arXiv:2601.13937v1 [math.MG] 20 Jan 2026

凸体的装箱极小值

MEI HAN、MARTIN HENK 和 FEI XUE

摘要。2021年，Henk、Schymura 和 Xue 引入了与凸体和格相关的装填极小值，作为 Kannan 和 Lovász 的覆盖极小值的装填对应概念。受关于连续极小值体积不等式的猜想启发，我们将装填极小值的定义推广到所有原点位于其内部的凸体。对于这些装填极小值，我们提出了若干新的体积不等式，并计算了若干特殊凸体的装填极小值的具体数值。

1. 引言

令 $\mathcal{K}^n$ 为所有凸体的集合，即 n维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$中具有非空内部的紧凸集，并令 $\mathcal{K}^n_{(o)}$ 为所有原点位于其内部的凸体构成的子集，即 $\mathbf{0} \in \mathrm{int}(K)$。所有 o-对称凸体组成的族，即 $K = -K$，记为 $\mathcal{K}^n_s$。若凸体 K的质心，

$$\mathrm{cen}(K) = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K \mathbf{x}\, \mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

是原点， K 称为中心的，所有中心凸体记为 $\mathcal{K}^n_c$；这里 $\mathrm{vol}(K)$ 表示体积，即 K 的 n 维勒贝格测度。

格 Λ 是 $\mathbb{R}^n$ 的离散子群，我们用 $\det(\Lambda)$ 表示其行列式；也就是说，若 Λ 的维数为 k，则 $\det(\Lambda)$ 是 Λ的一个基本胞的（k维）体积。令 $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ 为整数格，并令 $\mathcal{L}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$中所有 n维格组成的集合。

对于 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$ 和 $\Lambda \in \mathcal{L}^n$， i个连续极小值 $\lambda_i(K, \Lambda)$ 是最小的膨胀因子 $\lambda > 0$ ，使得 λK 至少包含 i 个来自 Λ的线性无关格点，即，

$$\lambda_i(K, \Lambda) := \min\{\lambda > 0 : \dim(\lambda K \cap \Lambda) = i\}.$$

显然， $\lambda_1(K, \Lambda) \le \lambda_2(K, \Lambda) \le \cdots \le \lambda_n(K, \Lambda)$。连续极小值这一概念最初由 Minkowski 于 1896 [9] 在其具有开创性和指导意义的著作《Geometrie der Zahlen》中针对 o-对称凸体提出。为了使连续极小值这一概念适用于任意凸体，我们还需要

日期：2026年1月21日。2020 数学主题分类。 主要分类 52C07；次要分类 11H06、52C05。关键词与短语。 格、凸体、装填极小值、连续极小值、体积不等式。第一作者的研究由中德（CSC-DAAD）博士后奖学金项目（57718047）资助。第三作者的研究由中国国家自然科学基金（NSFC 12201307）资助。

凸体 $K \in \mathcal{K}^n$ 的差体 K_s，其定义为 $K_s := K - K$。根据定义， K_s 是一个 o-对称凸体。

Minkowski 所谓的闵可夫斯基连续极小值第二定理给出了一个关于 o-对称凸体体积的漂亮上界和下界，这些界用其连续极小值表示（参见，例如， [9]），并且很容易将其表述为适用于任意凸体的更一般形式（参见）。

定理 I（闵可夫斯基连续极小值第二定理）。设 $K \in \mathcal{K}^n$ 且$\Lambda \in \mathcal{L}^n$。则

$$\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i(K_s,\Lambda)} \le \frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda)} \le \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i(K_s,\Lambda)}.$$

两个界都是最佳可能的。下界可由一个简单的包含关系论证得到；然而，上界被认为是数的几何中的一个深刻而重要的结果。

因此，过去一百年来，人们一直在研究可能的推广和扩展。其中一个非常著名的推广归功于 1946年的 Davenport。为了介绍这一结果，我们需要

$$\delta^l(K) := \sup\left\{\frac{\mathrm{vol}(\lambda_1(K_s,\Lambda)K)}{\det(\Lambda)} : \Lambda \in \mathcal{L}^n\right\},$$

所谓的格堆积密度，即 K的最密格堆积的密度。注意， $\delta^l(K) \le 1$。第一个连续极小值 $\lambda_1(K_s, \Lambda)$ 也被称为 K 和 Λ的堆积半径，因为它是满足下式的最大膨胀因子 $\rho > 0$

$$\mathrm{int}(\rho K + \mathbf{x}) \cap \mathrm{int}(\rho K + \mathbf{y}) = \emptyset$$

对于 Λ 中任意两个不同的格点$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 。这里，int(·) 表示集合的内部。根据密度的定义，有

$$\frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda)} \le \delta^l(K)\cdot\left(\frac{1}{\lambda_1(K_s,\Lambda)}\right)^n, \tag{1.1}$$

Davenport 提出了以下加强命题：

问题 II（Davenport [2]）. 设 $K \in \mathcal{K}^n$。以下命题是否成立：

$$\frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda)} \le \delta^l(K)\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i(K_s,\Lambda)} \ ? \tag{1.2}$$

显然，这将显著改进定理 I 中的闵可夫斯基上界。迄今为止，这个问题仅在 $n = 2$ 的情形下以及椭球的情形下由 Minkowski 作出了肯定回答（见 [9] 和 [3]）；$n = 3$ 的情形则由 Woods [10] 解决。更多信息请参见 [3]。

另一种推广方向是直接相对于凸体而非差体来计算连续极小值，因为相对于差体的计算原则上只能对 o-对称凸体给出最优结果。在 [5], 中，Henk 等人从这一角度研究了中心凸体，并证明了一个最优下界，以及其他结论。

定理 III ([5])。 设 $K \in \mathcal{K}_c^n$ 和 $\Lambda \in \mathcal{L}^n$。则，

$$\frac{n+1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i(K,\Lambda)} \le \frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda)}$$

当且仅当存在 Λ 的一组基$\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_n$ 以及正数$\nu_1,...,\nu_n > 0$ 使得

$$K = \mathrm{conv}\{\nu_1\mathbf{b}_1,...,\nu_n\mathbf{b}_n, -(\nu_1\mathbf{b}_1+\cdots+\nu_n\mathbf{b}_n)\}.$$

这里，conv(·)表示一个集合的凸包。相应的上界仍是一个未解决的问题，并且与所谓的 Ehrhart 猜想有关；相关信息见 [4] 。

2021年，Henk 等人 [6] 引入了装填极小值，作为 Kannan 和 Lovász [7]提出的覆盖极小值的对应概念，并以此在 K 的连续极小值与其极体的连续极小值之间进行插值。我们将他们的定义稍作推广，使其适用于所有原点位于内部的凸体。对于 $K \in \mathcal{K}_{(o)}^n$、 $\Lambda \in \mathcal{L}^n$ 以及 $1 \le i \le n$，我们将 i阶装填极小值$\rho_i(K,\Lambda)$定义为

$$\rho_i(K,\Lambda) = \inf\{\rho > 0 : (\rho K + L) \cap \Lambda \neq L \cap \Lambda, \text{ for all } L \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, n-i)\}.$$

