arXiv:2601.13952v1 [math.OA] 20 Jan 2026

Cuntz代数的（外）约化 Weyl 群的超立方体子群

Francesco Brenti*、Roberto Conti†、Gleb Nenashev

2026年1月21日

摘要

我们发展了一些具有代数和组合性质的工具，以便详细描述 Cuntz代数 $\mathcal{O}_n$的（外）约化 Weyl 群中的某些二次子群。特别是，对于 $n = 4$，我们的研究结果为 [3], 中列表所列的群提供了自足的理论解释；这些群是借助计算机得到的。对于这些群中的每一个，我们都给出一组生成元。在我们的分析中，一个重要角色由一族离散正方形的对称群子群承担，我们称之为双相容子群。

MSC 2020：05E16, 05A05, 05A15（主要）；46L40, 05E10（次要）。**关键词**：置换，稳定置换，Cuntz代数，自同构，约化 Weyl 群，双相容子群。

*部分经费由 MIUR 卓越系所项目资助，该项目授予罗马大学“Tor Vergata”数学系，CUP E83C18000100006 和 E83C23000330006。

†部分经费由罗马大学（2023 年校级项目）和 INDAM-GNAMPA 提供。

目录

1 引言 2

2 预备知识 5

3 水平与垂直循环 8

4 子群与相容性 14

5 二次子群 18

5.1 第一行.19 5.2 第二行.22 5.3 第三行.23 5.4 第四行.27 5.5 第五行.29 5.6 第六行.32 5.7 第七行.34

6 双相容子群与嵌入 37

6.1 双相容子群.37 6.2 在 $S([4]^2)$中 S_4 的双相容嵌入.39

7 展望 **48**

1 引言

本文旨在为 Cuntz代数自同构的研究作出贡献。Cuntz代数 $\mathcal{O}_n$ 是一个广为人知的 C^*-代数族，自其在 [11]这一著名著作中首次出现以来，便一直是算子代数诸多研究的核心主题（广泛综述见 [1] ）。尽管 Cuntz 本人曾受半单李群理论的比较启发，认为这是一个值得研究的方向，但对 Cuntz代数自同构的研究并未如预期般迅速兴盛（例如参见 [2, 13, 14]）；直到近二十年来，随着 Conti 和 Szymanski 的工作 [7], ，这一领域才开始受到广泛关注，另见 [10, 8, 9]。总体而言，这是一个内容丰富、绝非 trivial 且面向多元的课题。本文主要聚焦于这一广阔领域中的组合学方面，延续我们此前关于该主题的研究 [4, 5, 6]。组合学之所以在其中发挥作用，正如 [12], 中已预见并指出的那样，是因为 Aut($\mathcal{O}_n$) 的约化 Weyl 群的自然定义引出了对一类特殊自同构的考察，这类自同构可通过

Cuntz-Takesaki 对应，由超立方体$\{1,\ldots,n\}^t$、 $t \geq 1$的适当置换来描述。

为了描述我们感兴趣的问题，我们需要先引入一些记号（更系统的介绍见第 2 节）。

给定一个整数 $n \geq 2$，Cuntz代数 $\mathcal{O}_n$ 作为一个 C^*-代数，由一族 n 个等距算子 S_i, $i = 1, \ldots, n$ 生成，且满足 $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$。此外， $\mathcal{O}_n$ 的任意（幺正且保持 $*$ 的）端同态均具有形式 λ_u，其中 u 是某个酉元，且 $\lambda_u(S_i) = uS_i, \quad i = 1, \ldots, n$.

对于任意一组酉元 $E \subset \mathcal{U}(\mathcal{O}_n)$，我们定义

$$\lambda(E)^{-1} := \{\lambda_u \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n) \mid u \in E\} ,$$

即由 E 中的酉元诱导的 $\mathcal{O}_n$ 的自同构集合。

定义 $\mathcal{P}_n := \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n^t$，其中

$$\mathcal{P}_n^t = \Big\{ u \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_n) \mid u = \sum_{\substack{(\alpha,\beta) \\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_t) \\ \beta=(\beta_1,\ldots,\beta_t)}} S_{\alpha_1} \cdots S_{\alpha_t} S_{\beta_t}^* \cdots S_{\beta_1}^* \Big\},$$

自然地视为 $M_{n^t}(\mathbb{C})$ 中置换矩阵的集合（其基数为 $n^t!$），结果表明，Cuntz代数 $\mathcal{O}_n$ 的约化 Weyl 群 W_n 可描述为 $\lambda(\mathcal{P}_n)^{-1}$。

现在，固定“层级” $t \in \mathbb{N}$。由于 $\lambda(\mathcal{P}_n^1)^{-1} := \{\lambda_u \mid u \in \mathcal{P}_n^1\} \simeq \mathcal{P}_n^1 \simeq S_n$（这些自同构 $\mathcal{O}_n$ 通常称为置换型 Bogolubov 自同构或准自由自同构），第一个非平凡情形自然出现在 $t = 2$。

对于 $u \in \mathcal{P}_n^t$，至少从理论上说，何时 $\lambda_u \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n)$ 是众所周知的（参见 [7, 定理 3.2]，以及其中的定理 2.1）。然而，从计算角度来看，确定$\lambda(\mathcal{P}_n^t)^{-1}$ 会变得相当困难，除非 t 和 n 足够小（例如 $n+t \leq 7$，但并非所有此类情形都已完成计算）。例如，参见 [3], 表 2，其中概述了近期已知的此类集合的基数。这些数值是通过大量计算机计算得出的，即使在如今恐怕也无法进一步扩展。

注意，任何 $\lambda(\mathcal{P}_n^t)^{-1}$ 都包含有限阶和无限阶的自同构。本文只考虑有限阶的自同构，因为我们将考察嵌入 $\lambda(\mathcal{P}_n^t)^{-1}$ 的群，更具体地说，是外自同构群 $\mathrm{Out}(\mathcal{O}_n)$ 中像 $\pi(\lambda(\mathcal{P}_n^t)^{-1})$ 的极大群，其中该像由 $\lambda(\mathcal{P}_n^t)^{-1}$ 在外自同构群中的像给出；外自同构群是 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n)$ 对内自同构取商所得的商群。现在我们可以提出促成本研究的问题。

问题 1.1。给定整数 $n \geq 2$ 和 $t \geq 2$，包含在 $\{\pi(\lambda_u) \in \mathrm{Out}(\mathcal{O}_n) \mid u \in \mathcal{P}_n^t\}$ 中的极大群有哪些?

文中 [3, 第 8 节2], 讨论了若干组 n 和 t 取值下的这类群，并列出了借助计算机得出的表 3-5。特别是，对于 $n = 4$ 和 $t = 2$，可以发现，在 $\{\pi(\lambda_u) \in \mathrm{Out}(\mathcal{O}_4) \mid u \in \mathcal{P}_4^2\}$ 中有 46 个这样的不同极大群（见表1，该表复现了 [3] 中的表5），其基数为 240480（参见 [7,第 5866]页）。

在这项工作中，我们对这46个极大群逐一作了详尽而明确的描述。据我们所知，这是首次如此深入地考察非拟自由型的 Cuntz代数有限自同构群。为此，我们对 [4, 5, 6] 中的一些结果进行了推广和改进。特别是，作为这些推广的结果，我们证明了 [4] 的猜想12.2；这一证明与近期在 [15] 中给出的证明截然不同。我们的研究表明，这些群中有一些是适用于任意 $n \geq 4$ 的群的特殊情形，而另一些似乎难以推广到 $n > 4$。我们提出的许多论证比得出结果所严格需要的更为一般，或许在其他地方也能派上用场。事实上，我们认为，我们已经为处理其他若干情形奠定了基础。

本文结构如下。下一节将回顾本文后续部分要用到的一些记号和结果。我们还将介绍双相容子群 这一概念，它在下文中起着关键作用。第 3 节将给出一系列结果，探讨 $S([n]^2)$中以相同方式置换若干行（或列）并保持其余部分不变的元素与其他置换之间的相容性。特别地，我们将在定理 3.7 中为上文提到的猜想给出一个新的证明，并得到一些相关的计数结果。第4节将构造 $S([n]^2)$的一些重要双相容子群，见定理 4.1（适用于所有n）和定理 4.6（仅适用于偶数 n）。这些子群的 $n = 4$ 情形将在后文中派上用场。第5节是本工作的最初动机；我们将综合此前的所有结果，详细描述由 $S([4]^2)$产生的 $\mathcal{O}_4$ 的全部 46 个外自同构极大群。第6节将推导一系列关于 $S([n]^2)$的双相容子群的结果，并将其用于分类 $S([4]^2)$中所有同构于 S_4的双相容子群。这些结果在本文其他部分并无用途，但我们仍将其列出，因为我们认为它们本身具有研究价值，也因为它们展示了第5节中介绍和研究的某些子群是如何发现的。最后一节将提出一些进一步研究的方向。特别地，我们附上几幅借助计算机绘制的图，展示 $S([4]^2)$中秩一稳定置换的循环类型为 (2，2) 和 (2，2，2) 的情形；目前尚无完整的理论加以描述。

2 预备知识

设 n 为正整数。记 $[n]$ 为集合 $\{1,\ldots,n\}$，更一般地，对于笛卡尔幂 $\{1,\ldots,n\}^{\times k}$，记为 $[n]^k$。给定集合 A，令 $S(A):=\{\sigma: A\to A: \sigma$ 双射 $\}$ 为 A 上的对称群，并令 $S_n := S([n])$。我们用 1 表示 S_n的恒等置换。我们将置换 $\sigma \in S(A)$ 写成不交循环形式，并省略 1-循环（即不动点）。例如，$\sigma =((2, 2), (2, 4), (4, 2))$ 表示置换 $\sigma \in S([4]^2)$，其中 $\sigma(2, 2) =(2, 4)$，$\sigma(2, 4) =(4, 2)$，$\sigma(4, 2) =(2, 2)$，并且对 $[4]^2$中的每个其他元素 (i, j)，都有 $\sigma(i, j) =(i, j)$。对于 $u \in S([n]^t)$ 和 $v \in S([n]^r)$，我们将 u 和v 的张量积定义为置换 $u \otimes v \in S([n]^{t+r})$，其定义为

$$(u \otimes v)(\alpha, \beta) := (u(\alpha), v(\beta))$$

对所有 $\alpha \in [n]^t$ 和 $\beta \in [n]^s$。

对于 $n \geq 2$，Cuntz代数 $\mathcal{O}_n$ 是由 n 个等距算子 $S_1, \ldots, S_n$ 生成的泛 C^*-代数，其值域投影之和为 1，即 $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$（1 表示代数单位元）。容易推出，对于所有 $i, j \in [n]$，都有 $S_i^* S_j = \delta_{ij} 1$ 。Cuntz-Takesaki 对应是半群 $\mathrm{End}(\mathcal{O}_n)$（ $\mathcal{O}_n$ 的（含单位、 $*$-）端同态）与酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{O}_n) = \{u \in \mathcal{O}_n \mid u^*u = 1 = uu^*\}$ 之间众所周知的双射，它将酉元 u 对应到由 $\lambda_u(S_i) = uS_i$ 对所有 $i \in [n]$ 唯一确定的端同态 λ_u 。简单计算可得

$$\lambda_u(S_{i_1} \cdots S_{i_h} S_{j_k}^* \cdots S_{j_1}^*) = u_h S_{i_1} \cdots S_{i_h} S_{j_k}^* \cdots S_{j_1}^* (u_k)^* \ ,$$

其中，对于任意 $m \geq 1$、 $u_m := u\varphi(u) \cdots \varphi^{m-1}(u)$ 以及 $\varphi(x)$, $= \sum_{i=1}^n S_i x S_i^*$ 是 $\mathcal{O}_n$ 的所谓典范端同态，它与酉元 $F := \sum_{i,\ j=1}^n S_i S_j S_i^* S_j^*$ 相关联，并且对所有 $x \in \mathcal{O}_n$ 和 $i \in [n]$ 都满足 $S_i x = \varphi(x) S_i$。为方便起见，我们有时将 $S_{i_1} \cdots S_{i_h}$ 写作 S_α，其中 α 是多重指标 $(i_1、\ldots\ldots、 i_h)$，并称 $\ell(\alpha) = h$ 为 α 的长度。因此，例如，$S_{311} = S_3 S_1 S_1$ ，从而 $S_{311}^* := (S_{311})^* = S_1^* S_1^* S_3^*$。不难看出，对于每个 $u,\ v \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_n)$，都有以下恒等式

$$\lambda_u \circ \lambda_v = \lambda_{\lambda_u(v)u} \tag{1}$$

and

$$\mathrm{ad}(u) \circ \lambda_v = \lambda_{uv\varphi(u^*)}$$

在本文中，我们将反复使用这一点而不再另行说明。这里，$\mathrm{ad}(u)$ 表示由 $\mathrm{ad}(u)(x) = uxu^*$, $x \in \mathcal{O}_n$ 定义的内自同构。

我们用 Aut($\mathcal{O}_n$) 表示 $\mathcal{O}_n$ 的（$*$-）自同构群，用 Out($\mathcal{O}_n$) 表示其关于内自同构正规子群的商群，并用 π : Aut($\mathcal{O}_n$)→Out($\mathcal{O}_n$) 表示典范投影。

对于任意整数 $t \geq 1$，我们定义

$$\mathcal{P}_n^t = \left\{ u \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_n) \mid u = \sum_{(\alpha,\beta)} S_\alpha S_\beta^*,\ \ell(\alpha) = t = \ell(\beta) \right\}$$

它可以等同于 $S([n]^t)$，即超立方体 $[n]^t$ 的对称群，因此也等同于 $M_{n^t}(\mathbb{C})$ $\simeq M_n \otimes \cdots \otimes M_n$ (t times) 中的置换矩阵集合。例如，若 $\sigma = ((2,2),(2,4),(4,2)) \in S([4]^2)$，那么相应的酉元为 $\mathcal{P}_4^2$

$$S_{24}\, S_{22}^* + S_{42}\, S_{24}^* + S_{22}\, S_{42}^* + \sum_{(i,j)\in[4]^2\setminus\{(2,2),(2,4),(4,2)\}} S_{ij}\, S_{ij}^*\,,$$

（也可以写成 $S_{24}\, S_{22}^* + S_{42}\, S_{24}^* + S_{22}\, S_{42}^* + S_1 S_1^* + S_3 S_3^* + S_{21}\, S_{21}^* + S_{23}\, S_{23}^* + S_{41}\, S_{41}^* + S_{43}\, S_{43}^* + S_{44}\, S_{44}^*$）。在本文余下部分，我们将在记号 $\mathcal{P}_n^t$ 和 $S([n]^t)$ 之间自由切换。特别地，若 $u \in S([n]^t)$，则我们用 λ_u 表示与对应于u的酉元相关联的端同态。注意，对所有 t，$\mathcal{P}_n^t \subset \mathcal{P}_n^{t+1}$ 和 $\varphi(\mathcal{P}_n^t) \subset \mathcal{P}_n^{t+1}$。此外，不难验证，若 $u \in \mathcal{P}^t$ 对应于置换 $\sigma \in S([n]^t)$，则作为 $\mathcal{P}^{t+1}$ 中元素的 u 对应于 $\sigma \otimes 1 \in S([n]^{t+1})$，而 $\varphi(u) \in \mathcal{P}^{t+1}$ 对应于 $1 \otimes \sigma \in S([n]^{t+1})$。例如，(1, 2) $\in S([2]^1)$ 对应于酉元 $u = S_1 S_2^* + S_2 S_1^* = S_1 1 S_2^* + S_2 1 S_1^* = S_1(S_1 S_1^* + S_2 S_2^*) S_2^* + S_2(S_1 S_1^* + S_2 S_2^*) S_1^* = S_{11}\, S_{21}^* + S_{12}\, S_{22}^* + S_{21}\, S_{11}^* + S_{22}\, S_{12}^*$，它又映射到置换 (1, 2) $\otimes 1 \in S([2]^2)$。类似地，$\varphi(u) = S_1 u S_1^* + S_2 u S_2^* = S_1(S_1 S_2^* + S_2 S_1^*) S_1^* + S_2(S_1 S_2^* + S_2 S_1^*) S_2^* = S_{11}\, S_{12}^* + S_{12}\, S_{11}^* + S_{21}\, S_{22}^* + S_{22}\, S_{21}^*$ 映射到 $1 \otimes$ (1, 2) $\in S([2]^2)$。特别地，对所有 $u \in S([n]^t)$，$\lambda_u = \lambda_{u\otimes 1}$ 成立，而$\lambda_{1\otimes u} = \lambda_{\varphi(u)} = \mathrm{ad}(u^*) \circ \lambda_u$。我们还定义 $\mathcal{P}_n = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n^t$。注意，若 $v \in \mathcal{P}_n^2$，则

$$\lambda_u \circ \lambda_v = \lambda_{u\varphi(u)v\varphi(u^*)}$$

对于任意 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_n)$。

Cuntz 代数 $\mathcal{O}_n$ 的约化 Weyl 群 W_n ([7]) 同构于

$$\lambda^{-1}(\mathcal{P}_n) := \{\lambda_u \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n) \mid u \in \mathcal{P}_n\}.$$

本文的主要研究对象是 W_n 在 Out($\mathcal{O}_n$) 中的像，$\pi(\lambda^{-1}(\mathcal{P}_n))$。

为方便起见，回顾以下事实。

命题 2.1. 设 $u \in \mathcal{P}_n^t$ 满足 $\lambda_u \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n)$，并设 $v \in \mathcal{P}_n^t$ 和 $w \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_n)$ 满足 $\mathrm{Ad}(w)\lambda_u = \lambda_v$ （即 $\pi(\lambda_u) = \pi(\lambda_v)$）。那么 $w \in \mathcal{P}_n^{t-1}$。

证明。推出 $\mathrm{Ad}(w) = \lambda_v(\lambda_u)^{-1}$，其中右侧的自同构对应于 $\mathcal{P}_n$ 中的一个元素。因此，根据 [7, 引理 2.3]， w 属于 $\mathcal{P}_n$。此外， $wu\varphi(w^*) = v$，故结论得证。□

特别地，对于 u， $v \in \mathcal{P}_n^2$， $\pi(\lambda_u) = \pi(\lambda_v)$ 当且仅当 $v = zu\varphi(z)^*$，其中 $z \in \mathcal{P}_n^1$。

给定一个置换 $u \in S([n]^t)$，定义置换序列 $\psi_k(u) \in S([n]^{t+k})$， $k \geq 0$，令 $\psi_0(u) := u^{-1}$，并且对于 $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi_k(u) = \prod_{i=0}^{k} (\underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{k-i} \otimes u^{-1} \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{i}) \prod_{i=1}^{k} (\underbrace{1 \otimes 1 \ldots \otimes 1}_{i} \otimes u \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{k-i}) \,. \tag{2}$$

那么，上述 u 称为稳定的，如果存在某个整数 $k \geq 1$，使得 t

$$\psi_{k+h}(u) = \psi_{k-1}(u) \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{h+1}, \quad h \geq 0 \,, \tag{3}$$

于是，$\mathrm{rk}(u)$，即 u 的秩，是满足条件的最小 k。例如，若$t = 1$，则所有置换 $u \in S([n])$ 都是秩为 1 的稳定置换。按照惯例，我们将相应的自同构称为置换型 *Bogolubov* 自同构。若 $n = 4$ 且 $t = 2$，则恰有 36 个秩一稳定的对换 [4, 推论 8.3], ，其中 12 个是水平的，12 个是垂直的（见图 2，以及推论 3.4）。在图中，与本文其他部分不同的是，我们通常将 $S([n]^2)$ 的元素以图示方式表示为方形网格 $[n]^2$ 上的有向置换循环（长度为 2 的循环除外）；为简洁起见，这里将 12 个对换组成的族画在同一个网格中。

以下结果在 [7, 定理 3.2] 中得到证明（记号略有不同）。

定理 2.2. 设 $n, t \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ 和 $u \in S([n]^t)$。那么， u 是稳定的，当且仅当 λ_u 是 $\mathcal{O}_n$的自同构。

因此， $\mathcal{O}_n$ 的约化 Weyl 群也可以等价地描述为 $\{\lambda_u : u \in S([n]^t)\ u \text{ 稳定} \quad t \geq 1\}$。

对于 $u \in S([n]^t)$，我们记作

$$(u_1(x_1, \ldots, x_t), \ldots, u_t(x_1, \ldots, x_t)) := u(x_1, \ldots, x_t)$$

