目标相位可调的通用复合相位门

Peter Chernev,[1] Mouhamad Al-Mahmoud,[1] 和 Andon A. Rangelov[1]
[1] *Center for Quantum Technologies, Department of Physics, Sofia University, James Bourchier 5 blvd., 1164 Sofia, Bulgaria*（日期：2026年1月21日）

我们提出一种系统方法，用于构造目标相位可连续调节的复合相位门。利用单脉冲传播子的通用凯莱–克莱因参数化，我们通过任意数量的标称 π 脉冲来设计量子门，并通过逐阶抵消复合传播子中非期望非对角元关于小偏差参数的主导项，推导出解析相位族，且不受动力学相位影响。所得序列对一般控制缺陷和参数波动具有内在鲁棒性，并且适用于任意脉冲形状。标准双能级模型中的数值模拟证实了高阶误差抑制，并表明在脉冲面积误差与失谐误差同时变化的宽广范围内，保真度平台宽阔且平坦，凸显了所提出的 *universal* 复合相位门在量子信息处理中实现稳健相位控制的效率。

arXiv:2601.13923v1 [quant-ph] 20 Jan 2026

PACS编号：03.67.Ac、03.65.Vf、32.80.Qk、42.50.Ex

I. 引言

高保真度的单量子比特门和双量子比特门对于可扩展的量子信息处理至关重要。在存在不完美实验参数的情况下，仍需在多次操作中保持相干控制 [1]。在基本门中，相位门发挥着核心作用：它们是广泛算法和协议（包括量子傅里叶变换）的构建模块，并且会在诸如Shor因数分解算法 [2, 3]和 Grover搜索算法 [4]等对相位敏感的子程序中被反复应用。因此，相位门的精度和鲁棒性对于容错量子计算至关重要。

相位门会改变两个基态之间的相对相位，同时不改变它们的布居。对于固定的 π相移，一种常见的实现方式是使用共振 2π 脉冲，将一个量子比特态耦合到辅助能级。然而，实现任意目标相位需要对相互作用进行精确控制——通常涉及失谐、脉冲面积和时序——因此容易受到系统误差的影响。在现实条件下，交流斯塔克频移、空间非均匀性以及不必要的频率啁啾等额外扰动，会进一步加剧这些问题。

人们已利用多种物理机制来实现相位门。动力学相位门 [5] 可通过单个非共振脉冲实现，概念上较为简单，但其性能对实验参数十分敏感。几何相位门 [6–9] 或许能更好地抵御某些波动，但需要更复杂的控制。其他方法则将绝热转移与受控激光相位相结合，以稳定所获得的相位 [10, 11]。在所有情况下，总体目标都是相同的：实现准确、可调且能抵御驱动场未知变化的相位控制。

复合脉冲（CP）提供了一种简单而强大的实现鲁棒控制的途径：用一系列相对相位受控的脉冲取代单脉冲 [12–15]。其核心思想是，各个脉冲引入的误差会发生相消干涉，从而抵消对缺陷的主要敏感性，同时保持目标操作的高保真度。传统的复合脉冲设计通常针对特定类型的误差（例如脉冲面积误差或失谐误差）进行校正，并且往往假定特定的脉冲形状。

超越这一范式的重要进展是通用复合脉冲；Genov等人 [16, 17]最初将其用于实现稳健的布居反转。通用复合脉冲旨在补偿驱动场任意参数的偏差（脉冲振幅和持续时间、失谐、斯塔克频移、非预期啁啾等），而且重要的是，它们适用于任意脉冲包络。其普适性源于不对实验参数如何映射到单脉冲传播子作任何假设。相反，人们采用单脉冲传播子的通用 Cayley–Klein（St¨uckelberg）参数化形式，并将复合传播子的一个适当矩阵元按小参数 ϵ展开，该参数量化了相对于理想跃迁的偏差。通过选择复合脉冲相位，使最低阶项的系数对任意动力学相位都为零，便可得到 infidelity 随 ϵ的高次幂标度的序列，从而形成宽阔、平坦的高保真平台 [16, 17]。

在本研究中，我们将这种通用复合脉冲理念应用于相位控制。不同于复合相位门方法中通过两个相同的复合 π 脉冲并施加固定相对相移来构造相位门的做法——Torosov等人 [18] 及其后续研究 [19]均采用了这种方法——我们直接将普适性条件应用于相位门的设计。具体而言，我们采用偶数 π脉冲序列；在理想极限下，这些序列可作为基本相位门。我们还在各个基本模块之间引入并优化额外的独立相对相位。这

为（i）实现可连续调节的目标相位，以及（ii）确保复合门传播算符中的主导误差项得到普适消除，提供了足够的自由度。至关重要的是，这种直接设计能够在保持同等鲁棒性的同时缩短序列：我们的四脉冲门实现了与以往六脉冲方案相同的高阶误差抑制。由此得到的通用复合相位门保留了通用复合脉冲的关键优势：能够抵抗任意系统性场误差，并适用于任何脉冲形状，同时实现适用于量子信息处理的高保真度可调相位控制。

II. 复合脉冲

考虑一个相干驱动的双态量子系统（量子比特），其一般状态为

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)\,|\psi_1\rangle + c_2(t)\,|\psi_2\rangle, \tag{1}$$