这里， $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n,k)$表示所有 k维线性子空间构成的格拉斯曼流形$\mathbb{R}^n$。我们的第一个结果是一个关于这些装填极小值、具有定理 III 风格的不等式。

定理 1.1。 设 $K \in \mathcal{K}_c^n$和 $\Lambda \in \mathcal{L}^n$。则

$$\frac{n+1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\rho_i(K,\Lambda)} \le \frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda)}, \tag{1.3}$$

且该不等式是最佳可能的。

由于 $\rho_i(K,\ \Lambda) \le \lambda_{n-i+1}(K,\ \Lambda)$（见命题 2.2），该不等式改进了定理 III。因此，如果定理 III 中取等号，那么定理 1.1 中也取等号。我们指出，对于任意凸体，关于其差体的装填极小值 $\rho_i(K_s,\ \Lambda)$， [6, 定理 1.2] 中已证明

$$\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\rho_i(K_s,\Lambda)} \le \frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda)}. \tag{1.4}$$

在这里，我们用一个“Davenport 型”上界补充这个下界。

定理 1.2。 设 $K \in \mathcal{K}^n$ 和 $\Lambda \in \mathcal{L}^n$。则，

$$\frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda)} \le \delta^l(K)\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\rho_i(K_s,\Lambda)}.$$

显然，这个不等式弱于问题 II 中的猜想（见命题 2.2），但它通过格密度将凸体的形状纳入考量；尤其是，它改进了上界 [6, 定理 1.2]。

一般而言，装填极小值很难计算。对于一个凸体 K （在至多经过可逆对角变换后）位于单位交叉多胞体与单位立方体之间，我们总有 $\rho_i(K_s,\mathbb{Z}^n) = \lambda_{n-i+1}(K_s,\mathbb{Z}^n)$（见命题 4.1），这

这意味着，这类凸体与整数格符合问题 II，即 Davenport问题。然而，对于中心单纯形

$$T_n := -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i + (n+1)\mathrm{conv}\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\},$$

其中 $\mathbf{e}_i$ 表示第 i 个单位向量，确定其装填极小值是一个颇具挑战且有趣的问题。

定理1.3。对于 $i = 1,\ldots, n$ 有

$$\rho_i(T_n, \mathbb{Z}^n) = \frac{1}{\left\lfloor \frac{n}{i+1} \right\rfloor + 1}.$$

注意，显然有 $\lambda_i(T_n, \mathbb{Z}^n) = 1, i = 1, \ldots, n$。

本文安排如下。下一节将汇总装填极小值的一些基本性质，特别指出其在连续极小值与极体的连续极小值之间所具有的插值性质。定理 1.1 和定理 1.2 的证明见第3节，而定理1.3较为技术性的证明则在第4节给出。

2. 装填极小值的基本性质

在我们的记号中， [6]中引入并研究的凸体的装填极小值是泛函 $\rho_i(K_s, \Lambda)$。由于凸体 K_s 的对称性对于其许多基本性质并非必不可少，因此我们将在证明中仅指出相较于 [6]中给出的证明所需的修改。

不过，我们先引入一些其他记号。对于 $L \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, k)$，我们用$L^\perp \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, n-k)$表示其正交补；对于 $S \subset \mathbb{R}^n$， S 在 L 上的正交投影记为 $S|L$。对于格 $\Lambda \in \mathcal{L}^n$，令

$$\mathcal{G}(\Lambda, k) := \{L \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n, k) : \dim(L \cap \Lambda) = k\}$$

Λ的所有 k 维线性格平面的集合。这些平面恰好是满足 $\Lambda|L^\perp$ 仍为格的平面，即 $\mathbb{R}^n$的离散子群。

采用这些记号，我们可像 [6, 引理 2.1]那样，得到对装填极小值更为方便的如下描述。

命题 2.1. 设 $\mathcal{K}^n_{(o)}$ 和 $\Lambda \in \mathcal{L}^n$。对于 $1 \le i \le n$，有

$$\rho_i(K, \Lambda) = \max\{\lambda_1(K|L^\perp, \Lambda|L^\perp) : L \in \mathcal{G}(\Lambda, n-i)\}.$$

证明。与 [6, 引理 2.1] 的证明相同，由 $\mathbb{R}^n$ 的闭加法子群的刻画可知，只需考虑格平面，并且

$$\rho_i(K, \Lambda) = \sup\{\lambda_1(K|L^\perp, \Lambda|L^\perp) : L \in \mathcal{G}(\Lambda, n-i)\}.$$

令 B^n 为 n 维单位球，并令 $r\,B^n \subseteq K$，其中某个 $r > 0$。那么对于任意 $L \in \mathcal{G}$（Λ， $n-i$），我们有：结合定理 I 中的闵可夫斯基上界

$$\lambda_1(K|L^\perp, \Lambda|L^\perp) \le \lambda_1(r\,B^n|L^\perp, \Lambda|L^\perp) \le 2 \cdot \left(\frac{\det(\Lambda|L^\perp)}{\mathrm{vol}_i(r\,B^n|L^\perp)}\right)^{\frac{1}{i}},$$

其中 $\mathrm{vol}_i(\cdot)$ 表示 i 维体积，即相对于 $L^\perp$ 的勒贝格测度。与 [6, 引理 2.1] 的证明一样，由这个不等式可知，为了求得 $\sup\{\lambda_1(K|L^\perp,\ \Lambda|L^\perp):\ L\in\mathcal{G}(\Lambda,\ n-i)\}$，只需考虑有限多个格平面。□

接下来，对于集合 $S\subseteq\mathbb{R}^n$，令 $S^\star:=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n:\langle\mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle\le 1$ 对所有 $\mathbf{x}\in S\}$ 表示其极集，对于 $\Lambda\in\mathcal{L}^n$，令 $\Lambda^\star$ 表示其极格，即:

$$\Lambda^\star:=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n:\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\in\mathbb{Z}\text{ for all }\mathbf{x}\in\Lambda\}.$$

我们注意到（见）

$$\mathcal{G}(\Lambda^\star,k)=\{L^\perp:L\in\mathcal{G}(\Lambda,n-k)\}. \tag{2.1}$$

如引言中所述，引入装填极小值是为了在连续极小值与极体（相对于极格）的连续极小值之间进行插值。在我们的设定中，这一关系如下。

命题 2.2。设 $K\in\mathcal{K}^n_{(o)}$，$\Lambda\in\mathcal{L}^n$，并令 $\gamma\in(0,1]$，使得 $-\gamma K\subseteq K$。对于$1\le i\le n$，有

$$\frac{\gamma}{\lambda_i(K^\star,\Lambda^\star)}\le\rho_i(K,\Lambda)\le\lambda_{n-i+1}(K,\Lambda).$$

