arXiv:2601.13988v1 [math.SP] 20 Jan 2026

大型双曲曲面上的谱隙

Laura Monk† 和 Frédéric Naud⋆

†英国布里斯托大学。⋆Jussieu 数学研究所，皮埃尔和玛丽·居里大学，Jussieu 广场 4 号，巴黎 75252，Cedex 05，法国。

摘要

在这篇综述性论文中，我们回顾大型双曲曲面谱理论的发展历程及近期突破。更具体地说，我们主要关注对第一个非平凡特征值 λ_1 的研究，以及它在大体积范围内可能呈现的行为。

1 引言：从塞尔伯格到 Mirzakhani，双曲曲面的谱隙。

1.1 谱隙：历史、预期行为与相互作用。

1.1.1 定义。

下文中，双曲曲面 X 将是双曲平面 $\mathbb{H}^2$的一个商空间 $X=\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$，它由一个等距变换福克斯群 Γ作用，并赋予高斯曲率为 -1的标准度量。正拉普拉斯算子 Δ_X 作为作用于 L^2 上的无界算子是本质自伴的。若 Γ是余紧的或余有限的，则 Δ_X 的谱底为 0（对应于常值特征函数），且 $1/4$ 以下的谱由有限多个特征值组成，每个特征值的重数有限。这里，神奇的数字 $1/4$ 并非偶然出现：它是赋予双曲体积 [65]的 $L^2(\mathbb{H}^2)$ 上拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathbb{H}^2}$ 的谱底。本文将用 $\lambda_1(X)$ 表示 Δ_X的最小非零特征值，并常称其为“谱隙”。在有限面积的情形下，可能不存在非零的 L^2-特征值；此时，连续谱的谱底是相关的量，其值为 $1/4$。

1.1.2 与测地线计数的联系。

双曲曲面的谱隙是一个普遍存在的量，会出现在若干自然问题中。其中一个引人注目的例子，是统计长度不超过某一给定值的闭测地线数量。历史上，Heinz Huber [44] 在塞尔伯格关于迹公式的开创性工作 [84] 之后，率先研究了这一问题。我们将 $\mathcal{P}_X$ 记为 X上的有向本原闭测地线集合；若 $\gamma\in\mathcal{P}_X$，则 $\ell(\gamma)$表示其长度。那么已知，当 $T\to+\infty$时，

$$N(T):=\#\{\gamma\in\mathcal{P}_X\ :\ \ell(\gamma)\le T\}\sim\frac{e^T}{T},$$

这一结果称为素数定理，因为它与数论中的素数定理相似。主阶e^T/T 与平凡特征值 0 有关。在研究这一近似的误差项时，谱隙便会出现，我们有如下更为详细的渐近公式：

$$N(T)=\mathrm{li}(e^T)+\sum_j \mathrm{li}(e^{\alpha_j T})+O(e^{(3/4)T}), \tag{1}$$

其中 $\mathrm{li}(x)=\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$，指数 $1/2\le\alpha_j\le\ldots\le\alpha_1<1$与 Δ_X内部的特征值$0<\lambda_1\le\ldots\le\lambda_j$相对应，其对应关系由恒等式 $\alpha_j(1-\alpha_j)=\lambda_j$给出。关于紧情形和有限体积情形下更详细的渐近公式，参见例如 [47]及其中的参考文献。除了测地线计数，谱隙也自然出现在双曲格点计数问题 [47, 第 12], 章中单位切丛 X上测地流混合速率的误差项里，参见拉特纳 [81], ，以及 Golubev–Kamber [36]关于布朗运动的研究。

1.1.3 与连通性的联系。

谱隙的另一个非常有趣的特点是，它是对连通性的一种定量测量。直观来说，当曲面不连通时，平凡特征值 0 的重数会增加；因此，一个“连通性较差”的曲面 X 会具有较小的 $\lambda_1(X)$。通过将 $\lambda_1(X)$与*Cheeger* 常数进行比较，可以将这一点精确化

$$h(X) = \inf_A \frac{\ell(\partial A)}{\mathrm{Area}(A)}$$

其中，下确界取遍所有光滑子曲面 $A \subset X$，且满足 $\mathrm{Area}(A) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Area}(X)$。我们有以下不等式：

$$\frac{h(X)^2}{4} \leq \lambda_1(X) \leq 2h(X)(h(X)+5)$$

左侧部分归功于 Jeff Cheeger [28]，右侧部分归功于 Peter Buser [24]。换言之，谱隙 $\lambda_1(X)$ 接近于零，当且仅当 Cheeger 常数 $h(X)$ 接近于零。衡量连通性的另一项指标是直径$\mathrm{diam}(X)$，它表示两点之间的最大距离；Michael Magee 在 [56] 中通过一个与混合速度有关的有趣论证，阐释了直径与 λ_1 之间的相互作用。

1.1.4 大体积极限。

谱几何中的一个自然问题是，在大体积情形下 $\lambda_1(X)$ 的表现。对于单连通区域 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$，Osserman 在 [77] 中证明，考察 Ω 的第一个狄利克雷特征值时，有

