arXiv:2601.13900v1 [cs.DM] 20 Jan 2026

布尔秩与二元秩及其和实数秩关系的数学与计算视角

Michal Parnas*特拉维夫-雅法学术
学院计算机科学学院

摘要

本文从数学和计算两个视角全面综述二元秩与布尔秩的研究，尤其关注它们与实数秩之间的关系。我们回顾这些秩函数的基本定义，介绍二元秩与布尔秩的主要替代表述，以及它们的计算复杂性和与通信复杂性领域的深刻联系。我们总结用于建立二元秩与布尔秩下界和上界的关键技术，包括线性代数、组合学和图论中的方法、隔离集、概率方法、核化、通信协议以及查询到通信提升技术。此外，我们重点介绍这些秩相较于实数秩的主要数学性质，并讨论若干关于特定矩阵族的秩的非平凡界限。最后，我们介绍计算和近似这些秩函数的算法方法，例如参数化算法、近似算法、性质测试和近似布尔矩阵分解（BMF）。综上，本文所述成果勾勒出该领域当前的理论认知，并指出了未来研究方向。

关键词—— 实数秩、布尔秩、二元秩、二部团覆盖数、二部团划分数。

*michalp@mta.ac.il.

目录

1 引言 **3**

2 记号 5

3 替代表述 6

4 复杂性 秩函数的各个方面 **8**

4.1 计算复杂性.8 4.2 通信复杂度.10

5 下界与上界技术 12

5.1 线性代数.14 5.2 隔离集（欺骗集）.16 5.3 组合学与图论.17 5.4 概率方法.19 5.5 核化.20
5.6 通信复杂性协议.23 5.7 提升技术.26

6 秩函数的数学性质 29

6.1 生成集和基.29 6.2 满秩子矩阵.31 6.3 克罗内克积.33 6.4 矩阵的秩及其补矩阵.38

7 算法结果 **42**

7.1 参数化算法.42 7.2 近似算法.43 7.3 性质测试.46 7.4 布尔矩阵分解.51

8 结论与进一步的研究方向 **52**

1 引言

实数域上矩阵的秩 是数学中的一个基本概念，起源于线性代数领域，尤其是对线性方程的研究。求解线性方程是一个实际问题，早在公元前1650年，埃及数学家就已开始研究，当时他们考虑的是可以表示为一个未知数的线性方程的问题。还有证据表明，大约公元前300年，人们已经能够求解含有两个未知数的方程。但直到19世纪，矩阵理论才发展为现代形式。那个时期，Cauchy、Cayley、Sylvester、Frobenius、Hamilton以及其他数学家的著作，正式确立了矩阵的概念、对矩阵可执行的运算及其性质、向量和行列式的概念，并定义了矩阵的秩（参见Corry [22]的综述）。

此后，矩阵的秩在数学和计算机科学中得到了众多应用，用于衡量与线性方程无关的代数和组合性质。例如，设G 是一个具有n 个顶点和c 个连通分支的有向图，其关联矩阵为M。可以证明，M 的秩等于$n - c$。有关这一结论的证明，以及秩与图论之间其他有趣的联系，请参见 Bapat 的一本著作 [9] 。秩也是通信复杂度、信息论、学习算法、纠错码、电路复杂度等领域中的一个关键度量。

此外，秩的概念还有多种变体，它们之间存在有趣的联系，例如 Ryser 研究的项秩 [97], 、Haemers 定义的最小秩 [46], 、符号秩（见 [95] 及其中的参考文献）、Alon、Lee、Shraibman 和 Vempala 研究的近似 ϵ-秩 [3], 、Dvir、Gopi、Gu 和 Wigderson 引入的生成拟阵的秩 [28], , 以及 Brualdi 和 Dahl 最近定义的 $0, \pm 1$ 矩阵的 $\pm$-秩 [15]。

矩阵M 在实数域上的秩通常定义为M的线性无关行或列的最大数量。为引出本综述的主题，我们考虑实数秩的以下等价定义，记作 $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(M)$。给定一个在 $\mathbb{R}$上的$n \times m$ 矩阵M，其秩 $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(M)$是满足以下条件的最小整数$d$：存在实矩阵$A$ 和B，其大小分别为$n \times d$ 和$d \times m$，使得$M = A \cdot B$，其中运算在 $\mathbb{R}$上进行。

类似地，考虑以下定义在半环上的秩函数（例如参见 Gregory and Pullman [43]）：

- 非负矩阵M 的非负秩 是满足以下条件的最小d：存在非负矩阵A 和B，其大小分别为$n \times d$ 和$d \times m$，使得$M = A \cdot B$，其中运算在实数域上进行。

- 大小为$n \times m$的 0-1矩阵M 的二进制秩，记作 $\mathrm{rankbin}(M)$，是满足以下条件的最小d：存在大小分别为$n \times d$ 和$d \times m$ 的 0-1矩阵A 和B，使得$M = A \cdot B$，其中运算在整数上进行。

- 0-1矩阵的布尔秩 M，记为 $\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(M)$，其定义与二元秩类似，但此处的运算采用布尔算术（即 $0 + x = x + 0 = x$、$1 + 1 = 1 \cdot 1 = 1$ 以及 $x \cdot 0 = 0 \cdot x$ {v28>）。

对于给定的秩，这类分解$M = A \cdot B$称为最优分解，其中 A 和B 的大小分别为 $n \times d$ 和$d \times m$，而 d 等于所研究的具体秩。在本综述中，我们重点关注最后两个秩函数：布尔秩和二元秩，以及它们与实数秩之间的联系；不过，本文介绍的技术和结果对于研究其他秩函数也可能具有普遍的兴趣和重要意义。

关于给定 0-1 矩阵 M 上这三个秩函数之间的关系，根据定义，始终有

$$\text{rank}_{\mathbb{R}}(M) \leq \text{rank}_{\text{bin}}(M) \text{ and } \text{rank}_{\mathbb{B}}(M) \leq \text{rank}_{\text{bin}}(M),$$

而 $\text{rank}_{\mathbb{B}}(M)$ 可能小于或大于 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(M)$。单位矩阵是一个平凡的例子，其中三个秩都相等；当实数秩为 1 或 2 时，二元秩和布尔秩始终等于实数秩。然而，存在一些矩阵族，其布尔秩比二元秩和实数秩小一个指数级；而对于另一些矩阵族，布尔秩和二元秩则比实数秩大一个准多项式因子。三个秩函数之间可能存在的差距，尚未找到紧确界。

正如我们在这篇综述中所展示的，布尔秩和二元秩有若干种等价表述，每种表述都突显了理解矩阵秩的一种不同方式。这些表述包括：用单色矩形覆盖或划分 0-1 矩阵中的 1；对二分图的边进行双团划分或覆盖；矩阵的交数；集合基问题；以及通信复杂度。这些不同的视角揭示了它们与数学中的经典研究领域——如图论、代数和组合学——之间的丰富联系，也展现了它们与计算机科学诸多理论和实践领域的联系，例如通信复杂度、聚类、数据库平铺、数据挖掘、机器学习、生物信息学等。

这些联系表明，关于秩函数的问题往往会在看似无关的研究领域中再次出现。因此，理解这些等价关系有助于建立一种通用语言，以便比较不同领域的数学和计算机科学中使用的技巧，并在这些领域之间传递见解。我们将表明，不同学术群体所发展的方法能够相辅相成，结合使用时还能解决一些多年未解的问题。另请参阅 Miettinen 和 Neuman 于2021年发表的综述，该文介绍了布尔秩和二元秩在计算机科学中的各种应用 [81], ；以及 Monson、Pullman 和 Rees 于1995年发表的综述 [83] ，该文探讨了这些秩函数在数学中的应用和变体。

矩阵的实数秩，或者说在任意域上的秩，都已得到充分理解。多年来，人们发展出许多强有力的技巧，其中大多源自线性代数，并由此产生了涉及实数秩的组合与计算应用。特别是，利用高斯消元，可以在多项式时间内轻松计算矩阵的实数秩。至于布尔秩和二元秩，尽管数学家和计算机科学家都对它们进行了广泛研究，但人们对其性质的理解仍远不充分，主要原因是它们并非定义在域上。特别是，计算布尔秩和二元秩是*NP*难问题，而且目前仅有少数几类具体的0-1矩阵，其二元秩和布尔秩已被精确计算。

本综述介绍了这些秩函数的数学性质及其与实数秩的联系，并总结了相关的计算复杂性和算法结果。由于本综述的范围有限，无法涵盖所有已知结果。其中一些结果经过重新表述，以便

于理解或强调重点，另一些则首次发表于此处。我们收录了证明以及上下界技术，以展示所采用方法的多样性。这些证明因其优雅性或重要性而被选入；有些证明虽然简单，我们仍予以呈现，因为相应的原始证明或论文无法在线找到（例如 [83] 和 [24]）。本综述的另一个目标是突出展示数学和计算机科学不同领域中独立出现的多样化结果与方法。由于这些结果分别发表在不同的研究社群中，其中一些结果后来被独立地重新发现。因此，一篇统一的综述能够帮助对此主题感兴趣的读者全面了解迄今为止取得的进展。

概述： 第2节介绍所需的符号。第3节阐述二元秩和布尔秩的主要替代表述，从而展示它们的重要性。第4节讨论布尔秩和二元秩的计算复杂性，并说明它们与通信复杂性领域的根本联系。第5节总结用于给出二元秩和布尔秩界的关键上下界技术。这些技术包括线性代数、组合学与图论、隔离集、概率方法、核化、通信协议以及查询到通信提升技术。第6节考察二元秩和布尔秩相较于实数秩的数学性质，并给出特定矩阵族的二元秩和布尔秩的非平凡界。第7节综述用于计算或近似这些秩函数的算法方向，包括参数化算法、近似算法、性质测试和近似布尔矩阵分解（BMF）。最后，第8节总结综述中提及的一些未解决问题。

2 符号

本综述中的大多数矩阵都是 0-1矩阵，除非另有说明。矩阵 M 第 i 行、第 j 列上的元素记为 $M_{i,j}$。矩阵 M 的转置记为 M^t，向量也类似。给定一个 0-1矩阵 M，其补矩阵 $\overline{M}$ 是将M 中的每个 0 替换为 1、每个 1 替换为 0 后得到的矩阵。如果矩阵的每一行都是前一行向右循环移位一位的结果，则称该矩阵为循环矩阵 。

本综述中的大多数图都是二分图 $G = (V_1, V_2, E)$，其中 V_1 是位于一侧的 n 个顶点组成的集合，V_2 是位于另一侧的 m 个顶点组成的集合，而 E 是连接 V_1 和 V_2的边集。G 的约化邻接矩阵是一个大小为 $n \times m$ 的 0-1矩阵 M，其中每个 V_1 中的顶点对应一行，每个 V_2, 中的顶点对应一列，并且当且仅当 $(i, j) \in E$ 时，$M_{i,j} = 1$ 。此时，M 也称为双邻接矩阵。

我们在某些情况下考虑一般图 $G = (V,E)$，其中 V 是由 n 个顶点组成的集合，而 E 是边集。图 G 的邻接矩阵 是一个大小为 $n \times n$ 的 0-1 矩阵 M ，当且仅当 $M_{i,j} = 1$ ，且$(i,j) \in E$。

图 $G = (V,E)$ 的色数 $\chi(G)$ 是为V中的所有顶点着色所需的最少颜色数，且若$(i,j) \in E$ ，则i 和j 具有不同的颜色。

记号 $\tilde{O}$ 和 $\tilde{\Omega}$ 用于在O 和 Ω的参数中隐藏多对数因子 .

3 替代表述

人们对布尔秩和二元秩及其适用性的广泛兴趣，也源于以下替代表述，以及它们与通信复杂度领域的深刻联系；该领域将在第4.2节中介绍。图1展示了下文所述这些表述。

用单色矩形进行覆盖与划分： *0-1*矩阵中的单色组合矩形是M 的一个子矩阵，其中所有元素的值都相同。矩形的行和列在M中不必连续。M的划分数记为$Partition_1(M)$，指将M中的 1 划分为若干单色矩形所需的最少矩形数；M的覆盖数记为$Cover_1(M)$，指覆盖M中的 1 所需的最少单色矩形数，其中矩形可以重叠。

引理1 ([44])。设 M 是一个0-1 矩阵。那么秩$_{\mathrm{bin}}(M) = (M)$，且秩$_{\mathbb{B}}(M) =(M)$。

证明： 设M 是一个大小为$n \times m$的矩阵。M 中的每个单色矩形都可以用一个秩为 1 的 0-1 矩阵来表示，该矩阵是两个 0-1 向量$a^t \cdot b$的乘积，其中a^t 是长度为n 的列向量，b是长度为m的行向量。注意到，如果M 中 1 的划分或覆盖包含d 个矩形，则引理得证：

$$M = \sum_{i=1}^{d} a_i^t \cdot b_i = A \cdot B,$$

其中，向量 a_1^t、……、a_d^t 是一个大小为 A 的矩阵的列，该矩阵大小为 $n \times d$；而 b_1,……、b_d 是一个大小为 B 的矩阵的行，该矩阵大小为 $d \times m$。对于互不相交的矩形，运算是通常的加法；对于可能重叠的矩形，运算则是布尔运算，即 $1 + 1 = 1$。将矩形划分或覆盖做到最小，对应于分解$A \cdot B$的最优性。

■

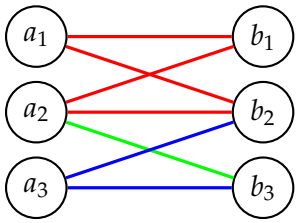
二分图的二部团边覆盖与划分： 0-1 矩阵M 的布尔秩或二元秩，分别等于覆盖或划分二分图G 所有边所需的最少完全二部图数量，其中该图的约化邻接矩阵为M。具体而言，若G 是一个二分图，两侧分别有n 个和m 个顶点，则M 有n 行和m 列，并且$M_{i,j} = 1$ 当且仅当(i,j) 是图G的一条边。M中的一个单色组合全 1 矩形对应于G 中的一个二部团（参见 Gregory、Pullman、Jones 和 Lundgren [44]）。

子集交：0-1 矩阵 M 的交数是满足以下条件的最小整数 d：可以为 M 的行和列分别分配 $\{1,..., d\}$ 的子集，其中，若 X_i 和 Y_j 分别是分配给第 i 行和第 j 列的子集，则当且仅当 $M_{i,j} = 1$ 时，$X_i \cap Y_j \neq \emptyset$。注意，对于每个 $1 \leq t \leq d$，所有满足 $t \in X_i \cap Y_j$ 的元素 $M_{i,j}$ 构成一个全 1 单色矩形。由这些子集定义的矩形覆盖了 M 中所有的 1，因此得到一个大小为 d 的覆盖，所以 M 的交数与其布尔秩相同。交数的一个类似概念要求当且仅当 $M_{i,j} = 1$ 时 $|X_i \cap Y_j| = 1$，而在其他情况下交集为空；该概念与二元秩相同。

集合基问题：设 $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ 是某个全集 U 上的一个集合族。基是指S 的一个集合族 $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_d\}$，满足对于每个 $S_i \in \mathcal{S}$，都存在 $\mathcal{B}$ 中的若干集合，其并集等于 S_i。目标是为 $\mathcal{S}$ 找到基数最小的基。这个问题的一个变体是正规集合基问题。这里，若对于每个 $S_i \in \mathcal{S}$，都存在 $\mathcal{B}$ 中两两不相交的若干集合，其并集等于 S_i，则称 $\mathcal{B}$ 对于 $\mathcal{S}$ 是正规的；目标同样是为 $\mathcal{S}$ 找到最小的正规基。参见 Stockmeyer [106] 以及 Jiang 和 Ravikumar [61]。

给定一个大小为 n × m 的 0-1矩阵 M，可以如下定义一个集合基问题。选择集合元素的全集为 U = {1, 2, ..., n}。令 $\mathcal{S}$ = {S1, ..., Sm}，其中 Sj = {i1, ..., it} 当且仅当 M 的第 j 列在第 i1, ..., it 行上为 1，其他位置均为 0。M 中 1 元素的一个大小为 d 的矩形覆盖对应于 $\mathcal{S}$ 的一个大小为 d 的集合基，而一个矩形划分则对应于 $\mathcal{S}$ 的一个正规集合基。为验证这一点，设 M = X ×Y 是 M 的一个布尔分解，其中 X 的大小为 n × d，Y 的大小为 d × m。X 的各列可视为 $\mathcal{S}$ 的基，而 Y 的各行则表示基中的每个子集覆盖了 $\mathcal{S}$ 中的哪些子集。也就是说，当且仅当列 X_i 包含在覆盖 Sj 的子集的并集中时，$Y_{i,j} = 1$。类似地，若 X ·Y 是 M 的一个二进制分解，则矩形与基子集彼此不相交。

$$\begin{array}{c} \\ \{1\} \\ \{1,3\} \\ \{2\} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \{1\} & \{1,2\} & \{2,3\} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{c} \\ \{1\} \\ \{1,2\} \\ \{2\} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \{1\} & \{1,2\} & \{2\} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

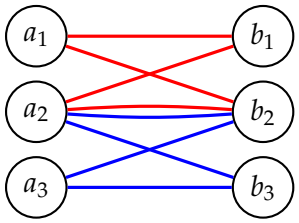


图1：一个二元秩为 3、布尔秩为 2 的 3×3 矩阵示例。图的上半部分展示了该矩阵的一个最优二进制分解，以及将所有 1 划分为 3 个矩形的划分。旁边是对应的二分图，其中包含一个大小为 3 的完全二部图边划分。每个完全二部图具有不同的颜色，与划分中对应矩形的颜色相同。

图的下半部分展示了该矩阵的一个最优布尔分解，以及用 2 个矩形覆盖所有 1 的覆盖。旁边是对应的二分图，其中包含一个大小为 2 的二分团边覆盖。在这个二分图中，a_2 和b_2 之间的边同时属于红色和蓝色的二分团，因此在图中表示了两次。

两个矩阵的每一个矩阵的左上方都标注了行和列，该标注对应于子集交问题。对于第一个矩阵，每个标签都是 {1, 2, 3} 的子集；对于第二个矩阵，每个标签都是 {1, 2} 的子集。

最后，如果令 $\mathcal{S} = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3\}\}$，那么 $\{\{1,2\}, \{2\}, \{3\}\}$ 是 $\mathcal{S}$ 的极小正规集合基，而 $\{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ 是 $\mathcal{S}$ 的极小集合基。

4 秩函数的复杂性方面

除了实数、布尔和二元秩函数在代数定义上的差异，以及布尔秩和二元秩的各种组合解释外，这些秩函数在计算行为上也存在显著差异。实数秩可以通过高斯消元高效计算，而布尔秩和二元秩通常难以确定。同时，这三个秩函数与通信复杂度模型紧密交织，是理解计算两个变量的函数时必须交换多少信息的关键度量。本节将考察并阐释这些秩函数的计算复杂性，以及它们在通信复杂度中的解释。

4.1 计算复杂性

利用高斯消元法，可以在多项式时间内轻松计算矩阵的实数秩，但已有研究表明，布尔秩和二元秩均为*NP*完全问题。Orlin [85]于1977年证明，计算布尔秩是*NP*完全问题；他的方法是将图的团覆盖问题 多项式归约到二分图的二分团边覆盖问题。团覆盖问题要求找出覆盖给定图所有顶点所需的最少团数。由于第一个问题已被证明是*NP*完全问题 [68], ，因此后一个问题也属于*NP*完全问题。

引理2 ([85])。 存在一种多项式归约，可将图的团覆盖问题归约到二分图的二分团边覆盖问题。

证明：设 $G = (V, E)$ 是一个无向图，其中 $V = \{1, 2, ..., n\}$ 为顶点集。定义二分图 H_G 如下：H_G 左侧有 n 个顶点 $\{x_1, ..., x_n\}$，右侧有 n 个顶点$\{y_1, ..., y_n\}$。对于 H_G的边，对每个$1 \le i \le n$，都有一条边 (x_i, y_i) 属于 H_G；而且，当且仅当 $(i, j) \in E$ 时，(x_i, y_j) 是 H_G 的一条边。容易验证，G 的顶点的团覆盖会导出 H_G 中规模相同的二分团边覆盖，反之亦然。

■

事实上，利用 Stockmeyer 在 1975 年的一项结果，也可以证明布尔秩问题是*NP*完全的。Stockmeyer 证明了第3节所述的集合基问题是*NP*完全的，因为两个问题等价。

此外，还有一种很巧妙的多项式归约，可将 0-1矩阵M 的布尔秩归约到图G_M的色数M ， $\chi(G_M)$，如下引理所示。在第7.2节中，我们将展示如何利用这种归约为布尔秩构造一种近似算法。归约示例见图2。

引理3。 设 M 是一个大小为 $n \times m$ 的0-1矩阵。存在一个图 G_M，其顶点数为 $O(n \cdot m)$，使得$\chi(G_M) =$秩$_{\mathbb{B}}(M)$。

证明： 从M 到G_M 的归约如下。图G_M 中，对于每一对i,j使得$M_{i,j} = 1$，都有一个顶点x_i。至于G_M 的边，如果(i,j) 和(k, ℓ) 这两个元素不能同时属于M中的同一个全 1 单色矩形，则x_i与x_k之间有一条边；也就是说，或者$M_{i,\ell} = 0$ 或者

$M_{k,j} = 0$，或者两者皆是。这意味着顶点x_i和x_k不能着成相同的颜色，因为它们之间有一条边相连。图G_M也称为M的冲突图 。

现在证明 $\chi(G_M) = 秩_{\mathbb{B}}(M)$。考虑 M 中所有 1 元素的一个单色矩形覆盖 $R_1,\ldots, R_d$。若元素 (i, j) 被矩形 R_t覆盖，则将顶点 $x_{i,j}$ 染成颜色 t。如果某个元素属于覆盖中的多个矩形，则任选其中一个矩形的颜色为其着色。对于任意两个颜色均为 t 的元素 (i, j)、(k, ℓ)，都有 (i, j)、(k, ℓ) $\in R_t$。由于 R_t 是一个单色矩形，因此 $M_{i,j} = M_{k,\ell} = M_{i,\ell} = M_{k,j} = 1$。于是，图 G_M中对应的顶点之间没有边，因此这是一个着色，其颜色数等于覆盖中的矩形数。

类似地，图 G_M 中一个颜色数为 d 的着色可按如下方式诱导出一个由 d 个单色矩形构成的 M 中所有 1 元素的覆盖。首先，将所有满足顶点 $x_{i,j}$ 颜色为 t 的元素 (i, j) 放入 R_t 。接着，将由第一步加入 R_t 的元素所诱导的子矩阵中的所有元素加入 R_t 。同样，一个元素可能属于多个矩形。最后，第二步加入 R_t 的元素也都是矩阵中的 1 元素，因为若 (i, j)、(k, ℓ) 在第一步中都被加入 R_t，那么根据 G_M 的定义，顶点 $x_{i,j}$ 与 $x_{k,\ell}$之间没有边，这意味着 $M_{i,\ell} = M_{k,j} = 1$。因此，R_t 确实是一个单色矩形。