对所有 $(x_1, \ldots\ldots, x_t) \in [n]^t$。如果 $u \in S([n]^2)$，则令 ${}^a u \in S([n]^2)$ 为 u 的反转置，定义为

$$ {}^a u(x,y) := (n+1-u_2(n+1-y, n+1-x), n+1-u_1(n+1-y, n+1-x)). \quad (4)$$

给定 u，$v \in S([n]^2)$，按照 [4], ，如果满足以下条件，我们称 u 与 v 相容（或者强调顺序时，称 u按此顺序与 v 相容）：

$$(v \otimes 1)(1 \otimes u) = (1 \otimes u)(v \otimes 1) \quad (5)$$

在 $S([n]^3)$ 中。如果 u 与 v 相容，且v 与 u相容，我们就称 u和 v 双相容。以下结果是 [4, 命题 5.13]的一个特例。

命题 2.3。设 $u, v \in S([n]^2)$。那么，u 和 v 双相容，当且仅当 ${}^a u$ 和 ${}^a v$ 双相容。

给定一个子群 $S \leq S([n]^2)$，若对所有 u，$v \in S$，u 和 v 都双相容，我们就称 S 为一个双相容子群 。特别地，双相容子群的所有元素都是秩为 1 的稳定元素。

下一个结果是对 [4, 推论 5.5]的一个小幅改进。

命题 2.4. 设 $u_1, u_2, \ldots, u_m \in S([n]^2)$ 是稳定置换，且对所有 $1 \leq i, j \leq m$，u_i 与 u_j 双相容。那么，由 $\{\lambda_{u_1}, \ldots, \lambda_{u_m}\}$ 生成的 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n)$ 的子群包含于 $\lambda^{-1}(P_n^2)$ 中，并且与由 $\{u_1, \ldots, u_m\}$ 生成的 $S([n]^2)$ 的子群同构。此外，这个后一个子群的所有元素都是秩为 *1* 的稳定置换。

证明。这立即由 [4, 推论 5.5] 得出，并结合以下观察：若对所有 $j = 1, .., k$，$i_j \in [m]$ 成立，则 $\lambda_{u_{i_1}} \cdots \lambda_{u_{i_k}} = \lambda_{u_{i_1} \cdots u_{i_k}}$ 且 $(u_{i_1} \cdots u_{i_k} \otimes 1)(1 \otimes u_{i_1} \cdots u_{i_k}) = (1 \otimes u_{i_1} \cdots u_{i_k})(u_{i_1} \cdots u_{i_k} \otimes 1)$，这两点都可用归纳法轻易验证。□

3 水平与垂直循环

本节将建立若干结果，讨论对 $S([n]^2)$ 的置换与对 $S([n]^2)$ 的一般置换之间的相容性。前者以相同方式置换 $[n]^2$ all 的某些行（分别为列），并保持其他所有行（分别为列）不变。这些结果将在本文后续部分频繁使用，并推广了此前已发表于 [4, 5, 6] 的若干其他结果。特别是，由此我们得到了 [4, Conj. 12.2] 的另一种证明，与 [15] 中给出的证明不同。

我们的第一个结果引入了我们感兴趣的置换，并刻画了与这些置换相容的 $[n]^2$ 的置换。

命题 3.1。设 $1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq n$, $v \in S([n]^2)$、 $\sigma \in S_n$ 和 $u \in S([n]^2)$ 满足

$$u(x,y) := \begin{cases} (x, \sigma(y)) \text{ if } x \in \{a_1, \ldots, a_k\}, \\ (x,y), \text{ otherwise}, \end{cases}$$

对所有$(x,y) \in [n]^2$。那么， u 与 v 相容，当且仅当 v 使 $[n] \times \{a_1, \ldots, a_k\}$ 保持不变。

证明。只需证明 σ 是对换的情形。因此，设 $u := \prod_{r=1}^{k} ((a_r, i), (a_r, j))$，其中 $1 \leq i < j \leq n$。于是我们有

$$1 \otimes u = \prod_{x=1}^{n} \prod_{r=1}^{k} ((x, a_r, i), (x, a_r, j)) = \prod_{s \in [n] \times \{a_1, \ldots, a_k\}} ((s,i),(s,j))$$

而

$$\begin{aligned} (v \otimes 1)(1 \otimes u)(v^{-1} \otimes 1) &= \prod_{x=1}^{n} \prod_{r=1}^{k} ((v(x, a_r), i), (v(x, a_r), j)) \\ &= \prod_{s \in [n] \times \{a_1, \ldots, a_k\}} ((v(s), i), (v(s), j)) . \end{aligned}$$

结论由此得出。 □

注意，最后这个命题推广了 [4]中命题 5.6 的特殊情形 $a = i$ 。虽然我们认为，或许可以给出一个结果来刻画与命题 3.1 中所研究的置换相容的置换，但以下结果已足以满足我们的目的。

命题 3.2。设 $1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq n$, $\{e_1, \ldots, e_s, f_1, \ldots, f_s\} \subseteq [n]$,$v \in S([n]^2)$, 以及

$$u := \prod_{r=1}^{k} ((a_r, e_1), \ldots, (a_r, e_s)) ((a_r, f_1), \ldots, (a_r, f_s)) .$$

那么， v 与 u 相容，当且仅当存在 $\sigma \in S(\{e,f\} \times [n])$ 和$t \colon \{e,f\} \times [n] \to [s]$, 使得

$$v(\alpha_i, x) = ((\sigma_1(\alpha, x))_{i + t(\alpha, x)}, \sigma_2(\alpha, x))$$

对于所有 $i \in [s]$ 以及 $(\alpha, x) \in \{e,f\} \times [n]$ （其中指标模 s，且$(\sigma_1(\alpha, x)\ \sigma_2(\alpha, x)) := \sigma(\alpha, x)$ ） 。

证明。 我们有

$$(u \otimes 1) = \prod_{r=1}^{k} \prod_{\alpha \in \{e,f\}} \prod_{x=1}^{n} ((a_r, \alpha_1, x), \ldots, (a_r, \alpha_s, x))$$

因此

$$(1 \otimes v)(u \otimes 1)(1 \otimes v)^{-1} = \prod_{r=1}^{k} \prod_{\alpha \in \{e,f\}} \prod_{x=1}^{n} ((a_r, v(\alpha_1, x)), \ldots, (a_r, v(\alpha_s, x))).$$

所以 v 与 u相容，当且仅当

$$\prod_{(\alpha,x) \in \{e,f\} \times [n]} ((a_r, \alpha_1, x), \ldots, (a_r, \alpha_s, x)) = \prod_{(\alpha,x) \in \{e,f\} \times [n]} ((a_r, v(\alpha_1, x)), \ldots, (a_r, v(\alpha_s, x)))$$

对所有 $r = 1, \ldots\ldots, k$。我们声称，当且仅当存在$\sigma \in S(\{e, f\} \times [n])$和 $t : \{e, f\} \times [n] \to [s]$ 使得

$$v(\alpha_i, x) = ((\sigma_1(\alpha, x))_{i+t(\alpha,x)}, \sigma_2(\alpha, x))$$

对所有 $i \in [s]$ 且 $(\alpha, x) \in \{e, f\} \times [n]$。事实上，若最后这个条件成立，则

$$\begin{aligned}
&\prod_{(\alpha,x) \in \{e,f\} \times [n]} ((a_r, v(\alpha_1, x)), \ldots, (a_r, v(\alpha_s, x))) \\
&= \prod_{(\alpha,x) \in \{e,f\} \times [n]} ((a_r, ((\sigma_1(\alpha, x))_{1+t(\alpha,x)}, \sigma_2(\alpha, x)), \ldots, (a_r, ((\sigma_1(\alpha, x))_{s+t(\alpha,x)}, \sigma_2(\alpha, x)) \\
&= \prod_{(\beta,y) \in \{e,f\} \times [n]} ((a_r, \beta_{1+t(\sigma^{-1}(\beta,y))}, y), \ldots, (a_r, \beta_{s+t(\sigma^{-1}(\beta,y))}, y))
\end{aligned}$$

对所有 $r \in [k]$。反过来，若

$$\prod_{(\alpha,x) \in \{e,f\} \times [n]} ((a_r, v(\alpha_1, x)), \ldots, (a_r, v(\alpha_s, x))) = \prod_{(\alpha,x) \in \{e,f\} \times [n]} ((a_r, \alpha_1, x), \ldots, (a_r, \alpha_s, x))$$

对所有 $r \in [k]$，则对任意 $(\alpha, x) \in \{e, f\} \times [n]$，存在 $\sigma(\alpha, x) \in \{e, f\} \times [n]$使得

$$\begin{aligned}
&((a_r, v(\alpha_1, x)), \ldots, (a_r, v(\alpha_s, x))) = \\
&\qquad ((a_r, (\sigma_1(\alpha, x))_1, \sigma_2(\alpha, x)), \ldots, (a_r, (\sigma_1(\alpha, x))_s, \sigma_2(\alpha, x)))
\end{aligned}$$

对所有 $r \in [k]$，映射 σ 必须是 $\{e, f\} \times [n]$ 的双射。因此

$$(v(\alpha_1, x), \ldots, v(\alpha_s, x)) = (((\sigma_1(\alpha, x))_1, \sigma_2(\alpha, x)), \ldots, ((\sigma_1(\alpha, x))_s, \sigma_2(\alpha, x)))$$

（作为循环）对所有 $(\alpha, x) \in \{e, f\} \times [n]$，因此存在 $t(\alpha, x) \in [s]$，使得

$$v(\alpha_i, x) = ((\sigma_1(\alpha, x))_{i+t(\alpha,x)}, \sigma_2(\alpha, x))$$

对于所有 $i \in [s]$ and $(\alpha,\ x) \in \{e, f\} \times [n]$。 □

虽然有时我们需要命题 3.2 的完整一般性，但我们经常使用它的以下特殊情形。

命题 3.3。令 $1 \le a_1 < \cdots < a_k \le n,\quad \{b_1, \ldots, b_s\} \subseteq [n],\quad v \in S([n]^2)$，且

$$u := \prod_{r=1}^{k} ((a_r, b_1), \ldots, (a_r, b_s)) .$$

当且仅当存在 $\sigma \in S_n$ 和 $t:\ [n] \to [s]$，使得 v 与 u 相容

$$v(b_i, x) = (b_{i+t(x)}, \sigma(x))$$

对于所有 $i \in [s]$ 和 $x \in [n]$（其中指标模 s 取值）。

由此立即得到以下结论。

推论 3.4. 设 $1 \le a_1 < \cdots < a_k \le n,\quad 1 \le i < j \le n$，且

$$u := \prod_{r=1}^{k} ((a_r, i), (a_r, j)) .$$

那么，u 是秩 1 稳定的，当且仅当以下任一条件成立：

$$\{i, j\} \subseteq \{a_1, \ldots, a_k\}$$

or

$$\{i, j\} \cap \{a_1, \ldots, a_k\} = \emptyset.$$

特别地，这样的秩 *1* 稳定置换有 $\binom{n}{k}\left(\binom{n-k}{2} + \binom{k}{2}\right)$ 个。

证明。 第一个结论直接由命题 3.1 得出。对于第二个结论，首先注意到这两种情形互不相交，且 $\{a_1, \ldots, a_k\}$有 $\binom{n}{k}$种选择。此外，在第一种情形下，$\{i, j\}$ 有 $\binom{k}{2}$ 种可能，而在第二种情形下有 $\binom{n-k}{2}$ 种。□

例如，对于 $n = 4$ 和 $k = 3$，共有 12 个这样的置换（另见图 4）。结合前面关于 $k = 2$ 的结果，下一个结果涵盖了所有成对的“水平”对换。

命题 3.5。 设 $\{a_1, a_2\}$、 $\{i_1, j_1\}$、 $\{i_2, j_2\} \in \binom{[n]}{2}$ 满足 $|\{i_1, j_1\} \cap \{i_2, j_2\}| \leq 1$、 $v \in S([n]^2)$，且

$$u := ((a_1, i_1), (a_1, j_1))\,((a_2, i_2), (a_2, j_2))\,.$$

那么， u 与 v 相容，当且仅当 v 使 $[n] \times \{a_1\}$ 和 $[n] \times \{a_2\}$保持不变。

证明。 我们有

$$1 \otimes u = \prod_{x=1}^{n} \prod_{r=1}^{2} ((x, a_r, i_r), (x, a_r, j_r)) \tag{6}$$

而

$$(v \otimes 1)(1 \otimes u)(v^{-1} \otimes 1) = \prod_{x=1}^{n} \prod_{r=1}^{2} ((v(x, a_r), i_r), (v(x, a_r), j_r))\,. \tag{7}$$

首先假设 $\{i_1, j_1\} \cap \{i_2, j_2\} = \emptyset$。若 u 与 v 相容，则对所有 $x \in [n]$, $(v(x, a_2)\ j_2)$ 都不是 $1 \otimes u$ 的不动点。因此，由于 $j_2 \notin \{i_1, j_1, i_2\}$，存在 $y \in [n]$ 使得 $v(x, a_2) = (y, a_2)$，从而 $v(x, a_2) \in [n] \times \{a_2\}$。因此， v 使 $[n] \times \{a_2\}$ 保持不变。同理， v 使 $[n] \times \{a_1\}$ 保持不变。反过来，若v 使 $[n] \times \{a_1\}$ 和 $[n] \times \{a_2\}$ 保持不变，则存在 σ_1、 $\sigma_2 \in S_n$ ，使得对所有 $x \in [n]$和所有 $i = 1$， $v(x, a_i) = (\sigma_i(x)\ a_i)$，故由(6)和(7)立即可得结论。

现在假设 $|\{i_1, j_1\} \cap \{i_2, j_2\}| = 1$。显然，我们可以假设 $i_1 = i_2$，因此 $j_1 \neq j_2$。于是 $j_2 \notin \{i_1, j_1, i_2\}$且 $j_1 \notin \{i_1, j_2, i_2\}$，所以我们可以像前一种情形那样得出结论。□

我们再次得到以下特殊情形。

推论 3.6. 设 $\{a_1, a_2\}$、 $\{i_1, j_1\}$、 $\{i_2, j_2\} \in \binom{[n]}{2}$ 满足 $|\{i_1, j_1\} \cap \{i_2, j_2\}| \leq 1$, 且

$$u := ((a_1, i_1), (a_1, j_1))\,((a_2, i_2), (a_2, j_2))\,.$$

那么 u 是秩1 的稳定对象，当且仅当

$$\{a_1, a_2\} \cap \{i_1, j_1, i_2, j_2\} = \emptyset.$$

作为前述结果的推论，我们得到了猜想12.2的一个证明，见 [4] （另见 [15]）。

定理 3.7。 设(a_1, i_1)、(a_1, j_1)、(a_2, i_2)、$(a_2, j_2) \in [n]^2$ 互不相同， $a_1 \neq a_2$，且

$$u := ((a_1, i_1), (a_1, j_1))\,((a_2, i_2), (a_2, j_2))\,.$$

那么， u 是秩为1 的稳定对象，当且仅当以下情况之一成立

$$\{a_1, a_2\} \cap \{i_1, j_1, i_2, j_2\} = \emptyset, \tag{8}$$

or

$$\{a_1, a_2\} = \{i_1, j_1, i_2, j_2\}. \tag{9}$$

特别地，这样的置换有 $\binom{n}{2}\left(\binom{n-2}{2}+1\right)$ 个。

证明。 首先假设 u 是秩 1 的稳定对象。若 $|\{i_1, j_1\} \cap \{i_2, j_2\}| = 2$ （即，若 $\{i_1, j_1\} = \{i_2, j_2\}$），那么由推论 3.4（取 $k = 2$）可知，(8) 成立，或者 $\{i_1, j_1\} \subseteq \{a_1, a_2\}$，后者蕴含 (9) 成立。若 $|\{i_1, j_1\} \cap \{i_2, j_2\}| \leq 1$，那么由推论 3.6 可知 (8) 成立。

反过来，若 (8) 成立，那么由推论 3.4 和 3.6 可知 u 是秩 1 的稳定对象；而若 (9) 成立，那么必有 $\{i_1, j_1\} = \{i_2, j_2\}$，因此由推论3.4即可得出结论。

对于最后一个陈述，首先注意到 (8) 和 (9) 中给出的两种情形互不相交，并且 $\binom{n}{2}$ 有 $\{a_1, a_2\}$种选择。此外，在第一种情形中，由于 $i_1 \neq j_1$，且 i_1，$j_1 \notin \{a_1, a_2\}$，因此 $\{i_1, j_1\}$有 $\binom{n-2}{2}$ 种可能， $\{i_2, j_2\}$也类似。若 (9) 成立，则必有 $\{i_1, j_1\} = \{a_1, a_2\} =\{i_2, j_2\}$。结论由此得出。□

因此，例如，对于 $n = 4$，有 12 个这样的置换（另见图 3）。利用一些换位技巧（见 [4, 命题 5.13]），可以很容易地由命题 3.1 和 3.3 得出以下两个结果，因此省略其证明。

命题 3.8. 设 $1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq n$， $\{b_1, \ldots, b_s\} \subseteq [n]$， $v \in S([n]^2)$，并且

$$u := \prod_{r=1}^{k} ((b_1, a_r), \ldots, (b_s, a_r,))\,.$$

那么， u 与 v 相容，当且仅当存在 $\sigma \in S_n$ 和 $t\colon\ [n] \to [s]$，使得

$$v(x, b_i) = (\sigma(x), b_{i+t(x)})$$

对于所有的 $x \in [n]$ 和 $i \in [s]$ （其中指标按模 s 计算）。

命题 3.9. 设 $1 \le a_1 < \cdots < a_k \le n$, $v \in S([n]^2)$、 $\sigma \in S_n$ 和$u \in S([n]^2)$ 满足

$$u(x,y) := \begin{cases} (\sigma(x), y) \ \textit{if}\ y \in \{a_1, \ldots, a_k\}, \\ (x,y), \ \textit{otherwise}, \end{cases}$$

对所有$(x、\ y) \in [n]^2$均成立。于是， v 与 u 相容，当且仅当 v 使 $\{a_1, \ldots, a_k\} \times [n]$ 保持不变。

4 子群与相容性

本节定义 $S([n]^2)$的一些重要子群，这些子群在本文其余部分将发挥作用，并阐述它们的一些基本性质。

设 $P \subseteq [n]$。我们定义子群 $R_P \le S([n]^2)$如下：当且仅当 $u \in R_P$ 时，令其成立：

1) $u(\{k\} \times ([n] \setminus P)) = \{k\} \times ([n] \setminus P)$ for each $k \in P$;

2) $u(k,j) = (k,j)$ if either $k \in [n] \setminus P$ or $j \in P$.

因此，给定 $u \in S([n]^2)$，当且仅当 u 使得所有指标不属于 P 的行以及所有指标属于 P的列逐点不变，并使所有以 P中的元素为指标的行保持不变时， $u \in R_P$ 成立。

我们还定义子群$\check{}\ R_P \le S([n]^2)$如下：当且仅当 $u \in \check{}R_P$ 时，令其成立：

1) 存在 $\sigma \in S([n] \setminus P)$，使得对于所有 $k,\ j \in [n] \setminus P$， $u(k,\ j) = (k,\ \sigma(j))$;

2) $u(k,j) = (k,j)$ if either $k \in P$ or $j \in P$.

