arXiv:2601.13920v1 [cs.GT] 20 Jan 2026

采用变分不等式的生成对抗网络训练非对称正则化机制

Spyridon C. Giagtzoglou Mark H.M. Winands Barbara Franci

摘要——**我们将生成对抗网络（生成对抗网络）的训练表述为一个纳什均衡求解问题。为稳定训练过程并找到纳什均衡，我们提出了一种基于经典吉洪诺夫步和新型零中心梯度惩罚的非对称正则化机制。在光滑性以及由高斯–牛顿格拉姆矩阵诱导的局部可辨识性条件下，我们得到了正则化算子的显式 Lipschitz 常数和（强）单调性常数。这些常数确保了单次调用基于过去信息外推（EFTP）方法的末次迭代线性收敛。在一个学术示例上的实证模拟表明，即使无法实现强单调性，非对称正则化也足以收敛至均衡并稳定轨迹。**

I. 引言

生成对抗网络（GANs）是一种机器学习模型，由两个神经网络组成：判别器和生成器 [1]。该模型旨在通过与判别器进行“博弈”，训练生成器生成逼真的数据（图像、音频）。具体而言，这两个神经网络的训练过程构成一个双人零和博弈，天然可以建模为鞍点问题。鞍点问题在文献中已有广泛研究 [2], [3]，并应用于共识问题、资源分配，或更一般的原始—对偶问题 [4], [5]。然而，生成对抗网络也暴露出一些不稳定性，例如模式崩溃，这可以视为“最佳响应”病态现象。此外，训练动态往往具有旋转性且条件不良，而现有的解决方案基本上都是通过改变博弈的收益来使学习过程更加平稳 [6], [7]。

我们转而依赖变分不等式（VI）和单调算子理论，来确立相关算子的性质，并推导出具有收敛保证的投影算法。我们采用变分不等式的视角，因为它揭示了与生成对抗网络博弈及其几何结构相关的鞍点算子，使我们能够通过投影以系统的方式处理约束，并直接关联到多种方法的收敛保证。由于变分不等式的表述凸显了对抗训练中的旋转动力学，因此需要稳定化策略来确保训练可靠。为此，我们引入一种正则化机制，仅应用于判别器一侧，也就是说，在鞍点块之间采用非对称方式。这种仅作用于判别器的块非对称正则化，在最需要的地方增加曲率，同时保留目标均衡点。它还为正则化算子提供了明确的解析常数，具体而言，是利普希茨连续性常数和强单调性常数，从而使所提出的迭代方法能够获得收敛保证。

在现有文献提出的算法中，我们提出采用基于过去的外推（EFTP） [8] ，因为尽管它包含两个投影步骤，却只需进行一次梯度计算，因此，相比更常见的前向-后向法（FB） [9] 和额外梯度（EG） [10]方案，它在计算上更为便捷。具体而言，我们的贡献可概括如下。

- 我们提出并分析了两种明确的非对称正则化方法，分别基于吉洪诺夫 [11] 正则化和作用于判别器一侧的零中心输入梯度惩罚。该惩罚在均衡处消失，因此既保留了原有的鞍点结构，又改善了条件性。
- 在光滑性和局部高斯–牛顿可识别性条件下，我们推导出正则化算子的显式利普希茨常数和强单调常数，表明我们的正则化能够推断出原始鞍点算子具有更强的单调性。
- 我们提出将 EFTP 用作生成对抗网络的训练算法，并证明其能够收敛到相应博弈的纳什均衡，即使在正则化情形下也如此。

我们通过数值模拟验证了分析结果，展示了所提出的正则化方法在稳定训练过程以及所提算法的收敛性质方面的效果。尽管我们的工作主要以生成对抗网络为应用对象，但我们的结果可以推广到对称正则化，从而恢复例如经典的吉洪诺夫 [11], [12]。因此，只要在非对称情形下保留两方（生成器和判别器）之间的某种区分，也可以将其扩展到 n 人博弈。

A. 符号说明

设 $\mathbb{R}$ 为全体实数的集合， $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧几里得空间。

概率：设 $(X, \mathcal{X}, p_{\mathcal{D}})$ 和 $(Z, \mathcal{Z}, p_Z)$ 为概率空间。 X 和 Z 分别是数据和潜向量的定义域（例如 $X = \mathbb{R}^{d_x}$、 $Z = \mathbb{R}^{d_z}$）。 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Z}$是它们的 σ-代数， $p_{\mathcal{D}}$ 和 p_Z 是概率测度

S. C. Giagtzoglou 获荷兰研究理事会（NWO）M 1 项目资助，项目编号为 OCENW.M.22.433。S. C. Giagtzoglou 和 Mark H.M. Winands 就职于马斯特里赫特大学高级计算科学系，地址：Paul-Henri Spaaklaan 1, 6229 GS Maastricht，荷兰（spyridon.giagtzoglou@maastrichtuniversity.nl; m.winands@maastrichtuniversity.nl）。B. Franci 就职于都灵理工大学数学科学系，地址：Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino，意大利（barbara.franci@polito.it）。

分别定义在 $(X, \mathcal{X})$ 和 $(Z, \mathcal{Z})$ 上。我们用 $x \sim p_{\mathcal{D}}$ 和$z \sim p_Z$ 表示从这些分布中抽取的样本。

矩阵：给定 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，我们分别用 $\lambda_{\min}(A)$ 和$\lambda_{\max}(A)$表示其最小和最大特征值。令 $\mathbb{M}^n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ 为维数为 n的对称矩阵集合。对于 $A \in \mathbb{M}^n$：$A \succeq 0$ 或 $A \in \mathbb{M}^n_+$ 表示 A 是半正定（PSD）的，即对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$，$x^\top Ax \geq 0$；$A \succ 0$ 或 $A \in \mathbb{M}^n_{++}$ 表示 A 是正定（PD）的，即对于所有 $x \neq 0$，$x^\top Ax > 0$。对于向量，$\|\cdot\|_2$ 表示欧几里得范数。对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\|A\|$ 表示由 $\|\cdot\|_2$诱导的谱范数，即 $\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_{\max}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$。如果 $A \in \mathbb{M}$，$\|A\| = \max_i |\lambda_i|$ $A \in \mathbb{M}^n_{++}$ $\|A\| = \lambda_{\max}$ A max ( )；如果，( )。