其演化由薛定谔方程支配

$$i\hbar\,\partial_t \mathbf{c}(t) = \mathbf{H}(t)\,\mathbf{c}(t), \tag{2}$$

在旋波近似（RWA）下，哈密顿量可写为

$$\mathbf{H}(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} -\Delta(t) & \Omega(t) \\ \Omega(t) & \Delta(t) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中，$\Delta(t) = \omega_0 - \omega(t)$ 是驱动场频率与玻尔跃迁频率之间的失谐。拉比频率 $\Omega(t)$（通常随时间变化）表征耦合强度；对于电偶极跃迁，$\Omega(t) = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}(t)/\hbar$。

对于单脉冲，从初始时刻 t_i 到最终时刻 t_f 的演化由幺正传播子$\mathbf{U}$ 描述，满足 $\mathbf{c}(t_f) = \mathbf{U}\,\mathbf{c}(t_i)$。根据通用复合脉冲形式 [16, 17], ，我们将单脉冲传播子参数化为

$$\mathbf{U}(\epsilon,\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \epsilon\, e^{i\alpha} & \sqrt{1-\epsilon^2}\, e^{i\beta} \\ -\sqrt{1-\epsilon^2}\, e^{-i\beta} & \epsilon\, e^{-i\alpha} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中 ϵ 是实参数，取值范围为 $0 \le \epsilon \le 1$，而 α，β 是相位。重要的是，在通用方法中，不对 ϵ、α和β 如何依赖物理控制参数（例如脉冲面积、失谐、交流斯塔克频移、啁啾和脉冲形状）作任何假设；唯一的假设是相干演化、各组成脉冲相同，以及能够准确控制其相对相位 [16, 17]。

驱动场 $\Omega(t) \to \Omega(t)e^{i\varphi}$的恒定相移 φ，只会使式 (4) 变为

$$\beta \to \beta + \varphi, \qquad \mathbf{U}(\epsilon,\alpha,\beta) \to \mathbf{U}(\epsilon,\alpha,\beta+\varphi), \tag{5}$$

而 ϵ和 α 保持不变。因此，由 N 相位受控的相同脉冲序列$\{\varphi_k\}$组成的复合序列，其传播算符为

$$\mathbf{U}^{(N)} = \mathbf{U}\big(\epsilon,\alpha,\beta{+}\varphi_N\big)\cdots\mathbf{U}\big(\epsilon,\alpha,\beta{+}\varphi_2\big)\,\mathbf{U}\big(\epsilon,\alpha,\beta{+}\varphi_1\big). \tag{6}$$

通过适当选择相位 $\{\varphi_k\}$，可以精心设计$\mathbf{U}^{(N)}$，系统地抑制对误差的一阶敏感性。这正是通用复合脉冲 [16, 17] 的核心。

在接下来的章节中，我们将应用这一通用参数化方法来构造复合相位门，使其性能本质上能够抵抗驱动场参数的任意变化，同时保持目标相位可调。

III. 通用复合相位门

目标操作是相位门

$$\mathbf{G}(\Phi) = \begin{bmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

它赋予式（1）中的量子比特振幅 c_1 和 c_2 之间一个可调的相对相位 Φ，同时保持布居不变。为了利用通用复合脉冲（UCP）方法 [16, 17], 构造此门，我们依赖传播子参数化（4），其中实参数 ϵ量化了脉冲 π（$\epsilon = 0 \Leftrightarrow |U_{12}| = 1$）偏离理想状态的程度。与利用奇数个脉冲实现稳健布居反转的通用复合脉冲不同，相位门必须使布居恢复至初始值，因此需要偶数个标称脉冲 π。在理想极限 $\epsilon = 0$ 下，每个脉冲都会交换布居，偶数次交换会产生对角传播算符（7）。

对于带有额外可控相位 φ的脉冲，式（5）表明，只有 β 会发生偏移，$\beta \to \beta + \varphi$。因此，不失一般性，我们将（未知但共同的）相位 β 吸收到脉冲相位中，并将单脉冲传播子写为

$$\mathbf{U}(\epsilon,\alpha;\varphi) = \begin{bmatrix} \epsilon\, e^{i\alpha} & \sqrt{1-\epsilon^2}\, e^{i\varphi} \\ -\sqrt{1-\epsilon^2}\, e^{-i\varphi} & \epsilon\, e^{-i\alpha} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

由 N 个相位为 $\{\varphi_k\}$的相同脉冲组成的复合序列，其传播算符为

$$\mathbf{U}^{(N)} = \mathbf{U}(\epsilon,\alpha;\varphi_N)\cdots\mathbf{U}(\epsilon,\alpha;\varphi_2)\mathbf{U}(\epsilon,\alpha;\varphi_1). \tag{9}$$

A. 四脉冲通用复合相位门

最简单的非平凡普适复合相位门由 $N = 4$ 个脉冲构成，

$$(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4) = (0,\phi_1,\phi_2,\phi_3), \tag{10}$$

其中我们将第一个相位设为零，因为只有相对 相位会影响复合演化；对所有 k 施加整体相同的相位偏移 $\varphi_k \to \varphi_k + \varphi_0$ 只会产生一个全局相位因子（在物理上无关紧要）。这一约定是复合脉冲设计中的标准做法，也用于 Genov等人 [16, 17]提出的普适复合脉冲构造。参数 ϕ_1 将保持自由，并用于控制目标门相位。在理想极限 $\epsilon = 0$ 下，单脉冲的传播算符变为

$$\mathbf{U}_0(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ -e^{-i\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