■

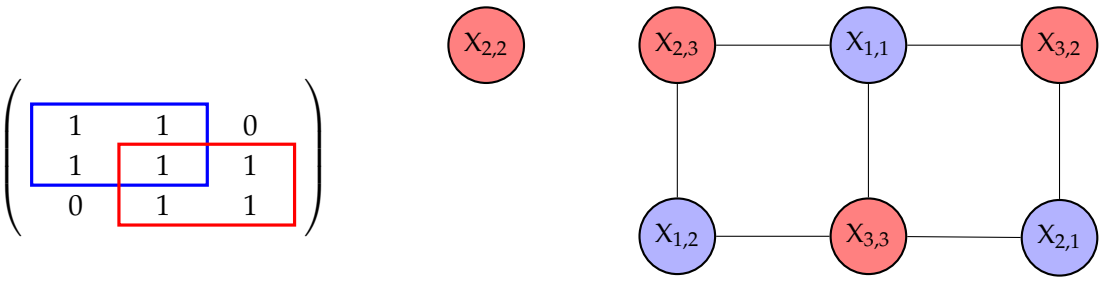


图2：引理3中描述的归约，将左侧矩阵的布尔秩问题归约为右侧图的顶点着色问题。如图所示，矩阵中的 1 可由蓝色和红色单色矩形覆盖。因此，图中的顶点也用两种颜色着色。顶点 $x_{2,2}$、$x_{2,3}$、$x_{3,2}$、$x_{3,3}$ 被染成红色，其余顶点被染成蓝色。注意，$x_{2,2}$ 既可以染成红色，也可以染成蓝色；矩阵中对应的 1 同时属于红色和蓝色矩形。

Jiang 和 Ravikumar [61] 于 1993年证明了二元秩是 *NP*-完全的，方法是展示从顶点覆盖问题到正规集合基问题的多项式归约，而后者等价于二元秩问题。2025年，Hirahara、Ilango 和 Loff [56] 利用这一归约证明，确定一个 0-1矩阵的确定性通信复杂度也是 *NP*-困难的（见第4.2小节）。在他们的证明中，他们采用了矩阵二元秩的表述，而非 [61] 中使用的正规集合基问题。

由于精确计算二元秩和布尔秩是*NP*难的，因此需要近似算法。然而，Chalermsook、Heydrich、Holm 和 Karrenbauer [18] 证明，对于大小为$n \times n$ 的 0-1 矩阵M，很难将其布尔秩[1] 近似到$n^{1-\epsilon}$倍以内。

[1]在 [18] 中曾声称二元秩也有类似的困难性结果，但作者后来指出该结果存在缺陷，因此他们的结果仅适用于布尔秩。

对于任意给定的 $\epsilon > 0$。鉴于上文所示布尔秩与色数之间的密切关系，这并不令人意外。事实上，Zuckerman [117]于2007年证明，对于任意给定的 $\epsilon > 0$，很难将具有n 个顶点的图的色数近似到$n^{1-\epsilon}$以内。在第7.2节中，我们将介绍简单的近似算法，其布尔秩的近似比为$n/\log n$，二元秩的近似比为$O(n/\log^2 n)$。

放宽这些问题的其他方向包括参数化算法和性质测试，正如第 7 节所述。在参数化算法的背景下，已有研究表明，关于秩参数 d，二元秩和布尔秩是固定参数可处理的。

此外，由于这些问题具有很高的难度，已有一些研究计算特定矩阵族的二元秩和布尔秩，或给出其下界和上界。例如，Gregory [42] 以及 Haviv 和 Parnas [52] 研究了循环矩阵的二元秩。Pullman [91], 、Gregory、Pullman、Jones 和 Lundgren [44], 、Hefner、Henson、Lundgren 和 Maybee [54] 以及 Haviv 和 Parnas [50, 52]研究了正则矩阵。Boyer [14] 研究了完全二分图中路径的补图的完全二部图边划分。Guo、Huynh 和 Macchia [45] 计算了网格的完全二部子图边覆盖数，Amilhastre、Janssen 和 Vilarem [6] 给出了在二分图中寻找最小双团边覆盖的多项式时间算法。这些结果运用了来自数学和计算机科学不同领域的各种工具与技术，正如本综述后续各节所展示的那样。

4.2 通信复杂度

布尔秩和二元秩在通信复杂度这一领域中发挥着基础性作用；该领域由 Yao 在1979年发表的一篇开创性论文中引入 [116]。基本形式的通信复杂度问题可以描述为 Alice 和 Bob 两位玩家之间进行的一场游戏：他们希望共同计算某个函数 $f(i, j)$。两位玩家都可以访问一个公共矩阵 M，其中 M通常是一个表示他们希望计算的函数 f 的 0-1矩阵。Alice 获得一个行索引 i，Bob 获得一个列索引 j，他们的共同目标是在尽可能少交换信息的情况下，确定$f(i, j) = M_{i,j}$ 的值。他们按照预先约定的通信协议，分轮传输 0、1 比特来共享信息，直到两位玩家都能确定 $M_{i,j}$。通信协议的成本 是指在所有行索引和列索引的输入对 i、j 中，Alice 和 Bob 使用该协议时最坏情况下传输的比特数。

以 下这些通信复杂度度量将在整篇综述中使用 y:

- 矩阵M的确定性通信复杂度记为$D(M)$，它是M的确定性通信协议的最低成本。

- 非确定性通信复杂度M，记作$N1(M)$，其定义类似，唯一不同之处在于通信是非确定性的。也就是说，双方会收到某个“证明”或证书，并且存在某个证书及双方之间的一段比特传输，使得双方接受当且仅当$M_{i,j} = 1$。非确定性通信复杂度定义为交给 Alice 和 Bob 的证书所包含的比特数，加上他们在作出决定前相互传输的比特数。

- 无歧义的非确定性通信复杂度M，记作$U(M)$，还要求每个输入i,j至多对应一次接受计算。

- 余非确定性矩阵M的通信复杂度记为$N0(M)$，其定义与非确定性通信复杂度类似，但这里存在一个证书以及 Alice 和 Bob 之间的比特传输；当且仅当$M_{i,j} = 0$时，他们都会接受。因此，余非确定性通信复杂度等于补矩阵M的非确定性通信复杂度，即$N0(M) = N1(M)$。

0-1矩阵M 的通信复杂度与M 的单色组合矩形划分和覆盖密切相关。回顾一下，划分数$_1(M)$ 和覆盖数$_1(M)$ 分别表示将M中的 1 划分或覆盖所需的最少单色矩形数，而覆盖数$_0(M)$ 表示覆盖M中 0 所需的最少单色矩形数。

Yao [116], Aho、Ullman 和 Yannakakis [1]以及 Yannakakis [115]的研究结果将上述通信复杂度度量与划分数和覆盖数联系起来，概括如下定理。关于各种通信复杂度度量的更多背景知识，请参阅 Kushilevitz 和 Nisan [72] 以及 Rao 和 Yehudayoff [92] 关于通信复杂度的著作，以及 Jukna [65]所著书籍的第 4 章。

定理 4. 设 M 是一个0,1 矩阵。那么：

- $\log_2(\text{划分}_1(M)) \le D(M) \le O(\log^2 \text{划分}_1(M))$。
- $N_1(M) = \lceil \log_2(\text{覆盖}_1(M)) \rceil$。
- $U(M) = \lceil \log_2(\text{划分}_1(M)) \rceil$。
- $N_0(M) = \lceil \log_2(\text{覆盖}_0(M)) \rceil = \lceil \log_2(\text{覆盖}_1(M)) \rceil$。

根据第3节中的讨论，秩$_{\mathbb{B}}(M) = $ 覆盖$_1(M)$ 且秩$_{\text{bin}}(M) = $ 划分$_1(M)$。因此，布尔秩决定非确定性复杂度，而二元秩决定无歧义的非确定性复杂度，并给出确定性通信复杂度的多项式近似。

G¨o ¨os、Pittasi 和 Watson [38]于 2015 年给出了一个几乎与基于划分数的确定性通信复杂度上界相匹配的下界，并证明了以下定理。另请参阅第5.6节的讨论。

定理5 ([3 8])。 存在一个矩阵族 M，使得 $D(M) \ge \widetilde{\Omega}(\log^2 \text{划分}_1(M))$.

非确定性通信复杂度是NP难问题，因为它由布尔秩决定，而布尔秩已被证明是NP难问题。Yao [116] 早在1979年就提出，确定性通信复杂度是否是NP难问题；这个问题多年来一直悬而未决（见Kushilevitz和Weinreb [73] ，以及Hirahara、Ilango和Loff [55]）。最终，Hirahara、Ilango和Loff [56] 于2025年证明，确定一个

0-1矩阵的确定性通信复杂度是*NP*难问题。他们的证明采用了Jiang和Ravikumar [61] 从正规集合基问题到二元秩问题的归约。与此同时，Gaspers、He和Mackenzie [33]也于2025年证明，确定性通信复杂度是*NP*难问题，方法是证明向量装箱问题这一*NP*难问题可以归约到该问题。

需要指出的是，Lov´asz 和 Saks [76] 提出的著名对数秩猜想认为，矩阵M 的确定性通信复杂度与 $\log_2$秩$_{\mathbb{R}}(M)$多项式相关。由于 log秩$_{\text{bin}}(M)$ 给出了矩阵M的确定性通信复杂度的多项式近似，因此该猜想实际上认为，对每个 0-1 矩阵M，$\log_2$ 秩$_{\text{bin}}(M)$与 $\log_2$秩$_{\mathbb{R}}(M)$ 多项式相关。关于对数秩猜想目前的研究进展，已知：

$$\log_2 \operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(M) \leq D(M) \leq O(\sqrt{\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(M)}).$$

以实数秩表示的$D(M)$ 下界由 Mehlhorn 和 Schmidt [79]于1982年证明。上界由 Sudakov 和 Tomon [107] 于2023年证明，他们将 Lovett [78]此前给出的上界改进了 $\log_2$秩$_{\mathbb{R}}(M)$ 这一因子。因此，关于实数秩的下界与上界之间仍存在指数级差距。另请参阅 Lovett [77] 以及 Lee 和 Shraibman [74], 撰写的综述，以及 Hambardzumyan、Lovett 和 Shirley [48] 近期关于对数秩猜想新表述的论文。

由于通信复杂度与布尔秩和二元秩之间存在这种紧密的相互联系，理解布尔秩和二元秩有助于更好地理解不同的通信复杂度度量。另一方面，通信复杂度中的技术和结果已经被证明有助于计算具体矩阵的布尔秩和二元秩，或给出其界（见第 5.7 节和第 6.4 节），并且还被用于第7.2节所述的二元秩近似算法。

5 下界和上界技术

本节介绍一些用于确定矩阵的布尔秩和二元秩上界与下界的核心技术。正如我们将展示的，这些技术借鉴了数学的不同领域，例如代数、组合学和图论，同时也结合了计算机科学界发展出的工具。这种多样化的方法帮助解决了许多长期悬而未决的问题，尽管仍有许多挑战尚待解决。

本节介绍的方法将在第 6 节中再次出现；在该节中，我们将探讨布尔秩和二元秩的性质，并给出特定 0-1矩阵族的界的示例；这些方法也将在第 7 节中再次出现，该节重点介绍计算或近似这些秩函数的算法。我们将在以下两个矩阵族上展示所介绍方法的适用性：矩阵族 C_n 和矩阵族 $D_{n,k}$，具体描述如下。有关这两个矩阵族的示意图，请参见图 3；本节关于这些矩阵族所介绍结果的总结见表1。

矩阵族 团$_n$**：** 令团$_n$ 为一个大小为$n \times n$的0-1矩阵，其中主对角线全为0，其余元素均为1。因此，矩阵团$_n$ 是单位矩阵的补矩阵，同时也是冠图的约化邻接矩阵，即从一个完全二分图中删除一个完美匹配后得到的图。

矩阵团$_n$ 也表示双方通信问题中的不等问题。在该问题中，两位参与者 Alice 和 Bob 分别收到一个行索引i 和一个列索引j，他们的目标是尽可能少地通信（以比特计），并计算不等函数：

$$\text{Non-Equality}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \neq j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

因此，矩阵 团$_n$ 恰好体现了 Alice 和 Bob 在输入i、j时需要作出的判定，因为 团$_n$ 的矩阵元素(i、j) 为 1，当且仅当$i \neq j$。类似地，单位矩阵体现了关于相等的双向通信问题。在这种情况下，当且仅当$i = j$时，Alice 和 Bob 才应接受。

矩阵族 $D_{n,k}$**：** 令$D_{n,k}$ 为一个大小为$n \times n$的 0-1 循环矩阵，其首行为$n - k$ 个连续的 1，后接k 个 0。注意，经过列置换后，团$_n = D_n$。

$$D_{6,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

图 3：左侧为矩阵$D_{6,3}$，右侧为矩阵团$_6$。$D_{6,3}$ 主对角线上的 1 构成一个大小为 6 的隔离集，因此，秩$_{\text{bin}}(D_{6,3}) = 6$。团$_6$ 中的最大隔离集大小为 3，但秩$_{\mathbb{R}}$(团$_6$) $= 6$，因此，秩$_{\text{bin}}$(团$_6$) $= 6$ 也成立。隔离集的定义见第 5.2 小节，团$_n$的实数秩见第 5.1 小节。

矩阵	$\text{rank}_{\mathbb{R}}$	$\text{rank}_{\mathbb{B}}$	rank_{bin}	章节
C_n	n	Θ（对数 n）	n	5.1, 5.3
$D_{n,k}$ $k < n/2$	$n -$ 最大公约数$(n,k) + 1$	$O(k$ 对数$n)$	至少 最小值$\{n,\ n -$ 最大公约数$(n,\ k) + 2\}$	5.1
$D_{n,k}$ $k \geq n/2$	$n -$ 最大公约数$(n,\ k)$ $+1$	n	n	5.2

表1：矩阵团$_n$ 和D_n的秩函数之间的差距，k。

在介绍各种技巧之前，请回顾一下，根据引言中给出的秩函数定义，以下关系始终成立：

$$\text{rank}_{\mathbb{R}}(M) \leq \text{rank}_{\text{bin}}(M) \ \text{ and } \ \text{rank}_{\mathbb{B}}(M) \leq \text{rank}_{\text{bin}}(M),$$

而秩$_{\mathbb{B}}(M)$ 可能小于或大于秩$_{\mathbb{R}}(M)$。对于实数秩为 1 或 2 的情形，二元秩和布尔秩总是等于实数秩；但当秩$_{\mathbb{R}}(M) \geq 3$ 时，存在一些矩阵，其秩函数彼此不同。

正如我们将要证明的，矩阵 $C_n = D_{n,1}$ 是一个例子，其中布尔秩比实数秩和二元秩小几个数量级；这是这两种秩函数之间可能出现的最大间距，因为对于任意 0-1矩阵 M，秩$_{\text{bin}}(M) \leq 2^{\text{rank}_{\mathbb{B}}(M)}$。此外，存在一些 n、k 的取值，使得在 $D_{n,k}$ 上，实数秩、二元秩和布尔秩各不相同。在第 6.4 节中，我们将介绍一项结果，表明布尔秩和二元秩可能比实数秩大准多项式倍。

5.1 线性代数

如上所述，0-1矩阵的实数秩始终是其二元秩的一个下界。这一简单观察已被用于求得某些矩阵族的二元秩的紧确或近乎紧确的下界。在其他情况下，正如我们接下来将要展示的，则需要运用更高级的线性代数技巧。

1971年的著名 Graham Pollak 定理 [41] 给出了将完全图K_n 的n 个顶点的边划分所需二部团数量的下界。其原始证明用到了 Witsenhausen 的以下引理。设矩阵M的负特征值和正特征值的数量分别为 $\delta_-(M)$ 和 $\delta_+(M)$ 。

引理 6。设 G 为一个简单图，M 为其邻接矩阵。将 G 的边划分所需的完全二部图数量至少为 $\max\{\delta_-(M), \delta_+(M)\}$。

Graham Pollak 定理由 $\max\{\delta_-(M), \delta_+(M)\} = n - 1$立即得出，其中$M$ 是K_n的邻接矩阵。多年来，人们为该定理找到了几种不同的证明，例如 Tverberg [109] 于1982年给出的证明，以及Peck [90]于1984年给出的证明。现在我们来介绍 Tverberg 的优雅证明，该证明运用了线性代数中的基本工具。

定理 7 ([41], [109]). *K_n 的边的任意双团划分都至少包含 $n - 1$ 个完全二部图。*

证明： 考虑K_n 的边的任意双团划分，其中包含m 个完全二部图(A_i, B_i)，$1 \leq i \leq m$，其中A_i 是二部团一侧的顶点集，而B_i 是另一侧的顶点集。反设$m < n - 1$，将K_n 的顶点标记为 $\{1, \ldots\ldots, n\}$，并为K_n的每个顶点i 定义一个变量x_i。由于K_n 的所有边都被这些二部团划分，以下等式成立：

$$\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i \in A_k} x_i \right) \left(\sum_{j \in B_k} x_j \right)$$

左侧的求和遍历图K_n的所有边一次；右侧的求和遍历划分中的所有完全二部图，对于每个二部图 (A_k, B_k)，遍历A_k 中的每个顶点$i \in$ 和B_k 中的每个顶点$j \in$，并将对应的变量相乘。因此，这同样是遍历图的所有边一次。现在，考虑以下线性方程组：

$$x_1 + \ldots + x_n = 0$$

$$\sum_{i \in A_k} x_i = 0 \text{ for } 1 \leq k \leq m$$

根据我们对m的假设，共有$m+1 \leq n-1$个方程，并且有n个变量x_i。因此，该方程组存在非平凡解，其中至少有一个变量x_i不为零。最后，考虑以下内容：

$$0 = (x_1 + ... + x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i \in A_k} x_i \right) \left(\sum_{j \in B_k} x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$$

其中，不等式成立是因为至少有一个x_i不为零。这显然矛盾，因此$m \geq n-1$，如前所述。

■

受 Graham Pollak 定理的启发，Alon、Saks 和 Seymour 于 1991年猜想，任何边可划分为k个二部团的图G，其色数至多为$k+1$。对于完全图K_n，这一猜想成立，因为它的色数为n。约 20 年后，Huang和Sudakov 反驳了这一猜想 [59]。另见第 6.4 节。

Gregory [42] 以及 Haviv 和 Parnas [52] 的研究也运用了线性代数，他们考察了$D_{n,k}$的二元秩。$D_{n,k}$ 的实数秩可按如下方式计算（参见 Ingleton [60]以及 Grady 和 Newman [40]）：

定理 8. 对于所有整数 $n > k \geq 0$，秩$_{\mathbb{R}}(D_{n,k}) = n -$最大公约数$(n,k) + 1$。

这立即意味着，若 n 和 k 互素，则 $D_{n,k}$ 在实数域上满秩，因此其二元秩也为 n。特别地，$\text{rank}_{\text{bin}}(C_n) = n$，因为 $C_n = D_{n,1}$。然而，当 gcd(n,k) > 1 时，$\text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k}) < n$，人们由此提出问题：$\text{rank}_{\text{bin}}(D_{n,k}) > \text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k})$ 是否成立。Gregory [42] 于 1989年 证明，对所有 $n \geq 3$，$\text{rank}_{\text{bin}}(D_{n,2}) = n$；Haviv 和 Parnas [52]于 2023年 推广了这一结果，并证明：

定理 9 ([52])。对于所有整数 $n > k > 0$，秩$_{\text{bin}}(D_{n,k}) \geq$最小值$\{$秩$_{\mathbb{R}}(D_{n,k}) + 1, n\}$.

[42] 和 [52] 的两个结果都采用了以下类似思路。设 $\text{rank}_{\text{bin}}(D_{n,k}) = d$，并令 $D_{n,k} = X \cdot Y$ 为 $D_{n,k}$ 的任意二进制分解，其中 X 是一个大小为 $n \times d$ 的 0-1 矩阵，Y 是一个大小为 $d \times n$ 的 0-1 矩阵。若 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k}) < n$，可以证明存在 X 的一列 x 和 Y 的一行 y，使得 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k} - x \cdot y) = \text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k})$。这意味着，对于矩阵 $D_{n,k} - x \cdot y$，$X' \cdot Y'$ 是大小为 $d - 1 \geq \text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k})$ 的二进制分解，其中 X' 是去掉列 x 后的矩阵 X，Y' 是去掉行 y 后的矩阵 Y。因此，$d \geq \text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k}) + 1$。

将二元秩表述为把矩阵中所有的 1 划分为由 1 组成的单色矩形后，这一思路可以改写如下。设 P 是 $D_{n,k}$ 中所有 1 的某种单色矩形划分。若 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k}) < n$，则可以证明，P 中存在一个矩形 R，使得如果我们从 $D_{n,k}$ 中移除 R，也就是把该矩形中的所有 1 都改为 0，那么所得矩阵的实数秩为 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k})$。由于划分 $P \setminus R$ 覆盖了所得矩阵中的所有 1，因此 $P \setminus R$ 至少包含 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k})$ 个矩形；于是加上 R，划分 P 至少包含 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k}) + 1$ 个矩形，正如所声称的那样。

对于不同的$D_{n,k}$和值n,k，其精确二元秩仍然未知。Hefner、Henson、Lundgren 和 Maybee [54] 猜想，对于所有$n \geq 6$，$\text{rank}_{\text{bin}}(D_{n,3}) = n$。

5.2 隔离（欺骗）集

证明M 的二元秩和布尔秩下界的一个有效工具，是在M 中找到一个较大的隔离集，或者找到一个欺骗集，这就是*foolingset* 在通信复杂度中的称呼。

定义 10。在一个0, 1矩阵 M 中，隔离集是 M 的1 元素的一个子集，其中任意两个 *1* 都不属于 M 的同一个全 *1* 2×2 子矩阵，且任意两个 *1* 不在 M 的同一行或同一列中。M 的最大隔离集的大小记作 $i(M)$。

因此，隔离集中的任意两个 1 都不可能属于同一个单色矩形，因此，$i(M)$ 给出了 $\text{rank}_{\text{bin}}(M)$ 和 $\text{rank}_{\mathbb{B}}(M)$ 的下界（例如参见 Beasley [10]）。

Shitov [102]通过证明最大隔离集问题可从图的最大独立集问题归约而来，证明了该问题是*NP*-困难的；而已知图的最大独立集问题也是*NP*-困难的。然而，对于某些矩阵，证明其存在较大的隔离集相对容易，这立即给出二元秩和布尔秩的下界。例如，矩阵$D_{n,k}$ 有一个大小为n 的隔离集，其中$k \geq \lfloor n/2 \rfloor$，因此：

引理11。 若 $k \geq \lfloor n/2 \rfloor$，则秩$_{\mathbb{B}}(D_{n,k}) = $秩$_{\text{bin}}(D_{n,k}) = n$。

证明： 容易验证，当$k \geq \lfloor n/2 \rfloor$时，$D_{n,k}$ 主对角线上的n 个 1 构成一个大小为n的隔离集。结论由此得出，因为 $D_{n,k}$ 每一行中的 1 都可以分别由一个单色矩形覆盖。