算子理论：对于非空闭凸集 S，欧几里得投影算子为 $\Pi_S(x) := \arg\min_{y\in S} \|y - x\|_2$。法锥为 $N_S(x) := \{v : \langle v, y - x\rangle \leq 0, \forall y \in S\}$当 $x \in S$ 时，否则为空。若 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，则函数是 μ-强凸（凹）的，当且仅当 $f - \frac{\mu}{2}\|\cdot\|^2$($-f - \frac{\mu}{2}\|\cdot\|^2$),$\mu > 0$ 是凸的。映射 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 具有以下性质：若对所有 $u, v \in S$ 满足 $L > 0$，都有 $\|F(u) - F(v)\| \leq L\|u - v\|$，则其在 S 上是 L-利普希茨连续的；若对所有 $u, v \in S$ 都有 $\langle F(u) - F(v)\ u - v\rangle \geq 0$，则其是单调的；若 $\langle F(u) - F(v)\ u - v\rangle \geq \mu\|u - v\|^2$ with $\mu > 0$，则其是 μ-强单调的。给定 $P \in \mathbb{M}^n_+$，残差为$R_P(\omega) := P^{-1}(\omega - \Pi_S(\omega - P\,F(\omega)))$。

对于映射 $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$，我们用 $JF \in \mathbb{R}^{m\times d}$ 表示雅可比矩阵。对于二阶连续可微函数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，我们用 $\nabla^2_{uu} f \in \mathbb{M}$ 表示海森矩阵，用 $\nabla^2_{xy} f$ 表示混合偏导数。

II. 问题描述

我们将生成对抗网络的训练建模为生成器 $G_\theta : Z \to X$（玩家 G）与判别器 $D_\varphi : X \to \mathbb{R}$（玩家 D）之间的双人零和博弈，二者的参数分别为$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^{d_\theta}$ 和 $\varphi \in \Phi \subset \mathbb{R}^{d_\varphi}$。策略集 Θ 和Φ 体现了架构/正则化约束。我们记$S := \Theta \times \Phi$ 和 $\omega = (\theta, \varphi)$。两位玩家的极小极大优化问题可写为

$$\min_{\theta\in\Theta} \max_{\varphi\in\Phi} \mathcal{L}(\theta, \varphi) := \mathbb{E}_{x\sim p_{\mathcal{D}}}\big[\Psi(D_\varphi(x))\big] + \mathbb{E}_{z\sim p_Z}\big[\Psi(-D_\varphi(G_\theta(z)))\big], \quad (1)$$

因此，该问题是一个零和博弈。目标函数的一种常见选择是 $\Psi(t) = -\log(1 + e^{-t})$，但也可以考虑其他选择，只要满足以下假设（尤其是假设3）。

因此，若且唯若满足以下条件，一对 $(\theta^\star, \varphi^\star) \in S$ 是一个纳什均衡：

$$\mathcal{L}(\theta^\star, \varphi) \leq \mathcal{L}(\theta^\star, \varphi^\star) \leq \mathcal{L}(\theta, \varphi^\star), \qquad \forall (\theta, \varphi) \in S. \quad (2)$$

(1)中的极小极大问题可以改写为鞍点问题，并通过变分不等式求解。为此，令与问题(1)相关联的鞍点算子为

$$F(\omega) = \begin{bmatrix} \nabla_\theta \mathcal{L}(\theta, \varphi) \\ -\nabla_\varphi \mathcal{L}(\theta, \varphi) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

因此，借助式（3）中的算子，式（1）中的博弈均衡点可表征为 VI(S, F) 的解。

find $\omega^\star \in S$ s.t. $\langle F(\omega^\star), \omega - \omega^\star\rangle \geq 0, \quad \forall \omega \in S.$ (4)

接下来，我们给出确保式（1）和式（4）适定的标准条件。

假设*1*（局部集）：Θ 和 Φ 均为非空闭凸集。

注意，在假设1下，后续章节中使用的欧几里得投影算子Π_S是坚固非扩张的 [13,第3节.1]。

假设*2*（基算子的光滑性）：(3)中的鞍点算子 F 在 S上是 L_0-利普希茨连续的。

假设*3*（鞍点目标函数的曲率）：(1)中的目标函数 $\mathcal{L}$ 关于 θ 是 μ_θ-强凸的，关于 φ 是μ_φ-强凹的，且定义在 S上，模数为 μ_θ, $\mu_\varphi \geq 0$

注*1*：请注意，在假设3中，参数μ_θ 和 μ_φ 可以为零。这意味着目标函数可能仅为凸/凹（而非强凸/强凹）。因此，雅可比矩阵 JF 的对称部分仅为半正定，鞍点算子 F 至多在 S 上是单调的。

A. 惩罚项设计

在没有正则化的情况下，生成对抗网络的鞍场通常具有旋转性且条件性较差，因此投影一阶方法往往会出现振荡，或需要采用不切实际的小步长 [14]–[17]。为了解决这些问题，我们提出一种正则化方法，通过引入曲率来抑制旋转漂移并改善条件性。由此得到的算子场具有明确的利普希茨常数和（强）单调性常数，可用于指导步长选择并提供收敛保证。将（3）中的基础算子与惩罚项结合，可得

$$F_\gamma(\omega) = \begin{bmatrix} \nabla_\theta \mathcal{L}(\theta, \varphi) - \nabla_\theta B(\theta, \varphi) \\ -\nabla_\varphi \mathcal{L}(\theta, \varphi) + \nabla_\varphi B(\theta, \varphi) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

我们在（5）中采用一般的对称记法，但随后将提出一种非对称形式，其中 $\nabla B_\theta(\theta, \varphi) = 0$。因此，我们仅对博弈中的判别器一侧进行正则化，并分析由此诱导的算子 F_γ。