此外，我们有 $\rho_n(K,\Lambda)=\lambda_1(K,\Lambda)$ 以及 $\rho_1(K,\Lambda)\le\lambda_1\frac{1}{K^\star(,\ \Lambda^\star)_\circ}$

在给出证明之前，我们指出，对于一个 o-对称凸体 K，我们可以选择 $\gamma=1$，因此，在上述陈述中将 K 替换为 $K-K$，便得到[6, 命题 1.1]。

对于下界，假设 $n\ge 2$，我们称 $\gamma=\frac{1}{n}$ 是一个“近乎n最优”的参数。注意第 1 节中提到的中心单纯形 $T_n=-\sum\mathbf{e}_i+(n+1)\mathrm{conv}\{\mathbf{0},\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n\}$,$_{i=1}$，显然，$-\frac{1}{n}T_n\subseteq T_n$。定理1.3给出

$$\rho_i(T_n,\mathbb{Z}^n)\ge\frac{2}{n+2}\ge\frac{1}{n}$$

fro $i=1,2,...,n$.

转到单纯形

$$T_n^\star=\mathrm{conv}\left\{-\mathbf{e}_1,-\mathbf{e}_2,...,-\mathbf{e}_n,\sum_{i=1}^n\mathbf{e}_i\right\}.$$

根据定理 1.1 后的注记、定理 III 和命题 2.2，对于$1\le i\le n$，我们有

$$\rho_i(T_n^\star,\mathbb{Z}^n)=\lambda_{n-i+1}(T_n^\star,\mathbb{Z}^n)=1,$$

根据命题 2.2，这也意味着 $\rho_i(T_n,\mathbb{Z}^n)$ 有类似的下界。由此可见，$\gamma=\frac{1}{n}$ 确实是一个“近乎最优”的参数,而 T_n 是与该参数相关的“近乎最优”候选对象。

证明。上界可以用与 [6, 命题 1.1],相同的方法证明，并且根据 $\rho_n(K,\ \Lambda)$的定义，它等于 $\lambda_1(K,\ \Lambda)$。

对于下界，我们固定一个 $L\in\mathcal{G}(\Lambda^\star,i)$，使得 $\lambda_i(K^\star\cap L,\Lambda^\star\cap L)=\lambda_i(K^\star,\Lambda^\star)$。根据命题 2.1 和 (2.1)，只需证明

$$\gamma\le\lambda_i(K^\star\cap L,\Lambda^\star\cap L)\lambda_1(K|L,\Lambda|L).$$

由于 $K^\star \cap L^\perp = (K|L)^\star$ 和 $\Lambda^\star \cap L^\perp = (\Lambda|L)^\star$，可将其改写为

$$\gamma \le \lambda_i((K|L)^\star, (\Lambda|L)^\star)\lambda_1(K|L, \Lambda|L).$$

换言之，给定一个 i 维凸体 $M = K|L$，满足 $-\gamma M \subseteq M$，以及一个 i 维格 $\Gamma = \Lambda|L$，我们要证明

$$\gamma \le \lambda_i(M^\star, \Gamma^\star)\lambda_1(M, \Gamma). \tag{2.2}$$

然而，这与对称情形下的证明类似（参见例如 [3, 定理 23.2]）：令 $\mathbf{v}_1 \in \Gamma\backslash\{\mathbf{0}\}$，并取 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_i \in \Gamma^\star$，使它们线性无关，且满足 $(1/\lambda_1(M,\Gamma))\,\mathbf{v}_1 \in M$ 以及 $(1/\lambda_i(M^\star,\Gamma^\star))\,\mathbf{w}_i \in M^\star$。那么我们还有 $(1/\lambda_1(M,\Gamma))\ \pm\gamma\mathbf{v}_1 \in M$，由极体的定义可得 $1 \le i \le n$

$$\gamma\langle \pm\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_i\rangle \le \lambda_i(M^\star, \Gamma^\star)\lambda_1(M, \Gamma).$$

由于 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_i \in L$ 线性无关，且 $\mathbf{v}_1 \neq 0$，这些内积中必有一个非零。通过调整 $\mathbf{v}_1$ 的符号，我们可以假设该内积为正；根据极格的定义，得到 (2.2)。

最后，我们考虑 $i = 1$ 的情形。根据 (2.1)，有

$$\rho_1(K, \Lambda) = \max\{\lambda_1(K|\mathbf{u}^\star, \Lambda|\mathbf{u}^\star) : \mathbf{u}^\star \in \Lambda^\star \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

这里，我们写作 $\cdot|\mathbf{u}^\star$，表示到向量 $\mathbf{u}^\star$ 的线性包上的正交投影。若 $\mathbf{u}^\star \in \Lambda^\star \setminus \{\mathbf{0}\}$ 是本原向量，即 $\mathbf{u}^\star$ 是 $\Lambda^\star \cap \operatorname{conv}\{\mathbf{0}, \mathbf{u}^\star\}$ 中唯一的非零格向量，则 $\det(\Lambda|\mathbf{u}^\star) = 1/\|\mathbf{u}^\star\|$，其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数。因此，

$$\lambda_1(K|\mathbf{u}^\star) = \min\left\{\frac{1}{\mathrm{h}_K(\mathbf{u}^\star)}, \frac{1}{\mathrm{h}_K(-\mathbf{u}^\star)}\right\},$$

其中 $\mathrm{h}_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，且 $\mathrm{h}_K(\mathbf{u}) = \max\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle : \mathbf{x} \in K\}$ 是 K 的支撑函数。记 $\mathrm{r}_{K^\star} : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$，由 $\mathbf{u} \mapsto \max\{\mu > 0 : \mu\mathbf{u} \in K^\star\}$ 给出，它是 $K^\star$ 的径向函数。由极性可知，$\mathrm{h}_K(\mathbf{u}) = 1/\mathrm{r}_{K^\star}(\mathbf{u})$。由于 $\pm\mathbf{u}^\star \in (1/\mathrm{r}_{K^\star}(\pm\mathbf{u}^\star))K^\star$，我们得到

$$\lambda_1(K|\mathbf{u}^\star) = \min\left\{\mathrm{r}_{K^\star}(\mathbf{u}^\star), \mathrm{r}_{K^\star}(-\mathbf{u}^\star)\right\} \le \frac{1}{\lambda_1(K^\star, \Lambda^\star)}.$$