因此，给定上述 u，当且仅当存在 $\sigma \in S([n] \setminus P)$，使得对于所有 $(k,\ j) \in ([n] \setminus P) \times ([n] \setminus P)$， $u(k,\ j) = (1 \otimes \sigma)(k,\ j)$，并且 u逐点保持所有索引属于 P 的行和列不变。注意， R_P 也可以通过对 $\{1\} \otimes S([n] \setminus P)$ 的所有元素依次进行 (i_p)-浸入.....(i_2)-浸入和 (i_1)-浸入得到，其中 $\{i_1, \ldots, i_p\} = P$（有关浸入的详细信息，请参阅 [4, 第 7] 节）。

$\check{}$类似地，我们使用列来定义子群 C_P 和 C_P。注意，$\check{}\ R_P$中的所有元素（分别地，$\check{}\ C_P$中的所有元素）都与 R_P（分别地， C_P）中的每个元素可交换；R_P 和 C_P 分别同构于$(S_{n-|P|})^{|P|}$，而$\check{}\ R_P$ 和$\check{}\ C_P$ 分别同构于 $S_{n-|P|}$。于是得到以下结果。

定理 4.1. 对于每个 $P \subseteq [n]$ ，由 $\check{}\ R_P \cup R_P$ 生成的子群是 $S([n]^2)$ 的双相容子群，且与 $(S_{n-|P|})^{|P|+1}$同构。对于 $\check{}\ C_P \cup C_P$，结论类似。

ˇ证明。 首先注意，由 $R_P \cup R_P$生成的子群中的所有元素都使每一行保持不变，并逐点固定 P 中的每一列。设 u, v 是两个这样的置换，且 $(a, b, c) \in [n]^3$。根据刚才的观察，前两个坐标

$$(1 \otimes u)(v \otimes 1)(a, b, c)$$

and

$$(v \otimes 1)(1 \otimes u)(a, b, c)$$

等于 $v(a, b)$。若 $c \in P$，则对所有 $x \in [n]$， $u(x, c) = (x, c)$，因此 $(1 \otimes u)(v \otimes 1)(a, b, c) = (v(a, b)\ c) = (v \otimes 1)(1 \otimes u)(a, b, c)$。因此，假设 $c \notin P$。若 $b \in P$，则 $(1 \otimes u)(v \otimes 1)(a, b, c) = (a, u(b, c)) = (v \otimes 1)(1 \otimes u)(a, b, c)$，因为 $u(b, c)$ 位于第 b 行，且 v 逐点固定第 b 列。最后，若 $b \notin P$，则存在$d \notin P$使得 $v(a, b) = (a, d)$。因此，

$$(1 \otimes u)(v \otimes 1)(a, b, c) = (1 \otimes u)(a, d, c) = (a, d, \sigma(c))$$

而

$$(v \otimes 1)(1 \otimes u)(a, b, c) = (v \otimes 1)(a, b, \sigma(c)) = (a, d, \sigma(c)).$$

ˇ 这表明 $R_P \cup R_P$ 中任意两个元素都是双相容的，因此结论成立。□

对于 $i \in [n]$，我们发现令 $R_i := R_{\{i\}}$ 并类似地定义 C_i、ˇR_i 和 ˇ C_i 会比较方便。我们还通过令以下各项来定义元素 ˇ$r_{i,\ k}$，ˇ$c_{i,\ k} \in S([n]^2)$，其中 $k \in [n-1] \setminus \{i\}$:

$$\check{r}_{i,k} := \begin{cases} \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} ((j, k), (j, k+1)), \text{ if } k \neq i-1, \\ \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} ((j, i-1), (j, i+1)), \text{ if } k = i-1, \end{cases}$$

and

$$\check{c}_{i,k} := \begin{cases} \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} ((k, j), (k+1, j)), \text{ if } k \neq i-1, \\ \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} ((j, i-1), (i+1, j)), \text{ if } k = i-1. \end{cases}$$

使得 ˇ $R_i := \langle \{ \check{r}_{i,\ k} \colon\ k \in [n-1] \setminus \{i\} \} \rangle$，而 ˇ C_i 也类似。

对于 $i,\ j \in [n], i \neq j$，我们令

$$R_{i,j} := \{u \in R_i \mid u(i, j) = (i, j)\}\ , \quad C_{i,j} = \{u \in C_i \mid u(j, i) = (j, i)\}\ .$$

这些子群的元素具有各种相容性。

引理 4.2。 设 i、$j \in [n]$ 和 $u \in R_{i,\ j}$、 $v \in R_{j,\ i}$。则 u 与 v 双相容。类似地，对于 $C_{i,\ j}$ 和 $C_{j,\ i}$ 也成立。

证明。显然，只需证明 u 与 v 相容。设 $a,\ b,\ c \in [n]$。若 $a \neq j$ 和 $b \neq i$，则有

$$\begin{aligned}(v \otimes 1)(1 \otimes u)(a,b,c) &= (v \otimes 1)(a,b,c) = (a,b,c) = (1 \otimes u)(a,b,c) \\ &= (1 \otimes u)(v \otimes 1)(a,b,c).\end{aligned}$$

如果 $a = j$ 且 $b \neq i$，那么 $v(j,\ b) \neq (j,\ i)$，因此 $v(j,\ b)_2 \neq i$，从而我们得到

$$(1 \otimes u)(v \otimes 1)(j,b,c) = (1 \otimes u)(v(j,b),c) = (v(j,b),c).$$

而

$$(v \otimes 1)(1 \otimes u)(j,b,c) = (v \otimes 1)(j,b,c) = (v(j,b),c).$$

如果 $a \neq j$ 且 $b = i$，那么我们有

$$\begin{aligned}(v \otimes 1)(1 \otimes u)(a,i,c) &= (v \otimes 1)(a,u(i,c)) = (a,u(i,c)) = (1 \otimes u)(a,i,c) \\ &= (1 \otimes u)(v \otimes 1)(a,i,c).\end{aligned}$$

最后，如果 $a = j$ 且 $b = i$，那么由于 $u(i,\ c)_1 = i$ 且 $v(j,\ i) = (j,\ i)$，我们得出

$$\begin{aligned}(v \otimes 1)(1 \otimes u)(j,i,c) &= (v \otimes 1)(j,u(i,c)) = (j,u(i,c)) = (1 \otimes u)(j,i,c) \\ &= (1 \otimes u)(v(j,i),c) = (1 \otimes u)(v \otimes 1)(j,i,c).\end{aligned}$$

□

对于 $i \in [n]$，我们令

$$S_i([n]) := \{u \in S_n : u(i) = i\},$$

即 S_n 的稳定子子群 Stab(i)，以及对于 $i,\ j \in [n], i \neq j$

$$S_{i,j} := \{u \in S_n \mid u(i) = i,\ u(j) = j\} = S_i([n]) \cap S_j([n]) = S_{j,i}\ ,$$

也就是说，S_n 中 $\{i,j\}$ 的稳定子群。当然，这些群分别与 S_{n-1} 和 S_{n-2} 同构。

对于 $\sigma \in S_i([n])$，我们令

$$u_\sigma(a,b) = \begin{cases}(a,b),\ \text{if } b \neq i, \\ (\sigma(a),b),\ \text{if } b = i,\end{cases}$$

对于所有 $a,\ b \in [n]$（因此 $u_\sigma \in C_i$），并类似地定义 $v_\sigma \in R_i$。

命题 4.3。 设 $i \in [n]$ 和 $\sigma, \tau \in S_i$（$[n]$）。那么，当且仅当 $\sigma\tau = \tau\sigma$ 属于 S_n 时，u_σ 与 v_τ相容。

证明。设 $x, y, z \in [n]$。若 $x \neq i$ 或 $z \neq i$，则容易验证 $(v_\tau \otimes 1)(1 \otimes u_\sigma)(x, y, z) = (1 \otimes u_\sigma)(v_\tau \otimes 1)(x, y, z)$。另一方面，我们有 $(v_\tau \otimes 1)(1 \otimes u_\sigma)(i, y, i) = (i, \tau(\sigma(y)), i)$，且 $(1 \otimes u_\sigma)(v_\tau \otimes 1)(i, y, i) = (i, \sigma(\tau(y)), i)$，故结论成立。□

以下相容性结果仅适用于 $n = 4$。这些结果部分解释了为什么我们在本文后面发现的某些子群可能不属于更一般的族。

引理 4.4。 设 $i, j \in [4]$ $i \neq j$ 和 $u \in C_{i,\ j}$, $v \in R_{j,\ i}$。那么 u 与 v相容。

证明。设 $x, y, z \in [4]$。如果 $z \neq i$ 或 $x \neq j$，那么容易验证 $(v \otimes 1)(1 \otimes u)(x, y, z) = (1 \otimes u)(v \otimes 1)(x, y, z)$。令 $\{a, b\} := [4] \setminus \{i, j\}$。由于$u$和 v满足 $u(i, i) = (i, i)$，$v(j, j) = (j, j)$，且 $u(j, i) = (j, i) = v(j, i)$，因此它们要么其中一个是恒等置换，要么二者分别在第 i 列和第 j 行上作用为对换 (a, b)，而在其他位置均作用为恒等置换。第一种情形下结论显然成立；后一种情形下，容易验证对所有 $y \in [4]$，均有 $(v \otimes 1)(1 \otimes u)(j, y, i) = (1 \otimes u)(v \otimes 1)(j, y, i)$。□

推论 4.5. 设 $i, j \in [4]$, $i \neq j$ 和 $u \in C_{i,\ j}$, $v \in R_{i,\ j}$。那么 u 与 v 相容。

证明。 设 $\{a, b\} := [4] \setminus \{i, j\}$。根据我们的假设，$u$ 或 v 是恒等置换，或者 $u = u_\sigma$ 和 $v = v_\sigma$，其中 $\sigma := (a,\ b)$。由推论 4.3 即得所需结果。□

请注意，若 $n \geq 5$，则前面的结果一般不成立。例如，若 $n = 8$, $i = 5$, $j = 2$, $u = ((1, 5), (4, 5))((3, 5), (6, 5))$，且 $v = ((2, 3), (2, 4))((2, 6), (2, 8))$，则 $(v \otimes 1)(1 \otimes u)(2, 3, 5) = (2, 8, 5) \neq (2, 1, 5) = (1 \otimes u)(v \otimes 1)(2, 3, 5)$。类似地，若 $n = 8, i = 3, j = 8, u = ((2, 3), (6, 3))((4, 3), (5, 3))$，且 $v = ((3, 1), (3, 6))((3, 2), (3, 5))$，则 $(v \otimes 1)(1 \otimes u)(3, 2, 3) = (3, 1, 3) \neq (3, 4, 3) = (1 \otimes u)(v \otimes 1)(3, 2, 3)$。

对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $C \in \binom{[2m]}{m}$，并令 $\prec$ 为 $[2m]$上的一个全序。令 $B := [2m] \setminus C$。我们定义两个元素 $c_0,\ r_0 \in S([2m]^2)$如下：

$$c_0 := \prod_{y \in C} ((c_1, y), \ldots, (c_m, y)),$$

and

$$r_0 := \prod_{x \in B} ((x, b_1), \ldots, (x, b_m)),$$

其中 $\{c_1, \ldots, c_m\} := C$、 $\{b_1, \ldots, b_m\} := B$、 $c_1 \prec \cdots \prec c_m$和 $b_1 \prec \cdots \prec b_m$。我们令 $N(B, C)_\prec$为由 c_0、 r_0和 $S(C \times B)$生成的 $S([2m]^2)$的子群，其中最后这个群以自然方式嵌入 $S([2m]^2)$中。

定理 4.6。令 $m \in \mathbb{N}$、 $C \in \binom{[2m]}{m}$、 $B := [2m] \setminus C$，且 $\prec$ 为 $[2m]$的一个全序。则 $N(B, C)_\prec$是 $S([2m]^2)$ 的一个双相容子群，并且同构于 $(S_{m^2}) \times (\mathbb{Z}_m)^{\times 2}$。

证明。我们首先证明， $N(B, C)_\prec$中的每个元素都与c_0相容。根据命题 3.9，元素 $v \in S([2m]^2)$ 与 c_0 相容，当且仅当 v保持 $C \times [2m]$ 不变；对 $N(B, C)_\prec$中的所有元素，这一点都很容易验证。特别地， c_0与自身是（双）相容的（即它是秩为 1 的稳定）。

现在我们证明， c_0与 $N(B, C)_\prec$中的每个其他元素都相容。根据命题 3.8 c_0，c_0与元素 $v \in S([2m]^2)$ 相容，当且仅当存在 $\sigma \in S_{2m}$ 和 $t : [2m] \to [m]$ 使得

$$v(x, c_i) = (\sigma(x), c_{i+t(x)})$$

对所有 $x \in [2m]$ 和所有 $i \in [m]$ （其中指标模 m 取值）。通过对所有 $x \in [2m]$取 $t(x) := 0$，并对所有 σ 取 $= 1$，即可使 $\langle S(B, C)\ r_0 \rangle$ 中的所有元素都满足这一条件，因为这些元素都会保持 C中的每一列不变。这已经足以推出， c_0与 $N(B, C)_\prec$中的每个元素都相容。

类似地，我们可以验证， r_0与 $N(B, C)_\prec$中的任意元素都双相容。事实上，根据命题 3.1， r_0与某个 $v \in S([2m]^2)$ 相容，当且仅当v保持 $[2m] \times B$不变；而这很容易对所有 $v \in N(B, C)_\prec$验证。反过来，可以利用命题 3.3（对所有 $x \in [2m]$，取 $\sigma = 1$ 和 $t(x) = 0$ ）验证，所有元素 $S(C \times B)$ 都与 r_0相容，因此结论显然成立。

最后，根据 [4, 命题 5.15] 很容易看出， $S(C \times B)$中的任意两个元素都是双相容的。结论由此显而易见。□

5 二次子群

本节利用前几节得到的结果，对 $\mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 中在 $\pi(\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2))$ 内极大的子群作出详细而明确的描述；这些子群列于 [3, 表 5] （为方便读者，现重现如下

表1）。我们的结果表明，其中一些是 Out($\mathcal{O}_n$) 中对任意 $n \geq 3$ 都存在的子群的特例，而另一些似乎是 $n = 4$ 情形所特有的。

表1：第2层的极大移位空间自同构群（位于 $\mathcal{O}_4$中）

Case	阶	群	重数
1	128	$\big(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\big) \rtimes \mathbb{Z}_2$	3
2	96	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$	6
3	64	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times D_8$	12
4	64	$\mathbb{Z}_2 \times \big((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2\big)$	6
5	54	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	4
6	36	$S_3 \times S_3$	8
7	24	S_4	7

5.1 第一行

我们沿用上一节的记号。因此 $i, j \in [4]$, $i \neq j$, and$\{h, k\} := [4] \setminus \{i, j\}$. 令 u_0, v_0, w_0, $z_0, u_0', v_0', w_0', z_0', \sigma_0, \sigma_0'$ 为$R_{i,j}$, $R_{j,i}$, $C_{i,j}$,$C_{j,i}$, $R_{h,k}$,$R_{k,h}$,$C_{h,k}$,$C_{k,h}$,$S_{h,k}$,$S_{i,j}$的生成元。因此

$$u_0 = ((i,h),(i,k)), v_0 = ((j,h),(j,k)), w_0 = ((h,i),(k,i)), z_0 = ((h,j),(k,j))$$
$$u_0' = ((h,i),(h,j)), v_0' = ((k,i),(k,j)), w_0' = ((i,h),(j,h)), z_0' = ((i,k),(j,k))$$
$$\sigma_0 = (i,j), \sigma_0' = (h,k).$$

注意，u_0，$v_0 \in R_{\{i,j\}}$, w_0，$z_0 \in C_{\{i,j\}}$, u_0'，$v_0' \in R_{\{h,k\}}$，以及 w_0'，$z_0' \in C_{\{h,k\}}$。另外定义 $\omega_0 := (i,\ h)(j,\ k) \in S_4$。我们将 $H_{i,\ j}$定义为由以下元素生成的 Aut($\mathcal{O}_4$) 的子群

$$\{\lambda_{u_0}\lambda_{v_0}, \lambda_{w_0}\lambda_{z_0}, \lambda_{u_0'}\lambda_{v_0'}, \lambda_{w_0'}\lambda_{z_0'}, \lambda_{\sigma_0 \otimes 1}, \lambda_{\sigma_0' \otimes 1}, \lambda_{\omega_0 \otimes 1}\}$$

（因此 $H_{i,\ j} = H_{j,\ i} = H_{h,\ k} = H_{k,\ h}$）。注意，根据定理 4.1（或引理 4.2），$\lambda_{u_0}\lambda_{v_0} = \lambda_{u_0 v_0}$、$\lambda_{w_0}\lambda_{z_0} = \lambda_{w_0 z_0}$、$\lambda_{u_0'}\lambda_{v_0'} = \lambda_{u_0' v_0'}$和 $\lambda_{w_0'}\lambda_{z_0'} = \lambda_{w_0' z_0'}$。为方便读者，我们在 $S([4]^2)$ 中为 $i = 1$、$j = 3$、$h = 2$和 $k = 4$列出了这七个置换 $u_0 v_0$、$w_0 z_0$、$u_0' v_0'$、$w_0' z_0'$、$\sigma_0 \otimes 1$、$\sigma_0' \otimes 1$ 和 $\omega_0 \otimes 1$ 的图示。

. . . . . .

在 $S([4]^2)$ 中为$H_{i,j}$for $i = 1, j = 3, h = 2$, and $k = 4$. 的生成元编索引的七个置换。

留给读者验证：如果在 H_{ij} 的定义中，我们将 ω_0 替换为另一种可能的选择 $\omega_0' := (i,k)(j,h) = \sigma_0\omega_0\sigma_0 = \sigma_0'\omega_0\sigma_0' \in S_4$ (这对应于交换 h 和 k)，那么这个群将保持不变。

定理 5.1。 对于 $i,j \in [4], i \neq j$, $H_{i,\ j}$ 包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$ 中，且同构于 $\mathbb{Z}_2^{\times 6} \rtimes \mathbb{Z}_2$。典范投影 $\pi : H_{i,j} \to \mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 的核是平凡的，并且这 3 个群 $\pi(H_{i,j})$ 两两不同。

证明。 容易验证， $\mathcal{P}_4^2$ 中的六个元素 u_0v_0, w_0z_0, $u_0'v_0'$, $w_0'z_0'$, $\sigma_0' \otimes 1$ 和 $\sigma_0 \otimes 1$ 两两可交换。现在证明它们都双相容。事实上，根据命题 3.1 和 3.3，一个置换与 u_0v_0（分别与 $u_0'v_0'$）双相容，当且仅当它保持 $[n] \times \{i,j\}$（分别保持 $[n] \times \{h,k\}$）不变，并按命题 3.3 规定的方式置换 $\{h,k\} \times [n]$（分别为 $\{i,j\} \times [n]$）中的元素；容易验证，所有这些置换都满足这一条件。同理，一个置换与 w_0z_0（分别与 $w_0'z_0'$）双相容，当且仅当它保持 $\{i,j\} \times [n]$（分别保持 $\{h,k\} \times [n]$）不变，并以适当的方式置换 $[n] \times \{h,k\}$（分别为 $[n] \times \{i,j\}$）中的元素，这也容易验证。最后，根据相同的结果，一个置换与 $\sigma_0' \otimes 1$ 双相容，当且仅当它保持 $[4] \times [4]$ 不变（这是一个空条件），并以适当的方式置换 $[n] \times \{h,k\}$ 中的元素； $\sigma_0 \otimes 1$正是如此。

由命题 2.4 可知，由 $\lambda_{u_0v_0}$、 $\lambda_{w_0z_0}$、$\lambda_{u_0'v_0'}$、 $\lambda_{w_0'z_0'}$、 $\lambda_{\sigma_0'\otimes 1}$ 和 $\lambda_{\sigma_0\otimes 1}$ 在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_4)$ 中生成的群包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$，且与由 u_0v_0、 w_0z_0、 $u_0'v_0'$、 $w_0'z_0'$、 $\sigma_0' \otimes 1$ 和 $\sigma_0 \otimes 1$ 在 $S([4]^2)$ 中生成的群同构。容易看出，后一个群同构于 $(\mathbb{Z}_2)^{\times 6}$。事实上，设 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu,\nu) \in (\langle u_0v_0\rangle, \langle w_0z_0\rangle, \langle u_0'v_0'\rangle, \langle w_0'z_0'\rangle, \langle \sigma_0' \otimes 1\rangle, \langle \sigma_0 \otimes 1\rangle)$，且$\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu = 1$ 属于 $S([4]^2)$。那么，对所有 $a \in [4]$，都有 $(\mu\nu)(a,a) = (\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta)(a,a) = (a,a)$，这意味着 $\mu = \nu = 1$。此外， α、 β 和 γ 都保持 i 行不变，因此 $\delta = 1$。类似地，考察 i 列可得 $\gamma = 1$，进而推出 $\alpha = \beta = 1$。

现在， $\omega_0\,\sigma_0\,\omega_0 = \sigma_0'$ 在 S_4 所以

$$\lambda_{\omega_0\otimes 1}\lambda_{\sigma_0\otimes 1} = \lambda_{\omega_0\sigma_0} = \lambda_{\sigma_0'\omega_0} = \lambda_{\sigma_0'\otimes 1}\lambda_{\omega_0\otimes 1}.$$

类似地，$(\omega_0 \otimes \omega_0)\ u_0v_0\ (\omega_0 \otimes \omega_0) = u_0'v_0'$ 属于 $S([4]^2)$，因此

$$\begin{aligned}\lambda_{\omega_0\otimes 1}\lambda_{u_0v_0} &= \lambda_{\omega_0}\lambda_{u_0v_0} = \lambda_{(\omega_0\otimes\omega_0)u_0v_0(1\otimes\omega_0)} = \lambda_{u_0'v_0'(\omega_0\otimes 1)} \\ &= \lambda_{u_0'v_0'}\lambda_{\omega_0} = \lambda_{u_0'v_0'}\lambda_{\omega_0\otimes 1}\end{aligned}$$

并且，$(\omega_0\otimes\omega_0)\ w_0z_0\ (\omega_0\otimes\omega_0)=w_0'z_0'$ 属于 $S([4]^2)$，因此

$$\begin{aligned}\lambda_{\omega_0\otimes 1}\lambda_{w_0z_0}&=\lambda_{\omega_0}\lambda_{w_0z_0}=\lambda_{(\omega_0\otimes\omega_0)w_0z_0(1\otimes\omega_0)}=\lambda_{w_0'z_0'(\omega_0\otimes 1)}\\&=\lambda_{w_0'z_0'}\lambda_{\omega_0}=\lambda_{w_0'z_0'}\lambda_{\omega_0\otimes 1}.\end{aligned}$$

