arXiv:2601.13807v1 [math.AT] 20 Jan 2026

非有限生成$(\mathbb{Z}_2)^k$-等变配边环

¨YUANXIN GUAN 和 ZHI LU

Abstract. 1998年，Mukherjee 和 Sankaran 提出了两个关于仅有孤立不动点的光滑闭（$\mathbb{Z}_2$）^{k}-流形的等变配边环代数结构的问题。其一是该环作为 $\mathbb{Z}_2$-代数是否有限生成，其二是不可分解元素是否存在。本文彻底解决了完全有效情形下的这两个问题。具体而言，令 $\mathcal{Z}_*$（（$\mathbb{Z}_2$）^{k}）表示由具有完全有效光滑（$\mathbb{Z}_2$）^{k}-作用且仅有孤立不动点的光滑闭流形构成的等变配边环。我们证明，对于所有 $k \geqslant 3$， $\mathcal{Z}_*$（（$\mathbb{Z}_2$）^{k}）都不是有限生成的 $\mathbb{Z}_2$-代数。此外，证明还明确构造了一个次数无界的不可分解元素无穷族，从而同时解决了第二个问题。

1. Introduction

令 ˇ $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 表示光滑闭 n维流形的等变配边群，这些流形配备了仅固定孤立点的光滑（$\mathbb{Z}_2$）^{k}-作用。记

$$\check{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^k) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \check{\mathcal{Z}}_n((\mathbb{Z}_2)^k),$$

它构成了 $\mathbb{Z}_2$ 上的交换分次代数，其加法由不交并诱导，乘法则由笛卡尔积 [5] 上的对角作用诱导。令 $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$为 ˇ $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的子群，该子群由以下等变配边类生成：这些类由具有有效（$\mathbb{Z}_2$）^{k}-作用的连通流形表示（同样具有孤立不动点）。定义

$$\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k),$$

它是 ˇ $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的子代数。根据定义， $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中的每个非零元素都可以写成完全有效（$\mathbb{Z}_2$）^{k}-作用的类。这里，流形上的（$\mathbb{Z}_2$）^{k}-作用称为完全有效，如果（$\mathbb{Z}_2$）^{k}在每个连通分支 [7] 上都有效。

Conner 和 Floyd 于20世纪60年代初开始研究 ˇ $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 和 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$。他们的开创性工作 [5] 证明了 $\mathcal{Z}_*(\mathbb{Z}_2) = \check{\mathcal{Z}}_*(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ 和 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^2) = \check{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^2)$ 同构于一个以 $\mathbb{Z}_2$为基底的多项式代数，其唯一生成元是带有标准 $(\mathbb{Z}_2)^2$-作用的实射影平面 $\mathbb{R}P^2$的配边类。这就完整分类了仅有孤立不动点的 $(\mathbb{Z}_2)^k$-流形在等变配边意义下的类型，其中 $k = 1$为 2。然而，对于 $k \geqslant 3$， $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 或 ˇ $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的环结构仍知之甚少。除了对环结构的研究之外，也有关于齐次分量 $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的向量空间结构的研究，尤其关注其维数和生成元（摘要见注 3.4）。对$\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的详细分析也解决了 ˇ $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中的类似问题。这是因为对于所有 $1 \leqslant l \leqslant k$， ˇ $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 完全由 $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^l)$ 决定（见定理 3.2）。

要确定较大 k 时 ˇ $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的环结构，识别其不可分解元素十分重要，因为它们是 $\mathbb{Z}_2$-代数的生成元。在分次环中，若一个非零齐次元素可以表示为次数较低的齐次元素乘积的有限和，则称其为可分解；否则称其为不可分解。在 [15, 16, 1], 环 ˇ $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中，具有某些 $(\mathbb{Z}_2)^k$-作用的旗流形和 Milnor 流形等特殊流形的不可分解性

2020 *Mathematics Subject Classification.* 55N22, 57R85, 16W50,*Key words and phrases.*
等变配边、有限生成、不可分解元素。部分经 SIMIS-ID-2025-TP 项目资助。

已得到研究。特别是，借助 Stong 同态 [17] 和 tom Dieck 的 ingerality 定理 [20]，给出了 $\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中元素不可分解的一个充分条件。目前尚未发现次数大于 2^k-5 的不可分解元素。鉴于这一观察，Mukherjee 和 Sankaran 在 [16]中提出了以下两个问题。

问题 1.1：$\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 是否是一个 $\mathbb{Z}_2$-代数的有限生成环?

问题 1.2：$\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中是否存在维数超过 2^k-2 的不可分解元素?

如前所述，Conner 和 Floyd 已解决了 $k=1,\ 2$, 的这两个问题：对问题 1.1 给出了肯定答案，对问题 1.2 给出了否定答案。然而，对于 $k\geqslant 3$，这两个问题中的任何一个都仍难以取得重大进展。本文针对完全有效情形给出了决定性的成果，即研究环 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$，具体结果如下所述。

主定理（定理 4.1）**：** 对于所有 $k\geqslant 3$，环 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 都不是有限生成的。

问题 1.1 的完全有效版本与原问题密切相关。事实上，若完全有效情形得到肯定回答，则原问题也得到肯定回答（见定理 3.5）。此外，这个完全有效版本也与完全有效情形下的问题 1.2 密切相关。我们通过构造一个不可分解元素的无穷族 α_m 来证明主定理，这些元素的次数无界。该构造直接解决了完全有效情形下的问题 1.2，因而也为问题 1.1 的完全有效版本给出了否定回答。不过，值得注意的是，这些元素 α_m 在 $\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中变为可分解。因此，问题 1.1 本身仍未解决。

主定理的一个应用是，对于任意 $k\geqslant 3$，环 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 都不是有限个变量上的多项式代数（推论 4.2）。这与已知的 $k=1,\ 2$ 的多项式描述形成了鲜明对比。此外，利用 Gelfand–Kirillov 维数（一种非交换代数中的不变量；定义见第5节），我们在命题 5.3 中证明，$\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 也不可能是无限多个变量上的多项式代数。因此，对于任意 $k\geqslant 3$，$\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 都不同构于任何 $\mathbb{Z}_2$ 上的多项式代数，无论变量的数量是多少。回顾一下，非等变无定向配边环 Ω_*^O 同构于多项式环 $\mathbb{Z}_2[x_n \mid n\neq 2^i-1, i\in\mathbb{N}]$ [18]。多项式代数是交换代数范畴中的自由对象，其特征是生成元之间不存在代数关系。因此，我们的结果揭示，对于所有$k\geqslant 3$，$\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 与其非等变对应物有着根本区别，也难以研究，因为它必然存在非平凡关系。

本文的结构安排如下。第2节回顾 $(\mathbb{Z}_2)^k$-作用的不动点处的切表示，这些表示构成等变配边的完备不变量系。第3节重点讨论等变配边环 $\check{}\mathcal{Z}_*(\mathbb{Z}_2)^k$ 与子环 $\mathcal{Z}_*(\mathbb{Z}_2)^k$ 之间的关系。第4节给出主定理的证明，其中包括在 $\mathcal{Z}_*(\mathbb{Z}_2)^k$ 中构造无穷多个不可分解元素。最后，第5节通过证明 $\mathcal{Z}_*(\mathbb{Z}_2)^k$ 和 $\check{}\mathcal{Z}_*(\mathbb{Z}_2)^k$ 都不是具有无穷多个变量的多项式代数，对主定理作补充。