因此，$\rho_1(K, \Lambda) \le 1/\lambda_1(K^\star, \Lambda^\star)$。 □

3. 装填极小值的体积不等式

本节的主要目的是证明定理 1.1。为此，我们需要用到 [5] 中的以下结果。

引理 3.1 （[5, 引理 2。2]）。设 $K \in \mathcal{K}^n_c$，且 $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n \in K$ 线性无关。则

$$\operatorname{vol}(K) \ge \frac{n+1}{n!}|\det(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)|.$$

当且仅当 $K = \operatorname{conv}\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n, -(\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_n)\}$ 时，等号成立。

定理 1.1 的证明实质上可由以下命题推出。

引理 3.2. 设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$ 和 $\Lambda \in \mathcal{L}^n$。存在如下线性无关向量 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in K$ 以及 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \Lambda$，使得对于 $i = 1, \dots, n$

$$\rho_{n-i+1}(K, \Lambda)\left(\mathbf{v}_i|\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}\}^\perp\right) = \mathbf{w}_i|\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}\}^\perp.$$

证明。我们对 n使用归纳法，为简便起见，记 $\rho_i = \rho_i(K,\Lambda)$。对于$n=1$，我们只有 $\rho_1 = \lambda_1(K,\Lambda)$，因此存在一个 $\mathrm{v}_1 \in K$，使得 $\rho_1\mathrm{v}_1 = \mathrm{w}_1 \in \Lambda$。接下来假设 $n>1$。根据命题 2.2，我们有 $\rho_n = \lambda_1(K,\Lambda)$，因此取 $\mathrm{v}_1 \in K$，使得 $\mathrm{w}_1 = \rho_n \mathrm{v}_1 \in \Lambda$。接下来考虑 $(n-1)$ 维凸体 $K' = K|\{\mathrm{w}_1\}^\perp$、$(n-1)$ 维格 $\Lambda' = \Lambda|\{\mathrm{w}_1\}^\perp$，并对 $1 \le i \le n-1$ 令 $\rho_i' = \rho_i(K',\Lambda')$。按照归纳过程，我们可以找到线性无关向量 $\mathrm{v}_2', \dots, \mathrm{v}_n' \in K$ 以及 $\mathrm{w}_2', \dots, \mathrm{w}_n' \in \Lambda'$，使得对于 $i = 2, \dots, n$

$$\rho_{n-i+1}' \left(\mathbf{v}_i' | \{\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{i-1}'\}^\perp\right) = \mathbf{w}_i' | \{\mathbf{w}_2', \dots, \mathbf{w}_{i-1}'\}^\perp.$$

注意，对于 $1 \le i \le n-1$，我们有

$$\rho_i' \le \rho_i,$$

因此，取 $\mathbf{v}_i = (\rho_i'/\rho_i)\mathbf{v}_i' \in K'$, $2 \le i \le n$，可得

$$\rho_{n-i+1} \left(\overline{\mathbf{v}}_i | \{\mathbf{w}_2', \dots, \mathbf{w}_{i-1}'\}^\perp\right) = \mathbf{w}_i' | \{\mathbf{w}_2', \dots, \mathbf{w}_{i-1}'\}^\perp.$$

最后，令 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$，使得 $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i + \alpha_i \mathbf{w}_1 \in K$ 且 $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i' + \beta_i \mathbf{w}_1 \in \Lambda$，其中$2 \le i \le n$。那么，对于 $2 \le i \le n$

$$\begin{aligned}
\rho_{n-i+1} \left(\mathbf{v}_i | \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}\}^\perp\right) &= \rho_{n-i+1} \left(\mathbf{v}_i | \{\mathbf{w}_1\}^\perp | \{\mathbf{w}_2 | \{\mathbf{w}_1\}^\perp, \dots, \mathbf{w}_{i-1} | \{\mathbf{w}_1\}\}^\perp\right) \\
&= \rho_{n-i+1}' \left(\overline{\mathbf{v}}_i | \{\mathbf{w}_2', \dots, \mathbf{w}_{i-1}'\}^\perp\right) \\
&= \mathbf{w}_i' | \{\mathbf{w}_2', \dots, \mathbf{w}_{i-1}'\}^\perp \\
&= \mathbf{w}_i | \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}\}^\perp,
\end{aligned}$$

因此，我们找到了具有所需性质的向量。 □

定理 1.1 的证明现在可由最后两个引理立即推出。

定理 *1.1* 的证明。 设向量 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in K$ 和 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \Lambda$ 如引理 3.2 中所述，并设 $\rho_i = \rho_i(K,\Lambda)$, $1 \le i \le n$。于是由引理 3.1 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(K) &\ge \frac{n+1}{n!} |\det(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)| \\
&= \frac{n+1}{n!} \frac{1}{\rho_n} |\det(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 | \{\mathbf{w}_1\}^\perp, \dots, \mathbf{v}_n | \{\mathbf{w}_1\}^\perp) \\
&= \frac{n+1}{n!} \frac{1}{\rho_n} \frac{1}{\rho_{n-1}} |\det(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 | \{\mathbf{w}_1\}^\perp, \mathbf{v}_3 | \{\mathbf{w}_1\}^\perp \dots, \mathbf{v}_n | \{\mathbf{w}_1\}^\perp) \\
&= \frac{n+1}{n!} \frac{1}{\rho_n} \frac{1}{\rho_{n-1}} |\det(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 | \{\mathbf{w}_1\}^\perp, \dots, \mathbf{v}_n | \{\mathbf{w}_1\}^\perp) \\
&= \frac{n+1}{n!} \frac{1}{\rho_n} \frac{1}{\rho_{n-1}} |\det(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 | \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}^\perp \dots, \mathbf{v}_n | \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}^\perp) \\
&= \cdots \\
&= \frac{n+1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i} |\det(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n)| \\
&\ge \frac{n+1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i} \det(\Lambda).
\end{aligned}$$

□

现在我们转向 Davenport 型上界，这需要用到 [6] 中的以下结果。

引理 3.3 ([6, 引理 4.4])。设 $K \in \mathcal{K}^n$，并设 $S = \{j \in \{1, ..., n-1\} : \rho_j(K_s, \Lambda) > \rho_n(K_s, \Lambda)\} \neq \emptyset$。设 $k^* = \max\{i : i \in S\}$ 是S中的极大元素。那么存在一个 $L \in \mathcal{G}(\Lambda, n-k^*)$，使得对所有 $j \in S$，

$$\rho_j(K_s, \Lambda) = \rho_j(K_s|L^\perp, \Lambda|L^\perp).$$

定理 1.2 是下一个定理的一个特例；该定理是[6,定理 4.4]的加强。

定理 3.4。设 $K \in \mathcal{K}^n$ 和 $\Lambda \in \mathcal{L}^n$。此外，设 $0 = j_0 < j_1 < \cdots < j_m < j_{m+1} = n$ 满足 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得

(a) $\rho_{j_1}(K_s, \Lambda) > \rho_{j_2}(K_s, \Lambda) > \cdots > \rho_{j_m}(K_s, \Lambda) > \rho_{j_{m+1}}(K_s, \Lambda) = \rho_n(K_s, \Lambda)$,

(b) $\rho_j(K_s, \Lambda) \leq \rho_{j_i}(K_s, \Lambda), \quad j \in \{j_{i-1}+1, ..., j_i\}, i \in \{1, ..., m+1\}$.