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{1}{4(\tanh(R(\Omega)))^2} > \frac{1}{4}$$

其中 $R(\Omega)$ 是内半径，即 Ω 中最大内接测地圆盘的半径。因此，对于双曲区域，只有当 $R(\Omega)$ 趋于无穷时，才允许 $\lambda_1(\Omega)$ 降至 $1/4$。这里的数值 $1/4$ 是万有覆盖 $\Delta_{\mathbb{H}^2}$ 的谱底。

紧双曲曲面的情况则截然不同：Huber 在 [45] 中证明了

$$\limsup_{k\to\infty} \lambda_1(X_k) \leq \frac{1}{4} \tag{2}$$

对于任意一列 $(X_k)_k$ 体积趋于无穷的紧双曲曲面。注意，在这一情形下，根据高斯–博内公式，体积等于 $4\pi(g-1)$，其中 g 是曲面的亏格；因此，体积与亏格同步趋于无穷。

有限面积曲面的非零特征值 $1/4$ 有些“特殊”，因为它们位于万有覆盖的主体谱之外；例如，它们与（1）中的次主项有关。因此，它们通常被称为小特征值。

尽管 McKean 错误地断言此类特征值不可能存在 [66]，，但要构造体积很大且 λ_1（X）任意小的曲面并不困难 X：只需考察固定基曲面上的大型循环覆盖。Randol [80] 给出了基于阿贝尔扭曲和塞尔伯格迹公式的证明。若要了解基于 Cheeger–Buser 不等式、可得出任意亏格下实例的几何证明，参见 Bergeron[11, 第 3]章。事实上，通过将一族极大的简单不相交闭曲线捏细，这一几何论证可以构造签名为（g，n）且至多有 $2g-2+n$ 个特征值低于 ϵ（其中 $\epsilon > 0$ 可以任意小）的双曲曲面。根据 Otal 和 Rosas [78]的研究，我们知道这是有限面积曲面所能拥有的小特征值的最大数量。

类比三次图，Buser 错误地猜想，在 [23] 中，λ_1（X）应当随着体积（X）趋于无穷而总是趋于零，因此 $1/4$ （2）中的0可以取代它。另一方面，塞尔伯格著名地猜想，同余曲面会呈现相反的行为。

猜想 1. *(塞尔伯格 [85])* 令 $\Gamma(N)$ 表示由以下条件定义的 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 离散子群：

$$\Gamma(N) := \{g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \ : \ g \equiv \pm Id \bmod N\},$$

并令 $X(N) := \Gamma(N)\backslash\mathbb{H}^2$。那么对于所有 $N \geq 1$，都有 $\lambda_1(X(N)) \geq 1/4$。

注意到 $X(N) \to X(1)$ 是一个伽罗瓦覆盖，并且有 $\mathrm{Vol}(X(N)) = |\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_N)|\mathrm{Vol}(X(1))$，因此 Selberg 特征值猜想实际上是关于理解大体积范围内的 λ_1。在同一篇论文中，[85], Selberg 证明了，对于所有 $N \geq 1$，我们都有 $\lambda_1(X(N)) \geq 3/16$。他还通过考察阿贝尔覆盖指出，在考虑任意有限指数子群时，他的猜想是不成立的。Selberg 的

特征值猜想对经典数论有重大影响，也是“拉马努金猜想”这一更大图景的一部分。有关这一猜想的重要性和难度的更多见解，读者可参阅 [83]。据我们所知，Selberg 下界后来得到了改进，目前最好的下界归功于 Kim 和 Sarnak [51]，其形式为 $\lambda_1(X(N)) \geq 975/4096 \approx 0.2380$。

在 [25]，Buser、Burger 和 Dodziuk 基于上述塞尔伯格界展示了如何构造一个紧双曲曲面序列 $(X_k)_k$，使其亏格（因而体积）趋于无穷，同时 $\limsup_k \lambda_1(X_k) \geq 3/16$。在同一篇论文中，他们猜想应当也能用 $1/4$ 替代 $3/16$实现同样的构造。更一般地，紧致算术同余曲面确实满足 $\lambda_1 \geq 3/16$，参见 M.F. Vigneras [86]的工作。

1.1.5 Benjamini–Schramm 收敛。

将一列亏格趋于无穷的紧双曲曲面 (X_k) 看起来越来越像双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 这一事实形式化的一种方式，是通过 Benjamini–Schramm 收敛这一概念来实现的；该概念源自图 [10] 领域。更准确地说，令 $\mathrm{Inj}_z(X)$ 表示 z 在X处的单射半径。假设 $\lim_{k\to\infty}\mathrm{Vol}(X_k) = +\infty$。如果对于所有 $L > 0$，我们都有下式，则称 $(X_k)_k$ 按照 Benjamini–Schramm 的意义收敛于 $\mathbb{H}^2$：

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{Vol}(\{z \in X_k \,:\, \mathrm{Inj}_z(X_k) < L\})}{\mathrm{Vol}(X_k)} = 0.$$