本文中，所有流形均假定为闭且光滑的，流形上的所有群作用均为光滑作用。带有 $(\mathbb{Z}_2)^k$-作用 φ 的流形 M 的等变配边类记作 $[\varphi, M]$；若上下文中的作用明确，则简记为 $[G, M]$。此外，每当我们分别写作 $[(\mathbb{Z}_2)^k,\ M]\in\check{}\mathcal{Z}_*(\mathbb{Z}_2)^k$ 或 $\mathcal{Z}_*(\mathbb{Z}_2)^k$ 时，均默认该作用只有孤立不动点；对于后一种情形，还默认该作用是完全有效的。

2. Tangent representations at fixed points

设 M 是一个配备了 G 作用 φ 的流形，$p\in M$ 是该作用的一个不动点。那么我们有一个 G 的实表示，称为不动点处的切表示 p,

$$\tau_pM : G\to \mathrm{GL}(T_pM), g\mapsto d\varphi(g,\cdot),$$

其中 GL(V) 是实向量空间 V 上的一般线性群。当 $G=(\mathbb{Z}_2)^k$ 时，$(\mathbb{Z}_2)^k$ 的每个有限维实表示都同构于一维实表示的直和。此外，对于不动点处的切表示，每个不可约因子的重数都有几何解释。

为了考察群作用的所有不动点处的切表示，Conner 和 Floyd 定义了一个表示代数。记 $\mathcal{R}_n(G)$ 为由 G 的 n 维实表示的同构类自由生成的 $\mathbb{Z}_2$ 上的向量空间，并且 $\mathcal{R}_*(G) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n(G)$。那么，在表示的直和运算下，$\mathcal{R}_*(G)$ 具有 $\mathbb{Z}_2$ 上带单位元的交换分次代数结构，称为 ***Conner–Floyd*** 表示代数。显然，如果 G 是 $\mathbb{Z}_2$ 上的有限维向量空间，那么 $\mathcal{R}_*(G)$ 是由 G 上的线性函数生成的 $\mathbb{Z}_2$ 上的多项式代数。本文中，为避免混淆，我们将 $\mathcal{R}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中的形式加法记作与 $\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k,\ \mathbb{Z}_2)$ 中加法相同的符号。

命题 2.1 ([5, 第 77] 页)。设 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 作用于一个 n维流形 M 上，且 p 是一个孤立不动点。那么切表示 $\tau_p M$ 同构于

$$\prod_{\rho\in\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k,\mathbb{Z}_2)\setminus\{0\}} \rho^{d(\rho)},$$

其中 $\sum_{\rho\in\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k,\mathbb{Z}_2)\setminus\{0\}} d(\rho) = n$，而 $d(\rho)$ 是不动点集的连通分支 $M^{\ker\rho}$（包含 p）的维数。

存在一个分次代数同态 $\phi_* : \breve{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^k) \to \mathcal{R}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$，其定义为

$$\phi_*[(\mathbb{Z}_2)^k, M] = \sum_{p\in M^G} [\tau_p M],$$

其中 $[\tau_p M]$ 是切表示 $\tau_p M$ 的同构类。

定理 2.2 ([17])。同态 ϕ_* 是一个单同态。

因此，不动点处的切表示完全决定了具有有限个不动点的 $(\mathbb{Z}_2)^k$-流形的等变配边类。因此，确定 $\breve{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 或 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的代数结构，归结为描述其在 ϕ_* 下的像的结构。这就是第 4.2 节将采用的策略，用以证明对于所有 $k \geqslant 3$，$\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 都不是有限生成的。

根据命题 2.1，可以直接计算 $\breve{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中任意元素在 ϕ_* 下的像。我们给出一个基本例子，它将用于构造 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中的不可分解元素。为此，我们先固定一些记号和约定。每个 $g \in (\mathbb{Z}_2)^k$ 中的元素都写成列向量 $g = (g_1, \ldots, g_k)^{\mathsf{T}}$，其中 $g_i \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$；而 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的线性函数则视为行向量。记 ρ_0 为 $\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}_2)$ 中的平凡函数，记 ρ_i 为 $\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}_2)$ 中的函数 $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$，其中 1 位于第 i 个位置，$1 \leqslant i \leqslant k$。为简化记号，令 $\rho_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ 表示整数 $m \geqslant 1$ 对应的 $\rho_{i_1} + \rho_{i_2} + \cdots + \rho_{i_m} \in \mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}_2)$，以及 $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_m \leqslant k$。

例 2.3. 定义 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 在射影空间 $\mathbb{R}P^k$ 上的作用如下：

$$(g_1, \ldots, g_k)^{\mathsf{T}} \cdot [x_0 : x_1 : \cdots : x_k] = [x_0 : (-1)^{g_1} x_1 : \cdots : (-1)^{g_k} x_k].$$

直接计算可知，该作用有有限不动点 $p_i = [0 : \cdots : 1 : \cdots : 0]$，其中 1 位于第 i 个位置，并且

$$\left[\tau_{p_i}\mathbb{R}P^k\right] = \prod_{j=0, j\neq i}^{k} \rho_{i,j} \in \mathcal{R}_k((\mathbb{Z}_2)^k),$$

对于 $0 \leqslant i \leqslant k$。

在此例中，对于每个 i，由单项式 $[\tau_{p_i}\mathbb{R}P^k]$ 中的所有因子组成的集合 $\{\rho_{i,j} \mid 0 \leqslant j \leqslant k, j \neq i\}$ 张成向量空间 $\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k,\ \mathbb{Z}_2)$。对于 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中的每个元素，该性质都成立，详见 [12, §2.2]。具体而言，对于每个 $[(\mathbb{Z}_2)^k,\ M] \in \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$，其在 ϕ_* 下的像非平凡，以及 $\phi_*[(\mathbb{Z}_2)^k,\ M]$ 的支撑中的每个 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，多重集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 都张成 $\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k,\ \mathbb{Z}_2)$。这里，多项式 f 的支撑是 f 中所有系数非零的单项式组成的集合，记作 $\mathrm{supp}\ f$。

3. Relation between $\check{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ and $\mathcal{Z}_*$与$\mathbb{Z}_2)^k)$的关系

本节讨论 $\check{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 与其子代数 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 之间的关系，重点关注它们的齐次分量及其有限生成性质。

首先，回顾一下：若 G 是拓扑群，通过 $\varphi\colon G\to\mathrm{Homeo}(X)$ 作用于空间 X，则商群 $G/\ker\varphi$ 通过 $g\ker\varphi\cdot x=gx$ ([2, I.1.1]) 有效地作用于 X。因此，作用的有效部分包含其本质信息，这为比较配边环 $\check{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 和 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 提供了主要动机。对于任意群 G，$\check{\mathcal{Z}}_*(G)$ 和 $\mathcal{Z}_*(G)$ 的定义完全类比于 $G=(\mathbb{Z}_2)^k$ 的情形。

引理 3.1. 给定 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的一个子群 K，存在 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的一个子群 H，使得 $K\oplus H=(\mathbb{Z}_2)^k$。定义分次代数同态 $\Phi_{K,H}\colon \mathcal{Z}_*(H)\to\check{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$，其定义为 $[H,M]\mapsto[K\oplus H,M]$，其中 K 对 M 的作用是平凡的。