注释 *2*：一般而言，求解正则化问题并不等同于求解原问题。尤其是，VI(S, F_γ) 的解不一定与 VI(S, F) 的解一致。然而，如果 B 在未正则化算子的某个鞍点处为零，那么 $F_\gamma(\omega^\star) = F(\omega^\star)$。此外，随着 $\gamma \to 0$, VI(S, F_γ) 的有界解序列的聚点都是 VI(S, F) 的解。

为此，设 $\{\gamma_k\}_{k>0} \subseteq \mathbb{R}$ 是一列正则化参数，并设 $\{\omega_k\}_{k>0}$ 是相应的 VI(S, F_{γ_k}) 解序列。假设 $\{\omega_k\}$ 有界，且沿某个子序列有 $\omega_k \to \bar{\omega}$。对于任意 $y \in S$，我们有$\langle F_{\gamma_k}(\omega_k)\ y - \omega_k\rangle \geq 0$；由一致收敛可知，在包含 $\{\omega_k\}$ [18, 的某个紧集上，$F_{\gamma_k} \to F$。定理 4.3]。因此，取极限可得 $\langle F(\bar{\omega})\ y - \bar{\omega}\rangle \geq 0$ 对所有 $y \in S$ 均成立，即 $\bar{\omega}$ 是 VI(S, F) 的解 [3, 推论 5.1.8]。

我们考虑两种形式的正则化。将这些项加到代价中，然后求导，得到式 (5) 中正则化项的梯度。

a) Tikhonov 正则化（*Tik*）：受.....启发 [11],设

$$B_{\mathrm{Tik}}(\theta,\varphi)=\tfrac{\gamma}{2}\,\|\varphi\|^2. \tag{6}$$

与标准的 Tikhonov 正则化相比，在我们的情形中，该项仅作用于判别器块。因此，$\nabla_\varphi B_{\mathrm{Tik}}=\gamma\,\varphi$，$\nabla^2_{\varphi\varphi}B_{\mathrm{Tik}}=\gamma I$，$\nabla_\theta B_{\mathrm{Tik}}\equiv 0$. 这一惩罚项在 φ-子空间中引入曲率，同时不影响生成器块。

此外，如果我们也用相同的二次项对生成器进行正则化，即

$$B^{\mathrm{full}}_{\mathrm{Tik}}(\theta,\varphi)=\tfrac{\gamma}{2}(\|\theta\|^2+\|\varphi\|^2), \tag{7}$$

我们便恢复了经典的（对称）*Tikhonov*正则化，且该惩罚项为生成器和判别器子空间引入相同的曲率。

b) 对称（零中心）梯度惩罚（*SGP*）：作为对上述正则化的替代，令

$$\begin{aligned}B_{\mathrm{SGP}}(\theta,\varphi)=\tfrac{\gamma}{2}\,\mathbb{E}_{x\sim p_D}\big[\|\nabla_x D_\varphi(x)\|^2\big]\\ +\tfrac{\gamma}{2}\,\mathbb{E}_{z\sim p_Z}\big[\|\nabla_x D_\varphi(G_\theta(z))\|^2\big].\end{aligned} \tag{8}$$

该正则化会惩罚 D_φ 的输入梯度，使其在真实支持集（x）和生成支持集（z）上趋向于零。尽管名称如此 [16], ，它仅添加到判别器收益中。令 $g(x;\varphi):=\nabla_x D_\varphi(x)$ 且 $H_\varphi(x):=\nabla^2_{x,\,\varphi}D_\varphi(x)$，并通过直接求导，

$$\begin{aligned}\nabla_\varphi B_{\mathrm{SGP}}=\gamma(\mathbb{E}_{x\sim p_D}[H_\varphi(x)^\top g(x;\varphi)]\\ +\,\mathbb{E}_{z\sim p_Z}[H_\varphi(G_\theta(z))^\top g(G_\theta(z);\varphi)]).\end{aligned} \tag{9}$$

通过链式法则计算 $x'=G_\theta(z)$ 得到 $\nabla_\theta B_{\mathrm{SGP}}=\gamma\,\mathbb{E}\big[J_\theta G_\theta(z)^\top H_{xx}(x')^\top g(x';\varphi)\big]$，其中 $H_{xx}(x):=\nabla^2_x D_\varphi(x)$，而 $J_\theta G_\theta(z)$ 是生成器的雅可比矩阵。注意，尽管正则化只添加到了判别器代价上，但它也会影响生成器块。

注 *3*：(8) 中的梯度是相对于输入 x而言的，而不是相对于参数 φ而言的。这一选择针对的是数据空间中的函数 $D_\varphi(\cdot)$：它会惩罚 D_φ 在真实样本支撑集和生成样本支撑集上的尖锐性，并且当 D_φ 在这些支撑集上局部平坦时取零。因此，该惩罚项在均衡处消失，并保留目标鞍点 [16, Rem. D.8]。特别地，由于在均衡处 $g(\cdot;\varphi^\star)\equiv 0$，(8) 在鞍点处取零，从而保留了 (2) 中的均衡。这也解释了“零中心”这一术语的由来，因为其值和一阶导数在 $(\theta^\star,\ \varphi^\star)$ 处都为零。与参数惩罚（例如 (6) 中的吉洪诺夫正则化）相比，输入梯度惩罚作用于数据空间，对简单的重参数化具有不变性；并且由于它会在鞍点之外引入曲率，因此不会使均衡产生偏差，即 γ 不必为零。

B. 正则化分析

为理解这些惩罚项如何改变鞍场的几何结构，我们考察它们在判别器块上诱导的曲率。由于鞍点算子的局部行为由其雅可比矩阵决定，为了为正则化映射确立明确的利普希茨连续性和强单调性常数，我们考察所提出惩罚项的二阶结构。

对于判别器块的曲率分析，令海森矩阵的高斯–牛顿（GN）替代项 [19,Sec. 10.3] 为 $\nabla^2_{\varphi\varphi}B_{\mathrm{SGP}}\approx\gamma\,J_G(\omega)$，其中

$$J_G(\omega):=\mathbb{E}\big[H_\varphi(x)^\top H_\varphi(x)+H_\varphi(x')^\top H_\varphi(x')\big] \tag{10}$$

其中，x为真实数据输入，x' 为生成样本输入。

假设 *4*（高斯–牛顿可辨识性）：存在一个邻域 $\mathcal{R}\subseteq S$ 和一个常数 $\lambda_0>0$，使得对所有 $\omega\in\mathcal{R}$，$J_G(\omega)\succeq\lambda_0 I$.