且四脉冲乘积为对角矩阵，

$$\mathbf{U}^{(4)}(\epsilon = 0) = \begin{bmatrix} e^{i\Lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda} \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \phi_1 - \phi_2 + \phi_3. \tag{12}$$

因此，理想操作是相位为

$$\Phi = 2\Lambda = 2(\phi_1 - \phi_2 + \phi_3) \pmod{2\pi}, \tag{13}$$

它可以通过相位 ϕ_k 调节。

为实现普适性，我们将非对角元 $U_{12}^{(4)}$ 关于 $\epsilon = 0$ 处的 ϵ 展开为幂级数，

$$U_{12}^{(4)} = \epsilon\, C_1(\alpha; \phi_1, \phi_2, \phi_3) + \epsilon^3\, C_3(\alpha; \phi_1, \phi_2, \phi_3) + O(\epsilon^5), \tag{14}$$

对于偶数个标称 π 脉冲，只出现奇次幂。直接将式 (8) 相乘，可得线性项

$$C_1(\alpha; \phi_1, \phi_2, \phi_3) = -e^{-2i(\alpha+\phi_1+\phi_2)} \Big[e^{i\alpha} \Big(e^{i(\phi_1+2\phi_2+\phi_3)} + e^{i(3\phi_1+\phi_2+\phi_3)} \Big) + e^{3i\alpha} \Big(e^{i(\phi_1+3\phi_2)} + e^{i(2\phi_1+\phi_2+\phi_3)} \Big) \Big]. \tag{15}$$

由于相位 α 未知，且可能取决于任何驱动场缺陷 [16, 17], ，普适性要求独立谐波 $e^{i\alpha}$ 和 $e^{3i\alpha}$ 的系数分别为零，即

$$e^{i(\phi_1+2\phi_2+\phi_3)} + e^{i(3\phi_1+\phi_2+\phi_3)} = 0, \tag{16}$$

$$e^{i(\phi_1+3\phi_2)} + e^{i(2\phi_1+\phi_2+\phi_3)} = 0. \tag{17}$$

方程 (16)–(17) 有如下紧凑的解族

$$\phi_2 = 2\phi_1 + \pi, \qquad \phi_3 = 3\phi_1 + \pi \pmod{2\pi}, \tag{18}$$

这会消去 $U_{12}^{(4)}$ 中的整个 $O(\epsilon)$ 项，对任意 α 均成立。由式 (18)，理想相位 (13) 变为

$$\Lambda = \phi_1 - (2\phi_1 + \pi) + (3\phi_1 + \pi) = 2\phi_1. \tag{19}$$

因此，只需选择即可调节目标相位

$$\phi_1 = \Phi/4 \pmod{2\pi}. \tag{20}$$

相应的四脉冲普适复合相位门为

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \Big(0,\ \Phi/4,\ \Phi/2 + \pi,\ 3\Phi/4 + \pi\Big). \tag{21}$$

最后，将 (18) 代入 (14) 得到

$$U_{12}^{(4)} = \epsilon^3\, e^{-3i\alpha} \Big(e^{2i\alpha} - e^{i\phi_1} \Big) \Big(e^{2i\alpha} + e^{i\phi_1} \Big)^2 + O(\epsilon^5), \tag{22}$$

这表明，主导泄漏振幅按$|U_{12}^{(4)}| \propto \epsilon^3$缩放，且这一结论对于编码在 ϵ 和 α中的物理脉冲参数的任意变化均一致成立。

B. N 脉冲普适复合相位门

现在，我们给出一个简洁的解析族，适用于任意偶数个标称 π 脉冲 $N = 2n$，构成通用复合相位门 。与之前一样，我们令 $\varphi_1 = 0$，以固定无关的全局相位，因为只有相对相位会影响复合传播子，并记作

$$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N) = (0, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{N-1}). \tag{23}$$

通过对 $N = 4$，8，和 12 个脉冲的普适性条件进行解析求解——对 $U_{12}^{(N)}$ 关于 $\epsilon = 0$ 作显式级数展开，并消去任意动力学相位 α 下最低阶的系数——我们发现，所得解可由一个简单的闭式相位定律描述。确定这一规律后，我们进一步通过数值验证，确认它对直至 $N = 26$ 的所有偶数 N 都满足普适性条件。第 IV 节中，我们将展示若干具有代表性的情形，证实同一公式始终能产生宽广的高保真平台，并且随着 N 的增加，鲁棒性也如预期般提高。相应的单参数族可写为

$$\varphi_k = (k-1)\phi_1 + \frac{\pi}{n}(k-1)(k-2) \pmod{2\pi}, \tag{24}$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, \qquad N = 2n. \tag{25}$$

其中， ϕ_1 仍是一个自由参数，用于设定目标门相位。

理想相位。 在理想极限下 $\epsilon = 0$ ，复合传播子为对角形式，

$$\mathbf{U}^{(N)}(\epsilon = 0) = \begin{bmatrix} e^{i\Lambda_N} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda_N} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

with

$$\Lambda_N = \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 - \cdots + \varphi_N. \tag{27}$$