■

注意，在这种情况下，使用隔离集得到的二元秩下界优于使用实数秩作为下界，因为对于某些 n、k 的取值，$\text{rank}_{\mathbb{R}}(D_{n,k}) = n - \gcd(n, k) + 1$ 可能小于 n。不过，也存在其他例子，其中 $\text{rank}_{\mathbb{B}}(M)$、$\text{rank}_{\text{bin}}(M)$ 与 i(M) 之间的差距很大。例如，$i(C_n) = 3$ 对于 $n \geq 3$成立，而 de Caen、Gregory 和 Pullman [24] 证明，$\text{rank}_{\mathbb{B}}(C_n) = \Theta(\log_2 n)$；又因为 $C_n = D_{n,1}$，所以 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(C_n) = \text{rank}_{\text{bin}}(C_n) = n$。图 3 展示了一个示例。

隔离集的概念可以推广为 k 阶隔离集，或有时称为扩展隔离集（见 [26],[86]）。

定义 12. 若一个 0,1 矩阵 M 的全 *1* 元素子集 F 中任意 k 个 $+1$ *1* 都不能同时包含在 M 的同一个全 *1* 单色矩形中，则称 F 为 M 的 k 阶隔离集。

因此，上文讨论的隔离集都是 1 阶隔离集；由于 k 阶隔离集中的至多 k 个 1 可以包含在同一个全 1 单色矩形中，我们立即得到：

断言13. 设 F 是 $0,1$ 矩阵 M 的一个 k 阶隔离集。那么秩$_{\mathbb{B}}(M)$, 秩$_{\text{bin}}(M) \geq |F|/k$。

另一项受到关注的研究方向，是寻找秩$_{\mathbb{R}}(M)$ 与 $i(M)$之间可能达到的最大间距。Dietzfelbinger、Hromkovi˘c 和 Schnitger 的一项结果 [26] 证明，这一间距至多是二次的：

定理14 ([26])。 设 M 是一个0-1 矩阵。那么 $i(M) \leq$ 秩$_{\mathbb{R}}(M)^2$。

de Caen、Gregory、Henson、Lundgren 和 Maybee [23]，以及 Parnas 和 Shraibman [89] 的结果结合起来，得到了一类简单的 0-1矩阵，如下述定理所述。随着矩阵规模增大，这类矩阵的实数秩与二元秩、布尔秩及最大隔离集之间的乘法间隙几乎达到 2。利用克罗内克积可以扩大这一差距（见第 6.3 节）。

定理15 ([23, 89])。 对于所有 $n \geq 4$、$n \neq 5$，都存在一个大小为 $n \times n$ 的0-1矩阵 M，其中 M 的所有行和列均互不相同，且秩$_{\mathbb{R}}(M) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$，并且秩$_{\text{bin}}(M)$ $=$ 秩$_{\mathbb{B}}(M)$ $= i(M)$ $= 2\lfloor n/2 \rfloor$。

证明： 偶数阶矩阵是大小为$n \times n$的矩阵$D_{n,n/2}$。奇数阶矩阵的构造方法是取一个偶数阶矩阵$D_{n,n/2}$，再添加一行和一列；这行和这列经过精心选取，均为$D_{n,n/2}$ 的行和列的线性组合，并且不同于$D_{n,n/2}$的所有行和列。

■

Friesen、Hamed、Lee 和 Theis [32]证明，对于任意$d \geq 1$，都存在一个M_d 矩阵，定义在$\mathbb{Q}$上，使得秩$_{\mathbb{R}}(M_d) = d$，且M_d 有一个大小为$\binom{d+1}{2}$的隔离集。在这种情况下，隔离集的定义要求：对于隔离集中的任意矩阵元素(i,j)，$M_{i,j} \neq 1$；隔离集的其他要求也可以按照 0-1 矩阵的情形类似地定义。Shigeta 和 Amano [100] 给出了一种构造，其结果几乎达到了实数秩与最大隔离集大小之间的二次上界 [26]。

定理16 ([100]). 存在一个由0,1 矩阵组成的矩阵族，其大小为 $n \times n$，实数秩为 $n^{1/2+o(1)}$，且隔离集的大小为 n。

该定理立即给出了实数秩与布尔秩、二元秩之间近乎二次的差距。第 6.4 节中，我们将展示一个矩阵族，其中实数秩与布尔秩、二元秩之间存在准多项式间隙。其他使用隔离集的例子见 [11, 25, 51, 54, 113]。

5.3 组合学与图论

如第3节所述，布尔秩和二元秩有着与组合学和图论问题密切相关的替代表述。因此，研究布尔秩和二元秩时，这些领域发挥着重要作用并不令人意外。一个经典例子是 Sperner 于 1928年证明的定理 [105]，de Caen、Gregory 和 Pullman 于 1981年 [24] 运用该定理，为矩阵团$_n$的布尔秩给出了一个紧确下界。

斯佩纳族或集合的反链，是指其中任何一个集合都不是另一个集合子集的集合族。根据这个定义，Sperner 证明了以下著名定理，该定理以他的名字命名。

定理 17 (斯佩纳定理)。 设 S 是 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集构成的斯佩纳族。那么，$|S| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$。

可以将一个大小为$n \times m$ 的0-1矩阵的每一行对应到$\{1, 2, \ldots, m\}$中元素的一个子集：如果某一行在第j 列上为1，那么对应的子集就包含j 作为一个

元素。因此，如果一个0-1矩阵的任意一行都不包含在另一行所对应的子集中，那么这些行构成一个反链 。令

$$\sigma(n) = \min\left\{d \mid n \leq \binom{d}{\lfloor d/2 \rfloor}\right\}.$$

注意到 σ（n） ＝（$1+o$（1）） ·$\log_2 n$。利用斯佩纳定理，de Caen、Gregory 和 Pullman [24] 证明了关于矩阵布尔秩的以下一般下界，并利用该定理给出了矩阵C_n的布尔秩的紧确界。

定理18 （[24]）。设 M 是一个大小为 $n \times m$ 的 0-1矩阵。如果 M 的行构成一个反链，那么秩$_{\mathbb{B}}$（M） $\geq \sigma$（n）。

证明：设 $\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(M) = d$。因此，存在 0-1 矩阵 X 和 Y，其中 X 的大小为 n × d，Y 的大小为 d × m，使得 M ＝X ·Y，且运算为布尔运算。由于 M 的行构成一个反链，因此 X 的行也构成一个反链。若将 X 中长度为 d 的每个 0-1 行与 {1,...，d} 的一个子集对应起来，则根据斯佩纳定理，n ≤(d ⌊d/2⌋)。因此，d ≥σ(n)，证毕。 ■

推论 19 ([24])。 秩$_{\mathbb{B}}$(C_n) ＝σ(n) ＝Θ(对数n)。

证明：根据定理18，秩$_{\mathbb{B}}$(C$_n$) ≥ σ(n)。为证明秩$_{\mathbb{B}}$(C$_n$)的上界：设 X 是一个大小为 n × σ(n) 的 0-1矩阵，其各行互不相同，且每行恰有 ⌈σ(n)/2⌉ 个 1。设 Y ＝X^t 为 X 的补矩阵的转置。因此，Y 的大小为 σ(n) × n，且每列含有⌊σ(n)/2⌋ 个 1。根据构造，C$_n$ ＝X ×Y。因此，秩$_{\mathbb{B}}$(C$_n$) ≤ σ(n)，证毕。

■

Jukna 和 Ku- likov 于 [66] 2009年提出了另一种关于布尔秩的一般下界技术。他们考察了该问题的图论表述，并证明了以下定理：

定理 20 ([66])。 设 G ＝(V,E) 是一个含有大小为 m 的匹配的图。则至少需要 $m^2/|E|$ 个完全二部图来覆盖其边。

证明： 假设G 的边可以由t 个完全二部图B_1,...、B_t覆盖。令M_i 表示由B_i覆盖的匹配中的边；如果一条匹配边被多个完全二部图覆盖，则将其任意分配给覆盖中的一个完全二部图。令F_i 表示由M_i的顶点所张成的二部团中的边，也就是说，对于F_i中的每条边，其两个端点都属于M_i中的边。

对于每个 $1 \leq i \leq t$，F_i 中的边构成一个完全二分图，两侧各有 $|M_i|$ 个顶点，也就是说， $|F_i| = |M_i| \cdot |M_i|$。此外，$F = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_t$ 是由顶点互不相交的二部团构成的并集，其中包含匹配的全部m 条边。利用柯西-施瓦茨不等式可得：

$$m^2 = (|M_1| + ... + |M_t|)^2 \leq t \cdot (|M_1|^2 + |M_2|^2 + ... + |M_t|^2) = t \cdot |F|.$$

因此，$t \geq m^2/|F| \geq m^2/|E|$ ，如所述。 ■

Theis [108] 证明， [66] 的上界由相应图的邻接矩阵中的最大隔离集大小所界定。然而，如上所述，最大

隔离集问题是*NP*难问题，而在多项式时间内即可找到最大匹配。因此， [66] 的定理可能很有用，尤其适用于稀疏图。例如，每侧有n 个顶点的d正则二分图总是存在大小为n的完美匹配。因此，根据定理 20，此类图的二分团边覆盖至少为$n^2/(d \cdot n) = n/d$。

5.4 概率方法

概率方法是一种强大的方法，它通过非构造性证明来证明具有某种性质的对象存在。其思路是证明从一组对象中随机选取的对象以非零概率具有所需性质，因此这样的对象必定存在。参见 Alon 和 Spencer 的著作 [4]，其中全面介绍了使用概率方法可以证明的诸多优美结果。

Alon [2] 使用这种方法证明了一个上界：对于一个图，若其补图中每个顶点的度都不超过d，那么覆盖该图所有边所需的团数存在一个上界。我们对他的论证稍作修改，给出一个更一般的上界：对于每列至多有d 个零的矩阵，其布尔秩存在一个上界（对行也有类似结论）。另请参见 Jukna [63]，他使用等价术语“二分图的二分团边覆盖”证明了类似结果。

定理 21。 设 M 是一个大小为 $n \times n$ 的 0,1 矩阵，其中 $n \geq 2$，且每列至多有 d 个零。那么秩$_{\mathbb{B}}(M) \leq c(d)\log_2 n$，其中 $c(d) = 3e(d+1)/\log_2 e$。

证明： 若 $d = 0$，则定理显然成立，因为此时布尔秩为 1。因此，假设 $d \geq 1$。令R 为M的行索引的一个子集，其中对每个i，以 $1/(d+1)$的概率独立随机地选取行i。令C 为所有满足以下条件的列索引j：对每个$i \in R$，$M_{i,j} = 1$。令$S = R \times C$ 为由此得到的有序对(i,j)的子集。注意，S 是M中的一个全 1 单色矩形，因为C 中的所有列在R中的各行上都只有 1。

矩阵元素 (i, j)（满足 $M_{i,j} = 1$）被包含在矩形 S 中的概率是多少？行 i 最初被选入 R 的概率为 1/(d + 1)。当对所有 $i' \in R$ 都有 $M_{i',j} = 1$ 时，(i, j) 就会属于 S，因此 j 会被纳入 C （也就是说，R 中所有行在列 j 上的矩阵元素都是 1）。但是，由于 M 的每列至多有 d 个零，因此，只要我们没有选中列 j 中矩阵元素为零的至多 d 行，(i, j) 就会属于 S，所以 (i, j) 属于 S 的概率至少为：

$$\frac{1}{(d+1)}\left(1-\frac{1}{(d+1)}\right)^d \geq \frac{1}{e(d+1)}$$

现在，如果按照上述方法独立随机地选择$t = c(d)\log n$ 个矩形S_1,...、S_t，则(i,j) 未被包含在这些t 个矩形中的任何一个里的概率至多为：

$$\left(1-\frac{1}{e(d+1)}\right)^t \leq e^{-t/(e(d+1))} = e^{-3\log_2 n/\log_2 e} = n^{-3}.$$

由于M中至多有n^2 个 1，因此其中有一个未被这t个矩形覆盖的概率至多为：

$$n^2 \cdot n^{-3} < 1.$$

因此，至少存在一种矩形S_1,...、S_t的选取方式，使得M中的所有 1 都被覆盖，从而得到 $\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(M) \leq t = c(d)\log_2 n$，如所述。 ■

由此立即可得一个关于$D_{n,k}$的布尔秩上界，因为它的每k列（以及每行）中都有 k 个零。

推论 22. 设 $n > k \geq 1$ 为整数。那么 秩$_{\mathbb{B}}(D_{n,k}) \leq O(k \log n)$。

在第 6.3 节中，我们将展示如何推广 Alon [2] 的论证，从而为每列（每行）至多有d 个零的矩阵的k次克罗内克幂的布尔秩给出一个上界。Rao 和 Yehudayoff [92]还给出了另一个很好的例子：他们运用概率方法，为通信复杂度背景下研究的k-不相交性问题的布尔秩证明了一个上界。

5.5 核化

核化方法是参数化算法中的一项核心技术，其目标是从原问题中提取一个较小的核，其规模仅取决于问题选定的参数，例如矩阵的秩d，从而在这个缩减后的实例上求解问题，就能得到完整问题的解。计算机科学和数学的其他领域也出现了类似思路，即用一个紧凑的核心替代大型输入。例如，在计算几何和聚类中，核心集是点的一个小子集，可用于近似完整的点输入集。类似地，在性质测试算法中，随机选取的一个小型“骨架”可作为待测大型对象的近似表示。在这些情形中，缩减后的核心或骨架无需与原始输入完全等价，而是按照各自应用相关的标准对其进行近似。正如我们将在第 7 节中所述，这种方法曾用于设计二元秩和布尔秩的参数化算法，以及针对这些秩的近似算法和性质测试算法。

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

图 4：左侧是具有相同行和列的 0-1 矩阵 M，右侧是其核M'。覆盖M' 中部分 1 的蓝色矩形，可以通过显而易见的方式扩展，以覆盖从M中移除的重复行和列中的 1。

这些结果所依据的一个简单且常见的观察是：对矩阵 M 的行和列执行以下操作（有时称为核化规则），不会改变其布尔秩和二元秩：

1. 从 M 中删除全零行和列。

2. 从 M 中删除重复行和列。

当然，对 M进行此修改也不会改变其实数秩。所得的较小子矩阵称为 核。参见图 4 的示意图。

考虑等价问题：为约化邻接矩阵为 M的二分图 G 寻找最小双团边覆盖或划分，这意味着要对该图执行以下操作：

1. 删除所有没有邻居的顶点（对应于删除 M中的全零行和列）。

2. 对于任意具有相同邻居集合的顶点集合，除一个顶点外，删除其余所有顶点（对应于删除 M中的重复行和列）。具有相同邻居集合的一对顶点有时称为孪生顶点。

所得子图称为 核 。因此，矩阵 M 的核的行数和列数，分别等于二分图 G的核两侧的顶点数。

下面这个简单引理以M的布尔秩或二元秩为参数，给出了核的大小上界，并表明任意 0-1 矩阵 M 的行数和列数至多为$2^{\text{rank}_{\text{bin}}(M)}$，且至多为 $2^{\text{rank}_{\mathbb{B}}(M)}$。

引理23。 设 M 是一个二元秩或布尔秩为 d 的0,1矩阵。那么 M 至多有 2^d 个不同的行，至多有 2^d 个不同的列。

证明： 若秩$_{\mathbb{B}}(M) = d$，则可以用 d 个单色矩形覆盖M 中的所有 1 元素。任何两个共享同一个单色矩形的行，在属于该矩形的列中都含有 1。因此，根据每一行所属的单色矩形，M 至多有 2^d 个不同的行。对列和二元秩也可以作类似论证。

■

Nor等人 [84] 为二分团边覆盖问题定义了一种更复杂的核化，但核子图每一侧的顶点数仍至多为 2^d。

此外，还可以根据 0-1 矩阵M 的秩，对其不同的行数与不同的列数之积给出另一个上界。Bshouty [17], 利用 Sgall [99]的以下组合引理证明了这一点。

引理24 ([99]). 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 $\{1, 2, ..., d\}$的两个子集族，使得对任意 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$，都有 $|A \cap B| \leq s$。那么

$$|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \leq \binom{d}{\leq s} \cdot 2^d$$

其中 $\binom{d}{\leq s} = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i}$。

Bhsouty 将 0-1 矩阵 M 的s-二元秩 $br_s(M)$定义为覆盖 M 中所有 1 所需的最少单色矩形数，且每个 1 至多被 s 个单色矩形覆盖。因此，$br_1(M) = 秩_{\text{bin}}(M)$。Bhsouty 利用 Sgall引理证明了以下引理，该引理将在第7.1节中使用。

引理25 ([17])。 设 M 是一个 0-1 矩阵，满足 $br_s(M) \leq d$，且 $R(M)$ 和 $C(M)$ 分别表示 M 中不同的行数和列数。那么：

$$R(M) \cdot C(M) \leq \binom{d}{\leq s} \cdot 2^d.$$

特别地，若 $秩_{\text{bin}}(M) \leq d$，则 $R(M) \cdot C(M) \leq (d+1) \cdot 2^d$。

下面的引理表明，可以将核的大小界定为矩阵实数秩的函数。

引理26。 设 M 是一个实数秩为 d 的 0-1矩阵。那么 M 至多有 2^d 个不同的行，且至多有 2^d 个不同的列。

证明： 若$秩_{\mathbb{R}}(M) = d$，则 M 有 d 行 $R_1,...,R_d$，使得 M 的每一其他行都是 $R_1,...,R_d$ 的线性组合。但这样一来，M 的每一列都由 d 个固定坐标构成的子集决定，这些坐标取自 $R_1,...,R_d$。由于 M 是一个 0-1 矩阵，因此 M 的这 d 个坐标至多有 2^d 种取值，所以不同的列至多有 2^d 种。对于行也有类似的证明。 ■

布尔秩和二元秩显然受矩阵中不同的行数或列数所界定，换言之，受矩阵的核的大小所界定。因此，引理23和引理26给出了以下直接而简单的上界。

推论27。 设 M 为一个0,1 矩阵。则：

- $秩_{二元}(M) \leq 2^{秩_{\mathbb{B}}(M)}$。
- $秩_{\mathbb{B}}(M)$，$秩_{二元}(M) \leq 2^{秩_{\mathbb{R}}(M)}$。

对于实数秩为较小常数的矩阵，Parnas 和 Shraibman 的一个定理 [89] 表明，实数秩与二元秩、布尔秩之间的差距要小得多，并且这类矩阵的核的大小实际上小于 $2^{\text{rank}_{\mathbb{R}}(M)}$。由该定理可知，对于大小为$n = 4,6,7$的矩阵，定理15给出的上界实际上是紧的。

定理28 ([89])。 设 M 为一个0,1 矩阵，且$秩_{\mathbb{R}}(M) = d$。

- *For $d = 3,4$ it holds that $d \leq \text{rank}_{\text{bin}}(M) \leq 2d-2$ and $d-1 \leq \text{rank}_{\mathbb{B}}(M), i(M) \leq 2d-2$.*
- 如果 $d = 3$ M 的核至多有4 行或列，并且如果 $d = 4$核至多有7行或列。

5.6 通信复杂性协议

第4.2节所述的通信复杂度与布尔秩和二元秩之间的密切联系，使我们能够利用通信复杂度中的已知结果，求出某些矩阵族的布尔秩和二元秩。定理 4 描述了各种通信复杂度度量与布尔秩和二元秩之间的联系。例如，矩阵M 的非确定性通信复杂度$N_1(M)$等于 $\lceil \log_2 秩_{\mathbb{B}}(M) \rceil$，因此，任何非确定性通信复杂度协议的代价都能立即给出相应矩阵布尔秩的一个上界。此外，二元秩可以由无歧义通信复杂度精确确定，也可以由矩阵M的确定性通信复杂度$D(M)$近似确定，因为 $\log_2(秩_{\text{bin}}(M)) \leq D(M) \leq O(\log^2 秩_{\text{bin}}(M))$。下面我们介绍通信复杂度中的两个经典问题，并说明它们如何确定相关矩阵的布尔秩和二元秩。

第一个是第 5 节开头提到的不等通信问题。Alice 和 Bob 分别收到一个行索引i和一个列索引j，他们的目标是在尽可能少地通信比特的情况下，判断$i \neq j$是否成立。矩阵团$_n$ 此前讨论过，它表示不等函数；我们已经看到，$\text{rank}_{\text{bin}}(团_n) = n$，而 $\text{rank}_{\mathbb{B}}(团_n) = \Theta(\log n)$。

下面给出一个关于团$_n$的布尔秩上界的另一种证明，该证明基于 Alice 和 Bob 之间的一个非确定性协议。回想一下，在这种情况下，两位参与者会得到某个证书，并且存在一种证书和一种双方之间的比特传输方式，使得当且仅当矩阵元素(i,j) 为 1 时，他们才都接受 。对于不等性问题，一个可能的证书是指出i 和j 在哪一位上不同。给定这样的证书，Alice 和 Bob 可以交换各自在该位置上的比特。如果$i \neq j$ 确实成立，并且该证书正确指出了i 和j 不同的那一位，他们就都会接受。其他所有情况下，他们都会拒绝，正如所要求的那样。

关于这一简单协议的通信成本，如果矩阵 C_n 的大小为 $n \times n$，那么 i 和 j 都可以用 $\log n$ 个比特表示，因此，他们不同的比特所在位置可以用 $\log \log n$ 个比特表示。由此，证书的长度为 $\log \log n$，然后 Alice 和 Bob 再交换两个比特。因此，非确定性通信复杂度为 $2 + \log \log n$，从而 $\text{rank}_{\mathbb{B}}(C_n) = O(\log n)$。

第二个通信问题是 Yan- nakakis [115] 于 1988年 定义的团与独立集 问题。给定某个图 $G = (V,E)$，其中 $|V| = n$，Alice 获得一个顶点子集 $C \subseteq V$，该子集在 G 中构成一个团；Bob 获得一个顶点子集 $I \subseteq V$，该子集是 G 中的独立集。他们的目标是判断 $C \cap I \neq \emptyset$ 是否成立；若成立，则接受，否则拒绝。注意，团与独立集的交集至多包含一个顶点，因此，$|C \cap I| \in \{0,1\}$。

团与独立集问题可以用矩阵 M_G 描述：对于图 G 中的每个团设置一行，对于图 G中的每个独立集设置一列，并且当与第 i 行和第 j列分别关联的团与独立集相交时，且仅当矩阵元素 i,j 为 1。参见图5中的示意图。

对于这个问题，我们甚至不清楚矩阵M_G 的一般形式是什么，因为它取决于图G的结构。因此，通过给出通信协议来解决这个问题，是确定M_G的布尔秩和二元秩的便捷方法。

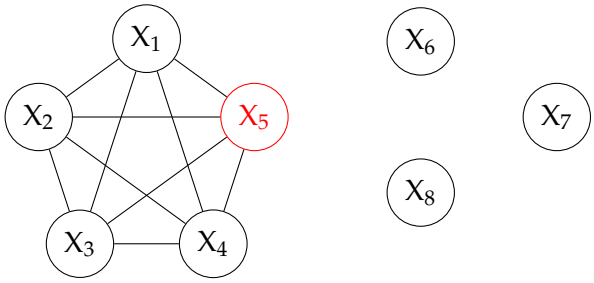


图5：左侧是一个有5个顶点的团，X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,；右侧是一个包含顶点X_5,X_6,X_7,X_8的独立集。如果 Alice 得到这个团，而 Bob 得到这个独立集，那么他们应输出 1，因为这个团和独立集共有顶点X_5,，且该顶点被染成红色。

解决这个问题的非确定性协议可以按如下方式进行：Alice 和 Bob 收到一份证书，其中写明团C 与独立集I 相交的顶点v，然后双方分别检查v 是否确实属于各自持有的团和独立集，并各自再向对方发送一位，告知检查结果。

关于该协议的代价，若顶点数为n，则一个顶点可以用 $\log n$ 比特描述，因此，非确定性通信复杂度为 $2+\log n$ 比特。因此，$\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(M_G) = O(2^{2+\log n}) = O(n)$。此外，这个非确定性协议是无歧义的，因为$C \cap I$ 至多包含一个顶点，因此，至多只有一个证书能够说服 Alice 和 Bob，使他们相信$C \cap I \neq \emptyset$。因此，$\mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(M_G) = O(n)$ 也成立。

关于M_G的布尔秩和二元秩的下界，矩阵M_G 包含一个大小为$n \times n$的单位矩阵作为子矩阵，因为M_G 中有n 行和列分别对应大小为 1 的团和独立集，每个顶点$v \in V$各对应一行和一列。因此，$\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(M_G)$、$\mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(M_G) \geq n$。

我们还可以将M_G 中的 1 划分为n 个矩形，这可以直接由上文给出的非确定性协议推出。对于每个$v \in V$，定义一个矩形R_v；其中R_v 包含M_G 中所有对应团C 和独立集I 在顶点v处相交的 1 元素。这些矩形两两不相交，因为每对C、I 至多在一个顶点处相交；不难验证，它们确实是单色矩形。

现在我们来介绍 Yannakakis [115], 提出的团与独立集问题的确定性通信协议，其确定性通信复杂度为$O(\log^2 n)$。该确定性协议有 $\log n$ 轮，每轮 Alice 和 Bob 交换$O(\log n)$ 比特，总计 $O(\log^2 n)$ 比特。协议开始时，V 中的所有顶点都是候选项，可能属于$C \cap I$；每一轮中，Alice 和 Bob 都会淘汰至少一半剩余候选项。因此，至多经过 $\log n$ 轮，就只剩至多一个候选项，他们再交换两比特，就能轻松判断$C \cap I \neq \emptyset$。

完整的协议描述如下，由此立即得到团与独立集问题的确定性通信复杂度的以下上界。

定理 29（[115]）。一个有 n 个顶点的图中，团与独立集问题的确定性通信复杂度至多为$O(\log^2 n)$。

团与独立集的协议 (团，独立集，图 $=$**(**顶点集，边集**))**

1. 令 顶点集 V 为可能属于 团 $\cap$ 独立集I 的候选顶点初始集合。

2. 当 |顶点集| $>$ 1时:

(a) Alice 检查是否存在一个顶点 $v \in$ 团，它在顶点集中至多有 |顶点集|/2 个邻居 .