由这些关系以及以下事实可立即得出：$H_{i,\ j}$ 包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$中，且与 $\mathbb{Z}_2^{\times 6}\rtimes\mathbb{Z}_2$ 同构；λ_{ω_0} 是一个对合，并且 $\lambda_{\omega_0}\notin\langle\lambda_{u_0v_0},\ \lambda_{w_0z_0},\ \lambda_{u_0'v_0'},\ \lambda_{w_0'z_0'},\ \lambda_{\sigma_0'\otimes 1},\ \lambda_{\sigma_0\otimes 1}\rangle$。确实，令上文所述的$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \mu,\ \nu)$满足 $\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta\lambda_\mu\lambda_\nu=\lambda_{\omega_0}$。于是 $\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu}=\lambda_{\omega_0}$，因此 $\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu=\omega_0\otimes 1$。但是，这个最后等式左边的置换保持 $[4]^2$, 中第 i行与第 j行的并集不变，而 $\omega_0\otimes 1$ 则不然。

现在我们证明，H_{ij} 与从典范投影到 $\mathsf{Out}(\mathcal{O}_4)$ 的核的交是平凡的。设 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu,\nu)$ 如上，$\eta\in\langle\omega_0\otimes 1\rangle$，并令 $p\in S_4$ 满足 $\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta\lambda_\mu\lambda_\nu\lambda_\eta=\lambda_{p\otimes p^{-1}}$。于是 $\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu\eta}=\lambda_{p\otimes p^{-1}}$，这意味着 $\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu\eta=p\otimes p^{-1}$。因此 $\eta^{-1}\nu^{-1}\mu^{-1}(\alpha\beta\gamma\delta)^{-1}=p^{-1}\otimes p$，所以对所有 $a\in[4]$，$(\eta^{-1}\nu^{-1}\mu^{-1})(a,a)=(p^{-1}(a)\ p(a))$，这表明 $p=1$，因为 η、ν 和 μ 不会改变第二个坐标。由上述讨论立即可知，α、β、γ、δ、μ、ν 和 η 都是平凡的。

仍需证明，三个群 H_{12}、H_{13}、H_1、4 在 $\mathsf{Out}(\mathcal{O}_4)$ 中的像是不同的。令 ℓ、$m\in[2,4]$、$\ell<m$，以及 $\{h\}:=[4]\setminus\{1,\ell,m\}$。那么 $[\lambda_{(\ell,h)\otimes 1}]\in\pi(H_{1,m})$。我们断言 $[\lambda_{(\ell,h)\otimes 1}]\notin\pi(H_{1,\ell})$。否则，存在 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu,\nu,\eta)\in(\langle u_0v_0\rangle,\langle w_0z_0\rangle,\langle u_0'v_0'\rangle,\langle w_0'z_0'\rangle,\langle\sigma_0'\otimes 1\rangle,\langle\sigma_0\otimes 1\rangle,\langle\omega_0\otimes 1\rangle)$（其中，最后一个等式右侧的元素取自 H_1，ℓ，因此 $\alpha\in\langle((1,h),(1,m))((\ell,h),(\ell,m))\rangle$，$\beta\in\langle((h,1),(m,1))((h,\ell),(m,\ell))\rangle$，$\gamma\in\langle((h,1),(h,\ell))((m,1),(m,\ell))\rangle$，$\delta\in\langle((1,h),(\ell,h))((1,m),(\ell,m))\rangle$，$\mu\in\langle(h,m)\otimes 1\rangle$，$\nu\in\langle(1,\ell)\otimes 1\rangle$，且 $\eta\in\langle(1,h)(\ell,m)\otimes 1\rangle$），使得 $[\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu\eta}]=[\lambda_{(\ell,h)\otimes 1}]$。因此，存在 $p\in S_4$，使得 $\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu\eta=(p(\ell,h))\otimes p^{-1}$。令 $a\in[4]$，并令 $(b,a):=(\eta^{-1}\nu^{-1}\mu^{-1})(a,a)$。那么

$$(a,a)=\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu\eta(b,a)=((p(\ell,h))\otimes p^{-1})(b,a)=(p(\ell,h)(b),p^{-1}(a))$$

因此 $p=1$。于是 $\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu\eta=(\ell,h)\otimes 1$，因此 $\alpha\beta\gamma\delta=((\ell,h)\otimes 1)\eta^{-1}\nu^{-1}\mu^{-1}$。特别是

$$(a,a)=(\alpha\beta\gamma\delta)(a,a)=((\ell,h)\otimes 1)\eta^{-1}\nu^{-1}\mu^{-1}(a,a)$$

对所有 $a\in[4]$。这意味着 $(\ell,h)=\tilde\mu\tilde\nu\tilde\eta$ 其中 $\tilde\mu\in\langle(h,m)\rangle$，$\tilde\nu\in\langle(1,\ell)\rangle$，且 $\tilde\eta\in\langle(1,h)(\ell,m)\rangle$。但是 (ℓ,h) 将 1 固定，因此 $\tilde\nu=1$ 且 $\tilde\eta=1$，所以 $(\ell,h)\in\langle(h,m)\rangle$，这就产生了矛盾。因此 $[\lambda_{(\ell,h)\otimes 1}]\notin\pi(H_{1,\ell})$，从而 $\pi(H_{1,\ell})\neq\pi(H_{1,m})$。□

注意，三个群 $H_{1,\ 2}$，$H_{1,\ 3}$，$H_{1,\ 4}$ 在 Aut($\mathcal{O}_4$) 中通过 Bogolubov 自同构彼此共轭。事实上，对于所有$2 \leq \ell < m \leq 4$，我们有 $(H_{1,\ \ell})^{\lambda_{(\ell,m)}} = H_{1,\ m}$，因为相应生成元在 $S([4]^2)$ 中的指标由 $(\ell,\ m) \otimes (\ell,\ m)$ 共轭。

5.2 第二行

我们沿用上一节中的一些记号。因此 $i,\ j \in [4], i \neq j, \{h,k\} := [4] \setminus \{i,j\}$，并且

$$u_0 = ((i,h),(i,k)),\ v_0 = ((j,h),(j,k)),\ w_0' = ((i,h),(j,h)).$$

我们还令

$$x_0 = ((i,i),(j,i))((i,j),(j,j)),\ y_0 = ((h,h),(h,k))((k,h),(k,k)).$$

令 $K_{i,\ j}$ 为由以下元素生成的 Aut($\mathcal{O}_4$) 的子群：

$$\{\lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{w_0'}, \lambda_{x_0}, \lambda_{y_0}\}.$$

注意 $K_{i,\ j} = K_{j,\ i}$。为方便读者，我们给出 $S([4]^2)$ 中五个置换 u_0, w_0', v_0, x_0, y_0 在 $i = 1, j = 2$, $h = 3$ 和 $k = 4$ 下的图示。

. . . . .

S（$[4]^2$）中为$K_{i,\ j}$的生成元编引的五个置换，对于 $i = 1,\ j = 2$, $h = 3,\ k = 4$

定理 5.2。对于 $i, j \in [4], i \neq j$, $K_{i,\ j}$包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$且同构于 $S_4 \times \mathbb{Z}_2^{\times 2}$。典范投影 $\pi : K_{i,\ j} \to \mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$的核是平凡的，并且这 6 个群 $\pi(K_{i,\ j})$ 在 $1 \leq i < j \leq 4$ 时两两不同。

证明。显然，由 u_0, v_0, w_0', x_0 和 y_0 生成的 $S([4]^2)$ 的子群 $N_{i,j}$ 同构于 $S_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。此外，根据定理 4.6（取 $n = 2m = 4$），$N_{i,j}$ 中的所有元素彼此双相容。因此，根据命题 2.4，$K_{i,j}$ 包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$ 中，且同构于 $S_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。

现在令 $\lambda_v \in K_{i,j} \cap ker(\pi)$。那么存在 $u \in S_4$、$\alpha \in \langle\{u_0, v_0, w_0'\}\rangle$、$\beta \in \langle\{x_0\}\rangle$ 和 $\gamma \in \langle\{y_0\}\rangle$，使得 $\lambda_{u \otimes u^{-1}} = \lambda_v = \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma = \lambda_{\alpha\beta\gamma}$。因此$u \otimes u^{-1} = \alpha\beta\gamma$。令 $a \in \{h,k\}$ 和 $b \in \{i,j\}$。那么，由于 (a,b) 是 α的不动点，β 和 γ，我们有

$$(u(a), u^{-1}(b)) = (\alpha\beta\gamma)(a,b) = (a,b)$$

因此 $u(a) = a$ 且 $u^{-1}(b) = b$。所以 $u = 1$，进而推出 $v = 1$。因此 $K_{i,j} \cap ker(\pi) = \{id\}$。

现在我们证明，对于 $1 \le i < j \le 4$，六个子群 $\pi(K_{i,j})$ 两两不同。首先假设 $\pi(K_{i,j}) = \pi(K_{i,\ell})$，其中 $\ell \in \{h, k\}$。令 $\{m, n\} := [4] \setminus \{i, \ell\}$。容易看出 $(i, j) \otimes 1 \in N_{i,j}$，因此 $\lambda_{(i,j)\otimes 1} \in K_{i,j}$，从而 $\pi(\lambda_{(i,j)\otimes 1}) \in \pi(K_{i,j}) = \pi(K_{i,\ell})$。因此存在 $\tau \in N_{i,\ell}$，使得 $\pi(\lambda_{(i,j)\otimes 1}) = \pi(\lambda_\tau)$，于是存在 $z \in S_4$ 使得

$$(i, j) \otimes 1 = (z \otimes 1)\tau(1 \otimes z^{-1})$$

这意味着 $z^{-1}(i, j) \otimes z = \tau$。令 $b \in \{i, \ell\}$，则 $\tau(m, b) = (m, b)$。然而，$(z^{-1}(i, j) \otimes z)(m, b)$ 的第二个坐标为 $z(b)$，因此我们得出结论：当且仅当 $b \in \{i, \ell\}$ 时，$z(b) = b$。现在，$j \in \{m, n\}$，所以我们可以假设 $m \ne j$。于是 $(z^{-1}(i, j) \otimes z)(m, m) = (z^{-1}(m)\ z(m))$。但是，$\tau$ 会将对角线上的元素映射到同一行或同一列，因此我们得出结论：m 是 z 的不动点，从而 $z = 1$。因此 $(i, j) \otimes 1 = \tau$。但是 $((i, j) \otimes 1)(i, i) = (j, i)$，而 $\tau(i, i)$ 的第一个坐标，根据我们对 K_i 的定义，ℓ 不是 i 就是 ℓ。这表明，当 $|\{i, j\} \cap \{a, b\}| = 1$ 时，$\pi(K_{i,j})$ 和 $\pi(K_{a,b})$ 两两不同。

还需证明 $\pi(K_{i,j}) \ne \pi(K_{h,k}) \ne \pi$。假设不然，则 $\pi(\lambda_{u_0}) \in \pi(K_{h,k}) \in \pi$。因此，按照上述推理，我们看到存在 $\tau \in N_h$、k 和 $z \in S_4$，使得 $(z^{-1} \otimes 1)((i, h), (i, k))(1 \otimes z) = \tau$。令 $a \in [4] \setminus \{i\}$，则 $((z^{-1} \otimes 1)((i, h), (i, k))(1 \otimes z))(a, a) = (z^{-1}(a)\ z(a))$，但是，正如上一段所述，$N_h$、$k$ 的所有元素都将对角线上的元素映射到同一行或同一列中，因此 a 是 z 的不动点，从而 $z = 1$。因此 $((i, h), (i, k)) = \tau$，这与以下事实矛盾：N_h、k中的任意元素都使第 k 列保持不变。□

注意，如果将 $K'_{i,j}$ 定义为由以下元素生成的 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_4)$ 的子群

$$\{\lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{w'_0}, \lambda_{(i,j)\otimes 1}, \lambda_{(h,k)\otimes 1}\},$$

那么可以证明 $\pi(K_{i,j}) = \pi(K'_{i,j})$。此外，可以验证，最后两个自同构生成了 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 的一个副本，该副本以如下方式作用于由前三个元素生成的 S_4 的副本：$K'_{i,j} \simeq \pi(K'_{i,j}) \simeq S_4 \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$。

5.3 第三条直线

我们沿用前几节中的记号，因此 $i, j \in [4]$, $i < j$, $\{h, k\}_< := [4] \setminus \{i, j\}$（因此 $\{h, k\} := [4] \setminus \{i, j\}$ 和 $h < k$）以及

$$w'_0 = ((i, h), (j, h)),\ x_0 = ((i, i), (j, i))((i, j), (j, j)),\ w_0 = ((h, i), (k, i))$$

$$y_0 = ((h,h),(h,k))((k,h),(k,k)),\ u_0' = ((h,i),(h,j)),\ v_0' = ((k,i),(k,j)),$$
$$z_0 = ((h,j),(k,j)),\ v_0 = ((j,h),(j,k)).$$

我们还定义

$$c_0 := ((i,h),(i,k),(j,h),(j,k)),\ c_0' := ((i,h),(j,k),(i,k),(j,h)),$$

$\widetilde{M}_{i,\ j}$ 为由以下元素生成的 $S([4]^2)$的子群

$$\{c_0,\ w_0',\ x_0,\ y_0,\ u_0'v_0'\}$$

$\widetilde{\ }$和 $M_{i,\ j}$ 为由 λ_g、 $g \in M_{i,\ j}$生成的 Aut($\mathcal{O}_4$) 的子群。类似地，我们定义 $\widetilde{M}'_{i,\ j}$ 为由以下元素生成的 $S([4]^2)$ 的子群

$$\{c_0',\ v_0,\ x_0,\ y_0,\ w_0z_0\},$$

$\widetilde{\ }$和 $M'_{i,\ j}$为由 λ_g、 $g \in M'_{i,\ j}$生成的 Aut($\mathcal{O}_4$) 的子群。

注意，我们也可以用同样的方式定义$\sim$ $\widetilde{\ }$ $\sim i,\ j$ 且满足 $i \neq j$ 的情形，并且此时 $M_{i,\ j} = M_{j,\ i}$和 $M'_{i,\ j} = M'_{j,\ i}$。下图给出了群 $M_{1,\ 2}$ 和 $M'_{1,\ 2}$ 的生成元的图形表示。

对 $M_{i,\ j}$、 $i=1,\ j=2$、 $h=3,\ k=4$ 生成元进行编号的 $S([4]^2)$ 中的五个置换

在 $S([4]^2)$ 中为 $M'_{i,\ j}$、 $i=1,\ j=2,\ h=3,\ k=4$ 的生成元编号的五个置换

注 5.3。注意， $\widetilde{M}_{i,\ j}$ 使以下 $[4]^2$ 子集保持不变:

- $\{i,j\} \times \{i,j\}$, $\{i,j\} \times \{h,k\}$;
- $\{h\} \times \{i,j\}$, $\{h\} \times \{h,k\}$;

- $\{k\} \times \{i, j\}$, $\{k\} \times \{h, k\}$.

特别是，$M_{i,\ j}$ 使行 h 和行 k 保持不变，也使列 i 与 j的并集保持不变。类似地，$M'_{i,\ j}$ 使以下 $[4]^2$ 子集保持不变:

- $\{i, j\} \times \{h, k\}$, $\{h, k\} \times \{h, k\}$;
- $\{h, k\} \times \{i\}$, $\{h, k\} \times \{j\}$;
- $\{i, j\} \times \{i\}$, $\{i, j\} \times \{j\}$,

因此 $M'_{i,\ j}$ 使第 i 列和第 j 列保持不变，同时也使第 h行与第 k行的并集保持不变。

我们用 D_8 表示阶为 8 的二面体群（正方形的对称群）。

定理 *5.4.* 对于 $i,\ j \in [4],\ i < j,\ M_{i,\ j}$和 $M'_{i,\ j}$包含于 $\lambda^{-1}\ (\mathcal{P}_4^2)$ 中，并且与 $D_8 \times \mathbb{Z}_2^3$同构。典范投影 $\pi : M_{i,j} \to \mathit{Out}(\mathcal{O}_4)$ 和 $\pi : M'_{i,j} \to \mathit{Out}(\mathcal{O}_4)$ 的核是平凡的，并且对于 $i,\ j \in [4],\ i < j$，*12* 个群 $\pi\ (M_{i,j})$ 和 $\pi\ (M'_{i,j})$ 两两不同。

证明。容易验证，$M_{i,\ j}$与 $D_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$同构。由命题 3.1、3.3、3.8 和 3.9 可立即得到，w'_0、x_0、y_0 和 $u'_0v'_0$ 中的每一个都与其他所有生成元双相容。由 [4, 命题 5.15]可知，c_0 与自身双相容（即，它是秩为 1 的稳定的）。因此，根据命题 2.4，$M_{i,\ j}$ 包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$ 中，并且与 $D_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$同构。

接下来我们证明，$M_{i,\ j}$ 中不同于恒等置换的元素都不是内的。事实上，显然，$M_{i,\ j}$ 中的每个元素都可以写成$uvwzt$ 的形式，其中 $u \in \langle\{u'_0v'_0\}\rangle$、$v \in \langle\{x_0\}\rangle$、$w \in \langle\{y_0\}\rangle$、$z \in \langle\{c_0\}\rangle$ 和 $t \in \langle\{w'_0\}\rangle$。假设对于某个 $\sigma \in S_n$，有 $uvwzt = \sigma \otimes \sigma^{-1}$，其中 $u,\ v,\ w,\ z$，且 t如上所述。那么我们有

$$(\sigma(i), \sigma^{-1}(i)) = (\sigma \otimes \sigma^{-1})(i, i) = (uvwzt)(i, i) = \begin{cases} (i, i), \text{ if } v = 1, \\ (j, i), \text{ if } v \neq 1, \end{cases}$$

因此 $v = 1$和 $\sigma(i) = i$。因此，$(\sigma(j)\ \sigma^{-1}(j)) = (\sigma \otimes \sigma^{-1})(j,\ j) = (uwzt)\ (j,\ j) = (j,\ j)$ 因此 $\sigma(j) = j$，并且

$$(\sigma(h), \sigma^{-1}(h)) = (\sigma \otimes \sigma^{-1})(h, h) = (uwzt)(h, h) = \begin{cases} (h, h), \text{ if } w = 1, \\ (h, k), \text{ if } w \neq 1, \end{cases}$$

因此 $w = 1$ 和 $\sigma(h) = h$。因此 $\sigma = 1$ 和 $uzt = 1$，这意味着 $u = z = t = 1$，如所述。

注意到，对生成元 $M'_{i,j}$ 编号的置换，是对生成元 $M_{i,j}$ 编号的置换的反转置；结合命题 2.3，以及对所有 $\sigma \in S_n$ 都有 $^a(\sigma \otimes \sigma^{-1}) = (w_0\sigma^{-1}w_0 \otimes w_0\sigma w_0) = (w_0\sigma^{-1}w_0) \otimes (w_0\sigma^{-1}w_0)^{-1}$ 这一事实，其中 $w_0 = n \dots 321$ 是最长排列，即 S_n（见 4），可知相应的结论对 $M'_{i,j}$ 也成立。

最后，我们证明，十二个群 $M_{i,j}, M'_{i,j}, i, j \in [4], i < j$ 在 $\mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 中的像彼此不同。

根据定义，$\pi(\lambda_{w'_0}) \in \pi(M_{i,j})$。先假设 $\pi(\lambda_{w'_0}) \in \pi(M_{i,b})$，其中 $\sim b \neq j$。令 $\{a, j\} := [4] \setminus \{i, b\}$。那么存在 $\sigma \in S_4$ 和 $g \in M_{i,b}$，使得 $w'_0 = (\sigma \otimes 1)g(1 \otimes \sigma^{-1})$。由于 $\widetilde{M_{i,b}}$ 中的每个元素都保持行 j 不变，且 (j, j) 是 w'_0 的不动点，我们推得 $(\sigma \otimes 1)g(1 \otimes \sigma^{-1})(j, j)$ 属于行 $\sigma(j)$，因此 $\sigma(j) = j$。类似地，我们得出 $\sigma(a) = a$。此外，若 $\sigma = (i, b)$，则有 $(\sigma \otimes 1)g(1 \otimes \sigma^{-1})(i, i) = ((\sigma \otimes 1)g)(i, b)$，它属于列 b，这与 (i, i) 是 w'_0 的不动点这一事实矛盾。因此 $\sim\sigma = 1$，所以 $w'_0 = g$，进而 $w'_0 \in M_{i,b}$；这与 $M_{i,b}$ 的所有 $\widetilde{\ }$ 元素都保持行 j 不变相矛盾。这说明，若 $b \neq j$，则 $\pi(M_{i,j}) \neq \pi(M_{i,b})$。类似地，若 $a \neq i$，则 $\pi(M_{i,j}) \neq \pi(M_{a,j})$。