(1) 映射 $\Phi_{K,H}$ 定义良好且为单同态。(2) 若对于某个 $\alpha\in\mathcal{Z}_n(H)$，$f=\phi_*(\Phi_{K,H}(\alpha))$ 非平凡，且对所有 $1\leqslant i\leqslant n$，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\in\mathrm{supp}\ f$ 满足 $\lambda_i\in\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k,\mathbb{Z}_2)$，则

$$\mathrm{span}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}=\{\text{linear functions on }(\mathbb{Z}_2)^k\text{ vanishing on }K\}.$$

这将 [12, §2.2] 的性质推广到了 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的任意子群。

(3) 对于另一个子群 H'，若 $K\oplus H'=(\mathbb{Z}_2)^k$，则 $\mathcal{Z}_*(H)$ 和 $\mathcal{Z}_*(H')$ 在同态 $\Phi_{K,H}$ 和 $\Phi_{K,H'}$ 下的像相同。

证明。(1) 令 $\pi_H\colon K\oplus H\to H$ 为投影映射。定义分次代数同态$\Psi_{K,H}\colon\mathcal{R}_*(H)\to\mathcal{R}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 如下。由于 $\mathcal{R}_*(H)$ 是由 H 上的线性函数生成的多项式代数，只需定义变量的取值。令 ρ 为 H 上的一个线性函数。定义 $\Psi_{K,H}(\rho)=\rho\circ\pi_H$。对于 H 上两个不同的线性函数 ρ 和 ρ'，$\Psi_{K,H}(\rho)\neq\Psi_{K,H}(\rho')$，因此 $\Psi_{K,H}$ 是单射。由于 $\ker(\rho\circ\pi_H)=K\oplus\ker\rho$，且对于一个 H-流形 M，有 $M^{\ker(\rho\circ\pi_H)}=M^{\ker\rho}$，下图

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{Z}_n(H) & \xrightarrow{\Phi_{K,H}} & \check{\mathcal{Z}}_n((\mathbb{Z}_2)^k)\\ \downarrow{\scriptstyle\phi_n} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_n}\\ \mathcal{R}_n(H) & \xrightarrow[\Psi_{K,H}]{} & \mathcal{R}_n((\mathbb{Z}_2)^k)\end{array}\tag{3.1}$$

由命题 2.1 可交换。这意味着 $\Phi_{K,\ H}$ 是单射。

(2) 一方面，由交换图 (3.1)，$f=\phi_n(\Phi_{K,H}(\alpha))=\Psi_{K,H}(\phi_n(\alpha))$，因此存在一个单项式 $\lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda_n'\in\mathrm{supp}\ \phi_n(\alpha)$，其中 $\lambda_i'\in\mathrm{Hom}(H,\mathbb{Z}_2)$，使得 $\lambda_i=\lambda_i'\circ\pi_H$对所有 $1\leqslant i\leqslant n$都成立。因此，λ_i在 K 上消失。另一方面，由于 $\alpha\in\mathcal{Z}_n(H)$，$\mathrm{span}\{\lambda_1',\lambda_2',\dots,\lambda_n'\}=\mathrm{Hom}(H,\mathbb{Z}_2)$。对于 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 上的每个线性函数 ψ，都有 $\psi\circ i_H\in\mathrm{Hom}(H,\mathbb{Z}_2)$，其中 $i_H\colon H\to(\mathbb{Z}_2)^k$ 是嵌入。于是，对 $a_i\in\mathbb{Z}_2$，有 $\psi\circ i_H=\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i'$。若 $\psi|_K=0$，则 $\psi=\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i$。

(3) 假设 $[H,M]\in\mathcal{Z}_n(H)$，其中 H 在 M 上的作用是完全有效的，且只有有限个不动点。嵌入 $H'\hookrightarrow K\oplus H$ 诱导出 H' 在 M 上的作用。显然，$K\oplus H$ 和 $K\oplus H'$ 在 M 上诱导出相同的作用。最后，我们将证明 H' 在 M 上的作用是完全有效的，且有有限个不动点。

为 H'选取一组基 $\{h_1',\dots,h_d'\}$。对于每个 $1\leqslant i\leqslant d$，写作 $h_i'=k_i+h_i$，其中 $k_i\in K$ 且 $h_i\in H$。由于 $H'\cap K=\{0\}$，因此 $h_i\neq 0$。由于 $\{h_1',\dots,h_d'\}$ 是 H'的一组基，因此 $\{h_1,\dots,h_d\}$ 是 H 的一组基。因此，存在一个同构 $H\to H'$，将 h_i 映射到 h_i'，使得下图交换，

$$\begin{array}{ccc}H & \xrightarrow{\cong} & H'\\ & \searrow\quad\swarrow & \\ & \mathrm{Diff}(M) & \end{array}$$

其中 Diff(M) 是 M 的微分同胚群。因此 $[H', M] \in \mathcal{Z}_n(H')$ 和 $\Phi_{K,\ H}[H, M] = \Phi_{K,\ H'}[H', M]$。□

因此，我们得到由直和分解 $(\mathbb{Z}_2)^k = K \oplus H$ 索引的子空间族 $\Phi_{K,H}(\mathcal{Z}_n(H))$，它们属于 $\check{}\ \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$。考虑规范诱导的有效作用，整个空间 $\check{}\ \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 由所有这些子空间生成。然而，对于不同的分解 (K, H) 和 (K', H')，相应的子空间 $\Phi_{K,H}(\mathcal{Z}_n(H))$ 和 $\Phi_{K',H'}(\mathcal{Z}_n(H'))$ 可能存在非平凡交集，如引理 3.1 的第 (3) 部分所示。因此，为了更清晰地理解 $\check{}\ \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 相对于这一生成子空间族的结构，有必要识别并剔除冗余子空间。这正是我们在下一个结果中要做的。

定理 3.2. 对于 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的任意线性子群 K，固定 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的一个子群 H_K，使得 $K \oplus H_K = (\mathbb{Z}_2)^k$。那么对于所有 $n \geqslant 1$，向量空间 $\check{}\ \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 是以下子空间的直和

$$\check{\mathcal{Z}}_n((\mathbb{Z}_2)^k) = \bigoplus_K \Phi_{K,H_K}(\mathcal{Z}_n(H_K)).$$

证明。（1）首先，基于以下理由，我们可以假设 $\check{}\ \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中每个非零元素都有一个代表元，使得每个连通分支都是不变的，且每个分支上的作用只有有限个不动点。假设 M^n 具有一个 $(\mathbb{Z}_2)^k$-作用，且其不动点集非空且有限，并且 M 的连通分支为 M_1、...、M_m。如果每个分支 M_i 都是 $(\mathbb{Z}_2)^k$-不变的，那么 $(\mathbb{Z}_2^k, M)$ 就是所需的代表元。否则，假设 M_1 不是 $(\mathbb{Z}_2)^k$-不变的。令 $M' = \bigcup_{g \in (\mathbb{Z}_2)^k} g(M_1)$。那么 M' 是 $(\mathbb{Z}_2)^k$-不变的，它是 M 的若干连通分支之并；并且 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 在 M' 上的作用没有不动点，因此根据定理 2.2，$[(\mathbb{Z}_2)^k, M'] = 0$。此外，$0 \neq [(\mathbb{Z}_2)^k, M] = [(\mathbb{Z}_2)^k, M'] + [(\mathbb{Z}_2)^k, M \setminus M'] = [(\mathbb{Z}_2)^k, M \setminus M']$。经过有限步后，我们得到 M 的一个非空子空间 N，满足 N 由 M 的若干不变连通分支组成，该作用只有有限个不动点，且 $[(\mathbb{Z}_2)^k, M] = [(\mathbb{Z}_2)^k, N]$。因此现在

$$[(\mathbb{Z}_2)^k, M] = [(\mathbb{Z}_2)^k, N] = \sum_i [(\mathbb{Z}_2)^k, N_i] = \sum_i \Phi_{K_i,H_{K_i}}([H_{K_i}, N_i]),$$

其中 N_i 是 N 的一个连通分支，且 K_i 是 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 在 N 上的限制作用的核 $_i$.
因此我们得出 $\check{}\ \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k) = \sum_K \Phi_{K,H_K}(\mathcal{Z}_n(H_K))$.