换句话说，按照双曲体积随机选取点 z 时，以 z 为中心、半径为 L 的球与 $\mathbb{H}^2$ 中同半径的球等距的概率，在体积趋于无穷时趋于 1。曲面 X 的最短闭测地线长度 $\ell(X)$，就是闭测地线的最短长度。亏格趋于无穷的曲面序列 (X_k) 若存在一个正的一致下界，使得 $\ell(X_k)$ 始终不低于该界，则称其具有“一致离散性”。

取 $a < b \in \mathbb{R}$，并令 $N_k(a,b)$ 表示 X_k 上拉普拉斯算子的特征值落在区间 $[a,b]$内的个数，按重数计。Le Masson 和 Sahlsten 证明了，在假设 $(X_k)_k$ 满足 Benjamini–Schramm 收敛到 $\mathbb{H}^2$并且具有一致离散性的条件下（参见 [73]，其中给出了更定量的版本），总有以下极限：

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{N_k(a,b)}{\mathrm{Vol(X_k)}} = \frac{1}{4\pi}\int_{1/4}^{+\infty} \mathbf{1}_{[a,b]}(\lambda)\tanh\left(\pi\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\right)d\lambda.$$

因此，在这两个假设下，X_k 上拉普拉斯算子的谱密度（按体积归一化）收敛到 $\mathbb{H}^2$上拉普拉斯算子的谱测度，其支撑集为 $[1/4,+\infty)$。我们指出，Benjamini–Schramm 收敛（不具备一致离散性）并不意味着谱收敛，参见 [35]。Benjamini–Schramm 收敛和谱收敛的概念可以推广到高维流形序列；这里提及“七武士”的工作 [1]及其中的参考文献。

大型双曲曲面的典型谱隙似乎应当接近 $1/4$。然而，仅有 Benjamini–Schramm 收敛还不足以得到一致谱隙。事实上，可以构造紧曲面序列 $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其亏格 g_k 随 $k\to+\infty$ 趋于无穷，使得 $\inf_{z\in X_k}\mathrm{Inj}_z(X_k) \to \infty$，而 $\lambda_1(X_k) = O(\frac{\log(g_k)}{g_k})$。这一构造源自 Buser–Sarnak [26]，他们证明亏格为 g 的紧算术曲面 S_g 的最短闭测地线长度为 $\log(g)$，因此其单射半径随 g 趋于无穷。另一方面，他们在 [26] 中证明，总能在 S_g 上找到一条简单闭测地线 γ，它在同调中非平凡，且满足 $\ell(\gamma) \leq 2\log(4g-2)$。沿这条测地线剪开并重新粘合，便可构造出 S_g 的一个连通二重覆盖 $\widetilde{S_g}$，其 Cheeger 常数至多为 $O(\log(g)/g)$，因此当 $g\to\infty$ 时，$\lambda_1(\widetilde{S_g})$ 会变得任意小。这些事实表明，要证明接近最优的一致谱隙，概率工具或许会有所帮助。关于随机图的庞大现有文献为此提供了一些见解。

1.2 随机正则图是最优扩张图。

让我们暂时绕道，简要探访随机正则图的领域；许多类似的问题已在那里得到解决。

设 $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$ 是一个具有有限边集 E 和顶点集 V 的（无向） k-正则图。以下我们令 $n = \#V$，并且只关注 k 保持固定而 n 趋于无穷大的情形。令 A 表示 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵，即定义如下的 $n\times n$ 对称矩阵

由 $A(i,\ j)$ 定义：$=\#\{$ 条边连接 i 和 $j\}$。由于 $\mathcal{G}$ 是 k-正则的，A 的谱由 n 个实特征值组成，这些特征值属于 $[-k,k]$，其中 k 是单重的当且仅当 $\mathcal{G}$ 连通。我们将连通图的谱隙定义为

$$\lambda(\mathcal{G})=\max\{|\lambda|:\lambda \text{ is an eigenvalue of } A \text{ and } \lambda\neq\pm k\}.$$

这个谱隙 $\lambda(\mathcal{G})$是一个自然的量，与马尔可夫链 $\frac{1}{k}A$ 收敛到平衡态的速度有关。

在大 n 的情形下，k-正则图的 $\lambda(\mathcal{G})$ 存在一个下界：更确切地说，如果 $\mathcal{G}_{n,k}$ 是一族连通的 k 正则图，那么

$$\liminf_{n\to+\infty}\lambda(\mathcal{G}_{n,k})\geq 2\sqrt{k-1}.$$

这就是阿隆–博帕纳不等式，证明见 [55] 。这里的量 $2\sqrt{k-1}$ 是无限 k-正则树上均匀随机游走的谱半径，这一事实最早由 Kesten 观察到[50]。因此 $2\sqrt{k-1}$ 是在双曲曲面情形下 $1/4$ 的完美类比。

k-正则图称为 拉马努金图，如果 $\lambda(\mathcal{G})\ \leq\ 2\sqrt{k-1}$。针对特定的 k 值，k-正则扩张图的显式族于 [55] 年通过精妙的数论方法构造出来。拉马努金图竟如此难以捉摸，多少令人惊讶：事实上，Alon 曾在 1986年著名地猜想，大多数大型 k-正则图都是近似拉马努金图 [3]。为探究这一猜想，Broder 和 Shamir 研究了随机 k-正则图的第二大特征值 $\lambda_2(\mathcal{G})$ 的集中性，并针对不同模型证明了形如 $\lambda_2(\mathcal{G})\ \leq 3k^{3/4}$ [19] 的概率界。Alon猜想的首个证明由 Friedman 于 2003年给出，他在 [31] 中证明，对于所有 $\epsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_{k,n}(\lambda(\mathcal{G})\leq 2\sqrt{k-1}+\epsilon)=1$$