现在假设 $\pi(\lambda_{w'_0}) \in \pi(M_{h,k})$。那么，如上所述，存在 $\sigma \in S_4$ and $g \in \widetilde{M_{h,k}}$，使得 $w'_0 = (\sigma \otimes 1)g(1 \otimes \sigma^{-1})$。由于 $\widetilde{M_{h,k}}$ 保持行 i 和 j 不变，且 (i, i) 和 (j, j) 是 w'_0 的不动点，因此我们像上面一样得出，$\sigma(i) = i$，并且 $\sigma(j) = j$。最后，若 $\sigma = (h, k)$，则 $(\sigma \otimes 1)g(1 \otimes \sigma^{-1})(k, k) = ((\sigma \otimes 1)g)(k, h)$ 位于第 h 列，这与 (k, k) 是 w'_0 的不动点这一事实矛盾。因此 $\sigma = 1$，从而 $w'_0 \in M_{h,k}$；但这不可能，因为 $M_{h,k}$ 保持行 i 和 j 不变。这表明 $\pi(M_{i,j}) \neq \pi(M_{h,k})$。因此，对于 $i, j \in [4], i < j$，六个群 $\pi(M_{i,j})$ 彼此不同。

同样，$\pi(\lambda_{v_0}) \in \pi(M'_{i,j})$。首先假设 $\pi(\lambda_{v_0}) \in \pi(M'_{i,b})$，其中 $\sim b \neq j$。令 $\{a, j\} := [4] \setminus \{i, b\}$。那么存在 $\sigma \in S_4$ 和 $g \in M'_{i,b}$，使得 $\widetilde{\ } v_0 = (\sigma \otimes 1)g(1 \otimes \sigma^{-1})$。由于 $M'_{i,b}$ 中的每个元素都使列 i 和 b 保持不变，且 (i, i) 和 (b, b) 是 v_0 的不动点，按照上述推理可得，若 $\sigma(i) \neq i$，则 $(\sigma \otimes 1)g(1 \otimes \sigma^{-1})(i, i)$ 属于列 $\neq i$，这就产生了矛盾；对于 (b, b)，同理可证。因此 $\sigma(i) = i$，且 $\sigma(b) = b$。若 $\sigma = (a, j)$，则 $(\sigma \otimes 1)g(1 \otimes \sigma^{-1})(a, a) = ((\sigma \otimes 1)g)(a, j)$ 位于行 j（因为 $\widetilde{\ } M'_{i,b}$ 中的每个元素都将 (a, j) 映射到行 a），这就产生了矛盾，因为 $\widetilde{\ }(a, a)$ 是 v_0 的不动点。因此 $\sigma = 1$，从而 $v_0 \in M'_{i,b}$；但 $\sim M'_{i,b}$ 中的每个元素都使列 b 保持不变，且 $b \in \{h, k\}$，所以列 h 或列 k 要么

被 v_0保持不变，这就产生了矛盾。这说明，若 $b \neq j$，则 $\pi(M'_{i,j}) \neq \pi(M'_{i,b})$。同理可证，若 $a \neq i$，则 $\pi(M'_{i,j}) \neq \pi(M'_{a,j})$。最后，~假设 $\pi(\lambda_{v_0}) \in \pi(M'_{h,k})$，因此存在 $\sigma \in S_4$和 $g \in M'_{h,k}$，使得 $(\sigma^{-1} \otimes 1)v_0(1 \otimes \sigma) = g$。由于 v_0 使每一行都保持不变，我们得出，$(\sigma^{-1} \otimes 1)v_0(1 \otimes \sigma)$ 对所有 $x \in [4]$ 都将行 x 映射到行 $\sigma^{-1}(x)$。但是 $M'_{h,k}$ 中的每个元素都使 $\{h,k\} \times [4]$ 保持不变，因此 $\{i,j\} \times [4]$ 也保持不变。因此$\sigma(\{h,k\}) = \{h,k\}$，且 $\sigma(\{i,j\}) = \{i,j\}$。若 $\sigma(h) = k$，那么我们就会有$\sigma(k) = h$，从而有

$$g(h,k) = (\sigma^{-1} \otimes 1)v_0(1 \otimes \sigma)(h,k) = (k,h)$$

~这与事实矛盾，因为$M'_{h,k}$ 中没有任何元素具有这一性质。因此$\sigma(h) = h$ 且 $\sigma(k) = k$。类似地，可以证明 $\sigma(i) = i$ 且 $\sigma(j) = j$。所以$\sim\sigma = 1$。因此 $v_0 \in M'_{h,k}$，这是不可能的。这说明这 6 个子群 $\pi(M'_{i,j})$ 彼此不同。

现在我们证明，对所有 $i,j,a,b \in [4]$，$i \neq j$，$a \neq b$，都有 $\pi(M_{i,j}) \neq \pi(M'_{a,b})$。~假设 $\pi(\lambda_{w'_0}) \in \pi(M'_{a,b})$，也就是说，存在 $g \in M'_{a,b}$和 $\sigma \in S_4$使得$w'_0 = (\sigma \otimes 1)g(1 \otimes \sigma^{-1})$。由于 w'_0和 g都保持第 a 列和第 b列不变，我们得出 $\sigma(a) = a$ 且 $\sigma(b) = b$。因此，$\sigma = 1$ 或 $\sigma = (\alpha,\beta)$，其中$\sim\{\alpha,\beta\} := [4] \setminus \{a,b\}$。然而，若 $\sigma = (\alpha,\beta)$，那么由于 M'_a的每个元素都会将 (α,β) 映射到第 α 行，我们有 $(\alpha,\alpha) = w'_0(\alpha,\alpha) = (\sigma\otimes 1)g(1\otimes\sigma^{-1})(\alpha,\alpha) = (\sigma\otimes 1)g(\alpha,\beta) = (\sigma\otimes 1)(\alpha,*) = (\beta,*)$（其中 $*$是 $[4]$的某个元素）。这表明~~$\sigma = 1$。所以 $w'_0 \in M'_{a,b}$，但这不可能，因为 $w'_0 \notin \bigcup_{1\leq c<d\leq 4} M'_{c,d}$。这一点~很容易证明，唯一需要稍加注意的情形是 $w'_0 \notin M'_{i,j}$。~~如果 $w'_0 \in M'_{i,j}$，那么 w'_0必定属于由 c'_0和 v_0生成的$M'_{i,j}$子群。但这是不可能的，因为注意到这个子群同构于正方形的对称群，该正方形的顶点按顺时针顺序为 (i,h),(j,k),(i,k) 和 (j,h)，而 w'_0 不是这个正方形的对称。□

5.4 第四条线

我们沿用前几节的记号，因此 $i,j \in [4]$，$i < j$，$\{h,k\}_< := [4] \setminus \{i,j\}$，且

$$u_0 = ((i,h),(i,k)),\ v_0 = ((j,h),(j,k)),$$
$$w_0 = ((h,i),(k,i)),\ z_0 = ((h,j),(k,j)).$$

对于 $i,j \in [4]$，$i \neq j$，我们令 $G_{i,j}$ 为由以下元素生成的群

$$\{\lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{w_0}, \lambda_{z_0}, \lambda_{(h,k)\otimes 1}, \lambda_{(i,j)\otimes 1}\}.$$

在 Aut($\mathcal{O}_4$) 中（因此 $G_{i,j} = G_{j,i}$，而 $G_{i,j}$ 是由 $\lambda(R_{i,j}) \cup \lambda(R_{j,i}) \cup \lambda(C_{i,j}) \cup \lambda(C_{j,i}) \cup \lambda(S_{i,j}) \cup \lambda(S_{h,k})$生成的子群）。为方便读者，我们给出了 $S([4]^2)$ 中 $i = 1$和 $j = 2$对应的六个置换 $u_0, v_0, w_0, z_0, (h,k) \otimes 1$和 $(i,j) \otimes 1$ 的图示。

. . . . . .

$S([4]^2)$ 中为 $G_{i,j}$ 的生成元编号的六个置换，对于 $i = 1$、$j = 2$

定理 5.5。对于 i、$j \in [4]$、$i \neq j$、$G_{i,j}$ 包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$，并且同构于 $\mathbb{Z}_2 \times \big((\mathbb{Z}_2^{\times 4}) \rtimes \mathbb{Z}_2\big)$。典范投影 $\pi\colon G_{i,j} \to \mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 的核是平凡的，并且这 6 个群 $\pi(G_{i,j})$ 两两不同。

证明。显然，由 $\{u_0, v_0, w_0, z_0\}$ 生成的 $S([4]^2)$ 的子群与 $\mathbb{Z}_2^{\times 4}$ 同构。此外，根据命题 3.1、3.3、3.8 和 3.9，容易验证所有这些生成元彼此双相容。因此，根据命题 2.4，Aut($\mathcal{O}_4$) 中由 $\{\lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{w_0}, \lambda_{z_0}\}$ 生成的群包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$，并且也与 $\mathbb{Z}_2^{\times 4}$ 同构。

此外，很容易验证

$$\lambda_{(i,j)\otimes 1}\,\lambda_{u_0} = \lambda_{v_0}\,\lambda_{(i,j)\otimes 1},\quad \lambda_{(i,j)\otimes 1}\,\lambda_{w_0} = \lambda_{z_0}\,\lambda_{(i,j)\otimes 1}$$

因此

$$\lambda_{(i,j)\otimes 1}\,\lambda_{v_0} = \lambda_{u_0}\,\lambda_{(i,j)\otimes 1},\quad \lambda_{(i,j)\otimes 1}\,\lambda_{z_0} = \lambda_{w_0}\,\lambda_{(i,j)\otimes 1}$$

也同样成立。由此可直接得出，由 $\{\lambda_{u_0}, \lambda_{v_0}, \lambda_{w_0}, \lambda_{z_0}, \lambda_{(i,j)\otimes 1}\}$ 生成的 Aut($\mathcal{O}_4$) 中的群与 $\big(\mathbb{Z}_2^{\times 4}\big) \rtimes \mathbb{Z}_2$ 同构。（$\mathbb{Z}_2$ 的作用是将两个水平生成元相互交换，垂直生成元也同样如此。）

最后，可以类似地验证，$(h,k) \otimes 1$ 与 u_0, v_0, w_0, z_0 以及 $(i,j) \otimes 1$ 可交换（且双相容），因此 $G_{i,j}$ 包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$ 中，并且与 $\mathbb{Z}_2 \times \big((\mathbb{Z}_2^{\times 4}) \rtimes \mathbb{Z}_2\big)$ 同构。

根据上述内容，$G_{i,j}$ 中的每个元素都可写成 $\lambda_{uvwz(\sigma\sigma'\otimes 1)}$，其中 $u \in \langle u_0\rangle$、$v \in \langle v_0\rangle$、$w \in \langle w_0\rangle$、$z \in \langle z_0\rangle$、$\sigma \in \langle(i,j)\rangle$，且 $\sigma' \in \langle(h,k)\rangle$。现在我们可以证明，$G_{i,j}$ 在 Out($\mathcal{O}_4$) 中的像与 $G_{i,j}$ 本身同构。为此，只需验证 $G_{i,j}$ 中所有非平凡元素都不是内的，即不具有某个 $p \in S_4 \setminus \{1\}$ 使其形式为 $\lambda_{p\otimes p^{-1}}$。设 u、v、w、z、σ、σ' 如上所述，并且 $uvwz(\sigma\sigma' \otimes 1) = p \otimes p^{-1}$。若 $\sigma \neq 1$，则有 $(i,j) = uvwz(\sigma\sigma' \otimes 1)(j,i) = (p(j)\ p^{-1}(i))$，这不可能。类似地，若 $\sigma' \neq 1$，则 $(k,h) = uvwz(\sigma\sigma' \otimes 1)(h,k) = (p(h)\ p^{-1}(k))$。另一方面，若

$\sigma = \sigma' = 1$，则对所有 $a \in [4]$ 都有 $(a,\ a) = uvwz(a,\ a) = (p(a)\ p^{-1}(a))$，因此 $p = 1$，这同样矛盾。

还需证明，与大小为 2 的不同 $[4]$ 子集相关联的 $\mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 的六个子群两两不同。设 $\{a,b\} \in \binom{[4]}{2}$ 满足 $\{a,b\} \neq \{i,j\}$。

首先假设 $|\{a,b\} \cap \{i,j\}| = 1$，即 $i = a$。那么 $\pi(\lambda_{(i,b)\otimes 1}) \in \pi(G_{i,b})$。我们声称 $\pi(\lambda_{(i,b)\otimes 1}) \notin \pi(G_{i,j})$。事实上，反设不然。那么存在 $u \in \langle u_0\rangle$，$v \in \langle v_0\rangle$，$w \in \langle w_0\rangle$，$z \in \langle z_0\rangle$，$\sigma \in \langle (i,j)\rangle$，以及 $\sigma' \in \langle (h,k)\rangle$，使得 $\pi(\lambda_{(i,b)\otimes 1}) = \pi(\lambda_{uvwz(\sigma\sigma'\otimes 1)})$。因此存在 $p \in S_4$，使得 $uvwz(\sigma\sigma' \otimes 1) = (p \otimes 1)((i,b) \otimes 1)(1 \otimes p^{-1}) = (p(i,b)) \otimes p^{-1}$。令 $\{\ell\} := [4] \setminus \{i,j,b\}$。若 $\sigma' \neq 1$，则 $(\sigma'(\ell)\ \ell) = (uvwz(\sigma \otimes 1)(\sigma' \otimes 1))(\ell,\ell) = (p(\ell)\ p^{-1}(\ell))$，因为 $\{\sigma'(\ell)\ \ell\} = \{h,k\}$，这就产生矛盾。另一方面，若 $\sigma' = 1$，则 $(b,b) = (uvwz(\sigma \otimes 1))(b,b) = (p(i)\ p^{-1}(b))$，这同样产生矛盾。

现在假设 $\{a,b\} \cap \{i,j\} = \emptyset$，比如说 $a = h$ 和 $b = k$。那么 $\pi(\lambda_{((k,i),(k,j))}) \in \pi(G_{a,b})$。我们声称 $\pi(\lambda_{((k,i),(k,j))}) \notin \pi(G_{i,j})$。事实上，反设结论不成立。那么按照上文的推理，我们可以得出存在 $u \in \langle u_0\rangle$，$v \in \langle v_0\rangle$，$w \in \langle w_0\rangle$，$z \in \langle z_0\rangle$，$\sigma \in \langle (i,j)\rangle$，$\sigma' \in \langle (h,k)\rangle$，以及 $p \in S_4$，使得$uvwz(\sigma \otimes 1)(\sigma' \otimes 1) = (p \otimes 1)((k,i),(k,j))(1 \otimes p^{-1})$。这很容易推出$p \neq 1$。注意，$(p \otimes 1)((k,i),(k,j))(1 \otimes p^{-1})$将第 x 行映射到第 p 行(x)，对所有$x \in [4]$均成立，因此 $p(\{i,j\}) = \{i,j\}$ 且 $p(\{h,k\}) = \{h,k\}$。先假设 $\sigma' = 1$ 和 $w = 1$，或 $\sigma' \neq 1$ 和 $w \neq 1$。那么 (h,i) 和 (k,i) 都是 $uvwz(\sigma \otimes 1)(\sigma' \otimes 1)$的不动点，因此 $p(h) = h$ 且 $p(k) = k$，从而 $p = (i,j)$。但这样一来，$(p \otimes 1)((k,i),(k,j))(1 \otimes p^{-1})(h,i) = (k,j)$，这又产生了矛盾。最后，假设 $\sigma' \neq 1$ 和 $w = 1$，或 $\sigma' = 1$ 和 $w \neq 1$。那么 $uvwz(\sigma \otimes 1)(\sigma' \otimes 1)$将 (h,i) 映射到 (k,i)，并将 (k,i) 映射到 (h,i)，因此 $p(h) = k$且 $p(k) = h$。但这样一来，$p(i) = j$（否则 $p \otimes 1((k,i),(k,j))(1 \otimes p^{-1})(k,i) = (h,j)$，这是不可能的），因此 $(p \otimes 1)((k,i),(k,j))(1 \otimes p^{-1})(h,i) = (k,j)$，这也构成矛盾。□

5.5 第五行

令 $i \in [n]$ 和 $(b_1, \ldots\ldots, b_r) \in S_n$ 为一个 r-循环，使得 $i \notin \{b_1, \ldots, b_r\}$（特别是 $2 \leq r \leq n-1$）。我们通过 $a := ((i,\ b_1)\ldots\ldots, (i,\ b_r))$，$b := ((b_1,\ i)\ldots\ldots, (b_r,\ i))$ 定义 $a,\ b,\ c \in S([n]^2)$，

$$c := \prod_{x \neq i} ((x,b_1), \ldots, (x,b_r)),$$

并且 $t := (b_1,\ b_r)(b_2,\ b_{r-1})\cdots$（因此 $t \in S_n$ 和 t 是 $\lfloor r/2 \rfloor$ 2-循环的乘积）。我们将 $L_i(b_1,\ \ldots\ldots,\ b_r)$ 定义为 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n)$ 的子群，由以下元素生成：

$$\{\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_{t\otimes 1}\}.$$

注意，t 取决于如何书写 r-循环（$b_1,\ \ldots\ldots,\ b_r$）。不过可以验证，如果我们用另一种方式书写同一个循环，并取相应的 t，那么所得两个子群在 $\mathrm{Out}(\mathcal{O}_n)$ 中的像相同（见注 5.8）。

定理 5.6。对于 $i \in [n]$ 和 $(b_1,\ \ldots\ldots,\ b_r) \in S_n,\ \ i \notin \{b_1, \ldots, b_r\}$，有 $L_i(b_1,\ \ldots\ldots,\ b_r)$ 包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_n^2)$，且与 $(\mathbb{Z}_r^{\times 3}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ 同构。此外，若 $r \geq 3$，则典范投影 $\pi\colon L_i(b_1,\ \ldots\ldots,\ b_r) \to \mathrm{Out}(\mathcal{O}_n)$ 的核是平凡的。

证明。显然，由 $\{a, b, c\}$ 生成的 $S([n]^2)$ 的子群 $\widetilde{L}_i(b_1,\ \ldots\ldots,\ b_r)$ 与 $\mathbb{Z}_r^{\times 3}$ 同构。

此外，这 3 个生成元彼此双相容。更具体地说，根据命题 3.1，a 与置换 $v \in S([n]^2)$ 相容，当且仅当 v 使 $[n] \times ([n] \setminus \{i\})$ 保持不变；很容易看出，这对这三个置换都成立。另一方面，根据命题 3.3，置换 $v \in S([n]^2)$ 与 a 相容，当且仅当它按照命题 3.3 规定的方式置换 $\{b_1, \ldots, b_r\} \times [n]$ 中的元素；取 $\sigma = 1$、$t(i) = 1$，以及在 $x \neq i$ if $v = b$ 的情况下取 $t(x) = 0$，再对所有 $x \in [n]$ if $v = c$ 取 $\sigma = (b_1, \ldots, b_r)$ and $t(x) = 0$，即可满足这一条件。最后，根据命题 3.8，取 $\sigma = 1$ 和对所有 $x \in [n]$ 取 $t(x) = 0$，可知 b 与自身相容；取 $\sigma = 1$ 和对所有 $x \in [n] \setminus \{i\}$ 取 $t(x) := 1$，以及 $t(i) = 0$，可知它与 c 相容；而根据命题 3.1，很容易推出 c 与 b 相容，也与自身相容。

因此，根据命题 2.4，由 λ_a、λ_b 和 λ_c 在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_4)$ 中生成的子群包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$，且与 $\mathbb{Z}_r^{\times 3}$ 同构。

接下来，我们断言

$$\lambda_{t\otimes 1}\lambda_x = \lambda_x^{-1}\lambda_{t\otimes 1}$$

对于 $x \in \{a, b, c\}$（注意，由于 x 与自身相容，因此 $\lambda_{x^{-1}} = \lambda_x^{-1}$）。事实上，不难验证 $(t\otimes t)x(t\otimes t) = x^{-1}$，因此根据端同态的复合规则，

$$\lambda_{t\otimes 1}\lambda_x = \lambda_{(t\otimes 1)(1\otimes t)x(1\otimes t)} = \lambda_{(t\otimes t)x(t\otimes t)(t\otimes 1)} = \lambda_{x^{-1}(t\otimes 1)} = \lambda_{x^{-1}}\lambda_{t\otimes 1}\ .$$