- 如果是，她就将v 发送给 Bob；如果$v \in$ 独立集，那么 Bob 就向 Alice 发送 1，他们都可以停止并接受。
- 否则，从顶点集 中删除所有不是v 的邻居的顶点（被删除的顶点不可能属于团团）。

(b) 如果 Alice 失败了，Bob 会检查是否存在一个顶点 $u \in$ 独立集，它在顶点集中邻居最少，为 |顶点集|/2 个。

- 如果是这样，他就将 u 发送给 Alice；如果$u \in C$，那么 Alice 向 Bob 发送 1，他们都可以停止并接受。
- 否则，从 V 中移除u 的所有邻居（被移除的顶点不可能属于独立集I）。

（c）否则，如果 Alice 和 Bob 都未能成功，那么所有顶点$v \in C$ 在V|中都有超过一半的邻居，而所有顶点$u \in I$ 在V|中拥有少于一半的邻居。因此，$C \cap I = \emptyset$，Alice 和 Bob 可以停止并拒绝。

3. 如果 Alice 和 Bob 到目前为止既未接受也未拒绝，那么$V = \{v\}$，他们可以检查$v \in C$、$v \in I$，并据此接受或拒绝。

Yannakakis [115] 还给出了一个从任意给定通信问题到团与独立集问题的归约。该归约与上述协议为任意 0-1 矩阵M 的确定性通信复杂度$D(M)$提供了一个以上述矩阵的划分数表示的上界，具体如下一条定理所述。归约示意图见图6。

定理30 ([115])。 对于任意 0,1 矩阵 M，$D(M) \leq O(\log^2$ 划分$_1(M))$。

证明： 令 $m =$ 为$_1(M)$ 表示将 M 中的所有 1 划分所需的最少单色矩形数。定义如下图 G_M，它有 m 个顶点。M 中 1 的划分中每个矩形在 G_M 中对应一个顶点。当且仅当两个顶点对应的矩形在 M 中共同行时，它们之间才在 G_M中连一条边。注意，M 中任何一组共同行的矩形都映射为 G_M中的一个团；任何一组共享一列的矩形都映射为 G_M的一个独立集，因为在划分中，共享一列的矩形不能共享一行。

假设 Alice 获得 i 这一行索引，而 Bob 获得 j 这一列索引，二者均来自 M_M。Alice 可以将自己的索引映射到 G中的团 C，该团由第 i 行的矩形表示；Bob 则可以将自己的列索引映射到由第 j 列的矩形表示的独立集 I。现在，他们可以使用上文描述的团与独立集确定性协议，判断 C 与 I 是否相交。如果相交，这意味着 M中 1 的划分里存在一个矩形，其中包含矩阵元素 $M_{i,j}$，因此 $M_{i,j} = 1$，他们便可以接受；否则，他们拒绝。该确定性协议的通信复杂度为 $O(\log^2 m)$，符合所述结论。

■

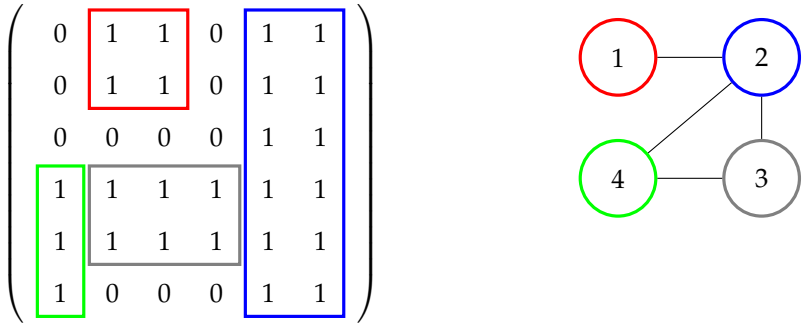


图6：左侧是一个矩阵，其中的 1 被划分为 4 个矩形，每个矩形用不同的颜色表示。右侧是根据定理30中所述的归约得到的相应团与独立集图。

多年来，人们一直不清楚 $O(\log^2 n)$ 是否是具有 n 个顶点的图的团与独立集问题的确定性通信复杂度的紧上界。根据定理30中描述的归约，给定矩阵 M 的确定性通信复杂度的任何下界，只要以 M的划分数为依据，就能直接推出团与独立集问题的下界。最后，Goos、Pitassi 和 Watson [38] 采用下一小节所述的提升技术，证明了定理5，从而表明 $\log Partition_1(M)$ 与 M的确定性通信复杂度之间可能存在接近二次的差距。该定理推出，具有 n 个顶点的图的团与独立集问题，其确定性通信复杂度下界为 $\tilde{\Omega}(\log^2 n)$，从而给出了一个几乎匹配 Yannakakis [115]所提出上界的下界。

另一个多年来悬而未决的问题是团与独立集问题的余非确定性通信复杂度。正如我们上文所见，为该问题的非确定性协议提供一个小型证书很容易，但尚不清楚能否为该问题的余非确定性协议提供一个小型证书。关于这些年来团与独立集问题的余非确定性通信复杂度下界的讨论，见第 6.4 节。这些结果与矩阵的二元秩和其补矩阵之间可能达到的最大间距，以及 Alon、Saks、Seymour猜想密切相关。

5.7 提升技术

查询到通信提升技术是计算机科学中的一种强大方法，可以将较简单的查询复杂度模型中的下界提升到更复杂的通信复杂度模型中。在查询模型中，算法必须计算某个函数$f(z)$，其中f: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$，同时尽可能少地查询输入z中的比特。算法的查询过程可以用如下决策树来描述：树的根节点和每个内部节点都包含z_i 中的某个比特z，具体取决于算法在该轮所进行的查询；而z_i 的值决定算法是继续进入该节点的左子树还是右子树。叶节点包含算法的输出，也就是算法根据收到的查询答复所得到的$f(z)$ 的值。算法的复杂度是从根节点到叶节点的最长路径长度

，其查询树中从根节点到叶节点的最长路径长度；函数f的查询复杂度$Query(f)$是针对f的算法中查询复杂度最小者的复杂度。

通信复杂度协议也可以表示为一棵树。设参与者为 Alice 和 Bob，其中 Alice 持有输入x，Bob 持有输入y，他们的目标是计算某个函数$F:\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$的值$F(x,y)$。如果由 Alice 首先向 Bob 发送一比特，那么树的根节点包含 Alice 发送的第一个比特；根据该比特的值，会有两个内部节点，分别对应 Bob 发送的第一个比特，以此类推。叶节点则包含根据 Alice 与 Bob 通信过程中发送的比特得出的$F(x,y)$的值。因此，函数F的确定性通信复杂度$D(F)$不超过这棵树的高度。见图7。

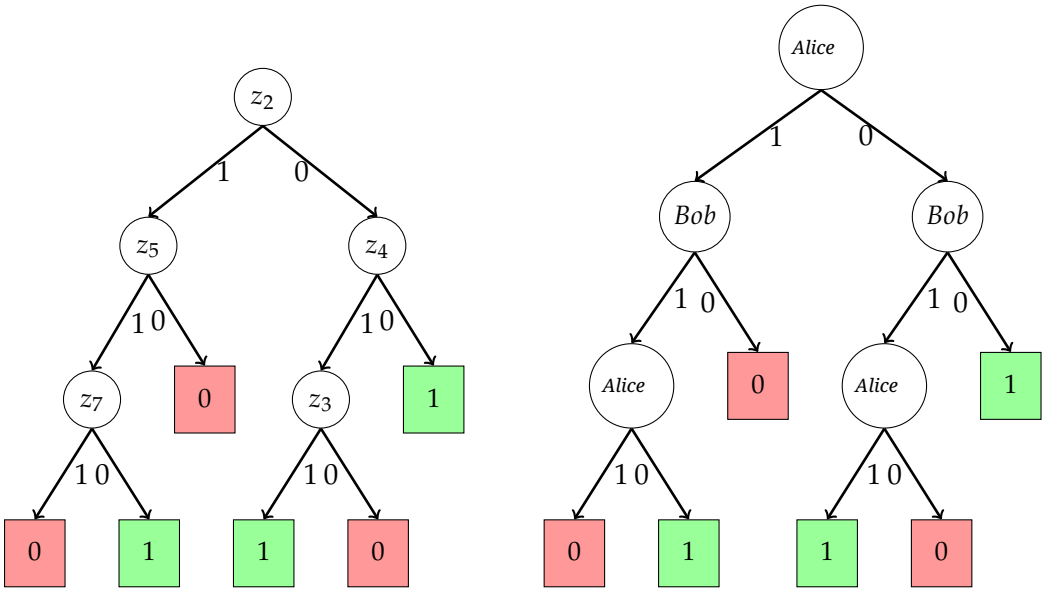


图7：左侧是查询模型中的一棵决策树，右侧是用树表示的 Alice 与 Bob 之间的通信复杂度协议。

存在一些函数，在这两种模型中的复杂度差异很大。例如，考虑一个 0、1 向量的奇偶校验函数$z = (z_1, ..., z_n)$：

$$Parity(z) = z_1 \oplus z_2 \oplus ... \oplus z_n.$$

奇偶校验函数(z)的查询复杂度为n，因为只要算法没有查询z的所有比特，最后一个被查询的比特就能改变目前已查询比特的奇偶性。然而，考虑 Alice 和 Bob 将z的比特划分给彼此的情形：Alice 获得前一半比特x，Bob 获得后一半比特y。然后，他们通过通信协同计算函数奇偶性(x,y)，其定义如下：

$$PARITY(x,y) = (x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n) \oplus (y_1 \oplus y_2 \oplus ... \oplus y_n).$$

一种可能的奇偶性函数通信协议如下：Alice 计算奇偶性(x)并将这一比特发送给 Bob，Bob 再计算奇偶性(y)并发送这一

比特给 Alice。但奇偶性(x,y) $=$ 奇偶性(x) $\oplus$ 奇偶性(y)，因此，他们每个人在只通信 2 比特后都知道奇偶性(x,y)。

提升技术的理念是定义一个足够复杂的小工具函数 g，以及一个同时依赖于g 和查询算法所计算的函数f的函数F，使得当 Alice 和 Bob 想要计算$F(x, y)$ 时，他们实际上必须遵循计算f的查询算法的步骤，并且在每一步中都必须通信许多比特，才能求出小工具函数g的值。

具体而言，小工具函数被定义为一个函数g：$\{0,1\}^a \times \{0,1\}^b \to \{0,1\}$，而函数$F$：$\{0,1\}^{na} \times \{0,1\}^{nb} \to \{0,1\}$ 定义如下：

$$F(x,y) = f(g(x_1,y_1),...,g(x_n,y_n)),$$

其中，传递给小工具函数g 的输入x_i、y_i 不一定是比特，也可以是比特分块。函数F 有时记作$F = f \circ g^n$。

一般的抬升定理将表明：如果 Alice 和 Bob 想要计算这样的函数 F(x, y)，其中计算 g(x_i, y_i) 需要他们通信 C 个比特，而 f 的查询复杂度为 Query(f)，那么计算 F 的最佳通信协议至少需要他们通信 C $\cdot$ Query(f) 个比特。因此，此类抬升定理证明的主要要点是证明小工具函数 g 足够复杂，即如果 Alice 和 Bob 想知道 f 的输入的第 i 个比特 z_i = g(x_i, y_i)，那么为了计算 g(x_i, y_i)，他们必须相互发送许多比特。

注意，对于奇偶校验函数f $=$ 奇偶校验(z)，像 $g(x_i,y_i) = x_i \oplus y_i = z_i$ 这样的小工具函数并不可行，因为它依赖于 Alice 的一个比特和 Bob 的一个比特，正如我们所见：

$$F(x,y) = Parity(g(x_1,y_1),...,g(x_n,y_n)) = Parity(Parity(x) \oplus Parity(y)).$$

因此，在这种情况下，Alice 和 Bob 不必实际计算许多个$g(x_i,y_i)$ 的值，而是可以预先压缩各自的输入，并如上所述只通信 2 个比特。

因此，抬升定理的核心是定义一个困难的 小工具函数g，并证明，计算$F(x, y)$ $=f(g(x_1, y_1), ..., g(x_n, y_n))$ 要求所有通信复杂度协议实际上都遵循针对 f 的最佳查询复杂度算法的查询过程。也就是说，每当查询算法想要知道f的第i位时，Alice 和 Bob 都必须计算$g(x_i, y_i)$，而这需要他们通信许多比特。

Raz 和 McKenziee [93] 于 1997年首次采用了这一思想，当时称之为模拟论证。Goos、Pitassi 和 Watson [38]将他们的论证加以推广，并证明了如下的一般抬升定理：

定理 31 ([39])。 存在一个小工具函数 g，其确定性通信复杂度为 $\Theta(\log n)$，使得对于所有 f：$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$，$F = f \circ g^n$ 的确定性通信复杂度 $D(F)$ 为：

$$D(F) = Query(f) \cdot \Theta(\log n).$$

证明$D(f \circ g^n) \leq Query(f) \cdot \Theta(\log n)$ 很容易，因为 Alice 和 Bob 只需模拟针对f的最佳查询算法；每当查询算法要查询f的输入中的第i'位时，Alice 和 Bob 就通信 $\Theta(\log n)$ 比特，以确定$g(x_i, y_i)$ 的值。

下界要求证明：如果存在一个更优的$F = f \circ g^n$通信复杂度协议，那么就会有一个能以更低查询复杂度判定f的查询算法。

请回顾，二元秩与确定性通信复杂度密切相关，而布尔秩决定了非确定性通信复杂度。G¨o ¨os、Pittasi 和 Watson [38] 证明，存在一个矩阵 M，其确定性通信复杂度至少为 $\widetilde{\Omega}(\log^2 \text{rank}_{\text{bin}}(M))$（参见定理5、第4.2节）。他们的证明使用了上文提到的提升技术和定理 31。在第 6.4 节中，我们将介绍一系列研究如何运用提升技术及其与通信复杂度之间的联系，最终得出了矩阵的二元秩与其补矩阵的布尔秩之间存在准多项式间隙。

6 秩函数的数学性质

矩阵的实数秩是一个十分成熟的概念，拥有丰富的代数工具和性质，因此在数学和计算机科学的许多应用中都非常有用。例如，众所周知，$\text{rank}_{\mathbb{R}}(M)$ 等于M 的行（列）中生成集的最小规模，也等于M的行（列）中独立集的最大规模。此外，实数秩还满足一些基本性质，包括：

- **次可加性：** $\text{秩}_{\mathbb{R}}(N + M) \leq \text{秩}_{\mathbb{R}}(N) + \text{秩}_{\mathbb{R}}(M)$。
- **克罗内克积下的重数：** $\text{秩}_{\mathbb{R}}(N \otimes M) = \text{秩}_{\mathbb{R}}(N) \cdot \text{秩}_{\mathbb{R}}(M)$。
- **基生成性质：** 对于M 的行（列），每个基都张成M的行（列）的所有其他基。
- **满秩子矩阵：** 每个实数秩为d 的矩阵M 都包含一个实数秩为d的$d \times d$ 子矩阵。

相比之下，尽管多年来取得了显著进展，人们对布尔秩和二元秩的性质仍不甚了解。鉴于它们在各种应用中的重要性，系统地研究这些秩函数的性质并开发有效的近似算法至关重要。因此，以往的研究考察了实数秩的基本性质是否适用于布尔秩和二元秩，以及在什么条件下适用。这些结果有助于阐明线性代数工具的局限性，并进一步揭示这些秩函数与实数秩之间的差异。本节综述其中的一些研究结果。

6.1 生成集和基

生成集和基的概念是代数中的基本概念，尤其是在讨论实数域上的矩阵的秩时。可以在配备加法和乘法两种运算的任意半环上定义这些概念。在我们的语境中，这意味着讨论 0-1矩阵 M 时，基与实数秩的情形一样，是能生成 M 的列的最小向量子集；但在这里，向量的元素为 0 和 1，线性组合中的系数

被限制为 0 和 1，加法和乘法则根据所讨论的秩，分别采用二元运算或布尔运算。

Cohen 和 Rothblum 指出 [21]，矩阵 M 的非负秩为d，当且仅当存在一个大小为d 的基，能够张成M的各列。类似的结论也适用于二元秩和布尔秩。

引理 32. 一个0,1 矩阵 M 的布尔秩或二元秩为 d，当且仅当存在一个大小为 d 的$0,1$ 基，分别在二元运算或布尔运算下张成矩阵 M 的各列。

证明： 容易验证，若$M = X \cdot Y$ 是M的一个最优二元分解或布尔分解，则X 的各列分别构成M各列的二元基或布尔基，而Y 的各列则是相应线性组合中的系数。分解的最优性保证了这确实是一个基。

■

Parnas 和 Shraibman [88] 定义了矩阵的基图概念。该图的顶点是矩阵M 在给定秩函数下的不同基；若U 张成V，则存在一条从基U 指向基V 的有向边。对于实数秩，该图的结构是平凡的，因为M 的任意基都张成M的所有其他基；而对于布尔秩和二元秩，该图则具有有趣的性质。具体来说，它总是无环的。

引理 33 （[88]）。 对于二进制秩和布尔秩，0,1 矩阵 M 的基图始终是无环的。

基图用于 [88] 研究增广性质。给定矩阵M 和列向量x，用（$M|x$）表示将M 与x 增广并将其作为最后一列后得到的矩阵。用（$M|x_1,\ldots,x_t$）表示将M 与列向量$x_1,\ldots,x_t$增广后得到的矩阵。

定义 34。 对于给定的秩 R（）增广性质是指：对于任意一组列向量 $x_1,\ldots,x_t$，若 R（$M|x_i$）$=$ R（M），则对于 $1 \le i \le t$，都有 R（$M|x_1,\ldots,x_t$）$= R$（M）。

下面这个简单引理表明，对于任意矩阵M，实数秩满足增广性质。

引理 35。 设 M 为实矩阵，x 为列向量。若秩$_{\mathbb{R}}$（M）$=$ 秩$_{\mathbb{R}}$（$M|x$），则 M 的行之间的任何线性相关关系在（$M|x$）中都会保持不变。当列和行的角色互换时，也有类似的结论。

然而，增广性质通常不适用于布尔秩或二元秩。以下示例来自 [88]。

$$(M|x,y) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

矩阵M 的布尔秩在分别加入x 或y 后仍为 3。然而，当矩阵M 同时加入x 和y时，很容易验证布尔秩增至 4。

以下定理证明了布尔秩或二元秩满足增广性质的充要条件，即存在一个能够张成矩阵所有其他基的（唯一）基；换言之，矩阵的基图应恰好有一个源点。

定理 36 ([88])。一个0,1 矩阵 M 关于布尔（*binary*）秩具有增广性质，当且仅当 M 有一个（唯一的）基，且该基在布尔（*binary*）运算下张成 M 的所有其他基。

6.2 满秩子矩阵

众所周知，若 $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(\mathrm{M}) = \mathrm{d}$，则 M 包含一个实数秩恰为 d 的 $\mathrm{d} \times \mathrm{d}$ 子矩阵。de Caen、Gregory 和 Pullman [24]早在 1981年 就证明，这一性质对于布尔秩并不成立。他们证明，矩阵 C_7 的布尔秩为 5，而 C_7 的任意 5×5 子矩阵的布尔秩至多为 4。下面的引理将这一论证推广到矩阵族 C_n。回顾一下，$\sigma(\mathrm{n}) = \min\left\{\mathrm{d} \mid \mathrm{n} \leq (\mathrm{d} \lfloor \mathrm{d}/2 \rfloor)\right\}$，并且根据推论 19，$\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\mathrm{C}_n) = \sigma(\mathrm{n})$。见第 5.3 节。

引理 37. 设 $n = (k \lfloor k/2 \rfloor) + 1$. 则 秩$_{\mathbb{B}}(C_n) = k + 1$，且 C_n 的每个真子矩阵的布尔秩至多为 k。

证明： 由推论 19 可知，$\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(C_n) = k + 1$。考虑 C_n的任意一个真子矩阵。若它是 C_n 的主子矩阵，则由推论 19 可知，其布尔秩至多为 k，因为它等于某个 $m \leq (k \lfloor k/2 \rfloor)$所对应的$C_m$ 。