于是，

$$\frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda)} \leq \delta^l(K) \cdot \prod_{i=1}^{m+1} \frac{1}{\rho_{j_i}(K_s, \Lambda)^{j_i - j_{i-1}}}. \tag{3.1}$$

证明。我们将对 m 使用归纳法。若 $m = 0$，则 $j_1 = n$，并且由 $\rho_n(K_s, \Lambda) = \lambda_1(K_s, \Lambda)$，不等式化为 (1.1)。因此，设 $m \geq 1$，并设

$$S = \{j_1, j_2, ..., j_{m-1}, j_m\}.$$

根据引理 3.3，存在一个 $L \in \mathcal{G}(\Lambda, n - j_m)$，使得对于 $l \in S$，

$$\rho_l(K_s, \Lambda) = \rho_l(K_s|L^\perp, \Lambda|L^\perp).$$

于是，根据假设，我们有

$$(\mathrm{a}_1) \quad \rho_{j_1}(K_s|L^\perp, \Lambda|L^\perp) > \rho_{j_2}(K_s|L^\perp, \Lambda|L^\perp) > \cdots > \rho_{j_m}(K_s|L^\perp, \Lambda|L^\perp).$$

此外，鉴于命题 2.1 以及定理中的假设 (b)，对于 $j \in \{j_{i-1}+1, ..., j_i\}$ 和 $i \in \{1, ..., m\}$，我们还得到

$$(\mathrm{b}_1) \quad \rho_j(K_s|L^\perp, \Lambda|L^\perp) \leq \rho_j(K_s, \Lambda) \leq \rho_{j_i}(K_s, \Lambda) = \rho_{j_i}(K_s|L^\perp, \Lambda|L^\perp).$$

因此，采用归纳法可得

$$\begin{aligned} \delta^l(K|L^\perp) &\geq \frac{\mathrm{vol}_{j_m}(K|L^\perp)}{\det(\Lambda|L^\perp)} \prod_{i=1}^{m} \rho_{j_i}(K_s|L^\perp, \Lambda|L^\perp)^{j_i - j_{i-1}} \\ &= \frac{\mathrm{vol}_{j_m}(K|L^\perp)}{\det(\Lambda|L^\perp)} \prod_{i=1}^{m} \rho_{j_i}(K_s, \Lambda)^{j_i - j_{i-1}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

设 $\widetilde{\Lambda} \subset L^\perp$ 是 $K|L^\perp$ 的最密堆积格，即，

$$\delta(K|L^\perp) = \frac{\mathrm{vol}_{j_m}(K|L^\perp)}{\det(\widetilde{\Lambda})},$$

并令 $\overline{\Lambda} \subset L$ 为$n - j_m$维格

$$\overline{\Lambda} = \frac{1}{\lambda_1(K_s, \Lambda)} (\Lambda \cap L).$$

那么 $\widetilde{\Lambda}\oplus\Lambda$是 K的装箱格，或者等价地说是 $\frac{1}{2}K_s$的装箱格，并由（3.2）可得

$$\begin{aligned}\delta^l(K) &\geq \frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\widetilde{\Lambda}\oplus\overline{\Lambda})}\\ &= \delta(K|L^{\perp})\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}_{j_m}(K|L^{\perp})}\frac{\lambda_1(K_s,\Lambda)^{n-j_m}}{\det(\Lambda\cap L)}\\ &\geq \frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda|L^{\perp})\det(\Lambda\cap L)}\lambda_1(K_s,\Lambda)^{n-j_m}\prod_{i=1}^{m}\rho_{j_i}(K_s,\Lambda)^{j_i-j_{i-1}}\\ &= \frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda)}\prod_{i=1}^{m+1}\rho_{j_i}(K_s,\Lambda)^{j_i-j_{i-1}}.\end{aligned}$$

□

定理 *1.2* 的证明。 根据定理 3.4 中的记号，由 (3.1) 和条件 (b) 立即得到

$$\frac{\mathrm{vol}(K)}{\det(\Lambda)}\leq\delta^l(K)\cdot\prod_{i=1}^{m+1}\frac{1}{\rho_{j_i}(K_s,\Lambda)^{j_i-j_{i-1}}}\leq\delta^l(K)\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\rho_i(K_s,\Lambda)}.$$

□

4. 某些凸体的装填极小值

本节将研究相对于整数格的一些特殊凸体的装填极小值。

首先，令 $C_n=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ |x_i|\leq 1\}$为单位立方体，令$C_n^{\star}=\mathrm{conv}\{\pm\mathbf{e}_i:\ 1\leq i\leq n\}$ 为单位交叉多胞体，即 C_n 的极体。此外，令 $\mathcal{A}_n=\{\mathrm{diag}(a_1,...,a_n):a_i\in\mathbb{R}_{>0}\}$为所有对角线元素为正的对角矩阵构成的群，并令

$$\mathcal{K}^n_{\mathcal{A}}:=\{K\in\mathcal{K}^n:\text{There exists an }A\in\mathcal{A}_n\text{ with }C_n^{\star}\subseteq AK\subseteq C_n\}.$$

例如，无条件体，或更一般地， o-对称的局部反阻塞体（见 [1, 8]），都属于这一类。

现在令 $K\in\mathcal{K}^n_{\mathcal{A}}$ with $A=\mathrm{diag}(a_1,...,a_n)\in\mathcal{A}_n$。根据上述定义，我们有

$$\mathrm{conv}\left\{\pm\frac{1}{a_i}\mathbf{e}_i:1\leq i\leq n\right\}\subseteq K\subseteq\left\{\mathbf{x}:|x_i|\leq\frac{1}{a_i},1\leq i\leq n\right\}$$

并假设 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$，则对于 $1\leq i\leq n$，我们得到

$$\lambda_i(K,\mathbb{Z}^n)=a_i.$$

显然， $K^{\star}\in\mathcal{K}^n_{\mathcal{A}}$ 也成立，其对应的对角矩阵为 A^{-1}，且$K_s=K-K\in\mathcal{K}^n_{\mathcal{A}}$ 对应的矩阵为 $2A$。因此，由命题 2.2 可得以下结果。

命题 4.1。设 $K\in\mathcal{K}^n_{\mathcal{A}}$。那么对于 $1\leq i\leq n$

$$\frac{1}{\lambda_i(K_s^{\star},\mathbb{Z}^n)}=\rho_i(K_s,\mathbb{Z}^n)=\lambda_{n-i+1}(K_s,\mathbb{Z}^n).$$