因此，$L_i(b_1、\ \ldots\ldots、\ b_r)$中的每个元素都可以写成$\lambda_u\lambda_v\lambda_w\lambda_z = \lambda_{uvwz}$的形式，其中 $u \in \langle a\rangle$、$v \in \langle b\rangle$、$w \in \langle c\rangle$、$z \in \langle t \otimes 1\rangle$，使得$L_i(b_1、\ \ldots\ldots、\ b_r)$有 $2r^3$ 个元素（注意，$t\otimes 1$ 不属于 $\widetilde{L}_i(b_1、\ \ldots\ldots、\ b_r)$），并且它具有半直积 $(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_r) \rtimes \mathbb{Z}_2$的结构。

接下来我们证明，对于 $r \geq 3$， $L_i(b_1, \ldots, b_r)$中除恒等置换外的任何元素都不是内的。假设存在 u， v， w，以及如上一段所述的 z，使得对于某个 $\sigma \in S_n$有 $uvwz = \sigma \otimes \sigma^{-1}$。令 $x \in [n] \setminus \{i\}$。如果$u \neq 1$，那么我们有

$$(i, (b_1, \ldots, b_r)(x)) = (uvwz)(i, x) = (\sigma \otimes \sigma^{-1})(i, x) = (\sigma(i), \sigma^{-1}(x))$$

由此我们得出 $\sigma = (b_r, \ldots, b_1)$。现在设 $k \in [r]$。那么 $(\sigma \otimes \sigma^{-1})(b_2, b_k)$ 位于第 b_1 行，而 $(uvwz)(b_2, b_k)$ 在 $z = 1$ 时位于第 b_2 行，在 $z \neq 1$时位于第b_{r-1} 行，这就产生了矛盾。因此 $u = 1$。类似地，我们还有 $(i, x) = (uvwz)(i, x) = (\sigma(i) \sigma^{-1}(x))$，由此推得 $\sigma = 1$，进而很容易得出 $u = v = w = z = 1$。□

注意，对于 $r = 2$， $t = (b_1, b_2)$ 和 $ac = 1 \otimes (b_1, b_2)$，因此 $(t \otimes 1)ac = (b_1, b_2) \otimes (b_1, b_2)$ 是内的。

关于前一定理中所研究的子群的不同性，我们有如下结果。

定理 5.7. 对于 i、 $j \in [n]$ 和 $(b_1, \ldots, b_r)$、$(c_1, \ldots, c_s) \in S_n$、 $i \notin \{b_1, \ldots, b_r\}$、$j \notin \{c_1, \ldots, c_s\}$，我们有 $\pi(L_i(b_1, \ldots, b_r)) \neq \pi(L_j(c_1, \ldots, c_s))$，当且仅当 r、 $s \geq 3$ 和 $r \neq s$ 成立，或者 $i \in \{c_1, \ldots, c_s\}$。

证明. 第一个结论直接由以下事实得出：根据定理 5.6， $|\pi(L_i(b_1, \ldots, b_r)) | = 2r^3$，若 $r \geq 3$。我们证明，当 $i \in \{c_1, \ldots, c_s\}$ 时，群 $L_i(b_1, \ldots, b_r)$ 和 $L_j(c_1, \ldots, c_s)$ 在 $\mathrm{Out}(\mathcal{O}_n)$ 中的像不同。注意，这意味着 $i \neq j$。反设不然，则 $\pi(\lambda_{((j,c_1)} \ldots, _{(j,c_s)})) \in \pi(L_i(b_1, \ldots, b_r))$。因此，正如上一个结果的证明中所指出的，存在 $u \in \langle a \rangle$、 $v \in \langle b \rangle$、$w \in \langle c \rangle$ 和 $z \in \langle t \otimes 1 \rangle$，使得 $\pi(\lambda_{((j,c_1)} \ldots, _{(j,c_s)})) = \pi(\lambda_{uvwz})$。因此存在 $\sigma \in S_4$，使得

$$((j, c_1), \ldots, (j, c_s)) = (\sigma \otimes 1)\, uvwz\, (1 \otimes \sigma^{-1}). \tag{10}$$

将该等式两边分别作用于（i， i），并注意到 u， v， w以及 z 都保持第 i 行不变，我们得出 $i = \sigma(i)$。因此，由于 u， v， w以及 z 都保持第 i 列不变，我们看到，(10) 右端的置换将（j， i）映射到第 i 列，而左端的置换则不会将（j， i）映射到第 i 列（因为 $i \in \{c_1, \ldots, c_s\}$）。这证明了 $\pi(L_i(b_1, \ldots, b_r)) \neq \pi(L_j(c_1, \ldots, c_s))$，正如所需。□

注 5.8。令 i、$(b_1$、.....、$b_r)$ 和 a、b、c、t 与上文含义相同，$t' := (b_1, b_{r+2})(b_3, b_r)(b_4, b_{r-1}) \cdots$， L 是由 $\{\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_{t \otimes 1}\}$、生成的 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n)$ 的子群，而 L' 是由 $\{\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_{t' \otimes 1}\}$ 生成的子群。我们将

证明 $\pi(L) = \pi(L')$。只需证明 $\pi(\lambda_{t'\otimes 1}) \in \pi(L)$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\pi(\lambda_{t'\otimes 1}) &= \pi(\lambda_{1\otimes t'}) = \pi(\lambda_{1\otimes(b_1,\dots b_r)t(b_r,\dots,b_1)}) = \pi(\lambda_{1\otimes(b_1,\dots b_r)}\lambda_{1\otimes t}\lambda_{1\otimes(b_1,\dots,b_r)^{-1}}) \\ &= \pi(\lambda_{ca})\,\pi(\lambda_{1\otimes t})\pi(\lambda_{(ca)^{-1}}) = \pi(\lambda_c)\pi(\lambda_a)\,\pi(\lambda_{t\otimes 1})\pi((\lambda_a)^{-1})\pi((\lambda_c)^{-1})\end{aligned}$$

（这里我们使用了以下事实：$\pi(\lambda_{1\otimes u}) = \pi(\lambda_{u\otimes 1})$，对于任意 $u,\ v \in S_n$，$1\otimes u$ 和 $1\otimes v$是双相容的，$ac = (b_1,\ \dots,\ b_r)$，并且 a 和 c 是双相容的）；这串等式末尾的元素都属于$\pi(L)$。

现在，我们可以通过将上述讨论应用于情形 $n = 4$ 和 $r = 3$，来讨论第五行。令 $i \in [4]$，并令 $L_i := L_i(h,k,l)$，其中$(h,k,l) \in S_4$是任意一个满足 $\{h,k,l\} := [4]\setminus\{i\}$ 的 3-循环（注意，由于$(h,k,l) = (h,l,k)^{-1}$，$L_i(h,k,l)$只取决于 i和 t，参见注 5.8）。为方便读者，我们附上对标记 $L_1(3,4,2)$的四个生成元的四个置换的图示。

. . . .

$S([4]^2)$ 中标记生成元的四个置换 $L_1(3,\ 4,\ 2)$

定理 5.9。对于 $i \in [4]$，L_i 包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$ 且与$(\mathbb{Z}_3^{\times 3}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ 同构。典范投影 $\pi : L_i \to \mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 的核是平凡的，并且对于 $i \in [4]$，这 *4* 个群 $\pi(L_i)$ 彼此不同。

证明。这是定理 5.6 和定理 5.7 的直接推论（因为$i \in [4]\setminus\{j\}$ 对所有 $j \neq i$均成立）。□

5.6 第六条直线

在本小节中，我们始终假设 $n \geq 3$。回忆第 3 节，对于 $i \in [n]$，我们令 $R_i := R_{\{i\}}$，并类似地定义 C_i、$\check{}R_i$ 和 $\check{}C_i$（因此 R_i 包含 $S([n]^2)$ 的所有置换，这些置换只置换第 i 行中不在第 i 列的元素，而 R_i 逐点固定第 i 行，并以相同方式置换其他所有行，但固定第 i 列中的所有元素；对 C 也类似）。我们方便地令

$$\lambda(S) := \{\lambda_u : u \in S\},$$

对任意 $S \subseteq S([n]^2)$。我们令 Q_i 为由以下元素生成的 $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_n)$ 的子群

$$\lambda(R_i \cup \check{R}_i)$$

并使用 C's 类似地定义 Q'_i。

定理 5.10。对于 $i \in [n]$，Q_i 包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_n^2)$，与 $(S_{n-1})^{\times 2}$ 同构，并且典范投影 $\pi : Q_i \to \mathrm{Out}(\mathcal{O}_n)$ 的核是平凡的。Q'_i 也同理。$2n$ 子群 $\pi(Q_i)$ 和 $\pi(Q'_i)$ 彼此不同。

证明。我们发现，令 $\widetilde{Q}_i$ 为由 $R_i \cup \check{R}_i$ 生成的 $S([n]^2)$ 的子群较为方便。前两条陈述可由定理 4.1（取 $P = \{i\}$）和命题 2.4 直接推出。此外，若 $u \in R_i$ 和 $v \in \check{R}_i$ 满足 $\pi(\lambda_{uv}) = 1$（显然，Q_i 的每个元素都可表示为 uv，其中 u 和 v 满足上述条件），则存在 $p \in S_n$ 使得 $(p \otimes 1)uv(1 \otimes p^{-1}) = 1$。但 R_i 和 $\check{R}_i$ 的所有元素都使每一行保持不变，因此 $(p \otimes 1)uv(1 \otimes p^{-1})$ 对所有 $x \in [n]$ 都将第 x 行映射到第 p 行（x），故 $p = 1$。于是 $uv = 1$，这意味着 $u = v = 1$。

现在我们证明群 $\pi(Q_i)$ 彼此都不同。假设对于某个 $1 \le i < j \le n$，有 $\pi(Q_i) = \pi(Q_j)$。令 $a \in [n] \setminus \{i, j\}$，以及 $u := ((i, j), (i, a))$。那么 $\pi(\lambda_u) \in \pi(Q_i)$，因此存在 $v \in Q_j$ 使得 $\pi(\lambda_u) = \pi(\lambda_v)$。于是存在 $p \in S_n$ 使得 $(p \otimes 1)u(1 \otimes p^{-1}) = v$。但是，正如上一段所观察到的，$(p \otimes 1)u(1 \otimes p^{-1})$ 将行 x 映射到行 $p(x)$，对所有 $x \in [n]$ 均成立，因此 $p = 1$。所以 $u \in Q_j$，这与每个 Q_j 都固定列 j 矛盾。群 $\pi(Q'_i)$ 的情形类似。

最后，我们证明对于所有 $i, j \in [n]$，$\pi(Q_i) \neq \pi(Q'_j)$。反设不然。令 a 和 u 如前一段所述。于是 $\pi(\lambda_u) \in \pi(Q'_j)$，因此按照上述推理，我们得出存在 $v \in Q'_j$ 和 $p \in S_n$，使得 $(p \otimes 1)u(1 \otimes p^{-1}) = v$。令 $r \in [n] \setminus \{i\}$ 和 $b \in [n]$。那么我们有

$$(p(r), b) = (p \otimes 1)u(1 \otimes p^{-1})(r, p(b)) = v(r, p(b)).$$

但是 Q'_j 中的每个元素都使每一列保持不变，因此 $v(r, p(b))$ 属于列 $p(b)$。因此 $p(b) = b$，从而 $p = 1$。所以 $u \in Q'_j$，这因同样的理由不可能成立。□

沿用前一个证明中的记号，我们指出，对于所有 $1 \le i < j \le n$，$Q_i \cap Q_j = 1 \otimes S_{i,\,j}$，这一点很容易验证。

对于 $n = 4$，重数与 [3,表 5]中计算的结果一致。根据 [3],，对于 $n = 4$，所有这些子群都是 $\{[\lambda_u] \in \mathrm{Out}(\mathcal{O}_4) \mid u \in \mathcal{P}_4^2\}$中的极大子群。

5.7 第七行

根据 [3, 表 5]， $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$ 在 Out($\mathcal{O}_4$) 中的像里有 7 个与 S_4 同构的极大子群。其中一个很容易辨认，即置换型 Bogolubov 自同构在 Out($\mathcal{O}_4$) 中的像。其余六个群较难描述，但可以通过深入分析 $S([4]^2)$ 中与 S_4 同构的双相容子群 来构造这一结果实际上是对双相容子群的一般研究的特例，相关内容将在下一节介绍。还值得强调的是，对于这 7 个子群中的每一个，都可以找到一组考克斯特生成元，它们对应于循环类型为 (2，2，2，2) 的置换。

令 $a, b \in \{2,3,4\}$, $a \neq b$ 和 $\{c\} := \{2,3,4\} \setminus \{a,b\}$。我们定义

$$s_1 := ((1,1),(1,b))\,((b,1),(b,b))\,((1,a),(1,c))\,((b,a)),(b,c))$$

$$s_2 := ((1,b),(a,b))\,((b,b),(c,b))\,((1,c),(a,c))\,((b,c),(c,c))$$

$$s_3 := ((a,1),(a,b))\,((c,1),(c,b))\,((a,a),(a,c))\,((c,a),(c,c))$$

（因此每个 $s_i \in S([4]^2)$ 都是四个 2-循环的乘积）。令 $T_{a,b}$ 为由以下元素生成的 Aut($\mathcal{O}_4$) 子群

$$\{\lambda_{s_1}, \lambda_{s_2}, \lambda_{s_3}\},$$

以及 $\widetilde{T}_{a,b}$ 为由 s_1、s_2 和 s_3 生成的 $S([4]^2)$ 的子群。注意，每个 $\sim T_{a,b}$ 都同构于 S_4。为方便读者，我们给出 $a = 2$ 和 $b = 4$ 的三个置换 s_1、s_2 和 s_3 的图示（另见图 1，其中给出了六个群 $T_{a,b}$ 的另一种图示，$\widetilde{\ }$ 应当一目了然）。注意，$T_{a,b}$ 保持第 1 行和第 a 行的并集，以及第 1 列和第 b 列的并集不变。

. . .

s_1、s_2和 s_3 关于 $a = 2$ 和 $b = 4$的三个置换

定理 5.11。 对于 a、$b \in \{2,3,4\}$、$a \neq b$、$T_{a,\,b}$ 包含于 $\lambda^{-1}(\mathcal{P}_4^2)$ 中，且与 S_4同构。典范投影 $\pi : T_{a,\,b} \to \mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 的核是平凡的，且这 6 个群 $\pi(T_{a,\,b})$ 彼此不同。

证明。 可以验证，对于陈述中的所有 a 和 b，这三个考克斯特生成元 s_1、s_2 和 s_3 两两双相容。事实上，根据命题 3.1，s_1 与其自身、s_2 和 s_3 相容（因为所有 s_i 都保持 $[4] \times \{1,b\}$ 不变）。类似地，s_3 与 s_1、s_2 及其自身相容（因为所有 s_i 都

保持 $[4]\times\{a,c\}$ 不变）。此外，根据命题 3.9， s_2 与其自身相容（因为 s_2 保持 $\{b,c\}\times[4]$ 不变）。还需证明 s_2 同时与 s_1 和 s_3 相容。为此，我们对所有 $\alpha\in\{e,f\}$ 和 $x\in[4]$，在 $t(\alpha,\ x)=0$ 以及 $\sigma=((e,\ c),\ (f,\ c))\ ((e,\ b),\ (f,\ b))$ 的情形应用命题 3.2。因此，定理的第一项结论立即由命题 2.4 得出。其余两项结论则由接下来的两个命题推出。□

相关定义请参见引理 6.1 前的段落。

命题 5.12。 从图 *1* 中任意一个子群到$\mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 的典范投影的核是平凡的。

证明。 只需证明，在图 1 中的任意一个子群内都不存在形如 $\sigma\otimes\sigma^{-1}$ 且满足 $\sigma\in S_4\setminus\{1\}$的元素。假设存在这样的元素。那么存在 $a,b\in[4]$，使得 $\sigma(a)=b$。因此， $\{a,b\}$ 是 G_R和 G_C的同一条边。但很容易验证，对于图 1 所示的六个子群，均有 $G_R\cap G_C=\emptyset$。□

命题 5.13。 图 *1* 中的六个子群在典范投影到 $\mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 下的像彼此不同。

证明。 令 $s_1^{(1)}$ 为 $\widetilde{T}_{\{1,2\},\{1,4\}}$的第一个考克斯特生成元。因此

$$s_1^{(1)}=((1,1),(1,4))((1,2),(1,3))((4,1),(4,4))((4,2),(4,3)).$$

假设存在一个 $\sigma\in S_4$，使得 $(\sigma\otimes1)s_1^{(1)}(1\otimes\sigma^{-1})\in\widetilde{T}_{\{1,2\},\ \{1,3\}}$。由于 $s_1^{(1)}$ 使所有行保持不变，我们有：$(\sigma\otimes1)s_1^{(1)}(1\otimes\sigma^{-1})$ 将行 i 映射到~行 $\sigma(i)$，对所有 $i\in[4]$均成立。由于 $T_{\{1,2\}}$ 中的所有元素，$_{\{1,3\}}$ 都使行 1 和行 2 的并保持不变，我们推得 $\sigma(\{1,2\})=\{1,2\}$ 且 $\sigma(\{3,4\})=\{3,4\}$。如果 $\sigma(1)=2$，那么 $\sigma(2)=1$，因此

$$(\sigma\otimes1)s_1^{(1)}(1\otimes\sigma^{-1})(2,1)=(1,2)$$

~这与以下事实矛盾：$T_{\{1,2\},\ \{1,3\}}$ 中没有元素具有此性质（(1，2)~和 (2，1) 属于 $T_{\{1,2\},\ \{1,3\}}$的不同轨道）。因此， $\sigma(1)=1$ 且 $\sigma(2)=2$。类似地，如果 $\sigma(3)=4$，那么 $\sigma(4)=3$，于是

$$(\sigma\otimes1)s_1^{(1)}(1\otimes\sigma^{-1})(3,4)=(4,3)$$

这再次导致矛盾。因此 $\sigma=1$ 所以 $s_1^{(1)}\in\widetilde{T}_{\{1,2\},\ \{1,3\}}$ 这也~ ~不可能。这表明 $T_{\{1,2\},\ \{1,3\}}$ 和 $T_{\{1,2\},\ \{1,4\}}$ 在 $\mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 中的像是不同的。

令 $s_1^{(4)}$ 为 $\widetilde{T}_{\{1,4\},\ \{1,2\}}$的第一个考克斯特生成元，它也是$\widetilde{T}_{\{1,3\},\ \{1,2\}}$的一个元素。因此

$$s_1^{(1)} = ((1,1),(1,2))((1,3),(1,4))((2,1),(2,2))((2,3),(2,4)).$$

假设存在一个 $\sigma \in S_4$，使得 $(\sigma\otimes 1)s_1^{(4)}(1\otimes\sigma^{-1}) \in \widetilde{T}_{\{1,4\},\ \{1,3\}}$。由于$s_1^{(4)}$ 使所有行保持不变，因此 $(\sigma \otimes 1)s_1^{(4)}\ (1 \otimes \sigma^{-1})$ 将行 i 映射到$\widetilde{}$行 $\sigma(i)$，对所有 $i \in [4]$ 都成立。由于 $T_{\{1,4\},\ \{1,3\}}$ 中的所有元素都使第 1 行与第 4 行的并保持不变，我们推得 $\sigma(\{1,4\}) = \{1,4\}$ 且 $\sigma(\{2,3\}) = \{2,3\}$。若 $\sigma(2) = 3$，则 $\sigma(3) = 2$，于是

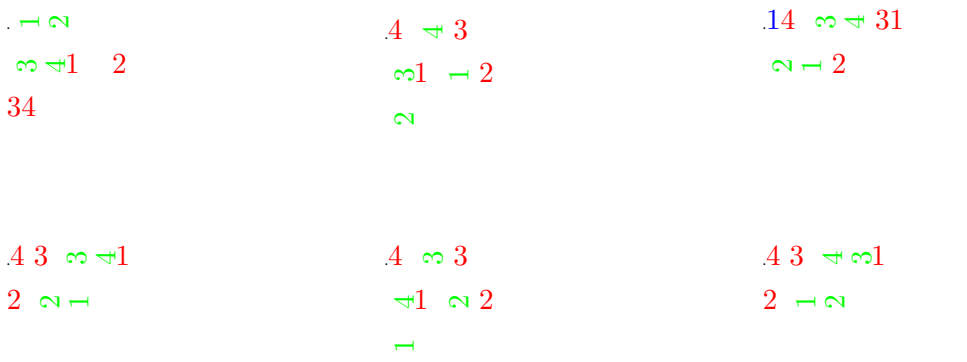
$$(\sigma \otimes 1)s_1^{(4)}(1 \otimes \sigma^{-1})(3,2) = (2,3)$$