备注 *4*：式（5）中 F_γ 的雅可比矩阵 JF_γ 包含源自 $\nabla^2_{\theta\varphi}(\cdot)$ 项的非对角混合块。这些项会引发旋转动力学，并可能影响迭代方案所需的强单调性。假设 4 强制施加判别器侧的曲率，从而保证雅可比矩阵对称部分的 φ-块具有一致的正下界（见引理 1），以抵消生成器与判别器之间的旋转耦合。

假设*5*（连续性）：判别器 D_φ 关于 x 和 φ 二阶连续可微，且在 $x\sim p_D$ 和 $x'=G_\theta(z)$ 的相关支撑集上也二阶连续可微，$z\sim p_Z$。

令 ξ 表示一个通用输入，可以是一个真实样本$x\sim p_{\mathcal{D}}$，也可以是一个生成样本 $x'=G_\theta(z)$，其中 $z\sim p_Z$。

假设 *6*（有界混合海森矩阵）：存在常数 $C_H>0$，使得对所有 $\xi\in\mathrm{supp}(p_{\mathcal{D}})\cup G_\theta\big(\mathrm{supp}(p_Z)\big)$，都有 $\|H_\varphi(\xi)\|\le C_H$，其中 $H_\varphi(\xi):=\nabla^2_{x,\,\varphi}D_\varphi(\xi)$。因此，$\mathbb{E}[\|H_\varphi(x)\|^2]\le C_H^2$，且 $\mathbb{E}[\|H_\varphi(x')\|^2]\le C_H^2$。

引理 *1*（格拉姆矩阵的半正定性与一致有界性）：假设假设5–6成立，则 $J_G(\omega)\succeq 0$ 且

$$\|J_G(\omega)\|\le 2C_H^2=:\kappa. \tag{11}$$

证明：根据式 (10) 中 $J_G(\omega)$ 的定义，为证明其为半正定，令 $v\in\mathbb{R}^{d_\varphi}$；则 $v^\top J_G(\omega)\,v=\mathbb{E}\big[\|H_\varphi(x)v\|^2+\|H_\varphi(x')v\|^2\big]\ge 0$，因此 $J_G(\omega)\succeq 0$。

式 (11) 中的界则可通过利用期望的线性性质和三角不等式得到：

$$\begin{aligned}\|J_G(\omega)\|&=\|\mathbb{E}[H_\varphi(x)^\top H_\varphi(x)]+\mathbb{E}[H_\varphi(x')^\top H_\varphi(x')]\|\\ &\le\ \|\mathbb{E}[H_\varphi(x)^\top H_\varphi(x)]\|+\|\mathbb{E}[H_\varphi(x')^\top H_\varphi(x')]\|\\ &\le\ \mathbb{E}[\|H_\varphi(x)^\top H_\varphi(x)\|]+\mathbb{E}[\|H_\varphi(x')^\top H_\varphi(x')\|].\end{aligned}$$

由于谱范数是凸的，根据詹森不等式，$\|J_G(\omega)\|\le\mathbb{E}[\|H_\varphi(x)\|^2]+\mathbb{E}[\|H_\varphi(x')\|^2]$. 最后，根据假设 6 $\|J_G(\omega)\|\le C_H^2+C_H^2=2C_H^2=:\kappa$. 由此证明了该结论。■

现在可以证明式 (5) 中正则化算子的利普希茨连续性和强单调性。

命题 *1*（F_γ的 *Lipschitz* 常数）：在假设1、2、5和6下，(5) 中的 F_γ 在 S 上是 L-利普希茨连续的，且

$$L=L_0+\gamma\,\kappa_{\mathrm{tot}},\qquad \kappa_{\mathrm{tot}}\in[\kappa,\ \kappa+\tilde\kappa_\theta]. \tag{12}$$

其中 κ 与式（11）中相同，且 $\tilde\kappa_\theta\ge 0$.

算法 1前向–后向

要求： 初始 $\omega_0 \in \mathcal{R}$，步长/预条件器 $P \succ 0$

1: **对于** $k = 0$，1、2、. . . **执行**

2: $\omega_{k+1} \leftarrow \Pi_{\mathcal{R}}\big(\omega_k - P\,F_\gamma(\omega_k)\big)$

3: **</style结束**

循环>

算法 2超梯度

需要： 初始 $\omega_0 \in \mathcal{R}$，步长/预条件器 $P \succ 0$

1: **对于** $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**

2: $\tilde{\omega}_k \leftarrow \Pi_{\mathcal{R}}\big(\omega_k - P\,F_\gamma(\omega_k)\big)$ ▷ 前瞻

3: $\omega_{k+1} \leftarrow \Pi_{\mathcal{R}}\big(\omega_k - P\,F_\gamma(\tilde{\omega}_k)\big)$

4: **结束循环**

证明： 根据假设2，算子 F 在 S上是 L_0-利普希茨的。因此，只需对正则化贡献 $\nabla B(\omega) = (\,-\nabla_\theta B(\omega)\ \ \nabla_\varphi B(\omega)\,)^T$的利普希茨常数进行界定。

(i) 判别器侧贡献。 对于 (6) 中的 B_{Tik}，我们有$\nabla_\varphi B_{\mathrm{Tik}}(\omega) = \gamma\,\varphi$，其关于 φ 的雅可比矩阵为 γI；因此

$$\|\nabla_\varphi B_{\mathrm{Tik}}(\omega) - \nabla_\varphi B_{\mathrm{Tik}}(\omega')\| \;\le\; \gamma\,\|\omega - \omega'\|.$$