将式（24）代入式（27）得到

$$\Lambda_N = n\phi_1, \tag{28}$$

因此，理想操作是相位门 **G(Φ)**，其中

$$\Phi = 2\Lambda_N = N\phi_1 \pmod{2\pi}. \tag{29}$$

因此，对于所需的目标相位 Φ ，只需选择

$$\phi_1 = \Phi/N \pmod{2\pi}, \tag{30}$$

式（24）直接用门相位 Φ 给出了完整的相位组：

$$\varphi_k = (k-1)\frac{\Phi}{N} + \frac{2\pi}{N}(k-1)(k-2) \pmod{2\pi}, \tag{31}$$

$$k = 1, 2, \ldots, N, \qquad N = 2n. \tag{32}$$

普适性阶数。 对于名义上包含偶数个π 脉冲的序列，非期望的非对角元关于 $\epsilon = 0$ 可展开为奇次幂展开，

$$U_{12}^{(N)} = \epsilon\, C_1^{(N)}(\alpha) + \epsilon^3\, C_3^{(N)}(\alpha) + \epsilon^5\, C_5^{(N)}(\alpha) + \cdots, \tag{33}$$

其中，系数 $C_{2j-1}^{(N)}$ 是 $e^{i\alpha}$ 的三角多项式。相位规律（24）确保最低阶项得到普适消除——与（未知的）动力学相位 α无关——从而

$$C_1^{(N)} = C_3^{(N)} = \cdots = C_{2m-1}^{(N)} = 0, \qquad m = \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor, \tag{34}$$

因此

$$U_{12}^{(N)} = O\left(\epsilon^{2m+1}\right), \qquad m = \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor. \tag{35}$$

特别是，式（35）重现了四脉冲结果$U_{12}^{(4)} = O(\epsilon^3)$，并准确预测了随着$N$增大，标度关系会有所改善（例如，$U_{12}^{(8)} = O(\epsilon^5)$ 和 $U_{12}^{(12)} = O(\epsilon^7)$），而目标相位仍可通过式（29）经由 Φ连续调节。

IV. 数值模拟

为补充第三节推导出的解析普适性条件，我们在具体的物理模型中对所得通用复合相位门进行基准测试，并将其与 Torosov 等人 [18] 构造的复合相位门进行比较。具体而言，我们比较：(i) 我们的四脉冲通用复合相位门与六脉冲门 UPh6a；以及 (ii) 我们的高阶通用门（此处以 $N = 8$ 为例）与 UPh10a、UPh14a 和 UPh26a 系列，其中数字表示相位门脉冲序列中的脉冲总数。在所有情况下，组成脉冲均为标称π 脉冲（标称脉冲面积相等），不同的鲁棒性仅源于脉冲相位的不同选择。

为清晰起见，参考序列 UPh6a、UPh10a、UPh14a 和 UPh26a 取自参考文献 [18]，对应于由两个复合脉冲 π 构成的相位门，即先后施加一个“左侧”复合 π 序列和一个相同的复合 π 序列，后者的相位整体偏移一个常数，以设定所需的门相位。具体而言，UPh6a 是通过 3+3 构造得到的（由两个三脉冲通用 π 序列 U3 [17]组成），而 UPh10a、UPh14a 和 UPh26a 则以类似方式，分别由含 5、7 和 13 个脉冲[17]的通用复合 π 序列构造为 $5+5$、$7+7$和 $13+13$。在我们的数值基准测试中，所有序列——无论是我们提出的序列还是参考序列——均采用相同的单脉冲哈密顿量（37）、每个组成脉冲相同的标称脉冲面积 $A = \pi$ ，以及保真度度量（44）中的相同目标相位 Φ ；因此，这种比较仅反映相位模式本身的影响。

我们强调，参考序列 UPh6a、UPh10a、UPh14a 和 UPh26a 本身就是 Torosov构造中的通用复合相位门；因此，我们比较的是具有相同标称脉冲面积和目标相位的通用 设计。观察到的优势源于相位模式不同：我们的设计以更少的脉冲实现相同（或更高）的误差抑制，并获得更宽的高保真平台。

A. 模型与保真度度量

我们在旋波近似下模拟受驱动的两能级系统。对于相位为φ的脉冲，我们假设拉比频率和失谐恒定（矩形脉冲模型），

$$\Omega(t) = \Omega, \qquad \Delta(t) = \Delta \qquad (t_i \le t \le t_f), \tag{36}$$

并将激光相位纳入非对角耦合。脉冲的哈密顿量为

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} -\Delta & \Omega e^{i\varphi} \\ \Omega e^{-i\varphi} & \Delta \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2}\Big[\Omega(\cos\varphi\,\sigma_x + \sin\varphi\,\sigma_y) + \Delta\,\sigma_z\Big]. \tag{37}$$

每个脉冲由标称脉冲面积$A = \Omega_0 T$ 和相位 φ表征，其中 T 为脉冲持续时间，Ω_0 为标称（设计）拉比频率。在模拟中，我们对所有脉冲设定 $A = \pi$ 。脉冲面积

（振幅）误差通过缩放拉比频率引入，具体如下：

$$\Omega = \Omega_0(1+\epsilon_A), \tag{38}$$

其中，ϵ_A 表示相对振幅误差。失谐以标称拉比频率为单位表示，即 $\delta = \Delta/\Omega_0$。因此，保真度景观绘制于参数平面（ϵ_A，δ）中。