这就产生了矛盾，因为这六个子群中没有任何元素具有该性质（(3，2) 和 (2，3) 属于不同的轨道，(1，4) 和 (4，1) 也属于不同的轨道）。因此$\sigma(2) = 2$ 且 $\sigma(3) = 3$。类似地，若 $\sigma(1) = 4$，则 $\sigma(4) = 1$，继而

$$(\sigma \otimes 1)s_1^{(4)}(1 \otimes \sigma^{-1})(4,1) = (1,4)$$

这再次导致矛盾。因此 $\sigma = 1$ 于是 $s_1^{(4)} \in \widetilde{T}_{\{1,4\},\ \{1,3\}}$ 这也$\widetilde{}$ $\widetilde{}$不可能。这表明，对于任意 $h \in \{3,4\}$，$T_{\{1,h\},\ \{1,2\}}$ 和$T_{\{1,4\},\ \{1,3\}}$ 在 $\mathrm{Out}(\mathcal{O}_4)$ 中的像互不相同。

其他情形都类似，因此省略。 □



与 S_4同构的 $S([4]^2)$的六个双相容子群

图1

6 双相容子群与嵌入

在倒数第二节中，我们推导出一系列关于双相容子群的结果，随后将其应用于对 $S([4]^2)$中所有与 S_4 同构的双相容子群进行分类。我们这样做，是因为我们认为这些结果本身可能具有独立的研究价值，而且它们展示了第5节中介绍和研究的某些子群是如何发现的。第一小节中的结果适用于任意 n，而第二小节中的结果则专门针对 $n = 4$。

6.1 双相容子群

设 V 是 $S([n]^2)$ 的双相容子群。我们如下为 V 附上两个图。令 $G_R := ([n], E_R)$，其中，对于任意 $a, b \in [n]$，当且仅当存在 $x, y \in [n]$ 和 $v \in V$，使得 $v(a, x) = (b, y)$。因此，G_R 中的 a 与 b 之间有一条边，当且仅当 V 中存在某个元素将第 a 行中的某个元素映射到第 b 行中的某个元素。类似地，我们定义 $G_C := ([n], E_C)$，规定当且仅当 V 中存在某个元素将第 a 列中的某个元素映射到第 b 列中的某个元素时，$\{a, b\} \in E_C$。

引理 6.1. 设 a、$b \in [n]$ 属于 G_R、$c \in [n]$ 的同一个连通分支，且 $v \in V$。那么 $v(c, a)$ 和 $v(c, b)$ 位于同一行。

证明。不妨设 $\{a, b\} \in E_R$。于是存在 $x, y \in [n]$ 和 $u \in V$，使得 $u(b, x) = (a, y)$。由于 V是双相容的，因此我们有

$$(v \otimes 1)(c, a, y) = (v \otimes 1)(1 \otimes u)(c, b, x) = (1 \otimes u)(v \otimes 1)(c, b, x).$$

因此，$(v \otimes 1)(c, a, y)$ 和 $(v \otimes 1)(c, b, x)$ 的第一坐标相同。 □

对于 G_C 和列，也有类似的结果。

引理 6.2。设 a、$b \in [n]$ 属于 G_C、$r \in [n]$的同一连通分支，且 $v \in V$。那么 $v(a, r)$ 和 $v(b, r)$ 位于同一列。

由前两个引理可得以下结果，它表明，在 G_R 和 G_C的每个连通分支上，V 的每个元素都作为张量积作用。

推论 6.3。设 $A \subseteq [n]$ 是 G_R 和 G_C的一个连通分支，且$v \in V$。那么存在 τ_v、$\sigma_v \in S(A)$，使得

$$v(x, y) = (\sigma_v(x), \tau_v(y))$$

对所有的 $x, y \in A$

证明。设 $a \in A$。我们定义映射 $\sigma_v\colon A \to A$，令

$$\sigma_v(x) := v(x,a)_1$$

对所有 $x \in A$，（$v(x,a)$ 的第一个坐标）。于是 σ_v 是单射，因为若对某些 x, $y \in A$ 有 $\sigma_v(x) = \sigma_v(y)$，那么 $v(x,a)$ 和 $v(y,a)$ 位于同一行。但是，由引理 6.2，$v(x,a)$ 和 $v(y,a)$ 位于同一列。因此 $v(x,a) = v(y,a)$，进而 $(x,a) = (y,a)$。所以 σ_v 是单射，因而是一个置换。τ_v 同理。□

下一个引理表明，其中一个图中的孤立顶点往往会迫使其他顶点也成为孤立顶点。

引理 6.4. 设 $t \in [n]$ 是 G_R 的一个孤立顶点。那么 G_C 中包含 t 的连通分支只含有 G_R 的孤立顶点。

证明。根据我们的假设以及 G_R 的定义，V 保持第 t 行不变。设 $s \in [n]$ 与 t 在 G_C 中属于同一连通分支。不妨设 $\{s,t\} \in E_C$。那么存在 $x, y \in [n]$ 和 $u \in V$，使得 $u(x,t) = (y,s)$。我们希望证明 V 保持第 s 行不变。设 $z \in [n]$ 和 $v \in V$。由于 V 是双相容的，我们有

$$\begin{aligned}(1 \otimes v)(y,s,z) &= (1 \otimes v)(u \otimes 1)(x,t,z) = (u \otimes 1)(1 \otimes v)(x,t,z) \\ &= (u \otimes 1)(x,t,z') = (y,s,z')\end{aligned}$$

对某个 $z' \in [n]$，因此 $v(s, z) = (s, z')$，如所述。 □

若将“R”与“C”互换，也有类似的结论。我们还注意到引理 6.1 的以下推论。

引理 6.5。 若 G_R 连通，则 G_R 是一个完全图。

证明。设 $v \in V$。那么，根据引理 6.1，存在 $\sigma_v \in S_n$，使得对于所有 $(a,b) \in [n]^2$，$v(a,b)$ 都位于行 $\sigma_v(a)$ 中。若 $\{a,b\} \in E_R$，则存在 g、$h \in [n]$ 和 $w \in V$，使得 $w(a,g) = (b,h)$，从而 $\sigma_w(a) = b$。类似地，若 $\{b,c\} \in E_R$，则存在$u \in V$，使得 $\sigma_u(b) = c$。因此，$(uw)(a,g) = u(b,h)$ 的第一个分量是$\sigma_u(b) = c$ 且 $\{a,c\} \in E_R$。□

当然，对于 G_C 也有类似的结论。

现在假设 G_R 是一个完全图。令 $v \in V$。那么，根据引理 6.1，存在 $\sigma_v \in S_n$，使得对于所有 $(a,b) \in [n]^2$，$v(a,b)$ 都位于行 $\sigma_v(a)$ 中。我们指出下面这个简单的观察。

命题 6.6. 假设 G_R 是一个完全图。那么映射 $\sigma : V \to S_n$ 将 v 映射到 σ_v，是一个群同态。

证明。令 u，$w \in V$。那么，对每个 a，$b \in [n]$,

$$\sigma_{uw}(a) = (uw)(a,b)_1 = u(w(a,b))_1 = \sigma_u(w(a,b)_1) = \sigma_u(\sigma_w(a)).$$

□

对于 G_C，同样也有类似的结论。

最后，我们给出另一个结果，它对 $S([n]^2)$ 的双相容子群中的元素施加了更多限制。

命题 6.7。设 $a, b \in [n]$ 属于 G_R，$c \in [n]$ 和 $v \in V$ 的同一个连通分支。那么，$v(c,a)_2 = a$ 当且仅当 $v(c,b)_2 = b$。类似地，若 a 和 b 属于 G_C 的同一个连通分支，则 $v(a,c)_1 = a$ 当且仅当 $v(b,c)_1 = b$。

证明。我们只证明第一个结论，另一个完全类似。不妨设 $\{a,b\} \in E_R$。那么存在 x，$y \in [n]$ 和 $u \in V$，使得 $u(a,x) = (b,y)$。由于 V 是双相容的，因此有

$$\begin{aligned}(v \otimes 1)(c,b,y) &= (v \otimes 1)(1 \otimes u)(c,a,x) = (1 \otimes u)(v \otimes 1)(c,a,x) \\ &= (1 \otimes u)(d,a,x) = (d,b,y)\end{aligned}$$

对于某个 $d \in [n]$。因此，$v(c,b)$ 位于第 b 列。 □

6.2 S_4 在 $S([4]^2)$ 中的双相容嵌入

在本小节中，通过考察 G_R 和 G_C 的可能构型，我们对 $S([4]^2)$ 中所有与 S_4 同构的双相容子群进行分类，并发现它们恰好是关于第二行的讨论中出现的 $N_{i,j}$ 的 4 个子群（总共 24 个）、群 $S_4 \otimes 1$ 和 $1 \otimes S_4$，以及 $\sim T_{a,b}$ 的 6 个群。

定理 6.8。设 V 是 $S([4]^2)$ 的一个子群。则以下条件等价：

i) V 是双相容的，且与 S_4 同构；

ii) V 是以下群之一：

- V 是定理 *5.2* 的证明中定义的任意群 $N_{i,j}$ 内的一个副本（总共 *24* 个副本）；

– $V = S_4 \otimes 1$，或 $V = 1 \otimes S_4$；– V 是定理 *5.11* 中所述的 S_4 的 *6* 个副本之一。

证明。假设 V 是双相容的，且与 S_4同构。我们根据 $G_R \cup G_C$ 是否连通，区分两种主要情形（其中$G_R \cup G_C$:=([4], $E_R \cup E_C$））。

A)： $G_R \cup G_C$ **是不连通的**。

这意味着 G_R 和 G_C 都不连通。因此，G_R 和 G_C 各自都有 2、3 或 4 个连通分支。由此得到 9 种情形。不过，由于“R”和“C”之间存在对称性，我们只讨论其中 6 种。

A1)： G_R **和** G_C **都有 2 个连通分支**。

这里我们同样需要考虑两种不同的可能性。

A1i)： G_R **和** G_C **没有孤立顶点**。设 $E_1 := \{x, y\}$ 和 E_2 :=$\{z, t\}$ 是 G_R的连通分支，因此 $E_R = \{\{x, y\}, \{z, t\}\}$。因此，由于 $G_R \cup G_C$ 不连通，且 G_C 有两个连通分支，故 G_C =G_R。这意味着 V至少有 4 个轨道，即 $E_1 \times E_1$、$E_1 \times E_2$、 $E_2 \times E_1$和 $E_2 \times E_2$。

设 $v \in V$。那么，根据推论 6.3，存在 $\sigma, \tau \in S(E_1)$，使得 $v = \sigma \otimes \tau$in $(E_1)^2$，因此对所有 $a, b \in E_1$，都有 $v^2(a, b) = (a, b)$。类似地，对所有 $a, b \in E_2$，都有 $v^2(a, b) = (a, b)$。此外，根据引理 6.1， $v(c, z)$ 和 $v(c, t)$ 对于 $c \in E_1$ 位于同一行；根据引理 6.2 v，如果 $c \in E_2$，则 $x(c)$ 和 $v(y, c)$ 位于同一列。因此， v^2 限制在 $E_1 \times E_2$ 上时保持行和列不变。于是 $v^2 = Id$ 在 $E_1 \times E_2$ 上。 $E_2 \times E_1$ 的情形类似。因此 $v^2 = 1$。由于这对任意 $v \in V$ 都成立，这与我们的假设 i) 矛盾。

A1ii)： G_R **或** G_C 有孤立顶点。</style}设 t 是 G_R 的孤立顶点，那么 E:$= \{x, y, z\}$ 是 G_R 的另一个连通分支。于是 t 在 G_C 中是孤立的（否则 $G_R \cup G_C$ 就会是连通的），因此 E 也是 G_C 的一个连通分支。因此， V 至少有 4 个轨道，分别为 $E \times E$、 $E \times \{t\}$、 $\{t\} \times E$ 和 $\{t\} \times \{t\}$。

设 $v \in V$。那么，根据推论 6.3，存在 σ， $\tau \in S(E)$，使得 $v = \sigma \otimes \tau$ 属于 E^2，因此对于所有 a， $b \in E$，都有 $v^6(a, b) = (a, b)$。此外，由于$|E \times \{t\}| = |\{t\} \times E| = 3$，我们有 $v^6 = Id$ 在 $E \times \{t\}$ 上以及在 $\{t\} \times E$ 上。由于 $v(t, t) = (t, t)$，我们得出 $v^6 = 1$。这对任意 $v \in V$ 都成立，因此与我们的假设 i) 矛盾。

A2)： G_R **有 3 个连通分支，** G_C **有 2 个连通分支**。

设 x 和 y 是 G_R中的两个孤立顶点，并且 $E = \{z, t\}$。由引理 6.4 和当前假设 A)，容易看出 $E_C = \{\{x, y\}, \{z, t\}\}$。因此， V 至少有 6 个轨道： $\{x\}\times\{x, y\}$、 $\{x\}\times E$、 $\{y\}\times\{x, y\}$、 $\{y\}\times E$、 $E\times\{x, y\}$、$E \times E$。由推论 6.3，存在 $\sigma, \tau \in S(E)$，使得对每个 $v \in V$， $v = \sigma \otimes \tau$ 在 E^2上成立，因此 $v^2 = Id$ 在 E^2上成立。由引理 6.2， $v(z, x)$ 和 $v(t, x)$ 位于同一列，因此，限制在 $E \times \{x, y\}$上的 v^2 保持列不变。因此， $v^4 = Id$ 在 $E \times \{x, y\}$上成立。由此很容易推出，对所有 $v \in V$， $v^4 = 1$ 成立，这与假设 i) 矛盾。

A3)： G_R **有 3 个连通分支，** G_C **也有 3 个连通分支。**

设 z 和 t 是 G_R的两个孤立顶点。根据引理 6.4， x 和 y 要么都在 G_C中是孤立的，要么都不是。

A3i)： x和 y在 G_C中是孤立的。因此， $E = \{z, d\}$是 G_C中唯一的一条边。我们至少有 9 个轨道： $\{t\}\times\{x\}$、 $\{t\}\times\{y\}$、 $\{z\}\times\{x\}$、 $\{z\}\times\{y\}$、 $\{x, y\}\times\{x\}$、$\{x, y\} \times \{y\}$、 $\{x, y\} \times E$、 $\{z\} \times E$、 $\{t\} \times E$。根据引理 6.2， $v(z, z)$ 和 $v(t, z)$ 位于同一列，因此，将 v 限制在 $E \times E$ 上，结果要么是恒等置换，要么是双换位 $((z, z), (z, t))((t, z), (t, t))$（注意，根据我们的假设 A3)，行 z和行 t是不变的）。同理，将 v限制在 $\{x, y\} \times \{x, y\}$上，结果要么是恒等置换，要么是双换位 $((x, x), (y, x))((x, y), (y, y))$。另一方面，我们对正方形 $\{x, y\} \times \{z, t\}$没有任何限制。因此，根据定理 5.2， V 是$K_{x,y}$的一个子群。（实际上，这样的子群有 4 个，而由于 x 和 y 的选择，总共有 $24 = 6 \cdot 4$ 个。）

A3ii)：既非 x**也非** y**在** G_C**中孤立。** 此处， $G_R = G_C$。至少有 9 个轨道 $\{z\}\times\{z\}$, $\{z\}\times\{t\}$, $\{t\}\times\{z\}$, $\{t\}\times\{t\}$, $\{z\}\times E$, $\{t\}\times E$, $E\times\{z\}$,$E \times \{t\}$, $E \times E$，其中 $E = \{x, y\}$。根据推论 6.3，存在 $\sigma, \tau \in S(E)$，使得 $v = \sigma \otimes \tau$ 在 E^2中。因此， $v^2 = 1$ 在 $E \times E$上。由此很容易得出，对于所有 $v \in V$， $v^2 = 1$ ，这与假设 i) 矛盾。

A4)： G_R **有 3 个连通分支，** G_C **有 4 个连通分支。**

于是 V 至少有 12 个大小为 1 或 2 的轨道，因此 V 与 S_4不同构。

A5)： G_R **有 4 个连通分支，** G_C **有 2 个连通分支。**

接下来我们必须区分两种可能性。

A5i)： G_C **有一个孤立顶点。**因此，我们可以假设 x 是 G_C 的孤立顶点，而 $E := \{y, z, t\}$ 是另一个连通分支。因此，V至少有 8 个轨道，即 $\{x\} \times E$、 $\{y\} \times E$、$\{z\} \times E$、 $\{t\} \times E$、 $\{(z,\ x)\}$,

$\{(t,\ x)\}$、 $\{(x,\ x)\}$以及 $\{(y,\ x)\}$。接着，由于这些轨道的大小都为 ≤ 3，我们有，对于所有 $v \in V$， $v^6 = 1$，因此 V与 S_4不同构。

A5ii）： G_C**没有孤立顶点**。我们可以假设 $E_C = \{\{x, y\}, \{z, t\}\}$。那么 V 至少有 8 个轨道，大小均为 ≤ 2，因此对于所有 $v \in V$，都有 $v^2 = 1$，所以 V 与 S_4不同构。

A6）： G_R **和** G_C**一样，也有 4 个连通分支**。

这里唯一可能的情形显然是 $V = \{e\}$。

B）： $G_R \cup G_C$ **是连通的**。这里我们区分
两种可能性。

B1）： G_R **或** G_C **是连通的**。

我们讨论 G_R 连通的情形，另一种情形完全对称。根据引理 6.5， G_R 是一个完全图，因此命题 6.6适用。现在我们有两种情形需要考虑。

B1i)： G_C **具有孤立顶点**。于是，根据引理 6.4， G_C 为空；根据刚才的观察，这意味着 $v = \sigma_v \otimes 1$。因此， V是 $S_4 \otimes \{1\}$的一个子群，所以 $V = S_4 \otimes \{1\}$，如所要求的那样。

B1ii)： G_C **没有孤立顶点**。我们进一步区分两种子情况。

B1iia)： G_C **是连通的**。于是，根据推论 6.3，存在 $\tau_v \in S_4$ 使得$v = \sigma_v \otimes \tau_v$。令

$$V_1 := \{\sigma_v : v \in V\},\ V_2 := \{\tau_v : v \in V\}.$$

令 $w \in V$。由于 V是双相容的， v 和 w 是双相容的，并且容易看出这意味着 $\sigma_v\tau_w = \tau_w\sigma_v$。因此， V_1 中的任意元素都与 V_2中的任意元素对易。由于 $V \simeq S_4$，存在 v、 $w \in V$使得 $vw \neq wv$。因此，或者 $\sigma_v\sigma_w \neq \sigma_w\sigma_v$，或者 $\tau_v\tau_w \neq \tau_w\tau_v$。不妨设 $\sigma_v\sigma_w \neq \sigma_w\sigma_v$。令 $H := \langle\sigma_v、\ \sigma_w\rangle$。于是 $H \leq S_4$，且 H 不是阿贝尔的。因此， H 同构于 S_3、8 阶二面体群 D_8、交错群 A_4或 S_4 中的一个。由于V_2 与 H 中的每个元素对易，我们有 $V_2 \subseteq C_{S_4}(H)$（ H 在 S_4 中的中心化子）。但是，由于 G_C 非空， $V_2 \neq \{1\}$。另一方面，众所周知且容易看出， $C_{S_4}(S_3) = C_{S_4}(S_4) = C_{S_4}(A_4) = \{1\}$，而$C_{S_4}(D_8) = \{1, g\}$，其中 $g \in S_4$ 是一个双换位。因此 $V_2 = \{1, g\}$。所以， V_1 中的每个元素都与 g 对易。但容易验证， S_4 中恰有 8 个元素与一个双换位对易，因此 $|V_1| \leq 8$。于是 $|V| \leq |V_1| \cdot |V_2| \leq 16$，这与我们的假设 i) 矛盾。若 $\tau_v\tau_w \neq \tau_w\tau_v$，同理。

B1iib)： G_C**不连通**。那么 E_C要么是 $\{\{x, y\}, \{z, t\}\}$，要么是 $\{\{x, z\},\{y, t\}\}$ 或 $\{\{x, t\}, \{y, z\}\}$。令 $v \in V$。根据引理 6.1，回顾可知，存在

$\sigma_v \in S_4$ 使得对于所有 $(a,\ b) \in [4]^2$，$v(a,\ b)$ 位于第 σ_v 行 a 中。不失一般性，我们可以假设 $E_C = \{\{x,y\},\{z,t\}\}$。因此，$V$至少有两个轨道，即 $[4]\times\{x,y\}$ 和 $[4]\times\{z,t\}$。根据命题 6.6，映射σ：$V \to S_4$ 将 v 映射到 σ_v，是一个群同态。由此可知，$\ker\sigma$ 是 S_4的正规子群，即

$$\ker\sigma \in \{\{e\}, S_4, A_4, V_4\}\ ,$$

其中 $V_4 = \{e, (1,\ 2)(3,\ 4),\ (1,\ 3)(2,\ 4),\ (1,\ 4)(2,\ 3)\}$。但是，$G_R$是完备的，因此对于任意 $a,\ b \in [4]$，存在 $c,\ d \in [4]$和 $u \in V$，使得 $u(a,\ c) = (b,\ d)$，从而 $\sigma_u(a) = b$。特别地，这表明 $|\sigma(V)| \geq 4$，因此推出 $\ker\ \sigma \in \{\{e\}, V_4\}$。