接下来我们讨论单纯形

$$T_n = -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i + (n+1)\mathrm{conv}\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}.$$

如第2节所示，对于所有 i， $\rho_i(T_n^\star, \mathbb{Z}^n) = 1$ 均成立，这可由已知结果直接推出。为求完整起见，我们在此将其重述为一个命题，这意味着 $T_n^\star$，且整数格也与问题 II 一致。

命题4.2。对于 $i = 1, ..., n$ 成立

$$\rho_i(T_n^\star, \mathbb{Z}^n) = \lambda_{n-i+1}(T_n^\star, \mathbb{Z}^n) = 1.$$

遗憾的是， T_n 本身的装填极小值要复杂得多。

定理1.3的证明基于一个有趣而优雅的观察：沿着某些特殊方向，整个单纯形 T_n 的投影与其某个 i 维子面重合。此外，投影整数点的分布恰好满足极值条件，因此，通过证明两个相反不等式，我们便能验证等式成立。

为方便起见，设 $\mathrm{v}_0 = (-1, -1, ..., -1)$、$\mathrm{v}_1 = (n, -1, ..., -1)$、 $\cdots$、$\mathrm{v}_n = (-1, ..., -1, n)$ 为 T_n 的顶点，即 $T_n = \mathrm{conv}\{\mathrm{v}_0, \mathrm{v}1, \cdots, \mathrm{v}_n\}$，并设 $V(T_n) = \{\mathrm{v}_0, \mathrm{v}1, \cdots, \mathrm{v}_n\}$。接下来需要以下引理。

引理 4.3. 对于 $i = 1, 2, ..., n$，令 $L \in \mathcal{G}(\mathbb{Z}^n, n-i)$，并设 F 是 T_n 的一个 i 维面，使得 $\dim(F|L^\perp) = i$ 且 $\mathbf{0} \in F|L^\perp$。则

$$\lambda_1(F|L^\perp, \mathbb{Z}^n|L^\perp) \leq \frac{1}{\left\lfloor \frac{n}{i+1} \right\rfloor + 1}.$$

证明。 如上所述， $V(T_n) = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$。不失一般性，假设 $F = \mathrm{conv}\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_i\}$。由于 $\mathbf{0} \in F|L^\perp$ 存在一个

$$\mathbf{p} = \tau_0\mathbf{v}_0 + \tau_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \tau_i\mathbf{v}_i \in F \cap L$$

使得

$$\mathbf{p}|L^\perp = \mathbf{0},$$

其中，对于 $j = 0, \ 0 \leq \tau_j \leq 1, 1, ..., i$ 且 $\tau_0 + \tau_1 + ... + \tau_i = 1$。注意，$(F \cap \mathbb{Z}^n)|L^\perp \subseteq (F|L^\perp) \cap (\mathbb{Z}^n|L^\perp)$。

令 $n = (i+1) \cdot m + k$，其中 $m = \left\lfloor \frac{n}{i+1} \right\rfloor$ 且 $k \in \{0, 1, ..., i\}$，则

$$n + 1 = (m + 1) + i \cdot m + k.$$

现在我们针对 k 的不同取值考虑以下情形。

情形 1. 对于 $k = i, \ n + 1 = (i + 1) \cdot (m + 1)$，则存在正整数 $i_0 \in \{0, 1, ..., i\}$ 使得 $\tau_{i_0} \geq \frac{m+1}{n+1}$，否则 $\tau_0 + \tau_1 + ... + \tau_i < 1$ 且 $\mathbf{p} \notin F$，矛盾。因此

$$\mathbf{p} + \frac{m+1}{n+1}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{i_0}) \in F$$

对任意 $j \in \{0, 1, ..., i\} \setminus \{i_0\}$ 均成立。由于 $\frac{1}{n+1}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{i_0})|L^\perp \in \mathbb{Z}^n|L^\perp$ 且 $\mathbf{p}|L^\perp = \mathbf{0}$，我们有

$$\lambda_1(F|L^\perp, \mathbb{Z}^n|L^\perp) \leq \frac{1}{m+1}.$$

情形 2。 对于 $0 \le k \le i-1$, $n+1=(k+1)\cdot(m+1)+(i-k)\cdot m$。如果存在某个 i_0 使得 $\frac{m+1}{n+1} \le \tau_{i_0} \le 1$, 那么对于任意 $j \in \{0,1,...,i\}\backslash\{i_0\}$,

$$\mathbf{p}+\frac{m+1}{n+1}(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_{i_0}) \in F.$$

对于任意 $j \in \{0,1,...,i\}$, $0 \le \tau_j < \frac{m+1}{n+1}$, 取

$$\mathbf{c}=\frac{n_0\mathbf{v}_0+n_1\mathbf{v}_1+\ldots+n_i\mathbf{v}_i}{n+1} \in F \cap \mathbb{Z}^n$$

使得 $n_j = m$ 或 $m+1$ 对于 $j=0$, 1, ..., i, 则

$$\mathbf{p}+(m+1)(\mathbf{c}-\mathbf{p})=\sum_{j=0}^{i}\left[\frac{n_j}{n+1}\cdot(m+1)-m\cdot\tau_j\right]\cdot\mathbf{v}_j.$$

通过简单计算，我们得到

$$\frac{n_j}{n+1}\cdot(m+1)-m\cdot\tau_j \ge 0$$

and

$$\sum_{j=0}^{i}\left[\frac{n_j}{n+1}\cdot(m+1)-m\cdot\tau_j\right]=1,$$

then

$$\mathbf{p}+(m+1)(\mathbf{c}-\mathbf{p}) \in F.$$

根据 $(\mathbf{c}-\mathbf{p})|L^\perp=\mathbf{c}|L^\perp \in \mathbb{Z}^n|L^\perp$，我们得到

$$\lambda_1(F|L^\perp,\mathbb{Z}^n|L^\perp) \le \frac{1}{m+1}.$$

因此，证明完毕。

□

引理 4.4. 设 F 是 T_n的一个 i维面，则存在一个 $L' \in \mathcal{G}(\mathbb{Z}^n, n-i)$ 使得

$$T_n|L'^\perp = F|L'^\perp$$

and

$$(T_n|L'^\perp)\cap(\mathbb{Z}^n|L'^\perp)=(F\cap\mathbb{Z}^n)|L'^\perp.$$

证明。 为方便起见，我们仍以带有 $V(F)=\{\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_i\}$ 的 T_n 的 i维面 F为例。

首先，我们将 $V(T_n)$划分为 $i+1$ 个两两不交子集 $V_0=\{\mathbf{v}_{01},\cdots,\mathbf{v}_{0,n_0}\}$,$V_1=\{\mathbf{v}_{11},\cdots,\mathbf{v}_{1,n_1}\}$, $\cdots$, $V_i=\{\mathbf{v}_{i1},\cdots,\mathbf{v}_{i,n_i}\}$，其中$\mathbf{v}_{k1}=\mathbf{v}_k$，对于 $k=0,1,...,i$和 $n_0+n_1+\cdots+n_i=n+1$。