对于恒定的 Ω 和 Δ，单脉冲传播子具有闭式表达。定义广义拉比频率

$$\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}, \tag{39}$$

脉冲期间累积的旋转角为

$$\theta = \Omega_{\text{eff}} T = A\sqrt{(1+\epsilon_A)^2 + \delta^2}, \tag{40}$$

且旋转轴为

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\epsilon_A)^2+\delta^2}}\Big((1+\epsilon_A)\cos\varphi,\ (1+\epsilon_A)\sin\varphi,\ \delta\Big). \tag{41}$$

单脉冲对应的幺正算符为

$$\mathbf{U}(A,\varphi;\epsilon_A,\delta) = \cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\mathbf{1} - i\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big)(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}). \tag{42}$$

复合相位门由相位列表$\{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ 指定（此处采用公共标称面积 $A=\pi$）。总传播算符通过按顺序相乘得到，

$$\mathbf{U}_{\text{tot}} = \mathbf{U}(A,\varphi_N)\cdots\mathbf{U}(A,\varphi_2)\mathbf{U}(A,\varphi_1), \tag{43}$$

其中所有脉冲共享相同的（ϵ_A，δ）。

为量化性能，我们采用一种与全局相位无关的保真度，该保真度基于实际传播算符 $\mathbf{U}_{\text{tot}}$ 与理想目标相位门 $\mathbf{G}(\Phi)$ 之间的酉重叠。由于全局相位没有物理影响，我们定义

$$F = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Tr}\left[\mathbf{G}^{\dagger}(\Phi)\,\mathbf{U}_{\text{tot}}\right]\right|, \tag{44}$$

其满足 $F=1$ 当且仅当对于某个全局相位 χ，$\mathbf{U}_{\text{tot}} = e^{i\chi}\mathbf{G}(\Phi)$。在图中，我们绘制不保真度 $1-F(\epsilon_A,\delta)$ 的等高线，以勾勒出高保真度工作区域。

我们注意到，所得的保真度景观基本上独立于目标相位 Φ：改变 Φ主要会使整体累积相位发生偏移，同时使高保真平台在（ϵ_A，δ）参数平面中的形状和范围几乎保持不变。这种相位独立性是通用构造的直接结果；该构造确保任意动力学相位 α下的主导误差项相互抵消，因此不依赖于目标门相位的任何特定选择。

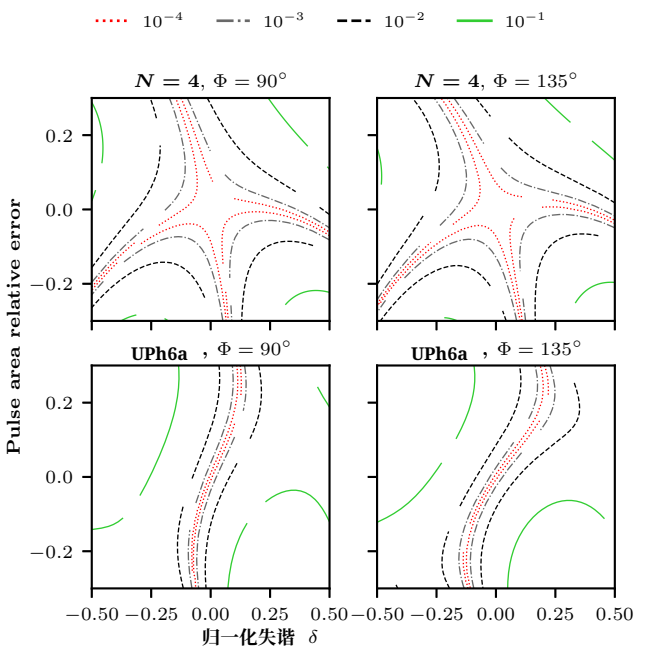

图1：我们的四脉冲通用复合相位门（上）和 Torosov 的通用六脉冲门 UPh6 *et al.* [18] 对应的目标相位门$\mathbf{G}(\Phi)$的数值保真度景观。标注的等高线表示固定的无保真度 $1-F=10^{-m}$。

B. 参数扫描与比较

对于每种门设计，我们在参数平面中的均匀 100×100 网格上评估 F，

$$\epsilon_A \in [-0.3, 0.3], \qquad \delta \in [-0.5, 0.5], \tag{45}$$

即每个序列包含 10^4 个参数点。在每个网格点，我们通过公式（42）计算单脉冲传播算符，根据公式（43）构造 $\mathbf{U}_{\text{tot}}$，并通过公式（44）评估保真度。

图1比较了我们的通用四脉冲序列与参考文献 [18] 中的通用六脉冲序列 UPh6a，所针对的两个目标相位分别为 $\Phi=90°$ 和 $\Phi=135°$。参考文献中的 UPh6a 可视为两个通用 π 脉冲序列（U3）的串联，[17] 每个序列包含三个脉冲。与我们的构造一致，四脉冲门的鲁棒性曲线基本上与 Φ 无关，因为解析条件确保了对任意动力学相位 α 的抵消。由此得到的高保真平台明显宽于 UPh6a 的平台，这与主导泄漏标度 $U_{12}^{(4)} = O(\epsilon^3)$ 相符。