假设 $\ker\sigma = \{e\}$。那么 σ 是 V与 S_4之间的同构。特别地，存在 $v_i \in V$，对于 $i = 1,\ 2,\ 3$，使得 $\sigma_{v_1} = (x,\ y)$、$\sigma_{v_2} = (y,\ z)$ 以及 $\sigma_{v_3} = (z,\ t)$。特别地，v_i都是对合。

由于 v_1 将第 x 行映射到第 y 行，并且 $E_C = \{\{x,y\},\{z,t\}\}$ 我们有$v_1(x,x) \in \{(y,x),\ (y,y)\}$。类似地，由于 v_1 保持第 z 行不变，$v_1(z,x) \in\{(z,x),\ (z,y)\}$。如果 $v_1(x,x) = (y,x)$，那么根据命题 6.7，$v_1(x,b) = (y,b)$ 对所有 $b \in [4]$ 都成立，因此对所有 $b \in [4]$，$v_1(y,b) = (x,b)$ 也成立。如果 $v_1(x,x) = (y,y)$，那么根据命题 6.7，$v(x,y) = (y,x)$，$v(x,z) = (y,t)$，且 $v(x,t) = (y,z)$，因此，由于 v_1 是一个对合，$v_1(y,y) = (x,x)$，$v_1(y,x) = (x,y)$，$v_1(y,t) = (x,z)$，以及 $v_1(y,z) = (x,t)$ 也成立。类似地，我们得出：如果 $v_1(z,x) =(z,x)$，那么 $v_1(z,b) = (z,b)$ 对所有 $b \in [4]$ 都成立，从而根据引理 6.2，对所有 $b \in [4]$，$v_1(t,b) =(t,b)$ 也成立。最后，如果 $v_1(z,x) = (z,y)$，那么通过同样的推理，我们得出 $v_1(z,y) = (z,x)$，$v_1(z,z) = (z,t)$，以及 $v_1(z,t) = (z,z)$，并且 $v_1(t,x) = (t,y)$，$v_1(t,y) = (t,x)$，$v_1(t,z) = (t,t)$，以及 $v_1(t,t) = (t,z)$。因此，v_1 只有四种可能性（将关于第 x、y 行的两种情形与关于第 z、t 行的两种情形结合），其中包括 $(x,y) \otimes 1$。

类似地，v_3 有四种可能性（将关于线 x,y 的两种情形与关于线 z, t的另外两种情形结合起来），包括（$z,\ t$）$\otimes 1$。

最后，$v_2(y,x) \in \{(z,x),\ (z,y)\}$。若 $v_2(y,x) = (z,x)$，由命题 6.7，$v_2(y,b) = (z,b)$ 对所有 $b \in [4]$ 均成立；又由于 v_2是一个对合，$v_2(z,b) = (y,b)$ 对所有 $b \in [4]$均成立。此外，由引理 6.2，$v_2(x,b) = (x,b)$ 且 $v_2(t,b) = (t,b)$ 对所有 $b \in [4]$均成立，即 $v_2 = (y,z) \otimes 1$。若 $v_2(y,x) = (z,y)$，则由命题 6.7，$v_2(y,y) = (z,x)$，$v_2(y,z) = (z,t)$ 且 $v_2(y,t) = (z,z)$，并且 $v_2(z,y) = (y,x)$，$v_2(z,x) = (y,y)$，$v_2(z,t) = (y,z)$ 且 $v_2(z,z) = (y,t)$。此外，由引理 6.2，$v_2(a,x) = (a,y)$，$v_2(a,y) = (a,x)$，$v_2(a,z) = (a,t)$ 且 $v_2(a,t) = (a,z)$，对$a \in \{x,t\}$成立。

现在不难验证，刚刚得到的 v_2 的两种可能选择中，每一种都只与 $(x,\ y) \otimes 1$ 双相容（在 4 种可能情况中

v_1 如上所述）。选择 $v_2 = (y,\ z) \otimes 1$（相应地选择 $v_1 = (x,\ y) \otimes 1$），通过类似的论证最终会导出唯一的可能性 $v_3 = (z,\ t) \otimes 1$，从而得到 $V = S_4 \otimes 1$，这与当前假设 G_C 非空不符。然而，v_2 的另一种可能选择也行不通，因为它与 $v_1 = (x,\ y) \otimes 1$ 不满足辩关系。因此 $\ker\ \sigma \neq \{e\}$。

因此 $\ker\ \sigma = V_2$。由此可得 $\sigma(V) \simeq V/V_2 \simeq S_3$。但是 $\sigma(V) \leq S_4 = S(\{x, y, z, t\})$，而 S_4 中与 S_3 同构的子群只有某个 $a \in \{x, y, z, t\} = [4]$ 对应的 $\mathrm{Stab}(\{a\})$。但这将意味着 a 是 G_R 的一个孤立顶点，这与我们的假设矛盾。

B2)： G_R **和** G_C **都不连通**。

B2a)： G_R **或** G_C **有孤立顶点**。我们可以假设 G_R 有孤立顶点，另一种情形的论证完全类似。接着，由于根据我们一直采用的假设 B)，$G_R \cup G_C$ 是连通的，因此没有顶点能同时在 G_R 和 G_C 中孤立，所以 G_R 至多有两个孤立顶点（若 G_R 有四个孤立顶点，则 $G_C \cup G_R = G_C$，因此 G_C 将是连通的）。假设 G_R 有两个孤立顶点。我们可以假设 $E_R = \{\{z, t\}\}$。于是，根据引理 6.4，$\{x, z\}$，$\{x, t\}$，$\{y, z\}$，$\{y, t\} \notin E_C$，所以 $G_R \cup G_C$ 不连通，矛盾。因此 G_R 只有一个孤立顶点。设 x 是这个唯一的孤立顶点。于是，根据引理 6.4，$\{x\}$ 是 G_C 的一个连通分支，但这不可能，正如上文所述，因为 $G_R \cup G_C$ 是连通的。

B2b)： G_R **和** G_C **均没有孤立顶点**。那么 G_R 和 G_C各有两个大小为 2 的连通分支。我们不妨假设 $E_R = \{\{x, y\}, \{z, t\}\}$。那么，由于 $G_R \cup G_C$是连通的，我们还可以进一步假设$E_C = \{\{x, t\}, \{z, y\}\}$。因此，$V$至少有四个轨道，每个轨道都包含于 $\{x, y\} \times \{x, t\}$、$\{x, y\} \times \{z, y\}$、$\{z, t\} \times \{x, t\}$或 $\{z, t\} \times \{z, y\}$之一。令$v \in V$。那么 $v\ (x,\ x) \in \{x, y\} \times \{x, t\}$。我们区分这四种情形。

α）：$v\ (x,\ x) = (x,\ x)$。那么，根据引理 6.1（取 $c = a = x$ 和 $b = y$），$v\ (x,\ y)$ 位于第 x行。此外，根据命题 6.7（取 $c = a = x$ 和 $b = y$），$v\ (x,\ y)$ 位于第 y列，因此 $v\ (x,\ y) = (x,\ y)$。类似地，利用引理 6.2 和命题 6.7，我们得出 $v\ (t,\ x) = (t,\ x)$，且 $v\ (t,\ y) = (t,\ y)$。因此，$v\ (x,\ z) \in \{(x,\ z)、(y,\ y)、(y,\ z)\}$。我们将分别讨论这三个子情况。

$\alpha 1$）：$v(x, z) = (x, z)$。由引理 6.1 和 6.2 以及命题 6.7 可得，v 逐点固定了行 x 和 t。特别地，$v(y, x) \in \{(y, x), (y, t)\}$。若 $v(y, x) = (y, x)$，则同样利用引理 6.1 和 6.2 以及命题 6.7，可得 $v = 1$。若 $v(y, x) = (y, t)$，则类似地可得

$$v = ((y, x), (y, t))((y, y), (y, z))((z, x), (z, t))((z, y), (z, z)).$$

$\alpha 2$）： $v(x,z)=(y,z)$。然后，运用与前一种情形中类似的论证，可得 $v(x,t)=(y,t)$，$v(t,z)=(z,z)$，以及 $v(t,t)=(z,t)$。因此，$v(y,z)\in\{(x,z),(y,y)\}$。若 $v(y,z)=(x,z)$，则可得

$$v=((x,z),(y,z))((x,t),(y,t))((t,z),(z,z))((t,t),(z,t)).$$

若 $v(y,\ z)=(y,\ y)$，则可得

$$v=((y,x),(x,t),(y,t))((y,y),(x,z),(y,z))((z,x),(t,t),(z,t))((z,y),(t,z),(z,z)).$$

$\alpha 3$)： $v(x,z)=(y,y)$。然后，利用与上述类似的论证，可得 $v(x,t)=(y,x)$、$v(t,z)=(z,y)$，以及 $v(t,t)=(y,x)$。因此，$v(y,y)\in\{(x,z),\ (y,z)\}$。若 $v(y,y)=(x,z)$，则可得

$$v=((x,z),(y,y))((x,t),(y,x))((z,x),(t,t))((z,y),(t,z)).$$

若 $v(y,\ y)=(y,\ z)$，则可得

$$v=((y,x),(y,t),(x,t))((y,y),(y,z),(x,z))((z,x),(z,t),(t,t))((z,y),(z,z),(t,z)).$$

总而言之，在情形 α) 中，我们由此找到了 6 个可能的 v。

β)： $v(x,\ x)=(y,\ x)$。采用与上述类似的论证，可得 $v(y,\ x)\in\{(y,\ t)$、$(x,\ x)$、$(x,\ t)\}$。我们将分别进一步讨论这三个子情况。

$\beta 1$)： $v(y,\ x)=(y,\ t)$。然后 $v(y,\ t)\in\{(x,\ t),\ (x,\ x)\}$。若 $v(y,\ t)=(x,\ t)$，则可得

$$v=((y,x),(y,t),(x,t),(x,x))((y,y),(y,z),(x,z),(x,y))((z,x),(z,t),(t,t),(t,x))\\ \times((z,y),(z,z),(t,z),(t,y)).$$

如果 $v(y,\ t)=(x,\ x)$，我们可以得出

$$v=((y,x),(y,t),(x,x))((y,y),(y,z),(x,y))((z,x),(z,t),(t,x))((z,y),(z,t),(t,x)).$$

$\beta 2$)： $v(y,\ x)=(x,\ x)$。然后 $v(x,\ z)\in\{(y,\ z),\ (x,\ z)\}$。如果 $v(x,\ z)=(y,\ z)$，我们可以得出

$$v=((x,y)(z,t))\otimes 1.$$

若 $v(x,z)=(x,z)$，则可得

$$v=((y,x),(x,x))((y,y),(x,y))((z,x),(t,x))((z,y),(t,y)).$$

$\beta 3)$：　$v(y,x) = (x,t)$。接着，　$v(x,t) \in \{(x,x),\ (y,t)\}$。若 $v(x,t) = (x,x)$，则可得

$$v = ((y,x),(x,t),(x,x))((y,y),(x,z),(x,y))((z,x),(t,t),(t,x))((t,y),(z,y),(t,z)).$$

若 $v(x,t) = (y,t)$，则我们得出

$$v = ((y,x),(x,t),(y,t),(x,x))((y,y),(x,z),(y,z),(x,y))((z,x),(t,t),(z,t),(t,x)) \\ \times ((z,y),(t,z),(z,z),(t,y)).$$

因此，我们再次在情形 $\beta)$ 中找到了 6 个可能的 v。

$\gamma)$：　$v(x,x) = (x,t)$。然后，与前两种情形相同，我们得出 $v(x,t) \in \{(x,x),(y,t),(y,x)\}$，并得到以下结论：要么

$$v = 1 \otimes ((x,t)(y,z)),$$

or

$$v = ((x,x),(x,t))((x,y),(x,z))((t,x),(t,t))((t,y),(t,z))$$

(若 $v(x,t) = (x,x)$)，要么

$$v = ((x,x),(x,t),(y,t),(y,x))((x,y),(x,z),(y,z),(y,y))((t,x),(t,t),(z,t),(z,x)) \\ \times ((t,y),(t,z),(z,z),(z,y)),$$

or

$$v = ((x,x),(x,t),(y,t))((x,y),(x,z),(y,z))((t,x),(t,t),(z,t))((t,y),(t,z),(z,z))$$

(若 $v(x,t) = (y,t)$)，要么

$$v = ((x,x),(x,t),(y,x),(y,t))((x,y),(x,z),(y,y),(y,z))((t,x),(t,t),(z,x),(z,t)) \\ \times ((t,y),(t,z),(z,y),(z,z)),$$

or

$$v = ((x,x),(x,t),(y,x))((x,y),(x,z),(y,y))((t,x),(t,t),(z,x))((t,y),(t,z),(z,y))$$

（如果 $v(x,\ t) = (y,\ x)$）。

δ）：$v(x,\ x) = (y,\ t)$。在这种情形下，可以类似地得出结论：v 属于
$\Big\{((x,x),(y,t))((x,y),(y,z))((t,x),(z,t))((t,y),(z,z)),((x,x),(y,t))((x,y),(y,z))((x,z),(y,y))((x,t),(y,x))((t,x),(z,t))((t,y),(z,z))\times((t,z),(z,y))((t,t),(z,x)),((x,x),(y,t),(x,t))((x,y),(y,z),(x,z))((t,x),(z,t),(t,t))((t,y),(z,z),(t,z)),((x,x),(y,t),(x,t),(y,x))((x,y),(y,z),(x,z),(y,y))((t,x),(z,t),(t,t),(z,x))\times((t,y),(z,z),(t,z),(z,y)),((x,x),(y,t),(y,x))((x,y),(y,z),(y,y))((t,x),(z,t),(z,x))((t,y),(z,z),(z,y)),((x,x),(y,t),(y,x),(x,t))((x,y),(y,z),(y,y),(x,z))((t,x),(z,t),(z,x),(t,t))\times((t,y),(z,z),(z,y),(t,z))\Big\}$.

因此，我们找到了 v 的 24 种可能性（见图 2），它们恰好对应于 V 的各个元素，如我们的论题 ii) 第三行所述（其中提到的六个副本对应于 E_R 的三种可能选择，以及相应的两种进一步选择 E_C）。因此，ii) 再次成立。

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

情形 B2b 中所描述的 24 个元素 $v \in V \subset S([4]^2)$。
行和列按此顺序由 x、y、z、t 进行索引。

图 2

反之，假设 ii) 成立。根据定义，ii) 部分中的所有群都同构于 S_4。容易看出，$1 \otimes S_4$和 $S_4 \otimes 1$都是双相容子群。群 $N_{i,\,j}$ 的双相容性已在~定理 5.2 的证明中确立，而群 $T_{a,\,b}$ 的双相容性则已在定理 5.11 的证明中确立。□

7 展望

在这最后一节简短的篇幅中，我们提出一些未来研究的方向，以及由本文结果自然引出的若干开放问题。

在 [3] 中还给出了其他表格。特别是，关于 Out($\mathcal{O}_2$) 的子群中在 $\pi(\lambda^{-1}(\mathcal{P}_2^5))$ 内极大的那些子群，以及 Out($\mathcal{O}_3$) 中在 $\pi(\lambda^{-1}(\mathcal{P}_3^3))$ 内极大的那些子群（见 [3, 表 3 和 4]）。我们认为，自然而然的下一步是明确找出这些子群。可以注意到，第5节中描述的群并非都是考克斯特群。因此，给定 n 和 t，似乎很难预测哪些群会作为 Out($\mathcal{O}_n$) 的子群出现，并且在 $\pi(\lambda^{-1}(\mathcal{P}_n^t))$ 内极大。与这个最后的问题相关的是，如何分类所有与 S_n 同构的 $S([n]^2)$的双相容子群，以及它们在 $\pi(\lambda^{-1}(\mathcal{P}_n^2))$中的像；我们认为这或许是可行的。

本文研究的群中，许多生成元都源自秩 1 的 $[n]^2$ 稳定置换，其循环类型为 (2，.....，2)。我们对 $n = 4$ 以及循环类型为 (2，2) 和 (2，2，2) 的情形所做的计算（见图 3 和图 4）表明，这类置换分别有 60 个和 144 个，且它们似乎具有相当规整的结构。因此，尝试对所有这类秩 1 稳定置换进行分类，或许是一个很有前景的研究方向（正如 [5, Thm. 3.1] 中对秩 1 稳定置换且循环类型为 (r) 的情形所做的那样）。

最后，我们认为第 3 节中的许多结果都应当可以推广：既可以推广到 $[n]^t$ 上的 $t > 2$，也可以推广到 $[n]^2$ 的更一般类型的置换。

$S([4]^2)$ 中秩 1 的 12 个水平稳定换位

$S([4]^2)$ 中秩 1 的 12 个垂直稳定换位

$S([4]^2)$ 中剩余的 12 个秩 1 稳定换位

图3

$S([4]^2)$ 中循环类型为 (2，2) 的 60 个秩 1 稳定置换

图4



$S([4]^2)$ 中循环类型为 (2，2，2) 的秩 1 稳定置换，按对换计

图5

致谢： FB 感谢 MIUR 卓越部门项目 CUP E83C18000100006 和 E83C23000330006 提供的经费支持。RC 感谢罗马大学（2023 年校级项目）以及 GNAMPA-INDAM 项目“算子代数与无限量子系统”（CUP E53C23001670001）提供的经费支持。

数据可用性： 本文不适用数据共享，因为本研究未创建或分析任何新数据。

参考文献

[1] V. Aiello、R. Conti、S. Rossi，《Cuntz代数端同态与自同构入门指南》。*Rend. Mat. Appl.* (7) **42**(2021)，第 2 期，61-162。[2] R. J. Archbold，关于 $C^*(S1, S2)$ 的“翻转”自同构。*Quart. J.Math. Oxford Ser. (2)* **30** (1979)，第 118 期，129-132。[3] J. E. Avery、R. Johansen、W. Szyma´nski，《图代数自同构的可视化》。爱丁堡数学会会刊 (2)**61**(2018)，第 1 期，215-249。[4] F. Brenti、R. Conti，《置换、张量积与 Cuntz 代数自同构》。*Adv. Math.* **381** (2021)，论文编号 107590，共 60 页。[5] F. Brenti、R. Conti、G. Nenashev，《Cuntz代数的置换自同构：二次循环、一个对合与盒积》。*Adv. Appl.Math.***143** (2023)，论文编号 102447。[6] F. Brenti、R. Conti、G. Nenashev，《Cuntz 代数自同构：图与置换的稳定性》。*Trans. Amer. Math. Soc.***377** (2024)，第 12 期，8433-8476。[7] R. Conti、W. Szyma´nski，《Cuntz代数的标记树与局部化自同构》。*Trans. Amer. Math. Soc.* **363**(2011)，第 11 期，5847-5870。[8] R. Conti、J. H. Hong、W. Szyma´nski，《Cuntz代数的受限 Weyl 群与移位端同态》。*J. Reine Angew. Math.* **667**(2012)，177-191。[9] R. Conti、J. H. Hong、W. Szyma´nski，《Cuntz代数的 Weyl 群》。*Adv. Math.***231** (2012)，第 6 期，3147-3161。

[10] R. Conti、J. Kimberley、W. Szyma´nski，《Cuntz代数的更多局部化自同构》。爱丁堡数学会会刊 (2)**53**(2010)，第 3 期，619-631。[11] J. Cuntz，《由等距算子生成的单 C*-代数》。数学物理通讯**57** (1977)，第 2 期，173-185。[12] J. Cuntz，《某些单 C*-代数的自同构》。量子场、代数与过程（研讨会论文集，比勒费尔德大学，比勒费尔德，1978），第 187-196 页，施普林格，维也纳，1980。[13] D. Evans，关于 $\mathcal{O}_n$。数理科学研究所出版物**16** (1980)，第 3 期，915–927。[14] K. Matsumoto、J. Tomiyama，《Cuntz代数上的外自同构》。伦敦数学会通报 **25** (1993)，第 1 期，64-66。[15] J. Pan，《关于 Cuntz 代数自同构的一则注记》，以色列数学杂志，即将发表，arXiv:2412.20318 [math.GR]。

作者地址：

Francesco Brenti，罗马第二大学数学系，Via dellaRicercaScientifica 1，I-00133 罗马，意大利。电子邮箱：brenti@mat.uniroma2.it

Roberto Conti，罗马第一大学萨皮恩扎分校基础与应用工程科学系，Via A. Scarpa 16，I-00161 罗马，意大利。电子邮箱：roberto.conti@sbai.uniroma1.it

Gleb Nenashev，圣彼得堡国立大学数学与计算机科学系，圣彼得堡瓦西里岛第14线29B号，199178 圣彼得堡，俄罗斯。电子邮箱：g.nenashev@spbu.ru