2 \cdot N^*}, \text{ where } C_{D.7} = \frac{4q^*\Delta k(\Delta k + 1)}{\left(\frac{q^*\lambda}{q - q^* + q^*\lambda} \cdot (1 - 1/(\Delta k))\right)^2}.$$

最后，我们证明引理 D.7。

引理 D.7 的证明。 在引理 D.10 中，令 $i = (\Delta k + 1)\log(4\Delta|V|^2)$。对于任意 $v \in V$，有 $\Pr[|C_v| \geq i] \leq \frac{1}{|V|^{2\circ}}$ 由并集界可知，其概率至少为 $1 - \frac{1}{|V|}$，$\forall v \in V$，$|C_v| \leq (\Delta k \mp 1)\log(4\Delta|V|^2)$。

在引理 D.13 中，令 $\delta = \frac{1}{2}$，则以至少 $1 - \frac{4C_{D.7}}{N^*}$ 的概率，有 $\mathrm{W} \geq \frac{C_{D.11}}{2} N^*$。结合 $\forall v \in V$, $|C_v| \leq (\Delta k + 1)\log(4\Delta|V|^2)$ 这一事实，至少有 $\ell^* = \mathrm{l}\, 2k\ \Delta k+1\ ()\log(4\Delta|V|^2)\mathrm{m}$ 个包含变量 v 且满足 $1^{\blacktriangle} \in h_v^{-1}(J_v)$ 的子 CSP 公式。

对这两个事件应用并集界，以至少 $1 - \frac{4C_{D.7}}{N^*} + \frac{1}{|V|}$ 的概率，有 J是良好的。 □

D.3. **引理的证明 D.8**。 本小节中，我们证明引理 D.8。概括而言，思路是引入新的约束，使 v 在约束满足问题公式中变得"独立"。特别地，对于这个新约束满足问题公式的任意一个满足赋值，我们都可以任意改变 v的取值。令 μ' 为这个新约束满足问题公式对应的新 Gibbs 分布。结合 J 是良好这一事实，存在一个数 x，使得 $\Pr_{\mu'}[X_j = x \mid J] \geq k\ \Delta k+1\ ^{1}()\log(4\Delta|V|^2)$。接着我们证明 $\Pr_{\mu}[X_j = x \mid J]$接近 $\Pr_{\mu'}[X_j = x \mid J]$。注意到我们可以改变 v的取值，因此得到 $\Pr\mathrm{h}\ X_j - X_{\prime j} = 1 \mid J\mathrm{i}$ 的一个下界。

引理 D.8的证明。 令 v为 V_j中的变量，满足 $1^{\blacktriangle} \in h_v^{-1}(J_v)$。对于任意满足$v \in \mathrm{vbl}(c)$的约束 $c \in C_j$，我们向 C'中添加 c的 q个副本，每个副本都禁止 v的一个可能取值。令 $\Phi' = (V, [q]^{V_j}, C')$为新的约束满足问题公式，其满足 $V_{\prime} = V_j$。注意，$|C' \setminus C| \leq q\Delta$，且对于任意约束 $c \in C'$，与其相交的约束至多有$q\Delta$ 个，即 $|\{c' \in C' \setminus \{c\} \mid \mathrm{vbl}(c') \cap \mathrm{vbl}(c) \neq \emptyset\}| \leq q\Delta$。

令 μ 为 Φ 的吉布斯分布，令 μ' 为 Φ'的吉布斯分布。接下来，我们用望远镜法给出 $\Pr_{\mu}[\Phi'$被满足 $\mid J]$的上界。令 $C' \setminus C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$。对于任意 $0 \leq i \leq m$，令$\Phi'_i = (V_j, [q]^{V_j}, C_i)$，其中 $C_i = C \cup \{c_1, c_2, \ldots, c_i\}$。令 μ_i为 Φ'_i的吉布斯分布。因此，我们有 $\Pr_{\mu}[\Phi'$被满足$\mid J] = \prod_{i=1}^{m} \Pr_{\mu_{i-1}}[\Phi'_i$被满足$\mid J] = \prod_{i=1}^{m}(1 - \Pr_{\mu_{i-1}}[\Phi'_i$未被满足$\mid J])$。接下来，根据定理 2.2给出 Φ'_i未被满足的概率上界。回顾条件 D.3-(2)。对于任意$c \in C'$，令 $x(c) = \mathrm{e}p_{\mathrm{cond}}$。因此，我们有

$$\Pr_{\mu_{i-1}}[\Phi'_i \text{ is not satisfied} \mid J] \leq p_{\mathrm{cond}}(1 - \mathrm{e}p_{\mathrm{cond}})^{-q\Delta k} \leq \mathrm{e}p_{\mathrm{cond}}.$$