对于 (9) 中的 B_{SGP}，根据 (10) 中的高斯–牛顿替代函数和引理 1，$\nabla_\varphi B_{\mathrm{SGP}}$ 的 φ-雅可比矩阵满足$\|\nabla^2_{\varphi\varphi} B_{\mathrm{SGP}}(\omega)\| \;\approx\; \gamma\,\|J_G(\omega)\| \;\le\; \gamma\kappa$，其中 κ 如 (11) 所示。根据向量场的中值定理，

$$\|\nabla_\varphi B_{\mathrm{SGP}}(\omega) - \nabla_\varphi B_{\mathrm{SGP}}(\omega')\| \;\le\; \gamma\,\kappa\,\|\omega - \omega'\|.$$

因此，在 B_{Tik} 和 B_{SGP} 两种情况下，判别器侧贡献均为 $\gamma\kappa$-利普希茨连续（对于 B_{Tik}，取 $\kappa = 1$；对于 B_{SGP}，取 (11) 中的 κ）。

(ii) 生成器侧贡献。对于 (6) 中的 B_{Tik}，我们有 $\nabla_\theta B_{\mathrm{Tik}} \equiv 0$，因此 $\tilde{\kappa}_\theta = 0$。对于 (8) 中的 B_{SGP}，我们有$\nabla_\theta B_{\mathrm{SGP}}(\omega) = \gamma\,\mathbb{E}\big[J_\theta G_\theta(z)^\top H_{xx}(x')^\top g(x';\varphi)\big]$。在假设5–6以及支撑集/参数有界的条件下，$J_\theta G_\theta$、$H_{xx}$ 和 g 均一致有界且利普希茨连续（见备注 6）。因此，$\nabla_\theta B_{\mathrm{SGP}}$ 是利普希茨连续的，且具有某个有限常数，即 $\tilde{\kappa}_\theta < \infty$。

结合 (i) 和 (ii)，正则化项是 $\gamma(\kappa+\tilde{\kappa}_\theta)$-利普希茨连续的。我们有 $\|F_\gamma\,\omega - F_\gamma\,\omega'\| \le (L_0 + (\,)\,(\,)\ \ \gamma\,\kappa + \gamma\,\tilde{\kappa}_\theta)\,\|\omega - \omega'\|.$ $\tilde{\kappa}_\theta \ge 0$ 12 由于，这得到 (，其中$\kappa_{\mathrm{tot}} \in [\kappa,\ \kappa + \tilde{\kappa}_\theta]$。 ■

注*5*： 根据定义，(12) 中的量 $\tilde{\kappa}_\theta$ 非负，并且它刻画了 B 对 θ 的依赖关系。对于 (6) 中的吉洪诺夫正则化，$\tilde{\kappa}_\theta = 0$。对于 (8) 中的 SGP 正则化，只要生成器雅可比矩阵$J_\theta G_\theta$ 和混合海森矩阵 H_φ 在 (x, z) 的支集上有界，$\tilde{\kappa}_\theta > 0$。当 x 和 z 取值于有界集合（例如 $x \in [0,1]^{d_x}$、$z \in [-c, c]^{d_z}$）时，$G_\theta(Z)$ 有界，参数集合 Θ, Φ 有界，并且 G_θ 和D_φ 在其定义域上二阶连续可微时，这一条件成立。

命题*2*（强单调性 F_γ）：在假设3和4下，式(5)中的正则化映射 F_γ 的雅可比矩阵 JF_γ 满足

$$\frac{JF_\gamma(\omega) + JF_\gamma(\omega)^\top}{2} \;\succeq\; \mathrm{diag}\big(\mu_\theta I,\ (\mu_\varphi + \gamma\lambda_0) I\big) \quad (13)$$

算法3EFTP

要求： 初始 $\omega_0 \in \mathcal{R}$，步长/预条件器 $P \succ 0$

1: $y_0 \leftarrow \omega_0$; $\widehat{F}_0 \leftarrow F_\gamma(y_0)$ ▷ 热启动：一次预言机调用

2: **对于** $k = 0$, 1,2, . . . **执行**

3: $\omega_{k+1} \leftarrow \Pi_{\mathcal{R}}\big(\omega_k - P\,\widehat{F}_k\big)$

4: $y_{k+1} \leftarrow \Pi_{\mathcal{R}}\big(\omega_{k+1} - P\,\widehat{F}_k\big)$

5: $\widehat{F}_{k+1} \leftarrow F_\gamma(y_{k+1})$ ▷ **每次循环调用一次**预言机

6: **结束循环**

在 $\mathcal{R} \subseteq S$上。因此，F_γ 在 $\mathcal{R}$ 上是 μ-强单调的，且

$$\mu \;\ge\; \min\{\mu_\theta,\ \mu_\varphi + \gamma\lambda_0\}. \quad (14)$$

证明：令 F_γ 如式 (5) 所示。那么，其雅可比矩阵为

$$JF_\gamma(\omega) = \begin{bmatrix} A & B_{\mathrm{mix}} \\ -B_{\mathrm{mix}}^\top & C \end{bmatrix} \omega, \quad (15)$$

其中 $A = \nabla^2_{\theta\theta}\mathcal{L} - \nabla^2_{\theta\theta}B$ $B_{\mathrm{mix}} = \nabla^2_{\theta\varphi}\mathcal{L} - \nabla^2_{\theta\varphi}B$ $C =$，且。 $-\nabla^2_{\varphi\varphi}\mathcal{L} + \nabla^2_{\varphi\varphi}B$

由施瓦茨对称性，对称部分为块对角矩阵： $JF_\gamma\nabla^2_{\theta\theta}\mathcal{L} - \nabla^2_{\theta\theta}B$ $-\nabla^2_{\varphi\varphi}\mathcal{L} + \nabla^2_{\varphi\varphi}B$ $3\ \nabla^2_{\theta\theta}\mathcal{L} \succeq \mu_\theta I$ $)+JF_\gamma()$

$_2$ $^\top$ $=$diag(,)。根据假设，且 $-\nabla^2_{\varphi\varphi}\mathcal{L} \succeq \mu_\varphi I$。我们分别考虑这两种正则化。

a) 对于 Tikhonov 正则化，$\nabla^2_{\varphi\varphi}B_{\mathrm{Tik}} = \gamma I$ 和 $\nabla^2_{\theta\theta}B_{\mathrm{Tik}} \equiv 0$，因此在 $\mathcal{R}$ 中的任意区域上，