(2) 设 $\alpha \in \Phi_{K,H_K}(\mathcal{Z}_n(H_K)) \cap \left(\sum_{K' \neq K} \Phi_{K',H_{K'}}(\mathcal{Z}_n(H_{K'}))\right)$。要证明 $\alpha = 0$，只需证明 $\phi_n(\alpha) = 0$。若 $\phi_n(\alpha) \neq 0$，取一个单项式 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \in \operatorname{supp}\phi_n(\alpha)$，使得 $\lambda_i \in \operatorname{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}_2)$。由引理 3.1(2),

$$\operatorname{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = \{\text{linear functions on } (\mathbb{Z}_2)^k \text{ vanishing on } K\}. \tag{3.2}$$

写作 $\alpha = \sum_{K_i \neq K} \alpha_i$，其中 $\alpha_i \in \Phi_{K_i,H_{K_i}}(\mathcal{Z}_n(H_{K_i}))$。假设对某个$i$，有 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \in \operatorname{supp}\ \phi_n(\alpha_i)$。那么

$$\operatorname{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = \{\text{linear functions on } (\mathbb{Z}_2)^k \text{ vanishing on } K_i\}. \tag{3.3}$$

由于 $K \neq K_i$，(3.2) 和 (3.3) 右侧的两个集合互不相同。这迫使 $\phi_n(\alpha) = 0$。□

因此，在齐次分量层面，

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{Z}}_n((\mathbb{Z}_2)^k) = \bigoplus_K \Phi_{K,H}(\mathcal{Z}_n(H_K)) \cong \bigoplus_K \mathcal{Z}_n(H_K) \cong \bigoplus_{0 \leqslant l' \leqslant k} \bigoplus_{\dim K = l'} \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^{k-l'}) \\ \cong \bigoplus_{0 \leqslant l \leqslant k} \bigoplus_{N_l} \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^l) = \bigoplus_{2 \leqslant l \leqslant \min\{n,k\}} \bigoplus_{N_l} \mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^l).\end{aligned}$$

其中 N_l 是 $(k-l)$ 维子空间的数量（属于 $(\mathbb{Z}_2)^k$），第二个同构由 Φ_K 的单射性推出H，最后一个则是因为当 $l = 0$、1 和$l > n$ 时，$\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^l)$ 是平凡的。我们将这一结果改述为以下推论。

推论 3.3。对所有 $n,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$\check{\mathcal{Z}}_n((\mathbb{Z}_2)^k)\cong\bigoplus_{2\leqslant l\leqslant\min\{n,k\}}\bigoplus_{N_l}\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^l),$$

其中，N_l 是 $(k-l)$ 维子空间在 $(\mathbb{Z}_2)^k$中的数量。

特别地，由于 $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^l)$ 的维数和生成集已在特定情形下得到研究，因此，在相应情形中可以推导出 ˇ $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的向量空间结构。我们在下面的注中总结关于 $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^l)$ 的最新进展。

注 3.4。 在 2009年之前，除了 Conner 和 Floyd 建立的情形 $k=1,\ 2$ 之外，一般情况下 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的环结构，甚至群结构，都是未知的。2009年，基于小覆盖的 Davis–Januszkiewicz 理论， [6], L¨u 开始研究极端情形 $n=k$ ，并考察了 $n\geqslant 3$ 时 $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^n)$ 的群结构。在 [11], ，他提出了以下猜想:

$\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^n)$ 中的每个类都有一个小覆盖代表元。

与此同时，他计算了 $\dim\mathcal{Z}_3((\mathbb{Z}_2)^3)=13$ ，并在该情形下证实了猜想。受这项工作的启发，L¨u 和 Tan 进一步利用对偶多项式研究了一般情形 $n=k\geqslant 3$ 。他们对 [13] 中的猜想给出了肯定回答，尤其计算了 $\dim\mathcal{Z}_4((\mathbb{Z}_2)^4)=511$。最近，Chen、L¨u 和 Tan [4] 发现等变配边与泛复形之间存在深刻联系，证明 $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^n)$ 同构于 $(n-1)$-阶约化同调群，该群对应于 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 的泛复形。因此，得到了 $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^n)$ 维数的公式:

$$\dim\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^n)=(-1)^n+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-1-i}\frac{\prod_{j=0}^{i}(2^n-2^j)}{(i+1)!}.$$

另一项突破来自 Li、L¨u 和 Shen [10], ，他们给出了一个判据，用于判定 $\mathcal{R}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中的多项式是否属于 $\mathrm{im}\,\phi_*$。利用这一刻画，计算出了以下情形下 $\mathcal{Z}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的维数：$(n,\ k)=(4,\ 3)$ [10], $(n,\ k)=(5,\ 3)$ [8], ; 一般而言，$(n,\ k)=(k+1,\ k)$ [3]。

因此，相应群的群结构的。例如，向量空间 ˇ $\mathcal{Z}_4((\mathbb{Z}_2)^5)$ 的维数为

$$\sum_{2\leqslant l\leqslant 4}N_l\cdot\dim_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{Z}_4((\mathbb{Z}_2)^l)=155\cdot 1+155\cdot 32+31\cdot 511=20956,$$

并且它由赋予某些 $(\mathbb{Z}_2)^5$-作用的 1 阶或 2 阶广义实 Bott 流形的类生成。

第二个应用是 ˇ $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 与 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^l)$ 在有限生成性方面的关系。

定理 3.5。 对于任意整数 $k\geqslant 1$，如果 ˇ $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 不是有限生成的 $\mathbb{Z}_2$-代数，那么对于某个 $1\leqslant l\leqslant k$, $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^l)$ 不是有限生成的 $\mathbb{Z}_2$-代数。

证明。 只需证明逆否命题：如果对于所有 $1\leqslant l\leqslant k$， $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^l)$ 都是有限生成的，那么 ˇ$\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 也是有限生成的。采用定理 3.2 的记号并结合假设，代数 $\mathcal{Z}_*(H_K)\cong\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^l)$ 是有限生成的。设 $\mathcal{Z}_*(H_K)$ 由元素 $\alpha_{1,K},\ldots,\alpha_{n_K,K}$ 生成。我们将证明， $\mathbb{Z}_2$-代数 ˇ $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 由集合

$$S=\left\{\Phi_{K,H_K}(\alpha_{i,K})\mid 1\leqslant i\leqslant n_K,\ \text{and all linear subspaces } K \text{ of } (\mathbb{Z}_2)^k\right\}.$$

对于任意齐次元素 $x\in\check{\mathcal{Z}}_n((\mathbb{Z}_2)^k)$，根据定理 3.2,

$$x=\sum_K\Phi_{K,H_K}(y_K),$$

其中 $y_K\in\mathcal{Z}_n(H_K)$。那么 y_K 可以写成有限和

$$y_K=\sum\alpha_{1,K}^{d_{1,K}}\cdots\alpha_{n_K,K}^{d_{n_K,K}},$$

因此

$$x=\sum_K\sum \Phi_{K,H_K}(\alpha_{1,K})^{d_{1,K}}\cdots\Phi_{K,H_K}(\alpha_{n_K,K})^{d_{n_K,K}}.$$

由于 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 只有有限多个子空间，且每个 n_K 都是有限的，所以 S 是有限集。因此，$\breve{}\,\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$作为 $\mathbb{Z}_2$-代数是有限生成的。□

在下一节中，我们将证明，对于所有 $l\geqslant 3$，代数 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^l)$ 都不是有限生成的。不同于 $l=1,2$ 的情形（在那里它是有限生成的），这一关于更高维数的否定结果表明，代数 $\breve{}\,\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 也可能不是有限生成的。

4. Proof of the main theorem

为方便读者起见，我们回顾主定理的表述。

定理 4.1。对于所有 $k\geqslant 3$，代数 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 都不是有限生成的。

一个直接推论如下。

推论 4.2. $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 上的代数不是一个由有限个变量生成的多项式代数（定义在 $\mathbb{Z}_2$ 上）.