对于集合上各种常见的概率分布$\mathbb{P}_{k,\ n}$ 该集合由具有 n 个顶点的 k 正则图构成。证明是对迹方法的一次非常技术性的应用，其中包含一个精妙的论证，用以剔除有问题的模式（称为“缠结”）。多年后，Bordenave 使用非回溯矩阵 [14] 为这一结论给出了一个简单得多的新证明。

研究随机提升时也能发现类似的思路和结果。若 $\mathcal{G}\ =\ \mathcal{G}(V,\ E)$ 是一个初始 k 正则图，我们可以通过令$V_p:=\ V\times\{1,\dots,p\}$，并对每条边 $(i,\ j)\ \in E$随机选取一个从 $\{i\}\times\{1,\dots,p\}$ 到 $\{j\}\times\{1,\dots,p\}$ 的双射来构成边 E_p，从而构造出 $\mathcal{G}$ 的一个度为 p 的随机提升 $\mathcal{G}_p\ =\ (V_p,\ E_p)$。然后，只需遗忘第二个分量，就能恢复初始图 $\mathcal{G}$；也就是说，映射 $\pi:\mathcal{G}_p\to\mathcal{G}$ 是一个纤维大小为 p 的覆盖。

在这种情况下，$A^{(p)}$ 的邻接矩阵的谱包含 A的邻接矩阵谱的一个副本，因为 $\mathcal{G}$ 上的任意特征函数都可以提升为 $\mathcal{G}_p$ 上的特征函数，并且在每个纤维上取常值。现在有趣的问题便是新特征值以及相应的谱隙

$$\lambda_{\text{new}}(\mathcal{G}_p)=\max\{|\lambda|:\ \lambda \text{ is an eigenvalue of } A^{(p)} \text{ and not of } A\}.$$

Friedman 在 [32] 猜想，对于度数较大的典型提升 p，$\lambda_{\text{new}}(\mathcal{G}_p)\leq 2\sqrt{k-1}+\epsilon$，也就是说，Alon 猜想对随机提升同样成立。Friedman 和 Kohler 在 [33] 证明了这一点，不久之后 Bordenave 又通过更简短的证明 [14]改进了这一结果。沿着同样的概率论思路，Bordenave 和 Collins 证明了随机置换矩阵之和的强收敛 [15], ，这也是研究双曲曲面的随机覆盖时同样至关重要的一项工具。

近年来，这一领域取得了两项突破，表明这仍是一个非常活跃的问题。一方面，Huang、McKenzie 和 Yau 在 [43] 证明，对于足够大的 n，一个具有 n 个顶点的随机 k 正则图是 Ramanujan 图的概率约为 69%。这一结果建立在格林函数研究方面的重要新进展之上。另一方面，Chen、Garza-Vargas、Tropp 和 van Handel 提出了一种令人惊讶的新方法，有别于迹方法和格林函数方法，借此得以证明强收敛，从而大幅简化了 Friedman 定理的证明 [29]。待我们重新讨论双曲曲面时，将会介绍迹方法的运作方式，并更详细地探讨强收敛这一概念。

1.3 随机双曲曲面模型及其谱隙。

现在该回到最初的问题了：有限面积双曲曲面的谱隙。正则图和双曲曲面通常表现相似，它们都是具有指数增长球体的齐性空间（在无限 k正则树和双曲平面中，半径为 R 的球的体积分别为$k(k-1)^{R-1}$ 和 $2\pi(\cosh R-1)$）。图论直觉和塞尔伯格特征值猜想自然引出了以下元猜想。

猜想 2. 随机双曲曲面序列$(X_k)_k$，满足$\lim_{k\to\infty}$体积$(X_k) = +\infty$，以高概率具有接近最优的谱隙，即对所有 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\lambda_1(X_k) \geq \frac{1}{4} - \epsilon\right) = 1.$$

请注意，我们所说的“以高概率”是指，当渐近参数趋于无穷大时，概率趋于 1。由此便引出了一个重要问题：如何研究随机双曲曲面？虽然具有 k 阶、含 n 个顶点的正则图集合是有限的，并且可以自然地赋予多种有趣的组合概率测度，但所有双曲度量构成的空间要丰富得多。在这篇综述中，我们将介绍许多不同的概率框架，它们各有优势和独特的研究意义。有些是连续的（最值得一提的是模空间上的韦伊–彼得松测度），另一些则是离散的（如下文定义的 Brooks–Makeover 模型和随机覆盖）。近几年来，我们已经精确地理解了典型双曲曲面的谱隙，无论这些曲面是按照韦伊–彼得松体积抽样，还是作为均匀随机覆盖抽样（这与图的情形颇为相似）。本文集旨在介绍这些进展，以及它们彼此之间和与图论平行领域的联系。