因此，我们有 $\Pr_{\mu}[\Phi'$满足 $\mid J] \geq (1 - \mathrm{e}p_{\mathrm{cond}})^{q\Delta k} \geq \mathrm{e}^{-1}$。回顾一下，$X_j$是 Φ_j中在 f下投影符号为 $1^{\blacktriangle}$ 的变量数。结合 J是 good 这一事实，我们有 $0 \leq X_j \leq k(\Delta k+1)\log(4\Delta|V|^2)$。因此，存在 $x \geq 0$，使得 $\Pr_{\mu'}[X_j = x \mid J] \geq k\ \Delta k+1\ ^{1}()\log(4\Delta|V|^2)$。我们还有 $\max\{\Pr_{\mu'}[X_j = x \wedge Y_v = 1 \mid J], \Pr_{\mu'}[X_j = x \wedge Y_v = 0 \mid J]\} \geq 2k\ \Delta k+1\ ^{1}()\log(4\Delta|V|^2)$。不失一般性，

我们假设 $\Pr_{\mu'}\left[X_j = x \wedge Y_v = 1 \mid J\right] \geq {}_{2k\ \Delta k+1}{}^{1}(\ )\log(4\Delta|V|^2)$。注意，$v$是一个独立变量，通过改变 v 的取值，我们有 $\Pr_{\mu'}\left[X_j = x-1 \wedge Y_v = 0 \mid J\right] \geq \min\{\lambda, 1/\lambda\}\ {}_{2k(\Delta k+1)}\log(4\Delta|V|^2)$。因此，我们有 $\Pr_{\mu'}[X_j - X'_j \mid J] \geq \min\{\lambda, 1/\lambda\}\ (2k(\Delta k+1)\log(4\Delta|V|^2))^2$。结合 $\Pr_{\mu}[\Phi'\text{满足} \mid J] \geq e^{-1}$，我们有 $\Pr_{\mu}[X_j - X'_j \mid J] \geq \min\{\lambda, 1/\lambda\}\ e^{-1}\ (2k(\Delta k+1)\log(4\Delta|V|^2))^2$。

□

附录E. Fisher 零点

在本节中，我们推导约束满足问题公式的 Fisher 零点。设 $\Phi = (V, Q, C)$ 是一个 (k, Δ)-约束满足问题公式，并设 $\beta \in \mathbb{C}$。我们定义关于 β 的配分函数为

$$Z^{\mathrm{fs}} = Z^{\mathrm{fs}}(\Phi, \beta) \triangleq \sum_{\sigma \in Q} \beta^{|\{c \in C \mid c \text{ is violated by } \sigma\}|}. \tag{55}$$

我们注意到，当约束不满足时，β 可以被视为一种“惩罚”。有两个值得关注的点：$\beta = 0$，它指的是所有满足赋值上的均匀分布；以及 $\beta = 1$，它指的是简单的乘积分布。

为了在 β 中获得零点自由性，我们遵循 [LWYY25 第 6] 节中的类似归约，通过引入新变量，将 Fisher 零点归约为李-杨零点（另一个约束满足问题的零点）。然后，我们应用第 4 节中的框架；具体而言，我们验证条件 4.4 并应用定理 4.6。

我们首先给出该归约。注意，当 $\beta = 1$ 时，配分函数 $Z_{\mathrm{fs}}(\Phi, 1) = |Q|$，显然不为零。因此，我们将重点放在 $\beta \neq 1$ 的情形上。

定义 E.1（从 Fisher 零点到李-杨零点的归约）。给定一个 CSP 公式 $\Phi = (V, Q, C)$ 和一个复数 $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$，我们构造一个新的 CSP 公式 $\Phi' = (V', Q', C')$ 以及一个新的复数 $\lambda = \frac{\beta}{1-\beta}$，记作 $(\Phi', \lambda) = \mathrm{red}(\Phi, \beta)$，如下所示：

- 对于任意约束 $c \in C$，我们构造一个新约束 c'，并添加一个新变量 $v_{c'}$，其定义域为 $\{0,1\}$。令 $\tau = c^{-1}$(假) 为约束 c 的违反约束的部分赋值。然后我们设定 $\tau_{v_{c'}} = 0$ 和 c'^{-1}(假) $= \tau$。令 $C' = \{c' \mid c \in C\}$。
- 令 $V' = V \cup \{v_{c'} \mid c' \in C'\}$。

我们称 V 中的变量为原始变量，称 $V' \setminus V$ 中的变量为新变量。回顾一下，$\Omega_{\Phi'}$ 是 CSP 公式 Φ' 的所有满足赋值构成的集合。令 $Z_{\mathrm{ly}} = Z_{\mathrm{ly}}(\Phi', \lambda)$ 为关于李 - 杨零点定义的配分函数，其定义如下

$$Z^{\mathrm{ly}}(\Phi', \lambda) \triangleq \sum_{\sigma \in \Omega_{\Phi'}} \lambda^{|\{v_{c'}=1 \mid c' \in C'\}|}. \tag{56}$$

引理 E.2（归约的性质）。设 $\Phi =$（V、Q、C）是一个（k、Δ）-约束满足问题公式，且 $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ 是一个复数。令（Φ'、λ）$=$ red（Φ、β）。那么，