图2比较了我们的 $N=8$ 通用复合相位门与通用相位门序列 UPh10a、UPh14a 和 UPh26a [18] 在一个具有代表性的目标相位 $\Phi=90°$下的表现。尽管我们的构造使用的组成脉冲比 UPh14a 少，但在脉冲面积误差和失谐误差同时 存在时，它呈现出明显更宽的高保真平台。这种增强的鲁

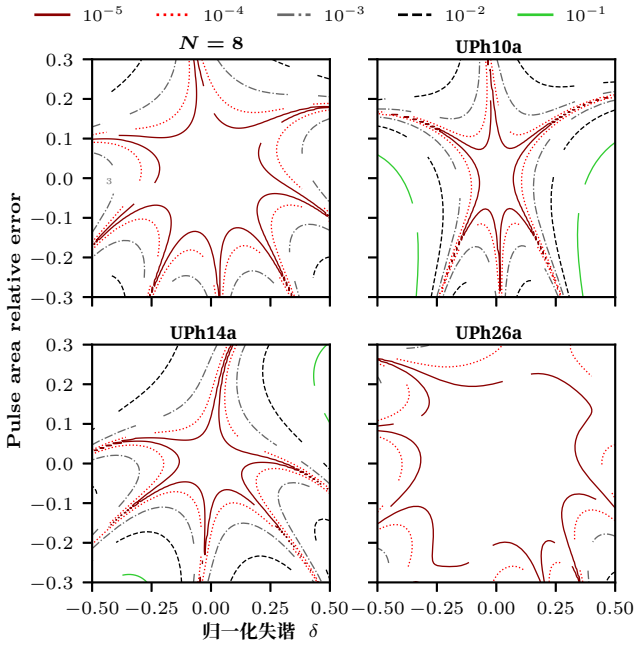

图 2：目标相位门 G(Φ) 的数值保真度景观：我们的八脉冲通用复合相位门（左上）与基于两组通用 π 脉冲序列（UPh10a、UPh14a、UPh 26 [18] $1-F=$a) 10^{-m} 的相位门构造进行比较。等高线标签表示固定的不保真度。

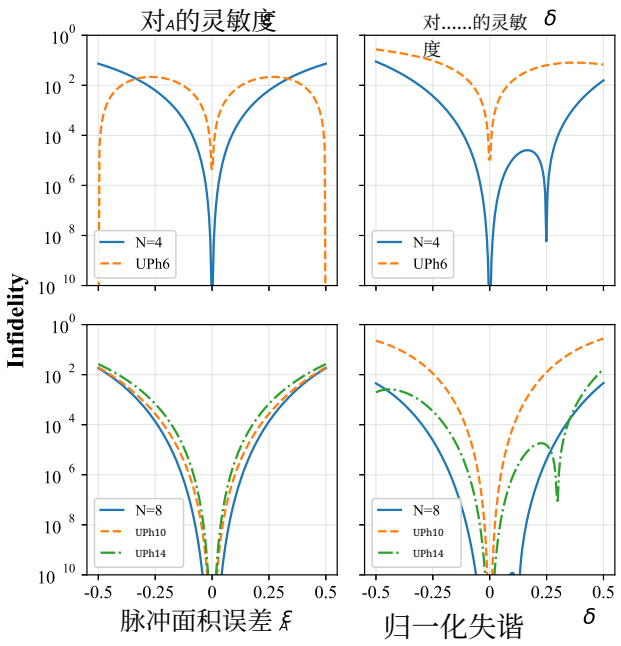

图 3：我们的通用复合相位门与 Torosov 序列的不保真度一维截面对比。上排：$N = 4$（蓝色实线）与 UPh6a（橙色虚线）。下排：$N = 8$（蓝色实线）与 UPh10a（橙色虚线）和 UPh14a（绿色点划线）。左列：在 $\delta = 0$ 处，不保真度随脉冲面积误差 ϵ_A 的变化。右列：在 $\epsilon_A = 0$ 处，不保真度随归一化失谐 δ 的变化。

棒性与通用展开所预测的更高阶泄漏抑制相一致，即 $U_{12}^{(8)} = O(\epsilon^5)$。

为进行更定量的比较，图 3 展示了沿 $\epsilon_A = 0$ and $\delta = 0$ 轴的不保真度一维截面。顶排确认，我们的四脉冲门实现了比六脉冲 UPh6a 更宽的高保真度区域；底排则表明，我们的八脉冲门仅用 8 个脉冲便胜过 UPh10a，并可媲美 UPh14a，后者需要 14 个脉冲。

为验证一般相位处方（31）的性能，图 4 展示了在代表性目标相位 $\Phi = \pi/4$ 下，$N = 4$、8、12 和 20 脉冲通用复合相位门的非保真度等高线图。根据式（35），这些序列分别抵消至 $O(\epsilon)$、$O(\epsilon^3)$、$O(\epsilon^5)$ 和 $O(\epsilon^9)$ 阶的泄漏项，因此主导残差分别按 $U_{12}^{(4)} = O(\epsilon^3)$、$U_{(8)_{12}} = O(\epsilon^5)$、$U_{(12)_{12}} = O(\epsilon^7)$ 和 $U_{12}^{(20)} = O(\epsilon^{11})$ 的量级变化。