否则，考虑通过删除C_n的一行得到的子矩阵M 。子矩阵M 由矩阵C_{n-1} 和全 1 列向量拼接而成（可能需要重新排列行）。但是，可以轻易地将C_{n-1} 中所有 1 的任意单色矩形覆盖扩展到覆盖 M 中的全 1 列，且无需增加矩形数。注意到C_{n-1} 的每一行至少包含一个 1，因此该覆盖中有一个矩形覆盖了这一行中的 1；而且可以扩展这个矩形，使其覆盖全 1 列中与该矩形共享行的相应元素。由此，$\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(M) = \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(C_{n-1}) = \sigma(n-1) \leq k$。若删除$C_n$的一列，类似的论证同样成立。

■

事实上，由于 $\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(C_n) = \sigma(n) = \Theta(\log n)$，我们实际上可以得到一个更强的结果。

引理 38. C_n 中任意一个大小为 $\sigma(n) \times \sigma(n)$ 的子矩阵，其布尔秩至多为 $O(\log\log n)$。

证明： C_n的每一行和每一列中都只有一个零。因此，C_n的任意子矩阵中，每一行和每一列至多包含一个零。于是，将定理 21 应用于C_n 中任意一个大小为 $\sigma(n) \times \sigma(n) = O(\log n \times \log n)$的子矩阵，我们可以得出其布尔秩至多为$O(c \times \log\log n)$，其中$c$为某个常数。

■

Hrubeˇs [57] 于 2025年证明，满秩子矩阵性质不适用于二元秩。他给出了一个 5×6 矩阵的例子，其二元秩为 5，但该矩阵中每个大小为 5×5 的子矩阵的二元秩至多为 4。定理 39 将这一构造进行了推广，并给出一个大小为 $(n+2) \times (n+3)$、$n \geq 3$ 的矩阵族，使得每个真子矩阵的二元秩都严格小于完整矩阵的二元秩。示意图见图 8。

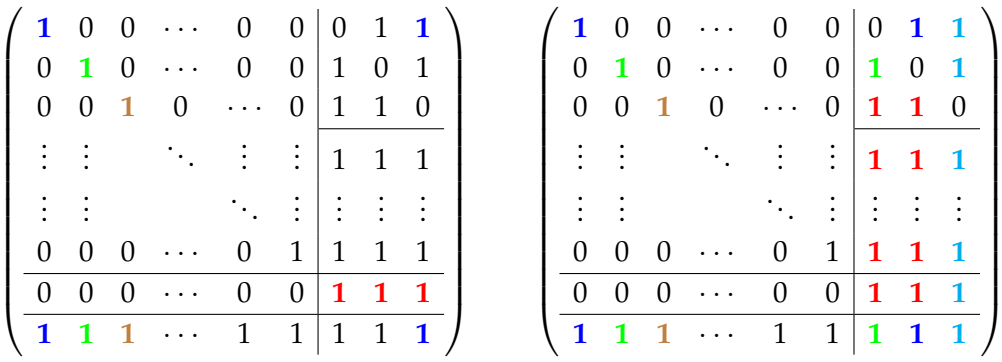


图 8：对 [58]构造的推广。左侧尝试将大小为 M 的矩阵 $(n+2)\times(n+3)$ 中的所有 1 划分为仅含 $n+1$ 个矩形。由于主对角线上的前 $n+1$ 个 1 构成一个隔离集，且必须分别属于不同的矩形，因此这种划分会形成图示的部分划分，其中每个矩形都用不同的颜色表示。M 第二行最右侧的 1 不可能属于这 $n+1$ 个矩形中的任何一个。因此，$\mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(M)=n+2$，因为每一行都可以由一个不同的矩形覆盖。

右侧描述了对M 中 1 的另一种划分方式，将其划分为$n+2$ 个矩形，该划分用于定理 39 的证明。

定理 39. 设 M 为图 8 中的$(n+2)\times(n+3)$ 矩阵，其中 $n\geq 3$。那么 秩$_{\mathrm{bin}}(M)=n+2$，而 M 的任意$(n+2)\times(n+2)$ 子矩阵的二元秩至多为 $n+1$。

证明： 首先注意，M 主对角线上的前$n+1$ 个 1 构成一个大小为$n+1$的隔离集。因此，在对M中的 1 进行的任何划分中，这些 1 都必须分别位于不同的全 1 单色矩形中。将这些矩形记作R_1,...、R_{n+1}，其中R_i 包含M主对角线上的第i'个 1。

反设 $\mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(\mathrm{M})=\mathrm{n}+1$，且 R_1,...、R_{n+1} 是划分中仅有的矩形。注意，根据 M 的结构，必有：$\mathrm{M1},_{n+3}$、$\mathrm{M}_{n+2,1}\in\mathrm{R}_1$，因此 $\mathrm{M}_{n+2,n+3}\in\mathrm{R}_1$。此外，对于 $2\leq\mathrm{i}\leq\mathrm{n}$，有 $\mathrm{M}_{n+2,i}\in\mathrm{R}_i$，且 $\mathrm{M}_{n+1,n+2}$、$\mathrm{M}_{n+1,n+3}\in\mathrm{R}_{n+1}$。然而，位置 $\mathrm{M2},_{n+3}$ 上的 1 不可能属于这 $\mathrm{n}+1$ 个矩形中的任何一个，由此得到矛盾。因此，$\mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(\mathrm{M})>\mathrm{n}+1$，所以 $\mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(\mathrm{M})=\mathrm{n}+2$，因为每行中的 1 都可以由一个矩形覆盖。

图 8 展示了另一种将其划分为 $n+2$ 个矩形 R_1,..., R_{n+2} 的方式，稍后会用到：

$$R_1=\{M_{1,1},M_{1,n+2},M_{n+2,1},M_{n+2,n+2}\}$$
$$R_2=\{M_{2,2},M_{2,n+1},M_{n+2,2},M_{n+2,n+1}\}$$
$$R_i=\{M_{i,i},M_{n+2,i}\},\ \ for\ \ 3\leq i\leq n$$

而 R_{n+1} 覆盖了M 最后一列中的所有 1，R_{n+2} 则覆盖了M 的$n+1$ 列和$n+2$ 列中未被前面矩形覆盖的所有其余 1。

现在我们证明，删除M 的任意一列后，得到的子矩阵M' 的二元秩至多为$n+1$。首先，删除M的最后一列。所得子矩阵中的 1 可以

划分为$n+1$个矩形，因为在M的另一种划分中，M的最后一列由单独的矩形R_{n+1}覆盖。因此，M'的前$n+2$列可以像M中那样划分为$n+1$个矩形。

接下来移除n的M列。所得子矩阵M''中的1可以通过将M划分为$n+2$个矩形的另一种划分方式，划分为$n+1$个矩形；具体来说，只需移除覆盖M的n列中各个1的矩形即可。如果移除M的任意列$3 \leq i \leq n$，同样的论证也成立。

最后要注意的是，在对行和列进行置换后，移除M的第1列或第2列所得结果为M'；而移除M的$n+1$列或$n+2$列所得结果为M''。 ■

值得注意的是，Hrubeˇs [57] 给出的例子是极小的。

断言 40. 不存在一个二元秩为4的0,1 矩阵 M，使得 M 的每个子矩阵的二元秩都严格更小。

证明： 首先断言，如果 $\text{rank}_{\text{bin}}(M) = 4$，那么 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(M) = 3$。否则，如果 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(M) = 4$，则 M 包含一个大小为 4×4 的子矩阵，其实数秩为 4；当然，这个子矩阵的二元秩也是 4。如果 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(M) \leq 2$，那么 $\text{rank}_{\text{bin}}(M) = \text{rank}_{\mathbb{R}}(M)$，因为对于实数秩为 1、2 的情形，二元秩等于实数秩。因此，$\text{rank}_{\mathbb{R}}(M) = 3$。

但是，如果 $\text{rank}_{\text{bin}}(M) = 4$ 且 $\text{rank}_{\mathbb{R}}(M) = 3$，那么根据 Parnas 和 Shraibman 的结果 [89]，矩阵 M 必定包含 C_4 作为子矩阵，因此，M 有一个大小为 4×4、二元秩为 4 的子矩阵，因为 $\text{rank}_{\text{bin}}(C_4) = 4$。 ■

我们注意到，非负秩也不具备满秩子矩阵性质，Moitra [82] 的下述定理便说明了这一点。Hrubeˇs 曾提出疑问：能否使一个矩阵的二元秩与其任意真子矩阵的二元秩之间的差距更大，就像布尔秩和非负秩的情形那样?

定理 41 ([82])**.** 对于任意 r，都存在一个大小为 $3rn \times 3rn$ 的非负矩阵 M，其非负秩至少为 $4r$，且 M 的每个至多有 $n-1$ 行的子矩阵，其非负秩至多为 $3r$。

6.3 克罗内克积

0-1矩阵$A \otimes B$的克罗内克积定义为一个分块矩阵，其i、j块由A_{ij}与整个矩阵B相乘得到。也就是说，如果A是一个大小为$n \times m$的矩阵，而B的大小为$p \times q$，那么$A \otimes B$的大小为$np \times mq$，且定义如下:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{1,1} \cdot B & \cdots & A_{1,m} \cdot B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} \cdot B & \cdots & A_{n,m} \cdot B \end{pmatrix}$$

克罗内克积在数学和计算机科学中有重要应用。正如本节将展示的，它可以放大秩函数之间给定的差距，并且与通信复杂度中的直和问题有着密切联系。其他有关克罗内克积的应用，另见 Schacke [98]。

众所周知，实数秩在克罗内克积下具有乘法性，也就是说，

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(A \otimes B) = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(A) \cdot \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(B).$$

也很容易验证，布尔秩和二元秩对于这种乘积满足次乘性，即 $\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(A \otimes B) \leq \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(A) \cdot \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(B)$，二元秩也有类似结论。回忆一下，$i(A)$ 表示A中最大隔离集的大小。de Caen、Gregory 和 Pullman [25]发现了以下命题：

命题 42. 设 A 和 B 为两个0,1 矩阵。则：

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(A \otimes B) \geq \max\{i(A) \cdot \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(B), \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(A) \cdot i(B)\},$$

and

$$i(A) \cdot i(B) \leq i(A \otimes B) \leq \min\{i(A) \cdot \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(B), \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(A) \cdot i(B)\}.$$

二元秩也有类似的结果。

在某些情况下，可以利用这个命题扩大两个秩函数之间的差距，具体如下。设$M^{\otimes k}$ 为M的第k个克罗内克幂，其递归定义如下：

$$M^{\otimes 1} = M, \quad M^{\otimes k} = M \otimes M^{\otimes(k-1)} \text{ for } k \geq 2.$$

回忆一下，定理15保证存在一个矩阵族M，使得 $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(M) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$，且$i(M) = \mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(M) = 2\lfloor n/2 \rfloor$。现在，利用命题 42，我们可以如下扩大这一差距。Dietzfelbinger、Hromkovič 和 Schnitger [26] 利用克罗内克积证明了关于$n = 4$的类似结果。

推论43。存在一个矩阵族 M，其矩阵大小为 $n \times n$，对所有 $n \geq 4$、$n \neq 5$均成立，使得对所有 $k \geq 1$，$\text{秩}_{\mathbb{R}}(M^{\otimes k}) = (\lfloor n/2 \rfloor + 1)^k$ 且 $\text{秩}_{\mathrm{bin}}(M^{\otimes k}) = (2\lfloor n/2 \rfloor)^k$。

1988年，de Caen、Gregory 和 Pullman [25]提出疑问：与实数秩的情形一样，布尔秩在克罗内克积下是否具有乘法性；或者对于某些矩阵，$\text{秩}_{\mathbb{B}}(A \otimes B) < \text{秩}_{\mathbb{B}}(A) \cdot \text{秩}_{\mathbb{B}}(B)$。他们提出矩阵 C_n 作为不等式的候选，并进一步建议估计$\text{秩}_{\mathbb{B}}(C_n \otimes C_n)$ 关于n的函数。

这个问题 [25] 与通信复杂度中的直和问题密切相关。直和问题探讨的是：解决两个通信问题实例是否需要两倍于解决单个实例所需的通信量。具体而言，在非确定性情形下，Alice 获得 0-1 矩阵 A 的两个行索引 i_1, i_2，Bob 获得 A 的两个列索引 j_1, j_2。他们的目标是判断两个实例 A_{i_1,j_1} 和 A_{i_2,j_2} 是否都为 1；换言之，确定 $A_{i_1,j_1} \cdot A_{i_2,j_2}$ 的值。这个问题的非确定性通信复杂度恰好等于与克罗内克积 $A \otimes A$ 相关联的非确定性通信复杂度。因此，问题 [25] 实际上等价于矩阵 C_n的非确定性通信复杂度 $N_1(C_n)$ 的一个直和问题，因为$\lceil \log \text{秩}_{\mathbb{B}}(C_n) \rceil = N_1(C_n)$（见第4.2节）。另见 [30, 67, 72]，其中对通信复杂度中的直和问题作了更多介绍。

命题 42 给出了 $\mathrm{rank}(\text{团}_n \otimes \text{团}_n) \geq 3 \cdot \mathrm{rank}(\text{团}_n)$ 的一个简单下界，因为对于每个 $n \geq 3$，$(\text{团}_n) = 3$<style id='i'>i。另请回忆，$\mathrm{rank}(\text{团}_n) = \Theta(\log n)$。至于 $\mathrm{rank}(\text{团}_n \otimes \text{团}_n)$ 的上界，

Watts [114] 于 2001年证明，$\text{rank}(\text{团}_4 \otimes \text{团}_4) < \text{rank}(\text{团}_4) \times \text{rank}(\text{团}_4)$，从而回答了 [25] 的问题。她还证明了这个例子在矩阵规模方面是最小的。

值得注意的是， [25] 这一问题实际上早在1995年就已由Karchmer、Kushilevitz和Nisan [67], 解答。他们研究了通信复杂度中的直和问题。其分析表明，对于矩阵团$_n$所对应的两个不等性问题实例，其非确定性通信复杂度只比单个实例的非确定性复杂度高一个加性常数。与团$_n$的布尔秩相比，这个加性常数在团$_n \otimes$团$_n$ 的布尔秩中对应一个乘法常数。因此，他们的结果意味着，当n充分大时，$\text{秩}_{\mathbb{B}}(\text{团}_n \otimes \text{团}_n) < \text{秩}_{\mathbb{B}}(\text{团}_n)^2$, ，同时还表明，$\text{秩}_{\mathbb{B}}(\text{团}_n \otimes \text{团}_n) = O(\log n)$。关于该论证的精彩介绍，请参见 [72], 第4章。

利用第5.4节介绍的概率方法，Jukna [64]于2022年证明了$\text{秩}_{\mathbb{B}}(A \otimes B)$的一个上界，其中矩阵 A 和B 的每一列（行）中零的数量都有界。

定理44 ([64])。 设 A 和 B 是两个大小为 $n \times n$ 的0,1 矩阵，且 A 和 B 的每一列至多有 c_1 个零。则$\text{秩}_{\mathbb{B}}(A \otimes B) = O(c_1 \cdot c_2 \cdot \log n)$。

因此，我们又得到一个证明：当 n 足够大时，$\text{rank}_{\mathbb{B}}(\text{团}_n \otimes \text{团}_n) < \text{rank}_{\mathbb{B}}(\text{团}_n)^2$，因为团$_n$ 的每一列都有一个零，因此 $\text{rank}_{\mathbb{B}}(\text{团}_n \otimes \text{团}_n) = O(\log n)$。接下来我们将展示，类似于 [64] 的分析可用于给出任意矩阵M 的秩的上界，其中该矩阵的每一列（行）至多有d 个零。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{\otimes 3} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M^{\otimes 3} == \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & \mathbf{B_{2,2}} \end{array}\right) \qquad B_{2,2} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B'_{1,1}} & B'_{1,2} \\ \hline B'_{2,1} & B'_{2,2} \end{array}\right) \qquad B'_{1,1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

图 9：矩阵$M^{\otimes 3}$ 的克罗内克积。矩阵M中矩阵元素$(5, 6)$处的红色元素，即$M^{\otimes 3}$的第 5 行、第 6 列上的元素，可以用两个向量唯一表示：$r = (2, 1, 1)$ 和$c = (2, 1, 2)$，它们分别表示第 5 行和第 6 列所属的分块。例如，第 5 行属于$M^{\otimes 3}$中的分块$B_{2,2}$ ，在该分块中又属于分块$B'_{1,1}$，最后它位于分块$B'_{1,1}$的第一行。类似地，向量$c = (2, 1, 2)$ 表示第 6 列所属的分块。

定理 45. 设 M 是一个大小为 $n \times n$ 的0,1 矩阵，每列至多有 d 个零。那么对于任意 $k \geq 1$，秩$_{\mathbb{B}}(M^{\otimes k}) \leq c(d,k) \cdot \log n$，其中 $c(d,k) = 3k \cdot e^k \cdot (d+1)^k \cdot \log_2 e$。

证明： 如果$d = 0$，那么定理显然成立，因为在这种情况下$M^{\otimes k}$ 的布尔秩为 1；如果$k = 1$，则定理由定理 21 得出。因此，假设$d \geq 1$ 且$k \geq 2$。回顾一下，$M^{\otimes k}$ 是一个分块矩阵，其中每个分块都包含具有某种结构的更小分块，依此类推。具体而言，由于$M^{\otimes k} = M \otimes M^{\otimes k-1}$，因此在最顶层，$M^{\otimes k}$ 由$M^{\otimes k-1}$ 的分块或相应大小的全零块组成。在每个形如$M^{\otimes k-1} = M \otimes M^{\otimes k-2}$ 的非零块内部，都有形如$M^{\otimes k-2}$ 的分块或更小的全零块，依此类推，直到最内层分块要么是全零块，要么等于M；在这样的分块内部，每个元素都可以描述为大小为 1×1 的分块，其值为 1 或 0。

因此，$\mathrm{M}^{\otimes k}$ 的任意矩阵元素 (i, j) 都可以用两个向量 $\mathrm{r} = (\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \ldots, \mathrm{r}_k)$ 和 $\mathrm{c} = (\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_k)$ 表示，它们描述了 (i, j) 所属的分块序列，其中每个分块由两个索引 r_i、c_i 描述，使得 r_i 和 c_i 分别是该层分块的行索引和列索引。因此，(i, j) 属于最顶层的分块 r_1,c_1，然后属于分块 $\mathrm{r}_1, \mathrm{c}_1$ 内部的分块 $\mathrm{r}_2, \mathrm{c}_2$，依此类推，直到索引对 r_k、c_k 表示 $\mathrm{M}^{\otimes k}$ 最内层分块中的行索引和列索引。示意图见图 9。

令 R 为 $\mathrm{M}^{\otimes k}$ 的行索引的一个子集，其中每个行 $\mathrm{i} \in \mathrm{R}$ 都根据其所属的分块序列，按以下方式独立随机选取。若行 i 用行序列 $(\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \ldots, \mathrm{r}_k)$ 表示，则以 $1/(\mathrm{d}+1)$ 的概率选取 r_1，随后以 $1/(\mathrm{d}+1)$ 的概率选取 r_2，依此类推。因此，唯一表示行 i 的行序列 $(\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \ldots, \mathrm{r}_k)$ 被选取的概率为 $1/(\mathrm{d}+1)^k$。

令C 为$M^{\otimes k}$的列索引j 的一个子集，使得对于每个$i \in R$，都有$M^{\otimes k}{}_{i,j} = 1$。令$S = R \times C$ 为由此得到的数对集合(i,j)。集合S 是$M^{\otimes k}$中的全 1 单色矩形，因为C 中的所有列索引在R中的各行上都只包含 1。

对于满足 $\mathrm{M}^{\otimes k}\,\mathrm{i,j} = 1$ 的数对 (i, j)，它被包含在由 S 定义的矩形中的概率是多少？行 i 最初被选入 R 的概率为 $1/(\mathrm{d}+1)^k$。若对于所有 $\mathrm{i}' \in \mathrm{R}$ 都有 $\mathrm{M}^{\otimes k}\,\mathrm{i}',\mathrm{j} = 1$，那么数对 (i, j) 就会属于 S；此时 j 会被纳入 C（也就是说，R 中所有行在第 j 列上的值都是 1）。因此，若没有选中任何一个行序列包含全零分块且该分块包含列 j 的行，则 (i, j) 就会属于 S。由于 M 的每一列中至多有 d 个零，这种情况发生的概率至少为：

$$\frac{1}{(d+1)^k}\left(1 - \frac{1}{(d+1)}\right)^{k \cdot d} \geq \frac{1}{e^k (d+1)^k}$$

现在，如果我们按照上述描述，独立随机地选择 $t = c(d,k) \cdot \log_2 n$ 个矩形 $S_1, \ldots, S_t$，其中 $c(d,k)$ 如定理所述，那么 (i,j) 未被这些矩形之一覆盖的概率至多为：

$$\left(1 - \frac{1}{e^k (d+1)^k}\right)^t \leq e^{-t/(e^k (d+1)^k)} = e^{-3k \log_2 n / \log_2 e} = n^{-3k}.$$

由于n^{2k} 在$M^{\otimes k}$中的 1 最多有这些t个矩形，因此其中某个 1 未被覆盖的概率至多为：

$$n^{2k} \cdot n^{-3k} < 1$$

因此，至少存在一种矩形S_1,...、S_t的选取方式，使$M^{\otimes k}$中的所有 1 都被覆盖，从而，秩$_{\mathbb{B}}(M) \leq t = c(d, k) \cdot \log_2 n$，如所要求。 ■

由于团$_n$的每一列中恰好有一个零，因此我们得到以下推论。

Cor推论 46。 存在一个常数 $c > 1$ 使得 秩$_{\mathbb{B}}$(团$_n^{\otimes k}$) $= O(c^k \cdot$秩$_{\mathbb{B}}$(团$_n$)) .