定理 4.1 证明中的关键步骤是证明环 $\phi_*(\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k))$ 中存在无穷多个不可分解多项式 $f_{k,\,m}$，使得 $\lim_{m\to\infty}\deg f_{k,\,m}=\infty$。为了在 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中构造此类多项式，我们先构造连通流形上具有孤立不动点的显式有效 $(\mathbb{Z}_2)^k$-作用，然后计算它们在 ϕ_* 下的像，这些像恰好就是我们所寻求的多项式。

4.1. 某些 $(\mathbb{Z}_2)^k$-作用于 $S^1\times(\mathbb{R}P^{k-1})^m$。

受第 [14, 节中构造的 $S^1\times\mathbb{R}P^2$ 上的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ 作用启发，我们定义了 $S^1\times(\mathbb{R}P^{k-1})^m$ 上的一族 $(\mathbb{Z}_2)^k$-作用，它们在 ϕ_* 下的像均不可分解。为清楚起见，我们详细分析 k 为偶数且 $m=1$ 的情形。一般情形的计算完全类似，因此从略。

4.1.1. 情形 $k=2s$ 和 $m=1$。

为方便起见，将 S^1 视为 $\mathbb{C}$中的单位圆 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$，并将 $\mathbb{R}P^{k-1}$ 视为 $\mathbb{R}P(\mathbb{C}^s)=\{[z_1,z_2,\dots,z_s]\mid z_i\in\mathbb{C},1\leqslant i\leqslant s\}$中的射影空间。定义 $S^1\times\mathbb{R}P^{k-1}$ 上的对合如下:

$$\begin{aligned}
T_1(z,[z_1,z_2,\dots,z_s])&=(\bar z,[-\overline{z_1},z_2,\dots,z_s]),\\
T_2(z,[z_1,z_2,\dots,z_s])&=(z,[-z_1,z_2,\dots,z_s]),\\
T_{2i-1}(z,[z_1,z_2,\dots,z_s])&=(z,[z_1,\dots,z_{i-1},-\overline{z_i},z_{i+1},\dots,z_s]),\\
T_{2i}(z,[z_1,z_2,\dots,z_s])&=(z,[z_1,\dots,z_{i-1},-z_i,z_{i+1},\dots,z_s]),\\
T_{k-1}(z,[z_1,z_2,\dots,z_s])&=(z,[z_1,z_2,\dots,-\overline{z_s}]),\\
T_k(z,[z_1,z_2,\dots,z_s])&=(\bar z,[zz_1,z_2,\dots,z_s]),
\end{aligned}\tag{4.1}$$

对所有 $2\leqslant i\leqslant s-1$均成立，其中 w 是 $\mathbb{C}$中复数 w 的复共轭。

通过直接验证，映射 T_i 是定义良好且两两可交换的对合。为便于进一步计算，我们列出每个映射 T_i 的不动点集 F_i：

$$F_1=\{(\pm1,p_1),(\pm1,[\mathbf{i}t,z_2,\dots,z_s])\},\tag{4.2}$$
$$F_2=\{(z,[0,z_2,\dots,z_s]),(z,[z_1,0,\dots,0])\},\tag{4.3}$$
$$F_{2i-1}=\{(z,p_i),(z,[\dots,z_{i-1},\mathbf{i}t,z_{i+1},\dots])\},\tag{4.4}$$
$$F_{2i}=\{(z,[\dots,z_{i-1},0,z_{i+1},\dots]),(z,[\dots,0,z_i,0,\dots])\},\tag{4.5}$$
$$F_{k-1}=\{(z,p_s),(z,[z_1,\dots,z_{s-1},\mathbf{i}t])\},\tag{4.6}$$
$$F_k=\{(1,[z_1,\dots,z_s]),(-1,[z_1,0,\dots,0]),(-1,[0,z_2,\dots,z_s])\}.\tag{4.7}$$

对所有 $2 \leqslant i \leqslant s-1$，其中 $t \in \mathbb{R}$，$\mathbf{i} = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$，并且 $p_j = [0, \ldots, 1, \ldots, 0]$ 在第 j 个位置为 **1**，对所有 $1 \leqslant j \leqslant s$ 均如此。因此，这个作用 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 在 $S^1 \times \mathbb{R}P^{k-1}$ 上有 $2k$ 个不动点

$$\left\{P_i^{\pm} = (\pm 1, p_i), Q_i^{\pm} = (\pm 1, q_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant s\right\}, \tag{4.8}$$

其中 $q_i = [0, \ldots, \mathbf{i} \ldots, 0]$ 其中 $\mathbf{i}$ 位于第 i 个位置。此外，由于该作用是有效的，因此它在 $\mathcal{Z}_k((\mathbb{Z}_2)^k)$ 中表示一个类。

接下来，我们计算所有不动点处的切表示。为简单起见，$\{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$视为 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 的标准基。考虑一维的 $(\mathbb{Z}_2)^k$-表示 $\rho_{1,k} = \rho_1 + \rho_k$。我们可以看到 $\ker \rho_{1,k} = \{T_1T_k, T_2, \ldots, T_{k-1}\}$，并且

$$T_1T_k(z, [z_1, z_2, \ldots, z_s]) = (z, [-\overline{zz_1}, z_2, \ldots, z_s]).$$

由 (4.3)–(4.6)，所有映射 $T_2, \ldots, T_{k-1}$ 的不动点集为

$$\{(z, p_i), (z, q_i) \mid 2 \leqslant i \leqslant s\} \cup \{(z, [z_1, 0, \ldots, 0])\}.$$

因此，$\ker\rho_{1,k}$ 的作用的不动点集为

$$\{(z, p_i), (z, q_i) \mid 2 \leqslant i \leqslant s\} \cup \{(z, [z_1, 0, \ldots, 0]) \mid z = \pm\overline{z_1}/z_1\}, \tag{4.9}$$

其中包含 (4.8) 中的所有不动点。此外，(4.9) 的每个连通分支都是一维的。因此，应用不可约因子重数的几何解释，可得以下结果。

引理 4.3。ρ_1的指数为k，其中 $\left[\tau_p(S^1 \times \mathbb{R}P^{k-1})\right]$是 $\mathcal{R}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$中的一个单项式，且 $p \in \left\{P_i^{\pm}, Q_i^{\pm} \mid 1 \leqslant i \leqslant s\right\}$。