2 扩展图的第一批构造：Cheeger 方法。

下面介绍利用概率方法研究大型双曲曲面谱隙的第一批成果。其共同点在于，谱隙的下界 λ_1 是通过求得 Cheeger 常数的一个概率下界 h 而得到的。Cheeger 常数的定义见1.1.3，此外还要用到 Cheeger不等式 $\lambda_1 \geq h^2/4$。

2.1 Brooks–Makover模型。

首个可用于研究随机双曲曲面的概率模型，是 Brooks 和 Makover [20]提出的一种组合构造。其思路是取一组 $2n$ 定向理想双曲三角形（即所有角都等于 0 的三角形），并按照一个随机定向 3-正则图将它们粘合起来（不作剪切）。由此得到的曲面是一个随机双曲曲面，其面积为 $2\pi n$，亏格高度集中在 $n/2$附近，尖点则对应于随机图中的特定环。对该曲面进行紧化，便可得到一个通常具有较大亏格的随机紧双曲曲面。这种构造得到的曲面恰好是 Belyĭ 曲面，即可在某个数域 [9]上构造的黎曼曲面；特别地，它们在所有双曲曲面中稠密。通过比较双曲曲面的几何与其嵌入的 3-正则图，并运用 Cheeger不等式，Brooks 和 Makover 证明了以下结论。

定理 3 ([20])。 对于 *Brooks–Makover*模型，以高概率存在 $C > 0$，使得 $\lambda_1(X) \geq C$。

通用常数 C 的取值并未明确给出（尽管根据 $\leq 1/4$ Huber界2，它必定满足 $\epsilon > 0$。 $h(X)$ $\leq \frac{3}{2\pi} + \epsilon$ 有趣的是，Shen 和 Wu 证明，对于任意 $\frac{3}{2\pi} \approx 0.4775$，在Brooks–Makover模型中，该结论以高概率成立。重要的是，数值 $h(\mathbb{H}^2) = 1$严格小于双曲平面的 Cheeger 常数；对于后者，Cheeger不等式的两边相等。这意味着，使用概率界结合 Cheeger不等式，不可能达到最优谱隙 $1/4$。Budzinski、Curien 和 Petri 将这一观察推广了[22], ，他们证明了

$$\limsup_{g\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{M}_g} h(X) \leq \frac{2}{\pi} \approx 0.6366.$$

该论证依赖于对曲面进行随机着色，并改编自 Bollobás [13] 针对正则图证明的类似结果，Alon [4]对其进行了改进。由此可知，在大体积极限下，谱隙与 Cheeger 常数预计会表现出显著不同的行为：前者趋近于万有覆盖，而后者则不会。不过，由于随机双曲曲面的几何通常比其谱更容易研究，对 Cheeger 常数进行界定往往是获得谱隙结果的第一步。

值得注意的是，Budzinski–Curien–Petri [21] 采用了另一种组合构造：以随机三正则图作为骨架，将双曲裤子曲面粘合起来（所有边界长度都固定为特定参数，且不含扭转参数），并由此找到了首批具有最优

直径的大型双曲曲面。这一模型经 Mathien [63]改进后成为连续模型。然而，通过一个简单的极小极大论证可知，这些随机曲面的谱隙非常小，因为其中包含边界较短的裤子（例如，参见 [24, 定理 8.1。3]）。

2.2 魏尔–彼得森模型。

除了 Brooks–Makover 组合模型之外，还有一种非常自然的连续概率模型，可用于研究随机双曲曲面。我们现在将详细介绍这一模型，因为它是本论文集的核心关注点之一。

2.2.1 样本空间。

令亏格为 $g \geq 2$。我们希望考虑的自然样本空间是模空间

$$\mathcal{M}_g := \{\text{hyperbolic surfaces of genus } g\}/\{\text{isometries}\}.$$

由于 著名的 Klein–Poincaré–Koebe 一致化定理，我们也可以将其定义为 e

$$\mathcal{M}_g := \{\text{Riemann surface of genus } g\}/\{\text{biholomorphism}\}$$

其中，黎曼曲面是一维复流形。这是黎曼在引入 $\mathcal{M}_g$ 的模空间时所采用的定义。他随后通过将 $\mathcal{M}_g$ 的元素解释为黎曼球面的分支覆盖曲面，并利用黎曼–罗赫定理计算自由参数的数量，论证了它是一个复维数为 $3g-3$ 的空间。

20世纪期间，研究模空间 $\mathcal{M}_g$ 的一般方法逐渐转向研究其万有覆盖 $\mathcal{T}_g$，即*Teichmüller*空间。这是一个历史悠久的领域，涉及数学的许多分支；关于其历史的详细介绍，请参阅下文 [46]。