Haviv 和 Parnas [51] 提出了另一种求克罗内克积布尔秩上界的方法，他们将上述 Watts [114]的方法加以推广，用它来给出秩$_{\mathbb{B}}$(团$_4 \otimes$团$_4$)的上界。接下来介绍的定理 47（证明见 [51],）将证明秩$_{\mathbb{B}}(A \otimes B)$ 上界这一难题，转化为为矩阵A 和B分别寻找两个由低秩子矩阵组成的序列$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，使得A 和B 的每个 1 矩阵元素都被其中许多子矩阵覆盖。若一个 0-1矩阵序列中的矩阵在布尔运算下的和等于某个矩阵，则称该序列覆盖 该矩阵。图10对此作了说明。

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

图10：在 [114], 中使用的一列矩阵 $\mathcal{M}$，如 [51] 中的推广。这里 $\mathcal{N} = \mathcal{M}$。这三个矩阵的布尔秩均为 2，它们的布尔和等于 团$_4$, ，并且 团$_4$ 中的每个元素都被其中两个矩阵覆盖。因此，由定理 47，秩$_{\mathbb{B}}$(团$_4 \otimes$ 团$_4$)$\leq \sum_{t=1}^{3}$秩$_{\mathbb{B}}(M_t) \cdot$秩$_{\mathbb{B}}(N_t) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12 < 16 =$秩$_{\mathbb{B}}$(团$_4$) $\cdot$ 秩$_{\mathbb{B}}$(团$_4$)。

定理 47 ([51])。 设 A 和 B 是两个 0,1 矩阵。假设存在两列 0, 1矩阵， $\mathcal{M} = M_1,..., M_s$ 和 $\mathcal{N} = N_1,..., N_s$，允许矩阵重复出现，使得：

1. $\mathcal{M}$ 是 A 的一个覆盖，并且

2. 对于每个满足 $A_{i,j} = 1$ 的 i,j，矩阵 N_t *with* $(M_t)_{i,j} = 1$ 构成 B 的一个覆盖。

那么，秩$_{\mathbb{B}}(A \otimes B) \leq \sum_{t=1}^{s}$ 秩$_{\mathbb{B}}(M_t) \cdot$秩$_{\mathbb{B}}(N_t)$。

证明： 我们首先证明

$$A \otimes B = \sum_{t=1}^{s} (M_t \otimes N_t),$$

其中的运算是布尔运算。通过逐分块比较等式两边的矩阵即可得证。

若$A_{i,j} = 0$ 则i, j 位置的分块$A \otimes B$ 是全零矩阵。由于 $\mathcal{M}$ 是A的覆盖，因此$(M_t)_{i,j} = 0$对每个 $1 \leq t \leq s$都成立。因此，对于所有 $1 \leq t \leq s$，$M_t \otimes N_t$ 的i,j 位置分块也为全零矩阵。因此，它们的和中对应的分块也为全零矩阵。

现在，若 $A_{i,j} = 1$ 那么，i, j 分块的 $A \otimes B$ 是 B。至于矩阵 $\sum_{t=1}^{s}(M_t \otimes N_t)$的 i,j 分块，它恰好是所有满足 $(M_t)_{i,j} = 1$ 的 N_t 矩阵之和。根据定理的第二个假设，这些矩阵构成了 B 的一个覆盖。因此，这个分块也是 B 。

最后，利用布尔秩的次可加性和次可乘性：

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{B}}(A \otimes B) = \operatorname{rank}_{\mathbb{B}}\left(\sum_{t=1}^{s}(M_t \otimes N_t)\right) \le \sum_{t=1}^{s}\operatorname{rank}_{\mathbb{B}}(M_t \otimes N_t) \le \sum_{t=1}^{s}\operatorname{rank}_{\mathbb{B}}(M_t)\cdot\operatorname{rank}_{\mathbb{B}}(N_t),$$

如要求的那样。 ■

利用定理 47 中引入的方法，Haviv 和 Parnas [51] 证明了以下定理，解决了 [25] 关于团$_n \otimes$ 团$_n$的布尔秩问题，适用于所有$n \neq 5,6$。

定理 48 ([51])。设 $n,m \geq 7$。则秩$_{\mathbb{B}}$(团$_n \otimes$ 团$_m$) $<$ 秩$_{\mathbb{B}}$(团$_n$) $\cdot$ 秩$_{\mathbb{B}}$(团$_m$) 。

从上述讨论可以看出，有几种方法可以证明克罗内克积的布尔秩上界。一个长期悬而未决的问题，是关于二元秩在克罗内克积下是否具有乘法性的有趣问题。Watson 也曾在 [113]讨论过这个问题，并给出了如下矩阵示例，其中二元秩与非负秩并不相等：

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Watson 证明了秩$_{\text{bin}}(M) = 5$ 且秩$_{+}(M) = 4$。在试图扩大二元秩与非负秩之间的差距时，Watson 提出，对于这个矩阵M，有秩$_{\text{bin}}(M^{\otimes k}) =$ 秩$_{\text{bin}}(M)^k$。据我们所知，迄今为止这一问题尚无进展；目前仍不清楚是否存在矩阵A,B，使得秩$_{\text{bin}}(A \otimes B) <$秩$_{\text{bin}}(A)$秩$_{\text{bin}}(B)$。

6.4 矩阵及其补矩阵的秩

给定一个 0-1 矩阵 M，其补矩阵 $\overline{M}$ 是将 M 中的每个 0 替换为 1、每个 1 替换为 0 后得到的矩阵。对于给定的秩函数，确定M 的秩与$\overline{M}$的秩之间关系的问题，是数学界和计算机科学界都曾提出的另一个问题，主要出现在通信复杂度的背景下。因此，本小节考察实数秩、布尔秩和二元秩函数下矩阵及其补矩阵的已知秩界。其中一些方法属于组合方法或代数方法，另一些则采用第 5.7 节所述的强大提升技术。

众所周知，$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(M)$ 与 $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(\overline{M})$之间的差距至多为 1，下面这个简单的命题便证明了这一点。正如我们将在本节中展示的那样，这种结论对于布尔秩和二元秩通常并不成立。

断言 49。 设 M 是一个0,1 矩阵。那么 $|$秩$_{\mathbb{R}}(M) -$ 秩$_{\mathbb{R}}(\overline{M})| \leq 1$。

证明： 该断言可直接由实数秩的次可加性推出，因为$M \quad = M - J$，其中J 是秩为 1 的全1矩阵。 ■

如第4.2节所述，矩阵M 的非确定性通信复杂度$N_1(M)$等于 $\lceil \log$ 秩$_{\mathbb{B}}(M) \rceil$，因此也等于覆盖M中所有 1 所需的最少单色矩形数的对数。矩阵M 的余非确定性通信复杂度$N_0(M)$等于M的非确定性通信复杂度，因此也等于覆盖M中所有 0 所需的最少单色矩形数的对数。因此，确定秩$_{\mathbb{B}}(M)$ 与秩$_{\mathbb{B}}(M)$ 之间关系的问题，等价于确定$N_1(M)$ 与$N_0(M)$之间关系的问题。

事实上，秩$_{\mathbb{B}}(M)$ 与秩$_{\mathbb{B}}(M)$之间可能存在指数级差距。例如，我们曾看到矩阵C_n存在这样的差距，因为C_n 的补矩阵是单位矩阵I_n，且秩$_{\mathbb{B}}(I_n) = n$，而秩$_{\mathbb{B}}(C_n) = \Theta(\log n)$。矩阵$C_n$ 对应于通信复杂度中讨论的不等函数，因此，不等函数的非确定性通信复杂度与余非确定性通信复杂度之间存在指数级差距。

那么，矩阵及其补矩阵的二元秩如何呢？Yannakakis 的一项结果 [115]证明，任意 0-1 矩阵M的确定性通信复杂度$D(M)$至多为$O(\log^2 \mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(M))$（见定理30、第5.6节）。然而，矩阵$M$ 的确定性通信复杂度与其补矩阵M的确定性通信复杂度相同，因为双方只需将针对M的确定性协议的输出取反即可。因此：

$$\log \mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(\overline{M}) \le D(\overline{M}) \le O(\log^2 \mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(M)).$$

这意味着，如果 $\mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(M) = d$，那么

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\overline{M}) \le \mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(\overline{M}) \le d^{O(\log d)}.$$

由于 $\lceil \log \mathrm{rank}_{\mathbb{B}}(\overline{M}) \rceil = N_0(M)$，因此，对某个矩阵$M$ 的余非确定性通信复杂度或M的布尔秩的任何下界，都将给出 $\mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(M)$的下界。

多年来，寻找第5.6节讨论的团与独立集问题的余非确定性通信复杂度的紧下界，一直是一个公开问题。此外，人们还发现，该问题也与第5.1节提到的 Alon、Saks 和 Seymour 猜想有关。该猜想认为 $\chi(G) \le bp(G) + 1$，其中$bp(G)$是将图G 的边划分所需的最少完全二部图数，而 $\chi(G)$ 是其色数。关于这些问题之间的联系及其等价性的描述，参见 Huang 和 Sudakov [59] 以及 Bousquet、Lagoutte 和 Thomass´e [13]。

现在，我们从秩的下界角度描述这些问题的研究进展：对于秩为$_{\mathrm{bin}}(M) = d$的矩阵，其秩为$_{\mathbb{B}}(\overline{M})$。然而，鉴于上述讨论，所提及的结果意味着团与独立集问题的余非确定性通信复杂度也有类似的下界，并且还给出了$bp(G)$与$\chi(G)$之间的分离。

第一个非平凡的下界由 Huang 和 Sudakov 给出，他们推翻了 Alon–Saks–Seymour猜想。基于 Razborov 的一个构造，该结果

给出了一个图族 G，满足 $bp(G) = d$ 且 $\chi(G) \geq \Omega(d^{6/5})$，其中有无穷多个整数$d$。扩展构造见 [20]。Huang 和 Sudakov 的结果可以转化为一个矩阵族 M，其秩 $\text{rank}_{\mathbb{B}}(M) \geq \Omega(d^{6/5})$。

指数中的常数 6/5 多年来不断改进，如表 2 所示。最终，Balodis、Ben-David、G¨o ¨os、Jain 和 Kothari [8]证明了以下定理，其给出的下界几乎与 Yannakakis 给出的上界相匹配。

定理50([8])。存在一个矩阵族 M，使得 秩$_{\text{bin}}(M) = d$ 且 秩$_{\mathbb{B}}(M) \geq d^{\Omega(\log d)}$。

秩$_{\mathbb{B}}(M)$=	作者	Year
$\Omega(d^{6/5})$	Huang和Sudakov [59]	2012
$\Omega(维^{3/2})$	Amano [5]	2014
$\Omega(维^{2})$	Shigeta 和 Amano [101]	2015
$d^{\Omega(\log^{0.128} d)}$	图 ¨o¨os [37]	2015
$d^{\widetilde{\Omega}\ (对数\ d)}$	Balodis、Ben-David、G¨o ¨os、Jain、Kothari [8]	2021

表 2：构造矩阵族M，使得 $\text{rank}_{\text{bin}}(M) = d$，且 $\text{rank}_{\mathbb{B}}(M)$具有表中所述的下界。

对于特定矩阵族，考察矩阵的秩与其补矩阵的秩之间的差距也很有意思。其中一个这样的矩阵族是正则0-1矩阵。

定义 51。 若一个0-1矩阵 M 的所有行和列都恰好含有 k 个 *1*，则称其为 k-正则矩阵。

Brualdi、Manber 和 Ross [16] 于 1986 年证明了关于正则矩阵及其补矩阵的实数秩的如下结论：

定理 52 ([16])。 对于任意一个大小为 $n \times n$ 的 k-正则0,1 矩阵 M，其中 $0 < k < n$，有秩$_{\mathbb{R}}(M) =$秩$_{\mathbb{R}}(M)$。

在他们的工作之后，Pullman [91] 于 1988 年提出：每个正则矩阵M 是否都满足秩$_{\text{bin}}(M) =$ 秩$_{\text{bin}}(M)$? Hefner、Henson、Lundgren 和 Maybee 在 [54] 提出猜想，认为这一结论对二元秩并不成立。同样，正则矩阵C_n 就是一个使这一结论对布尔秩不成立的例子。

受 [8], Haviv 的结果启发，Parnas [53] 证明了以下正则情形的对应结论，从而表明 [54]的猜想是正确的。他们的证明运用了非确定性通信复杂度中的查询到通信提升定理；与 [8]的成果一样，这一结果几乎达到了 Yannakakis [115] 前面给出的上界。他们还给出了反驳 Alon-Saks-Seymour 猜想的正则反例，并证明对于无穷多个整数 $\tilde{d}$，存在一个正则图G，满足 $bp(G) = d$ 且 $\chi(G) = d^{\Omega(\log d)}$。

定理 53 ([53])。 对于无穷多个整数 d，存在一个正则矩阵 M，使得 秩$_{\text{bin}}(M) = d$，且 秩$_{\mathbb{B}}(M) = d^{\Omega(\log d)}$。

作为直接推论，我们得到一个矩阵族，其实秩与二元秩和布尔秩之间存在准多项式间隙。

推论 54. 对于无穷多个整数 d，存在一个正则矩阵 A，使得 $\text{秩}_{\mathbb{R}}(A) \leq d$ 且 $\text{秩}_{\mathbb{B}}(A)$，$\text{秩}_{\text{bin}}(A) = d^{\Omega(\log d)}$。

证明：设 M 为定理 53 所保证存在的正则矩阵。因此，M 的秩$_{\text{bin}}$(M) = d，且 M 的秩$_{\mathbb{B}}$(M) = $d^{\Omega(\log d)}$。根据定理 52，M 的秩$_{\mathbb{R}}$(M) = M 的秩$_{\mathbb{R}}$(M) ≤ M 的秩$_{\text{bin}}$(M) = d。令 A = M。由于 A 的秩$_{\mathbb{R}}$(A) ≤ d，而 A 的秩$_{\mathbb{B}}$(A)、A 的秩$_{\text{bin}}$(A) = $d^{\Omega(\log d)}$，结论成立。 ■

[37, 8, 53] 所有这些结果都使用了查询到通信提升技术，再次展现了通信复杂度与二元秩和布尔秩研究之间富有成果的联系；这也要求在通信复杂度领域发展新的提升定理。尽管该技术在 [8, 53], 的两项结果中都达到了可能的最大间距，但仍值得寻找更简单的组合构造，以展示矩阵的二元秩与其补矩阵之间的差距，正如 [59, 5, 101]所做的那样。

$$M = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0 \end{array}\right) \qquad \overline{M} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&1&1&1&1&1\\ \hline 1&1&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&0&1&1&0\\ 1&1&1&1&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&0&0&1 \end{array}\right)$$

图 11：一个二元秩为 8 的 2-正则矩阵M 示例，其补矩阵$\overline{M}$ 的二元秩至多为 7。通过注意到主对角线上的每个分块实际上都是$D_{4,2}$，很容易验证 $\text{rank}_{\text{bin}}(M) = 8$。对于$M$的二元秩，图中给出了将 1 划分为 7 个单色矩形的方法，其中每个矩形分别用一种不同的颜色表示。

Haviv 和 Parnas 给出了这样一种针对正则矩阵的组合构造，尽管 $\text{rank}_{\text{bin}}(M)$ 与 $\text{rank}_{\text{bin}}(\overline{M})$之间的差距较小；他们研究的是分块对角 0-1矩阵这一特殊情形，其中每个分块都是循环正则子矩阵。他们提出了一种证明这类循环分块矩阵的补矩阵上界的一般方法，并且还为各种矩阵族证明了相匹配的下界。

定理 55 ([52])。 对于每个 $k \geq 2$，都存在 k-正则0-1 矩阵 M，使得$\text{秩}_{\text{bin}}(M) > \text{秩}_{\text{bin}}(\overline{M})$。

证明： 一般循环分块矩阵的完整证明可见 [53], ，但基本思路如下。考虑矩阵 M ，其主对角线上有两个$D_{2k,k}$ 分块，其余位置均为零。于是，$\text{秩}_{\text{bin}}(M) = 2 \cdot \text{秩}_{\text{bin}}(D_{2k,k}) = 4k$。另一方面，经过行和列的置换后，矩阵 M 的主对角线上有两个$D_{2k,k}$ 分块，其余位置均为 1。可以验证，$\text{秩}_{\text{bin}}(\overline{M}) \leq 4k - 1$。图 11 展示了一个示例。 ■

7 算法结果

由于计算布尔秩和二进制秩是*NP*难问题，因此有必要为这些问题寻找松弛方法。本节介绍了计算或近似布尔秩或二元秩的算法方向，例如参数化算法、近似算法、性质测试以及近似布尔分解问题。

7.1 参数化算法

参数化复杂性领域致力于根据问题输入所指定的参数来确定问题的复杂性。具体而言，这种方法试图寻找能够针对某些参数高效求解问题的算法，同时允许其对其他参数呈指数级依赖。这种方法对于具有某个固定参数的 *NP* 难问题尤其有用。例如，顶点着色问题的输入包括一个含有 n 个顶点和 m 条边的图 G，以及某个参数k；目标是判断该图的色数是否至多为 k。因此，参数为 n、m 和 k。在本综述中，秩问题的相关参数是矩阵 M 的大小$n \times m$ 以及秩参数 d；对于给定的秩函数，目标是判断 M 的秩是否至多为 d 。

如果存在一个算法，能够在大小为 n 的输入上以 $n^c \cdot f(k)$ 的时间求解该问题，那么称参数化问题关于参数 k 是固定参数可处理 的；其中 c 是绝对常数，而 f 是可计算函数。这样一来，即使 $f(k)$ 关于 k呈指数增长，对于固定的 k，仍可在多项式时间内高效求解该问题。有关参数化复杂性的详细介绍，请参阅 Downey 和 Fellows [27] 。

如第5.5节所述，核化是参数化算法中的一项核心技术，其目标是提取原问题的一个小型核，其规模仅取决于问题所选参数k ，从而在这个缩减后的实例上求解问题即可得到完整问题的解。算法的总复杂度取决于寻找小型核所需的时间，以及针对小型核求解问题所需的时间。寻找核所需的步骤称为核化规则。

Fleischner、Mujuni、Paulusma 和 Szeider [31] 提出了第5.5节中描述的核化规则集，用于构造一个适合求解二分图的最小完全二部图边划分或覆盖问题的核。Nor等人 [84] 展示了如何利用该核为这些问题获得固定参数算法。

为简便起见，这里考虑求一个0-1矩阵的二进制秩或布尔秩这一等价表述。因此，由 [31] 描述的M 的核，是通过删除全零行和列以及重复行和列从M 中得到的一个子矩阵。 [84]的结果展示了如何利用该核，为二进制秩和布尔秩获得一个参数化算法，其复杂度为$f(d) = O(2^{2^{2d}} \cdot \log d)$。

基本上， [84] 的算法会根据所讨论的秩，遍历核中所有 1 划分为单色矩形或由单色矩形覆盖的可能方式。根据引理23，对于二元秩或布尔秩至多为

d的 0-1 矩阵，其结果核至多有 行和 $2^d \cdot 2^d = 4^d$ 列。因此，核中 1 的数量至多为 $2^d \cdot 2^d = 4^d$，这决定了对$f(d)$给出的上界。

接下来我们将说明，利用引理25（它给出了核的行数与列数乘积的上界），可以稍微降低这个用于计算二进制秩的简单算法的时间复杂度。

引理56。 设 M 是一个大小为 $n \times m$ 的 0,1 矩阵。可以在时间复杂度 $O(2^{2^d} \cdot d \log d) + poly(n,m)$ 内检查 M 中的 *1* 是否能划分为 d 个单色矩形。

证明： 令 M' 为通过移除 M 中的所有零行和零列，并移除重复行和列得到的核。通过对 M 的行排序，再对列排序，并移除重复行和列，可以在时间 $O((n^2+m^2)\log n)$ 内构造出该核。

根据引理 25，若 $\text{rank}_{\text{bin}}(M) \leq d$，则 M' 的行数与列数的乘积至多为 $(d+1)2^d$，因此 M' 中 1 的个数至多为 $(d+1)2^d$。如果这个乘积更大，我们就可以直接确定 $\text{rank}_{\text{bin}}(M) > d$。

现在，使用蛮力算法，遍历将S_1,...、S_d划分为d 个非空互不相交子集的所有方式，其中这些子集由M'中的 1 组成。对于每种划分，检查每个子集S_i 是否为全 1 单色矩形。如果找到一种划分，使得所有d 个子集都是全 1 单色矩形，则算法接受；否则拒绝。

关于这个简单算法的复杂度：将至多$(d+1)2^d$ 个 1 划分为d 个非空互不相交集合的可能划分数，是第二类斯特林数$S((d+1)2^d,d)$，并且有：

$$S((d+1)2^d,d) = O\left(\frac{d^{(d+1)2^d}}{d!}\right) = O\left(\frac{2^{2^d \cdot d \log d}}{d!}\right).$$

对于每种划分，检查d 个子集S_1,...、S_d是否将M 中的 1 划分为d 个单色矩形，总计需要$O((d+1)2^d)$时间，因此总复杂度为：

$$O\left((d+1)\cdot 2^d \cdot \frac{2^{2^d \cdot d \log d}}{d!}\right) = O(2^{2^d \cdot d \log d})$$

如上所述。 ■

Nor等人 [84] 还描述了一种计算布尔秩的算法，其$f(d) = O(2^{d2^{2^d-1}+3^d})$。Chandran、Issac 和 Karrenbauer [19] 给出了一种改进的二元秩算法，其$f(d) = O^*(2^{2d^2+d}\log d+d)$。此外， [19] 证明，除非指数时间假设（ETH）不成立，否则不存在一个计算布尔秩的算法，其复杂度低于关于d 的双指数级复杂度；因此，该算法与 [84]给出的算法相比，复杂度仅相差多项式因子。

7.2 近似算法

近似算法是计算机科学中一种常见且有用的方法，用于为 NP 难的优化问题寻找近似解。近似算法的质量由多种因素决定，其中包括其近似比 C，该近似比保证算法找到的解的规模最多是C 倍大或小

于最优解的规模，具体取决于问题是最小化问题还是最大化问题。

二元秩问题和布尔秩问题都是最小化问题，并且二者都是*NP*-困难的。因此，矩阵M 的二元秩近似算法应输出某个近似值$Approx$ ，使得

$$\text{rank}_{\text{bin}}(M) \leq Approx \leq C \cdot \text{rank}_{\text{bin}}(M)$$

其中$C \geq 1$ 是该算法的近似比。布尔秩近似算法也有类似的定义。

遗憾的是，一般而言，我们无法期待较小的近似比，因为 Chalermsook、Heydrich、Holm 和 Karrenbauer [18] 证明，对于任意给定的 $\epsilon > 0$，将大小为$n \times n$ 的 0-1矩阵M 的布尔秩近似到$n^{1-\epsilon}$ 倍以内是困难的。不过，我们将证明，在某些情况下可以实现更好的近似。

Chandran、Issac 和 Karrenbauer [19]为二分图的最小双团边覆盖或划分给出了一个简单的多项式时间近似算法。为简便起见，我们将他们的算法表述为布尔秩和二元秩的等价形式，并证明对于大小为$n \times n$的矩阵M，该算法的近似比为$n/\log n$。

算法首先按照第5.5节所述求出M 的核，即移除M中的全零行和重复行、列。令M' 为得到的M的核。接下来，算法用一个单独的矩形覆盖核中每一行的所有 1（这相当于将由M'表示的二分图对应核中左侧所有顶点发出的边划分为星形子图）。

根据引理23，M 的不同的行数至多为 $2^{\text{rank}_{\text{bin}}(M)}$，因此对于任意$n \geq 3$，得到的单色矩形划分规模至多为：

$$\min\{n, 2^{\text{rank}_{\text{bin}}(M)}\} = \frac{\min\{n, 2^{\text{rank}_{\text{bin}}(M)}\}}{\text{rank}_{\text{bin}}(M)} \cdot \text{rank}_{\text{bin}}(M) \leq \frac{n}{\log n} \cdot \text{rank}_{\text{bin}}(M).$$

布尔秩也有类似的界，因为对所有 1 的任何划分也是对M中所有 1 的覆盖。

Haviv [49]在2025年提出了以下算法，它利用二元秩与确定性通信复杂度之间的联系，同时改进了二元秩的这一近似比。回顾一下，Sudakov 和 Tomon [107] 证明，存在一个常数$c > 1$，使得$D(M) \leq c\sqrt{秩_{\mathbb{R}}(M)}$，其中$D(M)$ 是M的确定性通信复杂度，并且总有 $\log_2 秩_{\text{bin}}(M) \leq D(M)$。

算法：近似二进制秩（M 大小为 $n \times n$，常数 c）

1. 计算$秩_{\mathbb{R}}(M)$。
2. 如果$秩_{\mathbb{R}}(M) \leq log_2^2 n/c^4$,输出 近似 $= n^{1/c}$。
3. 否则输出 近似 $= n$。