(1) Φ' 是一个（$k+1$、Δ）-约束满足问题公式。

(2) Z_{fs}（Φ、β）$=$（$1-\beta$）$^{|C|} \cdot Z_{\mathrm{ly}}$（$\Phi'$、$\lambda$）。

证明。对于第 1 项，注意到在定义 E.1 中，我们为每个约束引入一个新变量，且该新变量只属于这个约束。因此，第 1 项得证。

接下来证明第 2 项。对于任意逻辑表达式 P，我们定义艾弗森括号 $[P] = 1$ 如果 P 为真，否则为 $[P] = 0$。

回顾方程 (56)。另请回顾，V 是 Φ 的原始变量集。对于约简后的约束满足问题公式 Φ'，我们枚举原始变量 V 上的部分赋值。如果约束 c' 已被

部分赋值满足，那么新变量 $v_{c'}$ 可以取 0 或 1；否则，我们有 $v_{c'}=1$。回顾一下， Q 是 Φ, $|C|=|C'|$的原始字母表。因此，我们将 Z_{ly} 重新表述为

$$Z^{\text{ly}}=\sum_{\sigma\in Q}\prod_{c'\in C'}\left((1+\lambda)[c' \text{ is satisfied by } \sigma]+\lambda[c' \text{ is not satisfied by } \sigma]\right).$$

回想一下 $\lambda=\frac{\beta}{1-\beta}$ 因此，我们有

$$Z^{\text{ly}}=\left(\frac{1}{1-\beta}\right)^{|C|}\sum_{\sigma\in Q}\prod_{c'\in C'}\left([c' \text{ is satisfied by } \sigma]+\beta\cdot[c' \text{ is not satisfied by } \sigma]\right).$$

结合方程 (55)，第 2 项成立，由此引理得证。 □

根据上述引理，要证明零点自由性，只需证明 $Z_{\text{ly}}(\Phi',\ \lambda)\neq 0$。我们利用第 4节中的框架给出下面的定理。

定理 *E.3*（*Fisher* 零点的无零性）。设 $\Phi=(V,Q,C)$ 是一个 (k,Δ)-约束满足问题公式，且 $\beta\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ 是一个复数。令 $(\Phi',\lambda)=\text{red}(\Phi,\beta)$ 为根据定义 *E.1* 构造的对象，其中 $\Phi'=(V',Q',C')$。记作$C'=\{c'_1,c'_2,\ldots,c'_m\}$。对于任意 $i\leq m$, 定义 $C'_i=\{c'_1,c'_2,\ldots,c'_i\}$和 $\Phi'_i=(V',Q',C'_i)$。设 f为一个状态压缩方案（定义 *4.1*），并令 $\Sigma_{V'}$ 为投影域。

假设以下条件成立：
(1) 对于任意约束 $c'\in C'$， $f_{v_{c'}}(0)=0^{\blacktriangle}$ 以及 $f_{v_{c'}}(1)=1^{\blacktriangle}$；*(2)* 对于任意原始变量 $v\in V$，投影域不包含 $1^{\blacktriangle}$，即 $\forall v\in V$， $1^{\blacktriangle}\notin\Sigma_v$；*(3)* Φ' 满足方程 (16)，并且 Φ'_1， Φ'_2、……、 Φ'_m满足条件 4.4,

那么有 $Z^{fs}(\Phi,\beta)\neq 0$。

证明。 根据引理 E.2，有 $Z_{\text{fs}}(\Phi,\ \beta)=(1-\beta)^{|C|}\cdot Z_{\text{ly}}(\Phi',\ \lambda)$。只需证明 $Z_{\text{ly}}(\Phi',\ \lambda)\neq 0$。回顾约束满足问题公式的复数扩展定义 4.2。结合条目 1 和条目 2，有$Z_{\text{ly}}(\Phi',\ \lambda)=Z(\Phi',\ \lambda,\ f,\ 1^{\blacktriangle})$。

最后 根据定理 4.6 及条目 3，我们有 $Z(\Phi',\ \lambda,\ f,\ 1^{\blacktriangle})\neq 0$。因此，该定理得出 s. □

对 $Z\text{fs}(\Phi,\beta)$ 进行与第 5.1 节类似的计算，可以证明，在条件$k\geq 50$和 $q\geq 20\Delta^{k-2.5}$下，超图 q-着色在 $[0,1]$周围存在一个无零条带。作为推论，通过 Barvinok 插值方法 [Bar16, PR17, LSS17]，可以得到一个用于近似超图 q-着色数量的全多项式时间近似方案。我们注意到，目前最优的全多项式时间近似方案 [WY24], ，该方案$^{2+\zeta}$基于递归耦合和 Moitra 的线性规划方法，适用于 $k\geq 8$ 和 $q\geq 70\Delta^{k-2-\zeta}$，其$q\geq$为 $\exp(O(1/\zeta))$。我们将利用零点自由性缩小这一差距作为一个开放问题。