模空间 $\mathcal{M}_g$ 中的点与其万有覆盖 $\mathcal{T}_g$ 中的点之间的区别在于，$\mathcal{T}_g$ 的元素 X 带有一个标记，例如，可以将其视为曲面 X 的基本群 $\pi_1(X)$ 的一组固定生成元。更准确地说，对于亏格为 $g \geq 2$ 的情形，我们通过以下表示定义亏格为 g 的曲面群

$$\Gamma_g := \langle (a_i, b_i)_{1 \leq i \leq g} \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle. \tag{3}$$

$\mathcal{T}_g$ 中的一个点由模空间 $\mathcal{M}_g$ 中的一个元素 X，以及 Γ_g 与 $\pi_1(X)$ 之间的一个同态所确定，且该同态在内自同构意义下定义。

要从万有覆盖恢复模空间，我们需要“忘记标记”。具体做法是对 $\mathcal{T}_g$ 取映射类群作用下的商

$$\text{映射类群}_g := \{\text{亏格为 } g\}/\{\text{ 的曲面上的保持定向的微分同胚，模同伦}\}.$$

这是一个在 $\mathcal{T}_g$ 上适当不连续作用的离散群。我们很快就会看到，$\mathcal{T}_g$ 是一个流形。由于映射类群 MCG_g 的作用并非自由作用，且某些元素具有不动点，因此模空间 $\mathcal{M}_g$ 不是流形，而是一个与 $\mathcal{T}_g$ 维数相同的轨形。

2.2.2 参数化。

研究一个空间时，用坐标来描述它很有帮助。站在一致化定理的双曲几何这一侧，可以得到若干种以优良几何坐标描述 $\mathcal{T}_g$ 的参数化。第一种方法是将 $\mathcal{T}_g$ 认作曲面群 Γ_g 到 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的离散忠实表示空间（即 $\mathbb{H}^2$ 的保持定向等距变换群）。这种方法给出了一组 $6g-6$ Fricke 坐标，最早见于 Fricke 和 Klein 于 1897 年出版的一本书 [30]。

对我们而言，一组非常重要的坐标是 Fenchel 和 Nielsen 于 1948 年在一份未发表的手稿中引入的。这些坐标的构造基于将我们的双曲曲面分解为双曲裤子曲面，即亏格为 0 且具有三个测地边界分支的曲面，如图 1所示。根据欧拉示性数的可加性，这样的分解总是包含$2g-2$ 个裤子，由 $3g-3$ 条曲线界定。于是，（带标记的）几何完全由裤子的边界分支长度数据 $(\ell_i)_{1 \leq i \leq 3g-3}$ 以及描述各个裤子粘合方式的扭转参数 $(\tau_i)_{1 \leq i \leq 3g-3}$ 完全确定。在模空间中，扭转参数 τ_i 可以看作 $\mathbb{R}/\ell_i\mathbb{R}$的一个元素，而在万有覆盖 $\mathcal{T}_g$ 中，它是 $\mathbb{R}$ 的一个元素。

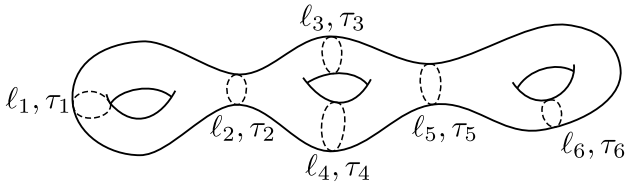


图 1：亏格为 $g = 3$ 的芬切尔–尼尔森坐标。

2.2.3 Weil–Petersson 辛形式。

我们探索模空间 $\mathcal{M}_g$ 的下一步，是为其配备一个概率测度。为此，我们将继续在两者之间往返，并回到一致化定理的复分析一侧。

这个故事始于一个问题：我们如何变形复结构？换句话说，$\mathcal{T}_g$ 和 $\mathcal{M}_g$ 的切空间是否存在某种优美的描述？Teichmüller 在 20 世纪 40 年代从启发式角度证明了这一点，Ahlfors 和 Bers 则在 20 世纪 50 年代给出了严格证明：点 $X \in \mathcal{T}_g$ 处的余切空间可以与黎曼曲面 X 上的二次微分空间 $A_2(X)$ 等同。这里的关键在于，空间 $A_2(X)$ 带有一种称为彼得森内积的自然内积（基本上就是 X 上的 L^2 内积，只不过对象是模形式）。1958年，Weil 建议通过这一度量来研究空间 $\mathcal{T}_g$，并提出了若干尚未解决的问题 [87]。Ahlfors 随后跟进，回答了 Weil 的若干问题，尤其证明了这一度量是 Kähler 度量 [2]。特别地，我们得到一种称为 Weil–Petersson 形式的辛形式 ω_g^{WP}，它定义在 $\mathcal{T}_g$ 上，自然地在映射类群 MCG_g 作用下保持不变，因此可以下降到模空间 $\mathcal{M}_g$ 上。

值得注意的是，在这个时期（即 20 世纪 60 年代），定义模空间 $\mathcal{M}_g$ 上的概率模型所需的一切条件都已具备。事实上，任意辛形式都会诱导出一个体积形式，其表达式为

$$\mathrm{dVol}_g^{\mathrm{WP}} := \frac{1}{(3g-3)!}(\omega_g^{\mathrm{WP}})^{\wedge(3g-3)},$$