定理 57([49])。 “近似二进制秩”算法是求二元秩的近似算法，其近似比为 $O(n/\log_2^2 n)$，适用于任意大小为 $n \times n$ 的 0,1 矩阵 M。

证明： 令c 为 Sudakov 和 Tomon 的结果 [107] 所保证的常数。因此，根据上述讨论：

1. 如果秩$_{\mathbb{R}}(M) \leq \log_2^2 n/c^4$:

$$\text{rank}_{\text{bin}}(M) \leq 2^{D(M)} \leq 2^{c\sqrt{\text{rank}_{\mathbb{R}}(M)}} \leq 2^{c\sqrt{\log_2^2 n/c^4}} = n^{1/c}$$

因此，这种情况下的近似比为：

$$Approx = n^{1/c} \leq O\left(\frac{n}{\log_2^2 n}\right) \leq O\left(\frac{n}{\log_2^2 n}\right) \cdot \text{rank}_{\text{bin}}(M)$$

2. 如果秩为 秩$_{\mathbb{R}}(M) > \log_2^2 n/c^4$: 则秩$_{\text{bin}}(M) \geq$ 秩$_{\mathbb{R}}(M) > \log_2^2 n/c^4$, , 因此 :

$$Approx = n = \frac{c^4 \cdot n}{\log_2^2 n} \cdot \frac{\log_2^2 n}{c^4} \leq \frac{c^4 \cdot n}{\log_2^2 n} \cdot \text{rank}_{\text{bin}}(M) = O\left(\frac{n}{\log_2^2 n}\right) \text{rank}_{\text{bin}}(M)$$

也很容易验证，在这两种情况下，近似 $\geq$ 秩$_{\text{bin}}(M)$。因此，如所声称的，在这两种情况下，我们得到的近似比为$O(n/\log_2^2 n)$ 。 ■

该结果不适用于布尔秩，因为布尔秩可能小于实数秩。然而，类似的结果适用于非负秩，因为非负秩介于实数秩和二元秩之间。还需注意， [49] 关于二元秩的近似算法只能求得二元秩的一个近似值，其近似比保证为$O(n/log^2 n)$，并不能实际将矩阵中的 1 划分为单色矩形；而 [19]的算法则能够实际给出这些 1 的一个近似覆盖或划分，尽管这是一个非常简单的划分。

利用第 4 节中描述的从布尔秩到顶点着色问题的归约，可以使用已知的顶点着色近似算法来获得布尔秩的近似算法。Chalermsook、Heydrich1、Holm 和 Karrenbauer 注意到了这一联系, [18] 他们利用 Halld´orsson [47] 关于色数的一个多项式时间近似算法的结果，给出了以下结果；该算法的近似比为$O(n(\log\log n)^2/(\log n)^3)$。

推论 58. 存在一种用于求矩阵 M 的布尔秩的近似算法，其近似比为 $O(s(\text{loglog}\, s)^2/(\log s)^3)$，其中 s 是矩阵 M 中 *1* 的数量。

对于稀疏矩阵M，这个结果优于上文所述简单的近似比$n/\log n$。还要注意，如果M 的每一列（行）至多有d 个零，那么根据定理 21，M 的布尔秩至多为$c(d)\log n$，其中常数$c(d)$ 取决于d。因此，在这种情况下，可以直接用$c(d)\log n$来近似布尔秩。下一个定理给出了另一种简单的布尔秩近似算法，该定理由 Miettinen 通过将问题归约为集合覆盖问题而证明。 [80],

为了实现多项式时间复杂度，这里要求矩阵的每一列至多包含 $\log n$ 个 1。我们通过采用另一种表述方式——用单色矩形覆盖矩阵中的 1——给出一个与 [80] 的证明略有不同的证明。

定理 59 ([80])。 设 M 是一个大小为 $n \times m$ 的 0,1 矩阵，且每列中至多有$\log n$ 个 *1*。在 n，m 的多项式时间内，可以将 M 的布尔秩近似到 $O(\log m + \log\log n)$ 的近似比。

证明： 我们将布尔秩的近似问题约化为集合覆盖问题，具体如下。M 中的 1 是我们希望覆盖的全集U 中的元素。根据每列中 1 的数量这一假设，1 的总数至多为 $|U| \leq m\log n$。用于覆盖这些 1 的集合是 M中的单色 1 矩形。Johnson [62] 针对集合覆盖问题的经典贪心近似算法，在每一步选择当前覆盖最多未覆盖元素（1）的集合（矩形）。该贪心算法的近似比为$O(\log |U|) = O(\log(m \log n)) = O(\log m + \log\log n)$。

接下来我们证明，算法在每次迭代中考虑的矩形数量至多为 $n \cdot m$，因此运行时间关于 n、m 是多项式的，因为判断哪个矩形覆盖了最多尚未覆盖的矩形，也可以在关于 n、m 的多项式时间内完成。事实上，对于给定的行子集R （来自 M），我们可以考虑由 R 中的行定义的极大矩形，其中包含在这些行中全为 1 的所有 列。此外，只需考虑这样的行子集R：存在一列 j，其在 R中的各行上全为 1。否则，如果某个特定行子集R不存在这样的列 j，那么这些行定义的单色矩形就是空的。因此，可能的极大矩形数量不超过选择此类行子集R 的方式数。但由于每一列中至多有 $\log n$ 个 1，选择一个在列 j中全为 1 的行子集至多有 $2^{\log n}$ 种方式；因此，遍历所有列后，选择行子集的方式总数至多为 $m \cdot 2^{\log n} = m \cdot n$。由此，算法在每次迭代中需要考虑的单色矩形数量至多为 $n \cdot m$，如上所述。

■

寻找其他特定矩阵族的更优近似算法是很有意义的，尤其是在预先知道秩的上界时，正如 Blum [12]针对色数所做的那样。例如，Parnas 和 Shraibman [89], 的一个结果表明，对于实数秩为 $d \leq 4$ 的矩阵，其二元秩和布尔秩至多为 $2d - 2$。这给出了一种平凡的算法：只需计算这类矩阵的实数秩，就可以近似求出其二元秩和布尔秩。

7.3 性质测试

性质测试是放宽布尔秩和二元秩计算问题的另一种方法。性质测试领域起源于 Rubinfeld 和 Sudan 于 1996 年发表的一篇论文 [96]，他们在文中引入了函数测试的概念；该领域也起源于 Goldreich、Goldwasser 和 Ron 于 1998 年发表的一篇论文 [36]，他们由此开启了对图性质测试的研究。此后，这一领域已成为理论计算机科学中一个活跃且成果丰硕的研究方向，并且

人们设计出了许多性质测试算法。例如，图的性质包括k-可着色性、连通性或二分性；函数的性质包括线性性、单调性和独裁性；此外还有正则语言、聚类、分布的性质等（参见 Goldreich 关于性质测试的著作及其中的参考文献 [35]）。

性质测试的基本思想是设计超快速算法，对经典判定算法进行放宽。判定算法应判断给定对象是否具有某种预先指定的性质，例如图是否可k着色、函数是否为线性函数，或矩阵的秩是否至多为d。传统上，人们希望判定算法始终给出正确答案，即接受具有指定性质的对象，否则予以拒绝。然而，这通常要求算法检查整个对象，因此其运行时间至少与输入对象的大小呈线性关系。当对象非常庞大时，这便会带来问题；尤其对于NP难问题，通常不太可能存在多项式时间判定算法。

[96, 36] 提出的思想是如下放宽判定算法：测试算法应接受具有所研究性质的对象，并以较高的常数概率拒绝与具有该性质相差 ϵ的对象；也就是说，至少需要修改对象中占 ϵ比例的部分，才能使其具有该性质。例如，对于顶点着色问题，至少应删除图中占 ϵ比例的边，才能使图可k着色。与常规判定算法相比，这种放宽使测试算法在许多情况下能够实现超高效率。具体而言，在许多情况下，其查询复杂度是次线性的，甚至与输入大小无关，而取决于 ϵ。在矩阵秩测试的背景下，对测试算法的要求如下：

定义60。 给定秩函数的测试算法 可查询一个 $n \times m$ 矩阵 M、误差参数 ϵ 和参数 d。如果 M 的秩至多为 d，算法应以至少2/3 的概率接受；如果 M 与所有秩至多为 d 的矩阵都相距 ϵ很远，则应以至少2/3 的概率拒绝。也就是说，必须修改 M 中超过$(n \cdot m)/\epsilon$ 个元素，才能使其秩至多为 d。

该算法的查询复杂度 是它检查的 M 中元素的数量。如果算法根据输入和随机掷硬币的结果确定查询内容，且不依赖先前查询的答案，则称其为非自适应算法。否则，该算法就是自适应的。

尽管实数秩可以在多项式时间内计算，Krauthgamer 和 Sasson [70]证明，存在一种针对实数秩的非自适应性质测试算法，其查询复杂度为$O(d^2/\epsilon^2)$ ，因此与M的大小无关。Li、Wang 和 Woodruff [75]提出了一种针对实数秩的自适应算法，其查询复杂度降低至$O(d^2/\epsilon)$。Bal- can、Woodruff 和 Zhang [7] 提出了一种针对实数秩的非自适应测试算法，其查询复杂度为 $\tilde{O}(d^2/\epsilon)$。

Parnas、Ron 和 Shraibman [87] 为布尔秩提供了一种非自适应测试算法，其查询复杂度为 $\tilde{O}(d^4/\epsilon^6)$。对于二元秩，他们给出了一种查询复杂度为$O(2^{2d}/\epsilon^2)$的非自适应算法，以及一种查询复杂度为$O(2^{2d}/\epsilon)$的自适应算法。因此， [87]的这三种算法的查询复杂度均与矩阵的大小无关。Bshouty [17] 将 [87]针对二元秩的结果改进了 $\tilde{\Theta}(2^d)$倍，但查询复杂度对d仍呈指数级。他还指出，对 [87] 关于布尔秩的分析稍作调整，即可将查询复杂度改进为 $\tilde{\Theta}\left(d^4/\epsilon^4\right)$。

[70] 和 [87] 的非自适应算法是以下简单算法的一种变体，区别在于秩函数的设置以及算法中参数s 的取值不同。

Test rank 算法(M,d,s)

1. 均匀、独立地随机选取s 个(i,j) 元素，它们来自M。
2. 令S 为由这些元素诱导出的$s \times s$ 子矩阵，它来自M 。
3. 如果S 的秩至多为d ，则接受；否则拒绝。

这个简单的算法与许多性质测试算法的思路相似。也就是说，该算法对受测对象进行采样，并检查这些样本所诱导的子对象是否具有所需性质；如果具有，就接受。对于遗传的性质，该算法总是接受具有该性质的对象；挑战在于证明，对于每个与具有该性质相差 ϵ 远的对象，该算法以至少 2/3 的概率拒绝。通常可以证明，如果某对象与具有该性质相差 ϵ 远，那么它就有许多缺陷，因此，样本所定义的子对象以足够高的概率会包含这样的缺陷，算法也就能发现它。为证明这一点，可以证明其逆否命题。也就是说，如果缺陷的数量被某个依赖于对象大小和 ϵ 的函数所限制，那么就可以至多修改对象中占 ϵ 比例的位置，因此，该对象并不像所声称的那样与具有该性质相差 ϵ 远。

[70] 和 [87] 中的分析以一种略有不同的方式考察了在算法“测试秩”中选择子矩阵S的概率过程，这种方式在许多性质测试算法中都很常见。该算法被视为以迭代方式选择样本。具体而言，算法从一个空子矩阵开始，在每次迭代中向当前子矩阵添加M的一个随机选取的行和列，直到最终得到一个大小为$s \times s$的子矩阵S 。随后可以证明，以至少2/3的概率，如果M 与秩d相差 ϵ，则最终子矩阵S 的秩严格大于d，因此算法拒绝。

具体而言，这两个结果都表明，如果M 与秩d 相差 ϵ，那么在每次迭代中，以足够高的概率向M 添加一行和一列，从而取得一定进展。Krauthgamer和Sasson [70]利用实数秩的线性性，并证明只要当前子矩阵的实数秩小于d，算法就有足够高的概率向子矩阵添加一行和/或一列，使其秩至少增加1，因此经过$s = O(d/\epsilon)$次迭代，算法即可拒绝。Parnas、Ron和Shraibman [87] 证明，以足够高的概率，子矩阵中不同的行和/或列的数量在每次迭代中增加1，因此经过$s = O(2^d/\epsilon)$ 次迭代后，算法即拒绝，因为二元秩为d 的矩阵至多有 2^d 个不同的行，且至多有 2^d 个不同的列（见第5.5节）。

接下来，我们将说明 [70] 和 [87] 如何定义行、列和元素，以及它们为何对算法有用 ： 将它们添加到子矩阵中，便能实现上述所述的预期进展。以下定义和证明的示意图见图12。

定义61 ([70])。 如果将矩阵 M 中的一行（列）加入 S 后，S 的实数秩增加，则该行（列）对 S 是有用的。如果行 i 和列 j 均不在 S 中，则矩阵元素 $M_{i,j}$ 是 S 的角元素。角元素 $M_{i,j}$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \mathbf{7} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

图12：左侧是一个实数秩为4的矩阵A。由A的前三行和前三列构成的主子矩阵S_A的实数秩为3。A的最后一行和最后一列对S_A都没有用处。但是$A_{4,4}$是S_A的一个有用角元素，因为将最后一行和最后一列都加入S_A后，A的秩会增加。然而，如果将$A_{4,4}$修改为6，则修改后的矩阵的实数秩为3。

右侧是一个二元秩为4的矩阵B。所有行和列各不相同。由B的前3行和前3列定义的主子矩阵S_B的二元秩为3。B的最后一行与S_B的第一行相同，且B的最后一列与S_B的第一列相同。矩阵元素$B_{4,4}$是S_B的一个有用角元素，因为$B_{4,4} \neq B_{1,1}$。如果将$B_{4,4}$修改为等于$B_{1,1} = 1$，那么修改后的矩阵的二元秩为3。

如果第i行和第j列对S不具备有用性，但将第i行和第j列同时加入S会提高其实数秩，那么对S有用。

引理 62 ([70])。设M是一个大小为$n \times m$的0,1矩阵，S是M的一个子矩阵，且秩$_{\mathbb{R}}(S) \leq d$。假设以下三个条件成立：

1. M中至多有$\epsilon \cdot n/3$行对S有用。*2.* M中至多有$\epsilon \cdot m/3$列对S有用。*3.* M中至多有$\epsilon \cdot n \cdot m/3$个角元素对$S$有用。

那么，M与实数秩至多为d的矩阵相差ϵ。

证明： 我们证明，如果引理中的三个条件全部成立，那么至多修改$n\epsilon \cdot m$个M中的元素，就可以使所得的修改后的矩阵M'的实数秩至多为d。

首先，将所有对S有用的行和列修改为零。接下来，考虑一个对S有用的角元素$M_{i,j}$。根据定义，第i列并无用处，因此，当用第j列扩展S时，S的行之间的任何线性相关关系都会得到保留（见引理35）。此外，第i行也无用，因此它是S中各行的某个线性组合。因此，我们只需修改$M_{i,j}$这一元素，使得当用i和j同时扩展S时，其秩不会增加。

因此，修改的元素总数至多为$\epsilon \cdot n \cdot m$。对于S而言，任何无用的行或列都没有被修改，因此它们是S的行或列的某种线性组合；其余行和列都经过修改，使其成为S的行的某种线性组合。由于实数秩满足增广性质（见第6.1节），用所有这些行和列增广S不会改变其秩，因此，秩$_{\mathbb{R}}(M')$ =秩$_{\mathbb{R}}(S) \leq d$。

■

引理 62 的证明依赖于引理 35，以及实数秩所满足的增广性质；但布尔秩和二元秩一般不满足该性质（见第 6.1 节）。因此， [87] 针对二元秩的算法采用以下定义来界定有用的行、列和角元素。

定义 63([87])。 **</style}如果矩阵 M 的某一行（列）与 S 中的所有行（列）都不同，则称该行为（列）对 S 有用。若存在 S 中的一行 k 和一列 ，分别与第 i 行和第 j 列相同，且 M,**$_{j} \neq M_{k,\ell}$，则称角元素 $M_{i,j}$ 对 S 有用。

引理 64 ([87])。 设 M 是一个大小为 $n \times m$ 的 *0-1* 矩阵，S 是 M 的一个子矩阵，且秩$_{\text{bin}}(S) \leq d$。假设引理 *62* 中提到的三个条件成立，其中有用的行、列和角元素的定义如定义 *63* 所述。则 M 与二进制秩至多为 d 的矩阵相差至多 ϵ 个元素。

证明： 我们证明，若三个条件均成立，则可以至多修改 $\epsilon \cdot n \cdot m$ 个M 中的元素，使得到的矩阵 M' 的二元秩至多为d。

首先，将M 中对S有用的所有行和列都改为零。接下来，考虑一个有用的角元素$M_{i,j}$。根据定义，存在S中的一行k 和一列 ℓ，使得第k 行与第i行相同， ℓ 列与第j列相同，并且$M_{i,j} \neq M_{k,\ell}$。令$M'_{i,j} = M_{k,\ell}$。

因此，我们至多修改了 $\epsilon \cdot n \cdot m$ 个元素；所有未修改的行和列对于S都没有用处，因此与S中的某一行或某一列相同。现在可以证明，将S 划分为至多d 个单色矩形，会诱导出对修改后的矩阵 M' 的一种划分，其中至多有d 个矩形。感兴趣的读者可参阅 [87] 中的完整证明。

■

利用引理 62 和引理 64，可以证明：如果M 与实数秩或二元秩小于d的矩阵相距 ϵ-far，那么算法在<style>每次迭代中都有足够高的概率向当前子矩阵添加一个有用的行、列或角元素，从而如前所述取得进展。也就是说，具体取决于所讨论的秩，实数秩会增加，或者不同的行和/或列的数量会增加。由此得到以下两个定理。

定理 65([70])。 算法*“Test rank”*是一个用于测试实数秩的非自适应测试算法，适用于 $s = O(d/\epsilon)$；其查询复杂度为 $O(d^2/\epsilon^2)$。

定理 66 ([87])。 算法*“Test rank”*是一种针对二元秩的非自适应测试算法，适用于 $s = O(2^d/\epsilon)$，其查询复杂度为 $O(2^{2d}/\epsilon^2)$。

Bshouty [17] 利用引理25给出了一个查询复杂度更低的二元秩自适应算法。引理25为二元秩为d的 0-1 矩阵的不同的行数与列数之积提供了更紧的上界$(d+1)2^d$。其算法的基本思路是维护一个不一定是方阵的子矩阵，而 [70]和 [87], 的算法则是如此；此外，该算法还确保这个子矩阵只包含不同的行和列。

我们通过指出引理 39（见第 6.2 节）中的一个例子来结束本小节：该例给出了一个矩阵M，其二元秩大于d，但M 的每个子矩阵的二元秩都至多为d。这意味着，任何仅通过抽样一个小型d 阶子矩阵来检测二元秩是否至多为d 的算法，

都会接受M。不过，这并不意味着不存在高效的二元秩测试算法，因为该矩阵M接近于二元秩至多为d，也就是说，只需修改M中一小部分元素，就能使其秩至多为d。因此，在这种情况下，根据定义，测试算法可以接受M。

问题在于，是否存在小型证据，可以在一个与二元秩为d的矩阵相差 ϵ-远时高效地从中抽样。当然，二元秩可能不存在高效算法，也就是说，不存在查询复杂度至多为d 和 ϵ 的多项式函数的算法。因此，尝试找出二元秩测试查询复杂度的下界是很有意义的。关于性质测试领域以往用于证明下界的方法，参见 [35]。

7.4 布尔矩阵分解

尽管计算布尔秩和二元秩是*NP</style}*-难的，但许多应用都需要将一个*0-1*矩阵M近似分解为低秩 0-1矩阵的乘积。这个问题称为布尔矩阵分解问题，有时也记作 BMF。此处仅简要介绍这一主题，因为它超出了本综述的范围。对于 BMF 问题中各种已知应用和算法的介绍，感兴趣的读者可参阅 Miettinen 和 Neuman 的综述 [81]。

形式化地说，给定一个大小为 M $n \times m$ 的 0-1矩阵，以及一个整数参数 k，目标是寻找 0-1矩阵 A 和 B，其中 A 的大小为 $n \times k$，B 的大小为 $k \times m$，使得乘积 $A \cdot B$ 尽可能逼近 M。需要注意的是，参数 k 不必是矩阵 M 的秩。通常，目标是最小化如下定义的弗罗贝尼乌斯范数

$$\|M - A \cdot B\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |M_{i,j} - (A \cdot B)_{i,j}|^2$$

其中，范数定义中的求和是在实数上进行的。至于乘积 $A \cdot B$，文献中研究了若干变体，而这些变体会影响所得近似算法的复杂度。目前研究的主要变体包括：使用布尔运算（即 $1+1=1$）计算 $A \cdot B$，或在整数上计算（即 $1+1=2$），以及在某些情况下在二元域 $GF(2)$ 上计算（即 $1+1=0$）。

Kumar、Panigrahy、Rahimi 和 Woodruff [71] 为 BMF 问题提出了一种常数因子近似算法，该算法在整数上进行运算，运行时间为 $2^{O(k^2 \log k)} poly(m \cdot n)$。Velingker、V¨otsch、Woodruff 和 Zhou [111] 在 2023年给出了该问题在整数上运算时的一个$(1+\epsilon)$近似算法，其运行时间为 $2^{\tilde{O}(k^2/\epsilon^4)} poly(n、m)$，适用于任意 $\epsilon > 0$。这两项结果都使用 Frobenius 范数，两篇论文也都给出了在$GF(2)$上进行运算时的算法。当然，除非参数k 非常小，否则这些算法并不实用。另一方面，还有其他更实用的算法，但这些算法没有理论上的运行时间保证。这类算法基于组合优化，采用各种启发式方法和迭代更新方法来克服问题的难点（见 [81]）。

8 结论与后续研究方向

本综述从数学和计算两个角度，全面概述了有关二元秩和布尔秩的已知结果，并特别着重讨论它们与实数秩之间的关系。多年来，数学界在代数、组合学和图论等领域，以及计算机科学界（主要是在通信复杂度的背景下，也包括从算法视角出发）都对这些秩函数进行了研究。它们的广泛适用性推动了各种工具、技术和算法的发展，人们对这些秩函数的理解也取得了显著进展，不过仍有许多未解决问题。

综述中呈现的数学、计算和算法结果共同勾勒了该领域当前的理论认知，并指出了进一步研究的方向。我们总结了综述中提出的主要未解决问题，并探讨了后续研究方向。前两个未解决问题与第 6 节讨论的这些秩函数的数学性质有关，具体而言，它们涉及二元秩。

未解决问题 1。 找出一个大小为 $n \times n$、二元秩为 $d < n$ 的0,1 矩阵 M，使得每个 $d \times d$ 子矩阵的二元秩都显著更小。

未解决问题 2。 是否存在0,1 矩阵 A, B，使得秩$_{\text{bin}}(A \otimes B) < $ 秩$_{\text{bin}}(A) \cdot $ 秩$_{\text{bin}}(B)$?