$JF_\gamma\ \omega + JF_\gamma\ \omega$ ()()

$_2$ $^\top$ $\succeq$ diag$\big(\mu_\theta I,\ (\mu_\varphi + \gamma) I\big)$.*b)* 对于 B_{SGP}，利用式 (10) 中的高斯–牛顿替代函数和假设 4，$\nabla^2_{\varphi\varphi}B_{\mathrm{SGP}} \succeq \gamma\,J_G(\omega) \succeq \gamma\lambda_0 I$ 在 $\mathcal{R}$ 上，因此 $\frac{JF_\gamma + JF_\gamma^\top}{2} \succeq \mathrm{diag}\big(\mu_\theta I,\ (\mu_\varphi + \gamma\lambda_0) I\big)$，在$\mathcal{R} \subset S$ 上，这恰好就是式 (13)。

因此，F_γ 在 $\mathcal{R}$ 上是 μ-强单调的，其中 $\mu \ge$min $\{\mu_\theta, \mu_\varphi + \gamma\lambda_0\}$ [3, 命题2.3.2.(c)]。□ ■

备注 *6*： 如果 $\mu_\theta = 0$ 满足假设3，命题2仅意味着 $\mu \ge 0$，即算子 F_γ 可能是单调的。在添加生成器侧曲率（例如，如（7）中的吉洪诺夫项$\frac{\gamma}{2}\|\theta\|^2$）后，方程（13）的右侧变为$\mathrm{diag}\big((\mu_\theta + \tau) I,\ (\mu_\varphi + \gamma\lambda_0) I\big)$，并得到 $\mu \ge \min\{\mu_\theta + \tau,\ \mu_\varphi + \gamma\lambda_0\} > 0$，从而恢复强单调性。

III. 算法与收敛

我们考虑三种投影一阶方法来求解鞍点问题的纳什均衡：前向–后向（*FB*）、额外梯度（*EG*）和过去外推（*EFTP*）。这些迭代方案的详细内容分别见算法1、2和3。请注意，对于这些迭代方案，我们使用方程（5）中的正则化算子。

FB 是经典的投影梯度步，沿着 $-F_\gamma(\omega_k)$ [9] 进行一次投影。EG 通过在前瞻点 $\tilde{\omega}_k$ 处进行评估，并使用$F_\gamma(\tilde{\omega}_k)$更新，来稳定动力学，这有助于抵消单调鞍场 [10] 中的旋转漂移。EFTP 通过复用已存储的评估结果，实现了类似的稳定效果：热启动时进行一次预言机调用后，每次迭代只需一次梯度调用，从而降低计算代价 [8]。

A. 收敛性分析

设 L 为 F_γ 在 S 上的 Lipschitz 常数，μ 为其在区域 $\mathcal{R} \subseteq S$ 上的（强）单调性常数，如引理 1 和命题 1 所述。我们回顾一下，根据备注 6，μ 可能为 0。

假设 7（步长）：令 $\mathcal{R} \subseteq S$ 和 $P \in \mathbb{M}_{++}^d$ 为步长序列，且满足：对于前向-后向法，$\|P\|^2 < \frac{2\mu\lambda_{\min}(P)}{L^2}$；对于外梯度法，$\|P\| \leq \frac{1}{L}$；对于 EFTP，$\|P\| \leq \frac{1}{4L}$。

备注 7（标量情形）：若 $P = \eta I_d$，则这些界可简化为 $0 < \eta < \frac{2\mu}{L^2}$（前向-后向法）、$0 < \eta \leq \frac{1}{L}$（外梯度法）和 $0 < \eta \leq \frac{1}{2L}$（EFTP）。利用命题 1 中的显式界，可以得到可计算的步长。

现在可以陈述迭代方案的收敛结果了。

定理 1（前向-后向法与外梯度法的比较）：假设假设 1、2 和 7 成立。

1）若 F_γ 在 $\mathcal{R}$ 上强单调（$\mu > 0$），则算法 1 收敛到 (4) 的一个解 $\omega^\star$。该收敛为 Q-线性收敛。2）若 F_γ 在 S 上单调（$\mu = 0$），则算法 2 收敛到 (4) 的一个解 $\omega^\star$。此外，若 F_γ 在 $\mathcal{R}$ 上强单调，则该收敛为 Q-线性收敛。

证明：1）考虑不动点映射 $T(\omega) = \Pi_S\big(\omega - P^{-1}F_\gamma(\omega)\big)$。根据 [3, 定理 12.1.2]，，且由于 F_γ 在 $\mathcal{R}$ 上是 μ-强单调且 L-利普希茨连续的，因此 T 在 P^{-1} 诱导范数下是压缩映射。因此，$\omega_{k+1} = T(\omega_k)$ 收敛到 VI(S, F_γ) 的唯一解，而 Banach 压缩映射定理保证了 Q-线性收敛。

2）如果 F_γ 在 S 上单调且 L-利普希茨连续，算法 2 将生成相对于解集 SOL(S, F_γ) 的 Fej´er 单调序列，因此收敛到 VI(S, F_γ) 的一个解 [3，定理 12.1.1]，[13，§5.8]。此外，如果 F_γ 在 $\mathcal{R}$ 上（局部）强单调，那么当 η [3，充分小时，外梯度法以 Q-线性速度收敛 η [3,定理 12.6.4]。■

备注 8（有效区域 $\mathcal{R}$）：在第二至第三节中，$\mathcal{R} \subseteq S$ 表示解的一个凸邻域$\omega^\star$，我们的正则性假设在该邻域内成立，常数 L（利普希茨连续性）和 μ（强单调性）也在该邻域内有效。前向-后向法、外梯度法和 EFTP 的所有收敛结论均在 $\mathcal{R}$ 上给出。若 $\mathcal{R} = S$，则结果是全局的；否则结果是局部的，并要求初始点$\omega_0 \in \mathcal{R}$。

我们将算法3的收敛性单独作为一项结果陈述，因为据我们所知，这是博弈领域的一种新方案。

定理2（*EFTP*）：设假设1-7成立 ld.