注意，子流形 $\{1\} \times \mathbb{R}P^{k-1}$是$(\mathbb{Z}_2)^k$-不变的。若用齐次坐标表示 $\mathbb{R}P^{k-1}$中的点，即 $z_i = x_i + \mathbf{i}y_i$，则

$$\begin{aligned}
&(g_1, \ldots, g_k)^{\mathsf{T}} \cdot (1, [x_1 : y_1 : \cdots : x_{s-1} : y_{s-1} : x_s : y_s]) \\
&\quad = (1, [(-1)^{g_1+g_2}x_1 : (-1)^{g_2}y_1 : \cdots : (-1)^{g_{k-3}+g_{k-2}}x_{s-1} : (-1)^{g_{k-2}}y_{s-1} : (-1)^{g_{k-1}}x_s : y_s]) \\
&\quad = (1, [x_1 : (-1)^{g_1}y_1 : (-1)^{g_1+g_2+g_3+g_4}x_2 : (-1)^{g_1+g_2+g_4}y_2 : \cdots : \\
&\qquad (-1)^{g_1+g_2+g_{k-3}+g_{k-2}}x_{s-1} : (-1)^{g_1+g_2+g_{k-2}}y_{s-1} : (-1)^{g_1+g_2+g_{k-1}}x_s : (-1)^{g_1+g_2}y_s]).
\end{aligned}$$

类似于例 2.3 中的计算，结合命题 2.1 和引理 4.3，我们得到不动点处的切表示，其中 $z = 1$。

引理 4.4。

$$\left[\tau_{P_i^+}\left(\{1\} \times \mathbb{R}P^{k-1}\right)\right] = \prod_{j=0, j\neq 2i-2}^{k-1} \lambda_{2i-2,j},$$

$$\left[\tau_{Q_i^+}\left(\{1\} \times \mathbb{R}P^{k-1}\right)\right] = \prod_{j=0, j\neq 2i-1}^{k-1} \lambda_{2i-1,j},$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant s$,

$$\lambda_j = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ \rho_{1,2,j+1,j+2}, & 1 \leqslant j \leqslant k-3 \text{ and } j \text{ is even}, \\ \rho_{1,2,j+1}, & 1 \leqslant j \leqslant k-3 \text{ and } j \text{ is odd}, \\ \rho_{1,2,k-1}, & j = k-2, \\ \rho_{1,2}, & j = k-1, \end{cases}$$

以及 $\lambda_{i,\ j} = \lambda_i + \lambda_j$。因此,

$$\left[\tau_{P_i^+}\left(S^1 \times \mathbb{R}P^{k-1}\right)\right] = \left[\tau_{P_i^+}\left(\{1\} \times \mathbb{R}P^{k-1}\right)\right] \cdot \rho_{1,k},$$

$$\left[\tau_{Q_i^+}\left(S^1 \times \mathbb{R}P^{k-1}\right)\right] = \left[\tau_{Q_i^+}\left(\{1\} \times \mathbb{R}P^{k-1}\right)\right] \cdot \rho_{1,k}.$$

同样的计算可得出具有 $z=-1$ 的不动点处的切表示。

引理 4.5。令

$$\lambda'_j=\begin{cases}\lambda_j, & j=0,1,\\ \lambda_j+\rho_k, & 2\leqslant j\leqslant k-1,\end{cases}$$

且 $\lambda'_{i,\ j}=\lambda'_i+\lambda'_j$。于是对于所有 $1\leqslant i\leqslant s$,

$$\left[\tau_{P_i^-}\left(\{-1\}\times\mathbb{R}P^{k-1}\right)\right]=\prod_{j=0,j\neq 2i-2}^{k-1}\lambda'_{2i-2,j},$$

$$\left[\tau_{Q_i^-}\left(\{-1\}\times\mathbb{R}P^{k-1}\right)\right]=\prod_{j=0,j\neq 2i-1}^{k-1}\lambda'_{2i-1,j}.$$

因此,

$$\left[\tau_{P_i^-}\left(S^1\times\mathbb{R}P^{k-1}\right)\right]=\left[\tau_{P_i^-}\left(\{-1\}\times\mathbb{R}P^{k-1}\right)\right]\cdot\rho_{1,k},$$

$$\left[\tau_{Q_i^-}\left(S^1\times\mathbb{R}P^{k-1}\right)\right]=\left[\tau_{Q_i^-}\left(\{-1\}\times\mathbb{R}P^{k-1}\right)\right]\cdot\rho_{1,k}.$$

注 4.6。如果 $k=2$，在引理 4.4 和 4.5 中，$[\tau_{P_1^+}(\{1\}\times\mathbb{R}P^{k-1})]=[\tau_{Q_1^+}(\{1\}\times\mathbb{R}P^{k-1})]$ 以及$[\tau_{P_1^-}(\{-1\}\times\mathbb{R}P^{k-1})]=[\tau_{Q_1^-}(\{-1\}\times\mathbb{R}P^{k-1})]$。但如果 $k>2$，它们则全部不同。

总之，当 k 为偶数时，由 (4.1) 定义的 $S^1\times\mathbb{R}P^{k-1}$ 上的 $(\mathbb{Z}_2)^k$-作用的不动点数据完全确定。

4.1.2. 情形 $k=2s$ 和 $m\geqslant 1$。在讨论 $m=1$ 的基础上，我们现在处理任意 m 的一般情形。令 π: $S^1\times\mathbb{R}P^{k-1}\to\mathbb{R}P^{k-1}$ 为投影。定义 k 个对合，作用于 $S^1\times(\mathbb{R}P^{k-1})^m$，如下:

$$\check{T}_i(z,w_1,w_2,\ldots,w_m)=(T_i(z,w_1),\pi(T_i(z,w_2)),\ldots,\pi(T_i(z,w_m))),$$

其中 w_1、……、$w_m\in\mathbb{R}P^{k-1}$，且 $1\leqslant i\leqslant k$。此作用有 $2k^m$ 个不动点（a、u_1、……、u_m），其中$a=\pm1$ 且 u_1、……、$u_m\in\{p_i,q_i\mid 1\leqslant i\leqslant s\}$，并且

$$\left[\tau_{(a,u_1,\ldots,u_m)}\left(S^1\times\left(\mathbb{R}P^{k-1}\right)^m\right)\right]=\left(\prod_{i=1}^{m}\left[\tau_{(a,u_i)}\left(\{a\}\times\mathbb{R}P^{k-1}\right)\right]\right)\rho_{1,k},$$

这由引理 4.4 和 4.5 得出。由此得到以下定理。

定理 4.7。沿用引理 4.4 和 4.5 中的记号。对于 $k=2s$ 和 $m\geqslant 1$，$(\mathbb{Z}_2)^k$ 作用于 $S^1\times(\mathbb{R}P^{k-1})^m$ 后在映射 ϕ_* 下的像为

$$f_{k,m}=\left[\left(\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=0,j\neq i}^{k-1}\lambda_{i,j}\right)^m+\left(\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=0,j\neq i}^{k-1}\lambda'_{i,j}\right)^m\right]\rho_{1,k}. \tag{4.10}$$

注意，如果 $k=2s>2$，则多项式$f_{k,m}$ 在（4.10）中总有一个系数非零的单项式

$$\lambda_1^m\cdots\lambda_{k-1}^m\rho_{1,k}.$$

4.1.3. 一般情形。同样的分析也适用于 k 为奇数的情形，例如 $2s+1$ 满足 $s\geqslant 1$ 时，前提是我们将 $\mathbb{R}P^{k-1}$ 视为射影空间 $\mathbb{R}P(\mathbb{C}^s\oplus\mathbb{R})=\{[z_1,\ldots,z_s,t]\mid t\in\mathbb{R},z_i\in\mathbb{C},1\leqslant i\leqslant s\}$。论证完全类似，因此我们省略细节，并将一般结果表述为以下定理。