最后需要强调的是，采用矩形脉冲假设（每个脉冲期间 Ω 和 Δ 保持恒定），仅仅是为了提供清晰且可复现的数值基准。第三节推导的通用复合相位门是在单脉冲传播算符层面构建的，并不依赖任何特定的脉冲包络；因此，使用平滑脉冲形状会得到定性相似的保真度景观，呈现相同的典型高保真平台和鲁棒性趋势。

C. 使用整形脉冲进行验证

在第 III 节中，我们在单脉冲传播子的层面推导了复合相位序列，因此声称其对于实验缺陷具有普适性，且不依赖于脉冲包络的具体形状。上述数值结果是在矩形脉冲模型中，通过解析求得传播算符的闭式表达式获得的。为明确验证 (i) 在平滑脉冲形状下鲁棒性仍然存在，以及 (ii) 直接模拟动力学时能够重现预期行为，我们针对每个组成脉冲使用薛定谔方程的时域解重复进行参数扫描，而非使用式 (42)。由于整形脉冲哈密顿量与矩形脉冲基准并不完全相同，高保真平台的形状会有所不同；尽管如此，它们仍呈现出相同的定性鲁棒性趋势和宽广的高保真区域，证实观测到的性能是复合相位模式本身的特性，而非闭式矩形脉冲传播子的产物。

具体而言，我们用

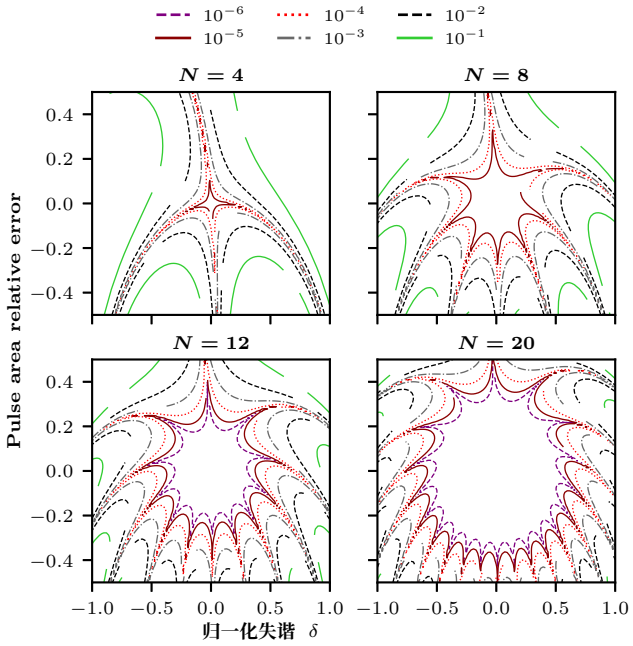

图 4：采用一般相位公式 (31) 构造的 4、8、12 和 20 个脉冲通用复合相位门，其目标相位门 $\mathbf{G}(\Phi)$ 的数值保真度景观。等高线标签表示固定的不保真度 $1 - F = 10^{-m}$。

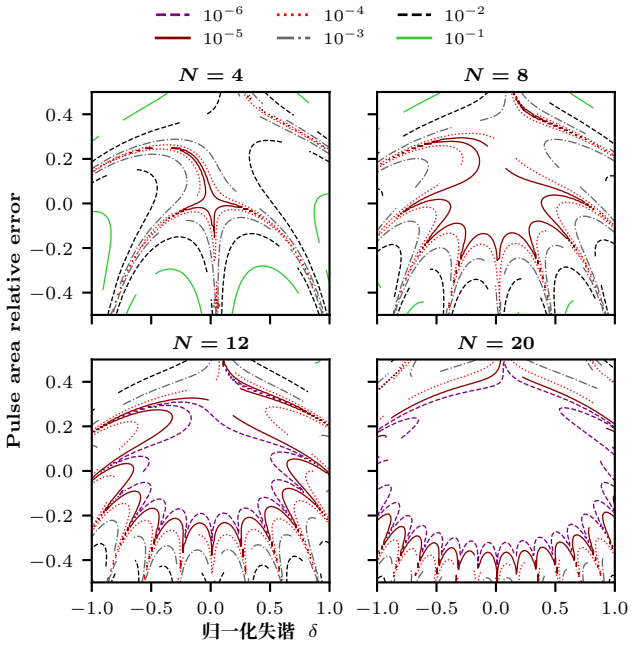

图 5：采用截断高斯脉冲包络，通过求解含时薛定谔方程得到的目标相位门 $\mathbf{G}(\Phi)$ 的数值保真度景观；所用通用复合相位门与图 4 的相位模式相同。等高线标签表示固定的不保真度 $1 - F = 10^{-m}$。

截断高斯拉比包络取代恒定 Ω 的假设，同时保持每个脉冲相同的标称脉冲面积 $A = \int_{t_i}^{t_f} \Omega(t)\, dt = \pi$。对于持续时间为 T 的脉冲，我们取 $\Omega(t) = \Omega_0(1+\epsilon_A)\, g(t)$，其中 $g(t)$ 是一个以 $T/2$ 为中心、标准差为 $\sigma = 0.18\,T$ 的高斯函数，并通过令 $g(t) = 0$（当 $|t - T/2| > 2.5\,\sigma$ 时）来截去尾部。对包络进行归一化，使其在 $[0, T]$ 上的时间平均值等于 1，从而确保标称脉冲面积仍为 $A = \Omega_0 T = \pi$，因此可与矩形脉冲情形直接类比。随后，对哈密顿量 (37) 在该整形 $\Omega(t)$ 下的演化进行时间排序，得到复合传播算符，并使用公式 (44) 计算保真度。相应的等高线图见图 5。