另一个讨论的问题是，对于各种矩阵族，实数秩、二元秩和布尔秩之间可能存在的最大间距。我们看到，布尔秩可以比实数秩和二元秩小几个数量级，而这就是可能达到的最大间距。另一方面，我们也看到了一个矩阵族的例子，其实数秩至多为d ，而布尔秩和二元秩至少为$d^{\Omega(\log d)}$。这是最优间距吗？还是存在一个矩阵族，使实数秩与二元秩之间的间距更大?

未解决问题 3。 是否存在一族 0,1 矩阵，使实秩与二元秩之间的差距更大?

本综述介绍的部分结果运用了强大的提升技术来比较矩阵及其补矩阵的秩，并借助这一技术证明了一个几乎最优的差距。是否存在更简单的组合或代数证明来证明这些结果，从而揭示能够达到这一差距的矩阵的结构?

未解决问题 4。 为定理 *50* 和定理 *52* 给出其他组合或代数证明 .

最后，由于布尔秩和二元秩还有许多应用，我们提出以下算法方面的未解决问题。

未解决问题 5。 寻找更好的二元秩和布尔秩近似算法，或许可以针对特定的矩阵族，正如第*7.2*节所讨论的那样。

开放问题 6。 为二元秩寻找一种性质测试算法，使其查询复杂度关于秩 d 和误差参数 ϵ 呈多项式级；或者证明不存在这样的算法。

最后，我们再次指出，尽管本综述聚焦于实秩、二元秩和布尔秩，但研究其他秩函数与本文综述的这些函数之间的关系也很有趣；此外，也可以运用本文介绍的结果和技术来研究其他秩函数。例如，引言中提到的非负秩 $\mathrm{rank}_+(M)$也是一个重要的秩函数，已得到广泛研究。

与布尔秩和二元秩一样，非负秩也是*NP*难问题（见 Vavasis [110] 和 Shitov [104]）。根据定义，它与二元秩和实数秩的关系如下：

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(M) \leq \mathrm{rank}_+(M) \leq \mathrm{rank}_{\mathrm{bin}}(M).$$

Watson [113] 证明，当非负秩和二元秩不超过 3 时，两者相等；并给出了一个尺寸为 5×6 的矩阵M，使得秩$_+(M) = 4$ 且秩$_{\mathrm{bin}}(M) = 5$。当实数秩不超过 2 时，非负秩总是等于实数秩。Shitov [103] 证明，若M 是一个尺寸为$n \times n$、$n > 6$且秩$_{\mathbb{R}}(M) = 3$的非负矩阵，则秩$_+(M) \leq 6n/7$；他还证明，对于$n = 3$、4、5、6，存在尺寸为$n \times n$、实数秩为 3 且非负秩为n的非负矩阵。

与二元秩和布尔秩一样，非负秩不具有满秩子矩阵性质（见第 6.2 节、定理 41），并且也在通信复杂性背景下得到了广泛研究（例如参见 [115, 69, 29]）。

从算法角度来看，非负矩阵分解问题（NMF）是一个重要的实际问题，正如第 7.4 节提到的布尔矩阵分解问题（BMF）一样，并且在这一背景下得到了广泛研究。参见 Wang 和 Zhang 的综述 [112]以及 Gillis 的著作 [34]。

总之，这些结果与本综述中介绍的结果共同展示了不同秩函数之间联系的深度、数学和计算机科学中所采用的各种技术，当然也展示了许多尚未解决的开放问题。进一步探索这些联系以及秩函数之间的关系，仍然是未来研究中一个丰富且富有挑战性的方向；正如我们在本综述中所见，这有望为数学和理论计算机科学的各个领域带来新的洞见。

致谢

我想感谢 Ishay Haviv 告诉我第 7.2 节中介绍的二元秩近似算法，并感谢 Dana Ron 对第 7.3 节的宝贵意见；该节介绍了性质测试。

部分图的 LaTeX 代码是在 ChatGpt 的协助下编写的，随后我在需要时对代码进行了修正。

参考文献

[1] Alfred Vaho、Jeffrey D Ullman 和 Mihalis Yannakakis。论超大规模集成电路中的信息传输概念。载于第十五届 *ACM* 计算理论年度研讨会论文集，第 133–139 页，1983 年。

[2] Noga Alon。用最少数量的等价关系覆盖图。《组合学》，6(3):201–206，1986 年。[3] Noga Alon、Troy Lee、Adi Shraibman 和 Santosh Vempala。矩阵的近似秩及其算法应用：近似秩。载于第四十五届 *ACM* 计算理论年度研讨会论文集，第 675–684 页，2013 年。[4] Noga Alon 和 Joel H Spencer。概率方法。John Wiley & Sons，2016 年。[5] Kazuyuki Amano。通过新的团分解，改进通信复杂度的若干界。《离散应用数学》，166:249–254，2014 年。[6] J Amilhastre、M.C Vilarem 和 P Janssen。无多米诺骨牌二部图的最小二部团覆盖与最小二部团分解的复杂性。《离散应用数学》，86(2):125–144，1998。[7] Maria-Florina Balcan、Yi Li、David P. Woodruff 和 Hongyang Zhang。最优地测试矩阵秩。载于第 *13* 届 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会（*SODA*）年会论文集，第 727–746 页，2019 年。[8] Kaspars Balodis、Shalev Ben-David、Mika G¨o ¨os、Siddhartha Jain 和 Robin Kothari。无歧义析取范式与 Alon-Saks-Seymour。载于*IEEE* 第 *62* 届计算机科学基础年度研讨会（*FOCS'21*），第 116–124 页。IEEE，2021 年。[9] Ravindra B Bapat。图与矩阵。Springer，2010年。[10] LeRoy B. Beasley。隔离数与布尔秩。《线性代数及其应用》，436(9):3469–3474，2012年。[11] LeRoy B. Beasley。隔离数与布尔秩。《线性代数及其应用》，436(9):3469–3474，2012年。[12] Avrim Blum。图着色的新近似算法。《*ACM* 杂志》（*JACM*），41(3):470–516，1994年。[13] Nicolas Bousquet、Aur´elie Lagoutte 和 St´ephan Thomass´e。团与独立集。《欧洲组合学杂志》，40:73–92，2014 年。[14] Elizabeth D Boyer。路径补图的秩与二部团划分。《图论杂志》，27(3):111–122，1998。[15] Richard A. Brualdi 和 Geir Dahl。一个 (0,±1)-矩阵的 ±-秩。《线性代数及其应用》，730:318–343，2026 年。[16] Richard A. Brualdi、Rachel Manber 和 Jeffrey A. Ross。论由 0 和 1 构成的矩阵正则类的最小秩。《组合理论杂志》*A* 辑，41(1):32–49，1986 年。[17] Nader H Bshouty。论二元秩的性质测试。载于第 *48* 届国际数学基础年会（*MFCS 2023*）。Schloss Dagstuhl-Leibniz- Zentrum f¨ur Informatik，2023年。

[18] Parinya Chalermsook、Sandy Heydrich、Eugenia Holm 和 Andreas Karrenbauer。最小二部团覆盖与划分的近似性结果几乎达到紧界。载于欧洲算法研讨会，第235–246页。Springer，2014年。[19] Sunil Chandran、Davis Issac 和 Andreas Karrenbauer。关于二部团覆盖与划分的参数化复杂性。载于第*11*届参数化与精确计算国际研讨会（*IPEC 2016*）。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik，2017年。[20] Sebastian M. Cioabˇă 和 Michael Tait。关于 Alon-Saks-Seymour 猜想和秩着色猜想的更多反例。电子组合学杂志，18(1)，2011年。[21] Joel E. Cohen 和 Uriel G. Rothblum。非负矩阵上的非负秩、分解与因子分解。《线性代数及其应用》，190:149–168，1993年。[22] Leo Corry。代数史。大英百科全书，2005年。[23] D de Caen、David Gregory、Teresa Henson、Richard Lundgren 和 Maybee John。实数秩作为非负整数秩的界。《组合数学与组合计算杂志》，011:47–53，1992年。[24] D. de Caen、David A. Gregory 和 Norman J. Pullman。零一矩阵的布尔秩。第*3*届加勒比组合学与计算会议论文集，第169—-173页，1981年。[25] D de Caen、David A Gregory 和 Norman J Pullman。零一矩阵的布尔秩II。载于第五届加勒比组合学与计算会议论文集，第120–126页，1988年。[26] Martin Dietzfelbinger、Juraj Hromkoviˇc 和 Georg Schnitger。通信复杂度的两种下界方法比较。理论计算机科学，168(1):39–51，1996。[27] Rod G Downey 和 Michael R Fellows。固定参数可处理性与完备性I：基本结果。《*SIAM*计算杂志》，24(4):873–921，1995年。[28] Zeev Dvir、Sivakanth Gopi、Yuzhou Gu 和 Avi Wigderson。生成拟阵——张成结构的抽象及局部可纠错码的障碍。《*SIAM*计算杂志》，49(3):465–496，2020年。[29] Yuri Faenza、Samuel Fiorini、Roland Grappe 和 Hans Raj Tiwary。扩展表述、非负因子分解与随机通信协议。数学规划，153(1):75–94，2015。[30] Tom´as Feder、Eyal Kushilevitz、Moni Naor 和 Noam Nisan。摊销通信复杂度。《*SIAM*计算杂志》，24(4):736–750，1995年。初步版本见 FOCS’91。[31] Herbert Fleischner、Egbert Mujuni、Dani¨el Paulusma 和 Stefan Szeider。用少量完全二部子图覆盖图。理论计算机科学，410(21-23):2045–2053，2009年。

[32] Mirjam Friesen、Aya Hamed、Troy Lee 和 Dirk Oliver Theis。欺骗集与秩。欧洲组合学杂志，48:143–153，2015。[33]Serge Gaspers、Tao Zixu He 和 Simon Mackenzie。通过松弛交错证明通信复杂度的 NP难度和基于 ETH 的不可近似性。*arXiv*预印本 *arXiv:2508.05597*，2025年。[34] Nicolas Gillis。非负矩阵分解。工业与应用数学学会，2020年。[35] Oded Goldreich。性质测试导论。剑桥大学出版社，2017年。[36] Oded Goldreich、Shari Goldwasser 和 Dana Ron。性质测试及其与学习和近似的联系。*ACM* 杂志，45(4):653–750，1998。[37] Mika G ¨o¨os。团与独立集的下界。载于*IEEE*第*56*届计算机科学基础年度研讨会（*FOCS'15*），第1066–1076页，2015。[38] Mika G¨o ¨os、Toniann Pitassi 和 Thomas Watson。确定性通信与划分数之比较。载于第*56*届计算机科学基础年度研讨会论文集（*FOCS*），第1077–1088页。IEEE，2015。[39] Mika Goos、Toniann Pitassi 和 Thomas Watson。确定性通信与划分数之比较。《*SIAM*计算杂志》，47(6):2435–2450，2018年。[40] Michael Grady 和 Morris Newman。交换的几何：极小矩阵与循环矩阵。《线性代数及其应用》，262:11–25，1997年。[41] Ronald L. Graham 和 Henry O. Pollak。关于环路交换的寻址问题。贝尔系统技术杂志，50(8):2495–2519，1971年。[42] D Gregory。有向圈补图的二部团划分。《组合数学与组合计算杂志》，6:183–187，1989年。[43] David A. Gregory 和 Norman J. Pullman。半环秩：布尔秩与非负秩分解。《组合学、信息与系统科学杂志》，8(3):223–233，1983年。[44] David A. Gregory、Norman J. Pullman、Kathryn F. Jones 和 J. Richard Lundgren。正则二部图的二部团覆盖与正则矩阵的最小半环秩。《组合理论杂志*B*辑》，51(1):73–89，1991年。[45] Krystal Guo、Tony Huynh 和 Marco Macchia。网格的双团覆盖数。*arXiv*预印本 *arXiv:1811.03396*，2018年。[46] Willem H Haemers。关于 Lov´ász 有关图的香农容量的若干问题。《*IEEE*信息论汇刊》，25:231–232，1979年。[47] Magn ´us M Halld´orsson。关于近似图着色的更优性能保证。《信息处理快报》，45(1):19–23，1993年。

[48] Lianna Hambardzumyan、Shachar Lovett 和 Morgan Shirley。对数秩猜想：新的等价表述。*arXiv* 预印本 *arXiv:2510.02583*，2025年。[49] Ishay Haviv。二元秩的近似。个人通信，2025年。[50] Ishay Haviv 和 Michal Parnas。正则矩阵的二元秩与布尔秩。载于第*47*届计算机科学数学基础国际研讨会，*MFCS 2022*，*2022*年*8*月*22*日至*26*日，维也纳，奥地利，*LIPIcs*第241卷，第56:1–56:14页，2022年。[51] Ishay Haviv 和 Michal Parnas。克罗内克积的布尔秩上界。《离散应用数学》，2022年。[52] Ishay Haviv 和 Michal Parnas。循环分块矩阵的二元秩。《线性代数及其应用》，656:277–303，2023年。[53] Ishay Haviv 和 Michal Parnas。正则矩阵的二元秩与布尔秩。《计算机与系统科学杂志》，134:73–86，2023年。[54] Kim A. S. Hefner、Teresa D. Henson、J. Richard Lundgren 和 John S. Maybee。二部图和有向图的二部团覆盖，以及 $\{0,1\}$-矩阵的最小半环秩。《数值组合论》，71:115–122，1990年。[55] Shuichi Hirahara、Rahul Ilango 和 Bruno Loff。常数轮通信复杂度的困难性。载于第*36*届计算复杂性会议（*CCC*），2021年。[56] Shuichi Hirahara、Rahul Ilango 和 Bruno Loff。通信复杂度是NP难的。*arXiv* 预印本 *arXiv:2507.10426*，2025年。[57] Pavel Hrubeˇs。非负秩和通信复杂度的困难子矩阵。计算复杂性，34(2):9，2025年。[58] Pavel Hrubeˇs。非负秩的困难子矩阵与通信复杂度。载于第*39*届计算复杂性会议（*CCC*），莱布尼茨国际信息学会议论文集（*LIPIcs*）第300卷，第13:1–13:12页，德国达格施图尔，2024年。[59] Hao Huang 和 Benny Sudakov。Alon-Saks-Seymour 猜想的一个反例及相关问题。*Combinatorica*，32(2):205–219，2012年。[60] Aubrey W Ingleton。循环矩阵的秩。《伦敦数学会杂志》，1(4):445–460，1956年。[61] Tao Jiang 和 Bala Ravikumar。最小NFA问题很难。《*SIAM*计算杂志》，22(6):1117–1141，1993年。[62] David S Johnson。组合问题的近似算法。载于第五届*ACM*计算理论研讨会论文集，第38–49页，1973年。[63] Stasys Jukna。图的集合交表示。《图论杂志》，61(1):55–75，2009年。

[64] S tasys Jukna. Bounds on the or-rank of kronecker products. *P*人设 *l websit* 2022 *e*, .[65] Stasys Jukna 等。《布尔函数复杂度：进展与前沿》，第 27 卷。Springer，2012年。[66] Stasys Jukna 和 Alexander S Kulikov。关于用完全二部子图覆盖图。离散数学，309(10):3399–3403，2009年。[67] Mauricio Karchmer、Eyal Kushilevitz 和 Noam Nisan。分数覆盖与通信复杂度。*SIAM* 离散数学杂志，8(1):76–92，1995年。[68] Richard M. Karp。《组合问题的可约性》，第 85–103 页。Springer US，美国马萨诸塞州波士顿，1972年。[69] Gillat Kol、Shay Moran、Amir Shpilka 和 Amir Yehudayoff。近似非负秩等价于平滑矩形界。载于自动机、语言与编程国际研讨会，第 701–712 页。Springer，2014年。[70] Robert Krauthgamer 和 Ori Sasson。数据维数的性质测试。载于第 *14* 届 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会论文集（*SODA*），第 18–27 页。工业与应用数学学会，2003年。[71] Ravi Kumar、Rina Panigrahy、Ali Rahimi 和 David Woodruff。二元矩阵分解的更快算法。载于国际机器学习会议，第 3551–3559 页，2019年。[72] E. Kushilevitz 和 N. Nisan。《通信复杂度》。剑桥大学出版社，1997年。[73] Eyal Kushilevitz 和 Enav Weinreb。论通信复杂度的复杂度。载于第 *41* 届 *ACM*计算理论研讨会论文集，第 465–474 页，2009年。[74] Troy Lee 和 Adi Shraibman。关于对数秩猜想。以色列数学杂志，256(2):441–477，2023年。[75] Yi Li、Zhengyu Wang 和 David P. Woodruff。低秩矩阵的改进测试。载于第 *20* 届 *ACM SIGKDD* 知识发现与数据挖掘国际会议论文集（*KDD*），第 691–700 页，2014年。[76]L´aszl´o Lov´asz 和 Michael E. Saks。格、M ¨obius 函数与通信复杂度。载于*IEEE* 第 *29* 届计算机科学基础年度研讨会（*FOCS*），第 81–90 页，1988年。[77] Shachar Lovett。通信复杂度中对数秩猜想的最新进展。*EATCS* 通报，112，2014年。[78] Shachar Lovett。通信复杂度由秩的平方根控制。*ACM* 杂志，63(1):1，2016年。

[79] Kurt Mehlhorn 和 Erik M. Schmidt。拉斯维加斯算法在超大规模集成电路和分布式计算中优于确定性算法。载于第 *14* 届 *ACM*计算理论研讨会论文集（*STOC*），第 330–337 页。ACM，1982年。[80] Pauli Miettinen。稀疏布尔矩阵分解。载于*2010*年 *IEEE*国际数据挖掘会议，第 935–940 页。IEEE，2010年。[81] Pauli Miettinen 和 Stefan Neumann。布尔矩阵分解的最新进展。载于第二十九届国际人工智能联合会议论文集，第 4922–4928 页，2021年。[82] Ankur Moitra。计算非负秩的近乎最优算法。《*SIAM*计算杂志》，45(1):156–173，2016年。[83] Sylvia D. Monson、Norman J. Pullman 和 Rolf Rees。关于团覆盖、二部团覆盖及(0, 1)矩阵因子分解的综述。组合应用研究所通报，14:17–86，1995年。[84] Igor Nor、Danny Hermelin、Sylvain Charlat、Jan Engelstadter、Max Reuter、Olivier Duron 和 Marie-France Sagot。Mod/resc简约性推断：理论与应用。信息与计算，213:23–32，2012年。[85] James Orlin。图论中的满足性：用团覆盖图。数学研究，80(5):406–424，1977年。[86] A Orlitsky 和 A El Gamal。通信复杂度。载于信息论中的复杂度，第 16–61 页。Springer，1988年。[87] Michal Parnas、Dana Ron 和 Adi Shraibman。布尔秩和二元秩的性质测试。计算系统理论，65(8):1193–1210，2021年。[88] Michal Parnas 和 Adi Shraibman。二元矩阵关于二元秩和布尔秩的增广性质。《线性代数及其应用》，556:70–99，2018年。[89] Michal Parnas 和 Adi Shraibman。对实数秩较小的矩阵的二元秩和布尔秩的研究。载于国际计算理论基础研讨会，第 362–375 页。Springer，2025年。[90] GW Peck。Graham 和 Pollak 定理的新证明。离散数学，49(3):327–328，1984年。[91] Norman J. Pullman。具有常数行和的二元矩阵的秩。线性代数及其应用，104:193–197，1988年。[92] Anup Rao 和 Amir Yehudayoff。《通信复杂度：及其应用》。剑桥大学出版社，2020年。[93] Ran Raz 和 Pierre McKenzie。单调NC层级的分离。*Combinatorica*，19(3):403–435，1999年。预备版本发表于 FOCS’97。

[94] Alexander A. Razborov. 图的色数与其邻接矩阵的秩之间的差距是超线性的。《离散数学》，108(1–3):393–396，1992年。[95] Alexander A Razborov and Alexander A Sherstov. ac ˆ0 的符号秩。《*SIAM*计算杂志》，39(5):1833–1855，2010年。[96] Ronitt Rubinfeld and Madhu Sudan. 多项式的鲁棒刻画及其在程序测试中的应用。《*SIAM*计算杂志》，25(2):252–271，1996。[97] HJ Ryser. 矩阵的项秩。《加拿大数学杂志》，10:57–65，1958年。[98] Kathrin Schacke. 关于克罗内克积。滑铁卢大学硕士论文，2004年。[99] Ji˘r´ı Sgall. 具有受限交集的集合对的界。*Combinatorica*，19(4):555–566，1999年。[100] Manami Shigeta and Kazuyuki Amano. 有序完全二部图划分与通信复杂度问题。《离散应用数学》，184:248–252，2015。[101] Manami Shigeta and Kazuyuki Amano. 有序完全二部图划分与通信复杂度问题。《离散应用数学》，184:248–252，2015。[102] Yaroslav Shitov. 关于布尔矩阵秩的复杂度。《线性代数及其应用》，439(8):2500–2502，2013年。[103] Yaroslav Shitov. 非负秩的一个上界。《组合理论杂志*A*辑》，122:126–132，2014年。[104] Yaroslav Shitov. 矩阵的非负秩：难题与易解法。《*SIAM*评论》，59(4):794–800，2017年。[105] Emanuel Sperner. 关于有限集合的子集的一个定理。《数学杂志》，27(1):544–548，1928年。[106] Larry J Stockmeyer. 集合基问题是*NP*完全的。IBM Thomas J. Watson Research Division，1975年。[107] Benny Sudakov and Istv´an Tomon. 矩阵差异与对数秩猜想。*arXiv*预印本 *arXiv:2311.18524*，2023年。[108] Dirk Oliver Theis. 关于覆盖二分图所需二部团数量的若干下界。*arXiv*预印本 *arXiv:0708.1174*，2007年。[109] Helge A. Tverberg. 关于将 kn 分解为完全二分图。《图论杂志》，6:493–494，1982年。[110] Stephen A Vavasis. 关于非负矩阵分解的复杂度。《*SIAM*优化杂志》，20(3):1364–1377，2010年。

[111] Ameya Velingker, Maximilian V¨otsch, David Woodruff, and Samson Zhou. 用于二元矩阵分解的快速$(1+\varepsilon)$近似算法。载于国际机器学习会议，第34952–34977页。PMLR，2023年。[112] Yu-Xiong Wang and Yu-Jin Zhang. 非负矩阵分解：全面综述。*IEEE*知识与数据工程汇刊，25(6):1336–1353，2012年。[113] Thomas Watson. 非负秩与二元秩。《芝加哥理论计算机科学杂志》，2:1–13，2016年。[114] Valerie L Watts. 克罗内克积的布尔秩。《线性代数及其应用》，336(1-3):261–264，2001年。[115] Mihalis Yannakakis. 用线性规划表示组合优化问题。《计算机与系统科学杂志》，43(3):441–466，1991年。初步版本发表于 STOC'88。[116] Andrew Chi-Chih Yao. 与分布式计算相关的一些复杂性问题。载于第*11*届*ACM*计算理论年度研讨会论文集（*STOC'79*），第209–213页，1979年。[117] David Zuckerman. 线性度提取器以及最大团和色数的不可近似性。《计算理论》，3:103–128，2007年。