定理 4.8. 对于所有 $k\geqslant 3$ 和 $m\geqslant 1$，存在 $(\mathbb{Z}_2)^k$ 在 $S^1\times(\mathbb{R}P^{k-1})^m$ 上的作用，满足以下性质:

（1）该作用是有效的，且只有有限不动点，因此 $[(\mathbb{Z}_2)^k,\ S^1\times(\mathbb{R}P^{k-1})^m]\in\mathcal{Z}_{(k-1)m+1}((\mathbb{Z}_2)^k)$。

（2）类 $[(\mathbb{Z}_2)^k,\ S^1\times(\mathbb{R}P^{k-1})^m]$ 在映射 ϕ_* 下的像是多项式

$$f_{k,m}=(\sigma_{k,1}^m+\sigma_{k,2}^m)\rho_{1,k}, \tag{4.11}$$

其中

$$\sigma_{k,1}=\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=0,j\neq i}^{k-1}\lambda_{i,j},\ \sigma_{k,2}=\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=0,j\neq i}^{k-1}\lambda'_{i,j}\in\phi_*(\check{\mathcal{Z}}_{k-1}((\mathbb{Z}_2)^k)),$$

其中 $\lambda_{i,\ j}$ 且 $\lambda'_{i,\ j}\in\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k,\ \mathbb{Z}_2)$。

(3) 在多项式 $f_{k,\ m}$ 中，单项式 $\lambda_{0,\ 1}^m\cdots\lambda_{0,\ k-1}^m\rho_{1,\ k}$ 的系数非零 .

因此，我们现在已经具备证明主定理 4.1 所需的所有要素。

4.2. **主定理的证明**。

引理 4.9。 给定一个非零多项式 $f\in\phi_*(\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k))$，若其中存在一个单项式 $\gamma_1^{d_1}\cdots\gamma_{k-1}^{d_{k-1}}\gamma_k\in\mathrm{supp}\ f$，使得所有 $\gamma_i\in\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k,\mathbb{Z}_2)$ 两两不同且 $1+\sum_{i=1}^{k-1}d_i=\deg\ f$，则 f在 $\phi_*(\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k))$ 中不可分解。

证明。 若 f 可分解，则写作 $f=\sum_{e_1,\ldots,e_l\in\mathbb{N}}f_1^{e_1}\cdots f_l^{e_l}$，其中 $f_i\in\phi_*(\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k))$，且对所有 i，$\deg\ f_i<\deg\ f$。假设对于某个 $e_1,\ldots,e_l$，有 $\gamma_1^{d_1}\cdots\gamma_{k-1}^{d_{k-1}}\gamma_k\in\mathrm{supp}\ f_1^{e_1}\cdots f_l^{e_l}$。更准确地说，存在单项式 $\tau_{i,j}\in\mathrm{supp}\,f_i$，满足 $1\leqslant j\leqslant e_i$ 和 $1\leqslant i\leqslant l$，使得

$$\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{e_i}\tau_{i,j}=\gamma_1^{d_1}\cdots\gamma_{k-1}^{d_{k-1}}\gamma_k. \tag{4.12}$$

记 $\mathrm{Fac}(\tau_{i,\ j})=\{\rho\in\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k,\ \mathbb{Z}_2)\mid\rho|\tau_{i,\ j}\}$。注意，若 $\tau_{i,\ j}=1$，则 $\mathrm{Fac}(\tau_{i,\ j})=\varnothing$。若 $\mathrm{Fac}(\tau_{i,\ j})\neq\varnothing$，则集合 $\mathrm{Fac}(\tau_{i,\ j})$ 张成 $\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k,\ \mathbb{Z}_2)$。特别地，$|\mathrm{Fac}(\tau_{i,\ j})|\geqslant k$。此外，由等式 (4.12)，

$$\bigcup_{i,j}\mathrm{Fac}(\tau_{i,j})=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{k-1},\gamma_k\}.$$

因此，若集合 $\mathrm{Fac}(\tau_{i,\ j})$ 非空，则它必为 $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{k-1},\gamma_k\}$。由于 γ_k 在 $\gamma_1^{d_1}\cdots\gamma_{k-1}^{d_{k-1}}\gamma_k$中的幂为 1，存在唯一的一对 $(i_0,\ j_0)$，使得 $1\leqslant j_0\leqslant e_{i_0}$ 且 $1\leqslant i_0\leqslant l$ 满足 $\mathrm{Fac}(\tau_{i_0,\ j_0})=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{k-1},\gamma_k\}$。对于另一对 $(i,\ j)\neq(i_0,\ j_0)$，$\mathrm{Fac}(\tau_{i,\ j})=\varnothing$，这意味着 $\tau_{i,\ j}=1$。因此 $\gamma_1^{d_1}\cdots\gamma_{k-1}^{d_{k-1}}\gamma_k=\tau_{i_0,\ j_0}\in\mathrm{supp}\ f_{i_0}$。所以 $\deg\ f_{i_0}\geqslant\deg\tau_{i_0,\ j_0}=\deg\ f$，这与假设矛盾。□

由定理 4.8(3)，式 (4.11) 中的多项式 $f_{k,m}$ 满足引理 4.9 中的条件，因此它在 $\phi_*(\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k))$ 中不可分解。

定理 *4.1* 的证明。只需证明对于任意 $k\geqslant 3$，$\phi_*(\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k))$ 都不是有限生成的。设 $S\subseteq\phi_*(\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k))$ 是任意一个有限子集。由于 $\deg f_{k,m}=m(k-1)+1$，我们可以选取一个充分大的整数 m_0，使得对于所有 $f\in S$，都有 $\deg f_{k,m_0}>\deg\ f$。因为 f_{k,m_0} 不可分解，所以它不属于由 S 生成的子代数。由于 S 是任意的，这说明没有任何有限子集能够生成 $\phi_*(\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k))$。□

注 4.10。 上述证明的关键在于多项式$f_{k,\ m}$的不可分解性。然而，对于 $m\geqslant 2$，这些多项式在 $\phi_*(\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k))$ 中变为可分解的。事实上，等式

$$\sigma_{k,1}^m+\sigma_{k,2}^m=(\sigma_{k,1}^{m-1}+\sigma_{k,2}^m)(\sigma_{k,1}+\sigma_{k,2})+(\sigma_{k,1}^{m-2}+\sigma_{k,2}^{m-2})\sigma_{k,1}\sigma_{k,2},$$

蕴含关系

$$f_{k,m}=f_{k,m-1}\cdot\sigma_{k,1}+f_{k,m-1}\cdot\sigma_{k,2}+f_{k,m-2}\cdot\sigma_{k,1}\cdot\sigma_{k,2},$$

它将 $f_{k,m}$ 表示为 $\phi_*(\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k))$ 中低次数多项式之积的和。因此，$f_{k,m}$ 在此环中是可分解的。由此，即使采用我们的方法，关于代数 $\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 是否为有限生成的问题仍未解决。