V. 结论

我们基于单脉冲传播子的通用凯莱–克莱因参数化，系统地构造了普适复合相位门。与利用奇数个脉冲实现稳健布居反转的通用复合 π 脉冲不同，我们设计的相位门采用偶数个标称 π 脉冲，使布居返回初始值，同时累积预定的相对相位。通过将不期望的非对角元 U_{12} 在 $\epsilon = 0$ 附近展开为幂级数，并要求其首项系数对任意动力学相位 α逐阶抵消，即可实现普适性，且无需对物理缺陷如何映射到（ϵ，α）作任何假设。因此，所构造的门本质上对任意驱动场参数（脉冲面积、失谐、交流斯塔克频移、啁啾等）的变化都具有鲁棒性，并适用于任意脉冲形状。

本研究的一项核心成果是为任意偶数个脉冲N给出了一种简洁的解析相位方案，该方案可产生目标相位 Φ [连续可调的单参数族普适复合相位门（方程 (24) 和 (31)）]。受、8、和 12 个脉冲情况下得到的显式闭式解启发，我们推导出一个一般表达式，可生成任意偶数 N 对应的相位集合。我们还通过对所有不超过 $N = 26$个脉冲的偶数情况显式计算复合传播子，进一步验证了这一方案。由此得到的序列将主导泄漏贡献抑制到 U_{12} 的高阶，在保持相位门角度完全可调的同时，形成宽阔平坦的高保真平台。

最后，第 IV 节中的数值模拟证实了所预测的鲁棒性，并表明与 Torosov等人 [18]构造的复合相位门相比，我们的方法具有明显的性能优势。对于相同的目标相位，我们的四脉冲门所呈现的高保真区域显著宽于通用六脉冲 UPh6a 序列；而我们的高阶设计则实现了与长得多的 Torosov-

型序列相当或更优的鲁棒性。这些结果表明，我们的通用复合相位门为量子信息处理及相关相干控制应用中的高保真、抗误差相位控制提供了一种简单而灵活的途径。

致谢

本研究部分由保加利亚国家恢复与韧性计划资助，合同编号 BG-RRP-2.004-0008-C01 SUMMIT：索非亚大学创新与技术转移推进项目，项目编号 3.1.4。

[1] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*（剑桥大学出版社，1990）。[2] P. W. Shor，载于《第35届计算机科学基础年度研讨会论文集》，S. Goldwasser 编（IEEE计算机学会，洛斯阿拉米托斯，1994），第124页。[3] P. W. Shor，《SIAM科学与统计计算杂志》**26**，1484（1997）。[4] L. K. Grover，《物理评论快报》**79**，325（1997）。[5] T. Calarco、D. Jaksch、J. I. Cirac 和 P. Zoller，《光学杂志B》**4**，430（2002）。[6] M. V. Berry，《伦敦皇家学会会刊，A辑》**392**，45（1984）。[7] R. G. Unanyan、B. W. Shore 和 K. Bergmann，《物理评论A》**59**，2910（1999）。[8] R. Unanyan、M. Fleischhauer、B. W. Shore、K. Bergmann，《光学通讯》**155**，144（1998）。[9] A. Ekert、M. Ericsson、P. Hayden、H. Inamori、J. A. Jones、D. K. L. Oi 和 V. Vedral，《现代光学杂志》**47**，2501（2000）。[10] H. Goto 和 K. Ichimura，《物理评论A》**70**，012305（2004）。[11] X. Lacour、S. Gu´erin、N. V. Vitanov、L. P. Yatsenko 和 H. R. Jauslin，《Opt. Commun.》**264**，362（2006）。[12] M. H. Levitt 和 R. Freeman，《J. Magn. Reson.》**33**，473（1979）。[13] R. Freeman、S. P. Kempsell 和 M. H. Levitt，《J. Magn. Reson.》**38**，453（1980）。[14] M. H. Levitt，《Prog. Nucl. Magn. Reson. Spectrosc.》**18**，61 1986（）。[15] R. Freeman，*Spin Choreography*（Spektrum，牛津，1997）。[16] G. T. Genov、D. Schraft、T. Halfmann 和 N. V. Vi- tanov，《Phys. Rev. Lett.》**113**，043001（2014）。[17] G. T. Genov、M. Hain、N. V. Vitanov 和 T. Halfmann，《Phys. Rev. A》**101**，013827（2020）。[18] B. T. Torosov 和 N. V. Vitanov，《Phys. Rev. A》**90**，012341 2014（）。[19] H. L. Gevorgyan 和 N. V. Vitanov，《Phys. Rev. A》**109**，052625 2024（）。[20] L. Allen 和 J. H. Eberly，*Optical Resonance and Two-Level Atoms* 1975（威利，纽约，）。[21] B. W. Shore，*The Theory of Coherent Atomic Excitation*（威利，纽约，1990）。