其中 $3g-3$ 是辛空间维数的一半。由于模空间 $\mathcal{M}_g$ 的总体积有限，因此可以对其重新归一化，从而得到 $\mathcal{M}_g$ 上的概率测度 $\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}$。然而，除了这一抽象定义之外，当时尚无工具可用于研究按照 $\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}$ 抽样得到的曲面（而且我们会看到，前方还有许多挑战！）。我们不清楚这个问题在 50 年间被搁置，是因为人们更关注动力学或几何问题、对概率方法缺乏兴趣，还是因为这些技术挑战；很可能两者兼有。

2.2.4 Wolpert 和 Mirzakhani 的魔法公式。

2010 年代初，Mirzakhani 与 Guth–Parlier–Young 各自独立地提出，使用 Weil–Petersson 体积形式研究随机双曲曲面，尤其是在大体积极限 [38, 70] 下。两篇文章的一个基石是 Wolpert 提出的一个公式，通常称为 *Wolpert* 魔法公式 [88]。该公式非常简洁地指出，对于 任意 一组芬切尔–尼尔森坐标 $(\ell_i,\ \tau_i)^{1\le i\le 3g-3}$，

$$\omega_g^{\mathrm{WP}} = \sum_{i=1}^{3g-3} \mathrm{d}\ell_i \wedge \mathrm{d}\tau_i.$$

换言之，芬切尔–尼尔森参数是 Weil–Petersson形式的辛坐标，尤其是，Weil–Petersson体积 $\mathrm{dVol}_g^{\mathrm{WP}}$就是这些坐标下的勒贝格测度。这个公式的奇妙之处在于，它能够将一致化定理的两方面联系起来：Weil–Petersson形式的定义深深依赖于复结构，而芬切尔–尼尔森坐标则纯粹由双曲量构成。另一个显著特点是，该公式适用于任意一组芬切尔–尼尔森坐标；这并非显而易见，尤其是因为亏格为g 的曲面存在不同的分解，由此产生不同的坐标集，且这些坐标集彼此之间难以建立联系。对此结果的一种现代改述如下。

定理 4 (Wolpert, [88])。*Teichmüller*空间 $\mathcal{T}_g$ 上的辛形式 $\sum_{i=1}^{3g-3} d\ell_i \wedge d\tau_i$ 与 *Fenchel–Nielsen* 坐标组的选取无关，且在映射类群g作用下保持不变，因此下降为模空间 $\mathcal{M}_g$ 上唯一确定的辛形式。

[1]另一种互补的观点是，采用更一般的小平–斯宾塞理论来研究复结构的变形（特别是 Weil 在引入 Weil–Petersson形式 [87]时所偏好的做法）。

换句话说，我们感兴趣的空间——模空间 $\mathcal{M}_g$——“简单来说”就是$(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R})^{3g-3}$ 对一个离散群取商，并赋予重整化勒贝格测度。这幅图景看起来相当简单；事实上，这正是 Guth、Parlier 和 Young 所需要的全部内容：证明在以 $\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}$采样得到的典型大型随机双曲曲面上，任意裤子分解的长度满足概率界。这是关于这些对象最早获得的几何信息之一 [38]。

然而，若要继续推进并准确描述使用 $\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}$ 抽取的随机曲面，我们必须克服一个重大挑战。为了在商空间上积分（例如环面 $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$），充分理解该商空间至关重要。通常，对商空间的积分是通过在基本域上积分来实现的（在这个例子中为 $[0,1]^d$ ）。遗憾的是，映射类群对 $\mathcal{T}_g$ 的作用非常难以把握。我们不知道这一作用的任何显式基本域，这极大地限制了我们对该空间的理解。利用 Bers [12], 的一项结果，可以构造一个粗略的基本域（即 $\mathcal{T}_g$ 的一个子集，其中至少包含每个 MCG$_g$ 轨道的一个代表，但存在一些重叠）。该结果指出，存在一个常数 B_g，使得任意双曲曲面都可以分解为裤子，且所有长度均为 $\leq B_g$ （关于使用这种方法得到的 $\mathcal{M}_g$ 总体积的上界，参见 [72, 命题 3.5] ）。然而，这只是粗略的描述，还不足以建立关于 $\mathcal{M}_g$ 的积分理论。