5. Final remark: Gelfand–Kirillov dimension and equivariant bordism ring

在推论 4.2 中，我们证明对于所有 $k \geqslant 3$，代数 $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 都不是由有限个变量生成的多项式代数。作为补充，我们在最后一节中证明， $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 和 $\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 都不是由无限多个变量生成的多项式代数。主要工具是 Gelfand–Kirillov 维数；关于这一不变量的详细介绍，我们参阅书籍 [9]。下文中，$\mathbb{F}$表示任意域。

定义 5.1 ([9, 第 14] 页)。设 R 是一个在 $\mathbb{F}$ 上的代数。R 的*Gelfand–Kirillov* 维数，或*GK*维数，定义为

$$\operatorname{GKdim}(R) \coloneqq \sup_{V} \limsup_{n\to\infty} \left(\log_n \left(\dim_{\mathbb{F}} V^n\right)\right),$$

其中，上确界取遍 R 的所有有限维子空间 V。

值得一提的是，代数的 GK 维数可以是实数或无穷大。然而，对于交换代数，GK 维数要么是非负整数，要么是无穷大 [9, 定理 4.5]。我们列出一些关于 GK 维数的基本事实，以备后用。

引理 5.2 ([9,例 1.6 和引理 3.1])。

(1) 多项式代数 $\mathbb{F}[x_i \mid i \in \Gamma]$ 的 GK维数为 $|\Gamma|$。(2) 如果 S 是某个 $\mathbb{F}$-代数 R的子代数或同态像，那么 GK维数(S) ⩽GK维数(R)。

立即得到以下结论。设 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$，并令 R 表示代数$\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$或 $\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$。通过映射 ϕ_*， R 可以视为多项式代数$\mathbb{Z}_2[\rho \mid \rho \in \operatorname{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}_2)]$的子代数。特别地， ϕ_* 的像包含于子代数 $\mathbb{Z}_2[\rho \mid \rho \in \operatorname{Hom}((\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}_2) \setminus \{0\}]$中。因此，根据引理 5.2，

$$\operatorname{GKdim}(R) \leqslant 2^k - 1. \tag{5.1}$$

由于含有无穷多个变量的多项式代数具有无穷 GK维数，上述不等式意味着 R 不可能是这样的代数。

命题 5.3. $\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 和 $\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 均不是由无穷多个变量生成的多项式代数。

注 5.4. 利用 [19] 的主定理，也可以得到 $\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的 GK维数下界。考虑遗忘群作用 ε_* 的同态：$\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k) \to \Omega^O_*[(\mathbb{Z}_2)^k,\ M] \mapsto [M]$。令 $F(k)$ 为由 $\bigoplus_{n<2^k}\Omega^O_n$ 生成的 Ω^O_* 的子代数。那么 $F(k)$ 同构于多项式代数 $\mathbb{Z}_2[x_n \mid 0 \leqslant n \neq 2^i - 1 < 2^k, i \in \mathbb{N}]$。Tom Dieck [19] 证明了 ε_* 的像恰为 $F(k)$，因此由引理 5.2，

$$\operatorname{GKdim}(\check{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^k)) \geqslant 2^k - k - 1. \tag{5.2}$$

由不等式 (5.1) 和 (5.2)，以及 $\check{}\mathcal{Z}_*((\mathbb{Z}_2)^k)$ 的交换性，我们得出

$$\operatorname{GKdim}(\check{\mathcal{Z}}_*((\mathbb{Z}_2)^k)) \in \{2^k - k - 1, 2^k - k, \ldots, 2^k - 1\}.$$

Acknowledgments

第一作者感谢齐天成就 GK维数所进行的有益讨论，这些讨论促成了第5节。

References

[1] S. Basu、G. Mukherjee 和 S. Sarkar。关于 Milnor 流形的等变协边的一些计算。*Topology Appl.*，172：1–9，2014年。https://doi.org/10.1016/j.topol.2014.04.016。[2] G. E. Bredon。 *Introduction to compact transformation groups*, *Pure Appl. Math.*Academic Press 丛书第 46 卷。纽约—伦敦，1972年。[3] B. Chen 和 Z. L¨u。关于等变无定向配边群的同调描述，预印本，arXiv:math.AT/2508.11841。[4] B. Chen、Z. L¨u 和 Q. Tan。等变几何配边与泛复形。*Proc. Amer. Math. Soc.*，153 6 2687 101090 17199（）：–2699，2025年。https://doi.org/ . /proc/ 。

[5] P. E. Conner 和 E. E. Floyd。 *Differentiable periodic maps*， *Ergeb. Math. Grenzgeb.*第 33 卷， *(N.F.)*。Springer-Verlag，柏林，1964年。https://doi.org/10.1007/978-3-662-41633-4。[6] M. W. Davis 和 T. Januszkiewicz。凸多胞体、考克斯特轨形与环面作用。 *Duke Math. J.*，62(2)：417–451，1991年。https://doi.org/10.1215/S0012-7094-91-06217-4。[7] P. E. Frenkel。有限群作用于三维流形的不动点数据。 *Algebr. Geom. Topol.*，3：709–718，2003年。https://doi.org/10.2140/agt.2003.3.709。[8] Y. Guan 和 Z. L¨u。具有孤立不动点的五维（$\mathbb{Z}_2$）^{3}-流形的等变边界分类。*Math. Z.*，311(2)：第 28 号论文，21，2025年。https://doi.org/10.1007/s00209-025-03823-6。[9] R. Krause 和 H. Lenagan。 *Growth of algebras and Gelfand–Kirillov dimension*，第 22 卷，*Grad-uate Studies in Mathematics*，2000出目 。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，修订版，。https://doi.org/10.1090/gsm/022。[10] H. Li、Z. L¨u 和 Q. Shen。等变几何配边、表示与标记图，预印本，arXiv:math.AT/2501.06565。[11] Z. L¨u。二维环面流形、协边与小覆盖。 *Pacific J. Math.*，241(2)：285–308，2009年。https://doi.org/10.2140/pjm.2009.241.285。[12] Z. L¨u。图与（$\mathbb{Z}_2$）^{k}-作用，预印本，arXiv:math.AT/0508643。[13] Z. L¨u 和 Q. Tan。小覆盖与 - 环面流形的等变边界分类。， （）： –。https://doi.org/ . /imrn/rnt 。[14] Z. L¨u 和 L. Yu。三维小覆盖的拓扑类型。 *Forum Math.*，23(2)：245–284，2011年。https://doi.org/10.1515/FORM.2011.008。[15] G. Mukherjee。格拉斯曼流形与旗流形的等变协边。 *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*，105 4 381 10 1007 02836873（）： –391，1995年。https://doi.org/ . /BF 。[16] G. Mukherjee 和 P. Sankaran。初等阿贝尔 2 -群在旗流形上的作用及其应用。， （）： –606，1998年。https://doi.org/ . /S - - - - 。[17] R. E. Stong。等变配边与（$\mathbb{Z}_2$）^{k} 作用。 *Duke Math. J.*，37(4)：779–785，1970年。https://doi.org/10.1215/S0012-7094-70-03793-2。[18] R. Thom。可微流形的一些整体性质。 *Comment. Math. Helv.*，28：17–86，1954年。https://doi.org/10.1007/BF02566923。[19] T. tom Dieck。可交换对合的不动点。*Arch. Math. (Basel)*，21：295–298，1970年。https://doi.org/10.1007/BF01220918。[20] T. tom Dieck。*G*-流形的特征数。I。*Invent. Math.*，13：213–224，1971年。https://doi.org/10.1007/BF01404631。

School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China
Email address: yxguan21@m.fudan.edu.cn

School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China
Email address: zlu@fudan.edu.cn