1）若 F_γ 在 $\mathcal{R}$上单调（$\mu = 0$），则算法3收敛到（4）的一个解 $\omega^\star$。2）若 F_γ 在 R上强单调（$\mu > 0$），则算法3在 $\mathcal{R}$ 上是压缩映射，且 $\|\omega_{k+1} - \omega^\star\| \leq \|\omega_k - \omega^\star\|$，其中 $q \in$（0，1）。因此，算法3以 Q-线性速度收敛到一个解 $\omega^\star$（4）。此外，达到 $\|\omega_{k+1} - \omega^\star\| \leq \varepsilon$所需的迭代次数按 $\mathcal{O}(\log(1/\varepsilon))$的量级增长。

证明：令 $\omega^\star \in$ SOL(S, F_γ) 为 $\mathcal{R}$ 中（局部）唯一的解。那么，对于 1)，收敛性可作相应修改后由

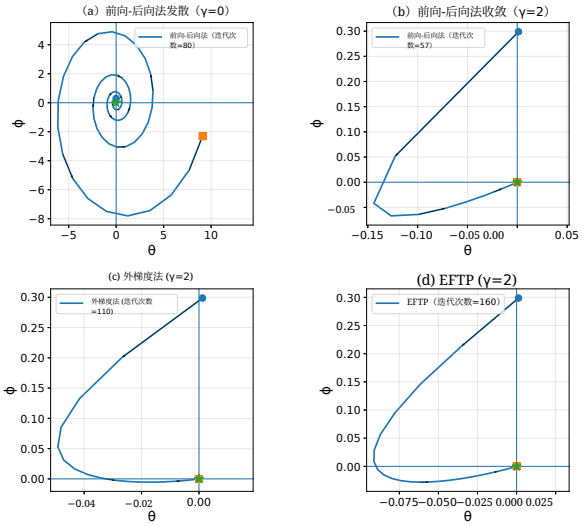


图1：仅判别器具有曲率时的轨迹：(a) 对于 $\gamma = 0$，FB 发散；(b) 对于 $\gamma = 2$，FB 收敛；(c) EG（$\gamma = 2$）；(d) EFTP（$\gamma = 2$）。蓝点表示起点，方块表示终点；星号表示解。图例报告了收敛所需的迭代次数。

相应修改后由 [8,定理 1] 得出。特别是，我们采用的保守步长 $\|P\| \leq \frac{1}{4L}$ 确保了 [8] 中使用的界 $\|P\| \leq \frac{1}{3L}$ 相反，如果我们具有强单调性，则类似于 [14，定理’ 1]，可得 $\|\omega_{k+1} - \omega^\star\| \leq \big(1 - \frac{\mu}{4L}\big)\|\omega_k - \omega^\star\|$，从而由假设 7 得到 $q \in$(0，1)。因此，根据 [3, 定理 2.1.21(c)]，，达到 $\|\omega_{k+1} - \omega^\star\| \leq \varepsilon$ 所需的迭代次数按 $\mathcal{O}(\log(1/\varepsilon))$ 缩放。■

IV. 数值模拟

为说明我们的非对称设计机制，我们研究一个双线性玩具示例。假设判别器关于输入是线性的，并将 GAN 损失专门化为 $\mathcal{L}(\theta, \varphi) = \mathbb{E}_{x\sim p_{\mathcal{D}}}[\varphi^\top x] - \mathbb{E}_{z\sim p_Z}[\varphi^\top G_\theta(z)] = \varphi^\top\big(\mathbb{E}[x] - \mathbb{E}[G_\theta(z)]\big)$.特别地，令 $\mathbb{E}[x] = 0$且 $\mathbb{E}[G_\theta(z)] = -a\theta$，其中 $a > 0$。由于判别器关于其输入是线性的，$g(x;\varphi) = \nabla_x D_\varphi(x) = \varphi$ 关于 x为常数。在这种情况下，零中心输入梯度惩罚简化为

$$B_{\mathrm{SGP}}(\theta, \varphi) = \tfrac{\gamma}{2}\,\mathbb{E}\big[\|g(x;\varphi)\|^2 + \|g(G_\theta(z);\varphi)\|^2\big] = \tfrac{\gamma}{2}\|\varphi\|^2,$$

这与式（6）中的 Tikhonov 正则化完全一致。当 $\omega = (\theta, \varphi)^\top \in \mathbb{R}^2$ 时，相应的鞍点算子为

$$F_\gamma(\omega) = \begin{bmatrix} a\,\varphi \\ -a\,\theta + \gamma\,\varphi \end{bmatrix}, \qquad JF_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & \gamma \end{bmatrix}. \tag{16}$$

注意，F_γ 单调 $\gamma \geq 0$，但并非强单调 [3，第 2 节3]。我们使用 $a > 0$实现了（16），并改变了 $\gamma \geq 0$。步长方面，我们采用假设 7，并按照命题 1 中的L 进行设置。在这些前提下，前向-后向法会出现振荡行为，并可能停滞，除非 γ 足够大且步长经过保守调整，即遵循假设 7。图 1(a) 中$\gamma = 0$ 以及图 1(b) 中 $\gamma = 2$的结果可以观察到这一点。相比之下，对于外梯度法和 EFTP，第二次梯度步会抵消旋转漂移