接下来，我们假设 L_j 是 $\mathbb{R}^n$ 中与$\mathrm{conv}V_j$ 和$\mathrm{conv}\bigcup_{k=0,k\neq j}^{i}V_k$平行的$(n-1)$维子空间。令$\mathbf{b}_{kl}=\mathbf{v}_{k,l+1}-\mathbf{v}_{k1}$，并且有$\mathbf{b}_{kl}\in L_j\cap\mathbb{Z}^n$，其中$l=1,2,...,n_k-1$，对于 $k=0,1,...,i$。为方便起见，令

$$\Phi=\{\mathbf{b}_{01},\cdots,\mathbf{b}_{0n_0-1},\mathbf{b}_{11},\cdots,\mathbf{b}_{1n_1-1},\cdots,\mathbf{b}_{i,1},\cdots,\mathbf{b}_{i,n_i-1}\}.$$

此外，令 $\mathbf{b}_k=\mathbf{v}_k-\mathbf{v}_{n+1}^{k+1}$对于 $k=0$, 1, ..., i且 $\mathbf{v}_{i+1}=\mathbf{v}_0$,则

$$\widetilde{\Phi}_j=\Phi\cup\{\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_{j-2},\mathbf{b}_{j+1},\cdots,\mathbf{b}_i\}\subset L_j\cap\mathbb{Z}^n.$$

~容易看出， $\Phi_j \cup \{\mathbf{b}_j\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 中一组线性无关的初等向量，因此它们也是 $\mathbb{Z}^n$ 的一组基，即，

$$\mathbb{Z}^n = L_j \cap \mathbb{Z}^n + \{z_j \cdot \mathbf{b}_j : z_j \in \mathbb{Z}^n\}.$$

因此， $L_j \in \mathcal{G}(\mathbb{Z}^n, \ n-1)$。

假设 $L' = \bigcap_{j=0}^{i} L_j$，则 L' 与每个 $\mathrm{conv}V_j$ 平行，且 Φ是$L' \cap \mathbb{Z}^n$的一组基，由此得到 $L' \in \mathcal{G}(\mathbb{Z}^n, \ n-i)$。

~对于 $j_0 = 0, \ 1, \ ....., \ i$，我们已知 $\Phi_{j_0} \cup \{\mathbf{b}_{j_0}\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$的一组基，因此可以推得

$$\{\mathbf{b}_k | L'^{\perp} : k = 0, 1, ..., j_0 - 2, j_0, j_0 + 1, ..., i\}$$

是 $\mathbb{Z}^n | L'^{\perp}$的一组基。由于 L'与每个 $\mathrm{conv}V_j$平行，且对于每个 $k = 0, \ 1, \ ....., \ i, \ V_k = \{\mathbf{v}_{k1}, \ \cdots, \ \mathbf{v}_{k, \ n_k}\}$，我们有 $V_k | L'^{\perp} = \mathbf{v}_k | L'^{\perp}$，这意味着

$$T_n | L'^{\perp} = F | L'^{\perp} = \mathrm{conv}\{\mathbf{v}_0 | L'^{\perp}, \mathbf{v}_1 | L'^{\perp}, ..., \mathbf{v}_i | L'^{\perp}\}$$

and

$$(T_n | L'^{\perp}) \cap (\mathbb{Z}^n | L'^{\perp}) = (F | L'^{\perp}) \cap (\mathbb{Z}^n | L'^{\perp}).$$

注意 $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k1}$。此外，由于 $\mathbf{b}_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{n+1}$~~, ~~我们还可以得到

$$(\overline{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l} \cap \mathbb{Z}^n) | L'^{\perp} = (\overline{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l} | L'^{\perp}) \cap (\mathbb{Z}^n | L'^{\perp}),$$

对于 $k, \ l = 0, \ 1, \ ....., \ i$和 $k \neq l$，其~~中~~ $\overline{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l} = \mathrm{conv}\{\mathbf{v}_k, \ \mathbf{v}_l\}$，则

$$(F \cap \mathbb{Z}^n) | L'^{\perp} = (F | L'^{\perp}) \cap (\mathbb{Z}^n | L'^{\perp}).$$

因此，$(T_n | L'^{\perp}) \cap (\mathbb{Z}^n | L'^{\perp}) = (F \cap \mathbb{Z}^n) | L'^{\perp}$。

□

引理4.5。设 F 是 i维面 T_n，则存在一个 $L' \in \mathcal{G}$（$\mathbb{Z}^n$、$n-i$）使得

$$\lambda_1(F | L'^{\perp}, \mathbb{Z}^n | L^{\perp}) = \frac{1}{\left\lfloor \frac{n}{i+1} \right\rfloor + 1}.$$

证明。取引理 4.4 中构造的（$n-i$）维格平面 $L' \in \mathcal{G}(\mathbb{Z}^n, \ n-i)$，并证明它确实满足上述等价条件。

令 $\mathbf{c} = \frac{n_0 \mathbf{v}_0 + n_1 \mathbf{v}_1 + ... + n_i \mathbf{v}_{n+1}}{} \ ^i \in F$，其中 n_j 是 V_j 中的顶点数，对于 $j = 0, \ 1, \ ....., \ i$，如引理 4.4 的证明中所设。由于 $\mathbf{b}^{jl} = \mathbf{v}_{j, \ l+1} - \frac{}{n+1} \in L'^{\mathbf{v}}$，其中$l = 1, 2, \ ....., \ n_j - 1$对于 $j = 0, \ 1, \ ....., \ i$，我们有

$$\mathbf{v}_{j1} = \mathbf{v}_{j,l+1} - (n+1)\mathbf{b}_{jl},$$

then

$$n_j \mathbf{v}_{j1} = \sum_{l=1}^{n_j} \mathbf{v}_{j,l} - \sum_{l=1}^{n_j - 1} (n+1)\mathbf{b}_{jl}.$$

注意 $\mathbf{v}^{j1} = \mathbf{v}^j$，对于 $j = 0, \ 1, \ 2, \ ....., \ i$。由 $T_n \in \mathcal{K}_c^n$可知

$$\sum_{j=0}^{i} \sum_{l=1}^{n_j} \mathbf{v}_{j,l} = \mathbf{0}$$

and

$$\mathbf{c}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{i}\sum\limits_{l=1}^{n_j}\mathbf{v}_{j,l}-\sum\limits_{j=0}^{i}\sum\limits_{l=1}^{n_j-1}(n+1)\mathbf{b}_{jl}}{n+1}$$
$$=-\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=1}^{n_j-1}\mathbf{b}_{jl}\in L'\cap\mathbb{Z}^n,$$

then

$$\mathbf{c}|L'^{\perp}=\mathbf{0}.$$

类似地，假设 $n+1=(k+1)\cdot(m+1)+(i-k)$，对于 $m=\lfloor\frac{n}{i+1}\rfloor$ 和 $k\in\{0,1,...,i\}$。特别地，令 $n_0=n_1=...=n_k=m+1$ 和 $n_{k+1}=n_{k+2}=...=n_i=m$，则

$$\mathbf{c}=\frac{\sum\limits_{l=0}^{k}(m+1)\mathbf{v}_l+\sum\limits_{l=k+1}^{i}m\mathbf{v}_l}{n+1}\in F\cap\mathbb{Z}^n.$$