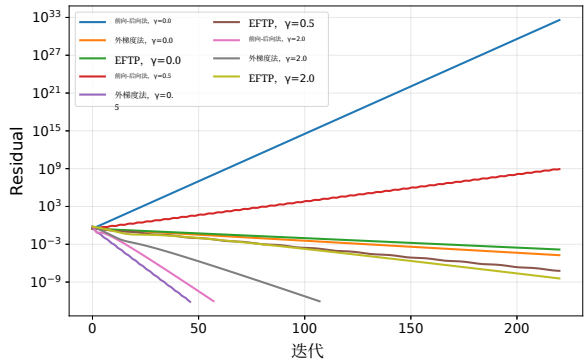


图 2： $\gamma = \{0, 0.5, 2\}$ 的双线性玩具问题中，残差随迭代次数的变化。

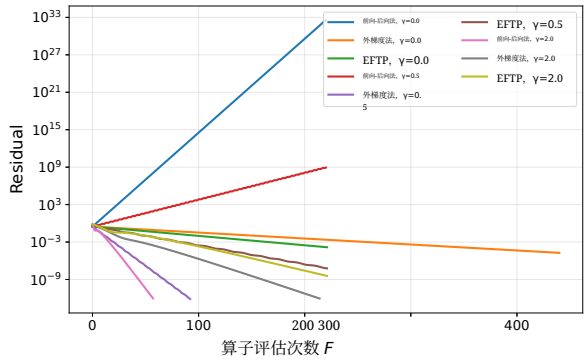


图 3：残差随梯度评估次数的变化。

并实现收敛（图 1(c)-(d)）。此外，EFTP 每半步仅需一次预言机调用，利用存储的梯度，在计算开销更低的同时，仍能像外梯度法一样稳定单调场。

残差图（图 2–3）显示了 γ 如何稳定对抗动力学：当前向-后向法遇到 $\gamma = 0$ 时会发散，在曲率中等时速度减慢，而在 $\gamma = 2$ 时则呈线性收缩。对于所有 γ，向量场都是单调的，但并非强单调，因此只有前瞻方法（外梯度法、EFTP）能够收敛。具体而言，外梯度法和 EFTP 均呈现稳定、近线性的下降趋势，且 γ越大，下降效果越好；而前向-后向法在曲率较小时不稳定，并会随着 γ 增大而趋于稳定。就计算负担而言（图 3），外梯度法每次迭代需要两次梯度步，EFTP 每半步只需一次：两者都能消除旋转漂移，但 EFTP 以更少的梯度调用实现了相近的性能。

五、结论

我们通过变分不等式表述研究了生成对抗网络的训练，并提出了一种块非对称零中心输入梯度惩罚，仅应用于判别器。这一设计在保留目标鞍点的同时，能够以可证明的方式改善条件性。在光滑性和局部高斯–牛顿（GN）可辨识性条件下，我们推导出了正则化算子的显式利普希茨连续性常数和强单调常数，并证明了 EFTP 方法的线性收敛。将分析扩展到采用方差缩减或自适应分块预条件器的任务，将进一步检验这种非对称设计。

参考文献

[1] I. Goodfellow、J. Pouget-Abadie、M. Mirza、B. Xu、D. Warde-Farley、S. Ozair、A. Courville 和 Y. Bengio，《生成对抗网络》，《*ACM* 通讯》，第 63 卷，144，2020 年 11 月，第 139 页。[2] W. Li、X. Zeng 和 L. Pavel，《用于约束双线性鞍点问题的原始–对偶加速镜像下降法》，《*IEEE* 自动控制汇刊》，2025 年。[3] F. Facchinei 和 J.-S. Pang，有限维变分不等式与互补问题。施普林格，2003 年。[4] D. Goldsztajn 和 F. Paganini，《鞍点梯度动力学的近端正则化》，《*IEEE* 自动控制汇刊》，第 66 卷，第 9 期，第 4385–4392 页，2020 年。[5] Y. Huang、Z. Meng、J. Sun 和 W. Ren，《通过鞍点动力学实现约束网络优化的统一分布式方法》，《*IEEE* 自动控制汇刊》，第 69 卷，第 3 期，第 1819–1826 页，2024 年。[6] I. Gulrajani、F. Ahmed、M. Arjovsky、V. Dumoulin 和 A. C. Courville，《改进 Wasserstein 生成对抗网络的训练》，神经信息处理系统进展，第 30 卷，2017 年。[7] A. Jolicoeur-Martineau，《相对论判别器：标准生成对抗网络中缺失的关键要素》，*arXiv* 预印本 *arXiv:1807.00734*，2018 年。[8] L. D. Popov，《用于寻找鞍点的 Arrow-Hurwicz 方法的一种改进》，《苏联科学院数学札记》，第 28 卷，第 845–848 页，1980 年。[9] B. Franci 和 S. Grammatico，《用于受限强单调与严格单调博弈中随机纳什均衡求解的前向–后向算法》，《*IEEE* 自动控制汇刊》，第 67 卷，第 9 期，第 4881–4893 页，2022 年。[10] G. M. Korpelevich，《用于求解鞍点及其他问题的超梯度法》，*Matecon*，第 12 卷，第 747–756 页，1976 年。[11] A. N. Tikhonov、A. V. Goncharsky、V. V. Stepanov 和 A. G. Yagola，正则化方法。多德雷赫特：施普林格·荷兰，1995 年，第 7–63 页。[12] F. Fabiani 和 B. Franci，《网约车市场平台竞争的随机广义纳什均衡模型》，载于*2022* 年 *IEEE* 第 *61* 届决策与控制会议（*CDC*）。IEEE，2022 年，第 4455–4460 页。[13] E. K. Ryu 和 S. Boyd，《单调算子方法入门》，《应用与计算数学》，第 15 卷，43，2016 年 1 月，第 3 页。[14] G. Gidel、H. Berard、G. Vignoud、P. Vincent 和 S. Lacoste-Julien，《生成对抗网络的变分不等式视角》，*arXiv* 预印本 *arXiv:1802.10551*，2018 年。[15] L. Mescheder、S. Nowozin 和 A. Geiger，《生成对抗网络的数值分析》，神经信息处理系统进展，第 30 卷，2017 年。[16] L. Mescheder、A. Geiger 和 S. Nowozin，《哪些生成对抗网络训练方法确实能够收敛？》，载于国际机器学习会议。PMLR，2018 年，第 3481–3490 页。[17] V. Nagarajan 和 J. Z. Kolter，《生成对抗网络梯度下降优化在局部稳定》，神经信息处理系统进展，第 30 卷，2017 年。[18] A. Shapiro，《参数化变分不等式的灵敏度分析》，《运筹学数学》，第 30 卷，126，2005 年 1 月，第 109 页。[19] J. Nocedal 和 S. J. Wright，数值优化，第 2 版。施普林格，2006 年。