取任意一对两两 i_0，$i_1\in\{0,1,...,i\}$。若 $\{i_0,i_1\}\subset\{0,1,...,k\}$，

$$\mathbf{c}\pm\frac{m+1}{n+1}(\mathbf{v}_{i_0}-\mathbf{v}_{i_1})\in\partial(F);$$

若 $\{i_0,i_1\}\subset\{k+1,...,i\}$，

$$\mathbf{c}\pm\frac{m}{n+1}(\mathbf{v}_{i_0}-\mathbf{v}_{i_1})\in\partial(F);$$

若 $i_0\in\{0,1,...,k\}$ 且 $i_1\in\{k+1,...,i\}$，

$$\mathbf{c}+\frac{m}{n+1}(\mathbf{v}_{i_0}-\mathbf{v}_{i_1})\in\partial(F)$$

and

$$\mathbf{c}-\frac{m+1}{n+1}(\mathbf{v}_{i_0}-\mathbf{v}_{i_1})\in\partial(F).$$

此外，令 $Q=\{\mathbf{c}':\mathbf{c}'=\mathbf{c}\pm\frac{1}{n+1}(\mathbf{v}_{i_0}-\mathbf{v}_{i_1})$，其中 i_0，$i_1\in\{0,1,...,i\}$，以及 $i_0\neq i_1\}$。显然，$\mathrm{relint}[\mathrm{conv}(Q)]\cap\mathbb{Z}^n=\emptyset$。

因此，可以得到

$$\lambda_1(F_i|L'^{\perp},\mathbb{Z}^n|L'^{\perp})=\frac{1}{m+1}=\frac{1}{\lfloor\frac{n}{i+1}\rfloor+1}.$$

□

定理1.3的证明。 令 $\mathcal{F}=\{F':\ F'$是 $T_n\}$的一个 i–维面。给定任意一个 $L\in\mathcal{G}(\mathbb{Z}^n,n-i)$，则根据 $V(T_n|L^{\perp})=V(T_n)|L^{\perp}$，$T_n|L^{\perp}$ 是一个 i维多胞体，其顶点数至少为 $i+1$，至多为 $n+1$。众所周知，

$$T_n|L^{\perp}=\bigcup_{F'\in\mathcal{F}}F'|L^{\perp},$$

那么总存在一个 i维面 $F\in\mathcal{F}$，使得 $\mathbf{0}\in F|L^{\perp}$ 且 $\dim(F|L^{\perp})=i$。

首先，由 $F|L^{\perp}\subseteq T_n|L^{\perp}$ 和引理 4.3 可得

$$(F|L^{\perp})\cap(\mathbb{Z}^n|L^{\perp})\subseteq(T_n|L^{\perp})\cap(\mathbb{Z}^n|L^{\perp})$$

and

$$\lambda_1(T_n|L^\perp,\mathbb{Z}^n|L^\perp)\le\lambda_1(F|L^\perp,\mathbb{Z}^n|L^\perp)\le\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{i+1}\right\rfloor+1}$$

对任意 $L\in\mathcal{G}(\mathbb{Z}^n,n-i)$ 都成立，其中 $i=1,2,\ldots,n$。于是，由引理 2.1 可得

$$\rho_i(T_n,\mathbb{Z}^n)\le\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{i+1}\right\rfloor+1}.$$

对于 $\rho_i(T_n,\ \mathbb{Z}^n)$ 的下界，根据引理 4.4–4.5，该下界确实可由引理 4.4 中构造的 $L'\in\mathcal{G}(\mathbb{Z}^n,\ n-i)$ 达到，使得

$$\lambda_1(T_n|L'^\perp,\mathbb{Z}^n|L'^\perp)=\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{i+1}\right\rfloor+1},$$

从而得到

$$\rho_i(T_n,\mathbb{Z}^n)\ge\frac{1}{\lfloor\frac{n}{i+1}\rfloor+1}.$$

因此，

$$\rho_i(T_n,\mathbb{Z}^n)=\frac{1}{\lfloor\frac{n}{i+1}\rfloor+1}.$$

证明至此全部完成。 □

参考文献

1. S. Artstein-Avidan, S. Sadovsky, and R. Sanyal, 《反阻塞体的几何不等式》, 《当代数学通讯》**25** (2023), no. 03, 2150113. 2. H. Davenport, 《n 个齐次线性形式的乘积》, 荷兰皇家科学院, 《会刊》**49** (1946年), 822–828, = 《数学研究》8: (1946年), 525–531. 3. Peter M. Gruber, 《凸几何与离散几何》, 《数学科学基础丛书》, 第336卷, 柏林：施普林格, 2007（英文）。4. M. Henk and I. Aliev, 《凸几何与离散几何中的闵可夫斯基连续极小值》, 数学通讯**31** (2023), 35–59. 5. M. Henk, M. Henze, and M. A. Hernández Cifre, 《闵可夫斯基连续极小值定理的变体》, 《数学论坛》**28** (2016), no. 2, 311–325（英文）。6. M. Henk, M. Schymura, and F. Xue, 《凸体中的装填极小值与格点》, 《莫斯科组合数论杂志》**10** (2021年), no. 1, 25–48, https://link.springer.com/article/10. 2140/moscow.2021.10.25. 7. R. Kannan and L. Lovász, 《覆盖极小值与无格点凸体》, 《数学年刊》(2) **128** (1988), no. 3, 577–602（英文）。8. F. Kohl, M. Olsen, and R. Sanyal, 《无条件自反多胞体》, 《离散与计算几何》**64** (2020), no. 2, 427–452. 9. H. Minkowski, 《Geometrie der Zahlen》, 莱比锡：B.G. Teubner，1896年和1910年。10. A. C. Woods, 《凸体的反常现象》, 《剑桥哲学学会会刊》**52** (1956), 406–423.

数学研究所，柏林工业大学，德国柏林电子邮箱地址：ludy_han@163.com

数学研究所，柏林工业大学，德国柏林电子邮箱地址：henk@math.tu-berlin.de

数学研究所，数学科学学院，南京师范大学，南京，中国

电子邮箱地址：05429@njnu.edu.cn