通过采用一种截然不同的方法，这个问题得以彻底解决，该方法依赖于 Mirzakhani 提出的两个神奇公式。一方面，*Mirzakhani*积分公式 [69]可以计算模空间上某些特定类型函数的积分，这类函数称为几何函数，即具有 $\sum_\gamma F(\ell(\gamma))$ 形式的函数，其中 $F\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ 是一个正的可测函数，而 γ 遍历一个在映射类群$_g$作用下不变的简单闭测地线集合。该公式的证明通过一个辛同胚，将函数 $\ell(\gamma)$ 的等值集与（具有测地边界的曲面的）模空间对应起来。另一方面，*Mirzakhani*的单位分解 [68] 是 McShane 提出的著名恒等式的一种推广 [67] ；该恒等式指出，对于一次穿孔环面上的任意 双曲度量，

$$\sum_{\gamma}\frac{1}{1+e^{\ell(\gamma)}}=\frac{1}{2} \tag{4}$$

其中求和遍历一次穿孔环面上的所有无向简单闭测地线 γ。这里的精妙之处在于，将其看作把恒等于 $1/2$（右端）改写为简单闭测地线长度的函数（左端）。方程（4）的左端是几何函数的组合，可以使用Mirzakhani积分公式进行积分；由此得到一次穿孔环面的模空间总体积的表达式。更一般地，Mirzakhani的单位分解允许将常函数表示为几何函数的组合，从而找出模空间的韦伊–彼得松体积的递归公式。

2.2.5 该模型中的概率性结果。

Mirzakhani积分公式与由单位分解推导出的递归公式，共同提供了一个研究以 $\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}$为样本的随机双曲曲面几何的极为令人振奋的框架。在 [70], 中，Mirzakhani给出了完整的概念验证以及多项新的几何结果，其中包括对高亏格典型双曲曲面谱隙的首个界

$$\lim_{g\to\infty}\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}\left(\lambda_1\geq\frac{1}{4}\left(\frac{\log 2}{\log 2+\pi}\right)^2\right)=1.$$

与 Brooks–Makover模型的情形一样，数值 $(\log 2/(\log\ 2+\pi))^2/4\ \approx\ 0.002$ 来自 Cheeger不等式，先验上并非最优。这是因为积分公式只允许对几何函数进行积分，因此研究 Cheeger 常数比研究谱隙容易得多。对于如此广泛的一类大体积双曲曲面，获得一致谱隙是一项了不起的成就，也开辟了令人振奋的新研究方向。

3 迹方法：通向中间谱隙与最优谱隙。

现在让我们讨论第二轮谱隙结果。这些结果改进了粗略的 Cheeger型不等式，从而获得更好的（甚至是最优的）谱隙结果。我们将先概述一般意义下迹方法背后的一些思想，然后介绍随机覆盖和 Weil–Petersson曲面背景下的结果。

3.1 关于迹方法的一点说明。

本节所介绍结果共同采用的技术是迹方法。对于图而言，迹方法通过研究邻接矩阵的多项式的迹的渐近行为来考察谱隙。在双曲曲面的背景下，情况大体相同，只是此时依赖于*Selberg*迹公式 [84]。关于以下方法的详细说明，请参阅 [7] ；这里我们仅限于介绍几个要点。

对于具有特征值 $\lambda_j(X) = \frac{1}{4} + r_j(X)^2$, 的紧双曲曲面 X ，将塞尔伯格迹公式应用于适当的测试函数 h （例如具有紧支撑的光滑偶函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ），可得:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{h}(r_j(X)) = (g-1) \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(r) r \tanh(\pi r)\, \mathrm{d}r + \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_X} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k\ell(\gamma))}{2\sinh(k\ell(\gamma)/2)} \tag{5}$$

ˆ这里回顾一下， $\mathcal{P}_X$ 表示 X 上本原定向闭测地线的集合，而 h 是 h 的傅里叶变换。在特殊情形下，若 X 是一个覆盖，此表达式可以改写；通过纳入附加项，也可将其推广至有限面积曲面。

运用塞尔伯格迹公式，关键在于选取合适的测试函数（或一族测试函数）；若经过精心设计，它们可以帮助我们描述谱 $(\lambda_j(X))_{j\geq 0}$ 与闭测地线长度 $\gamma \in \mathcal{P}_X$ 之间相互作用的若干方面。要让小特征值$\lambda_j(X) < \frac{1}{4}$ 在上述公式中显现，一个简单的方法是选择膨胀后的测试函数 $h_L(r) := h(r/L)$，其中函数 h 支撑于 $[-1,1]$。参数 L 是长度截断：由于 h_L 支撑于 $[-L,L]$，(5) 式右侧仅涉及长度为 $\leq L$ 的闭测地线。另一方面，在公式左侧，最大的项对应于平凡特征值 $\lambda_0 = 0$，其值为

$$\hat{h}_L(i/2) = 2\int_0^L h_L(r)\cosh\left(\frac{\ell}{2}\right)\mathrm{d}\ell = 2L\int_0^1 h(r)\cosh\left(\frac{\ell L}{2}\right)\mathrm{d}\ell \gg e^{(1-\epsilon)L/2} \quad \text{for } L \gg 1. \tag{6}$$

这种指数增长在等式的另一侧得到了对应：长度为 $\leq L$ 的闭测地线数量在 $L \gg 1$ 时表现为 e^L 。

考察其他项，对于任意 j，傅里叶变换 $\hat{h}_L(r_j(X))$ 将呈现指数增长，仅当 $r_j(X) \notin \mathbb{R}$；否则将呈现振荡。换言之，小特征值 $0 < \lambda_j(X) < 1/4$在 Selberg迹公式中表现为指数项；它们越接近平凡特征值0 ，对应的指数就越大（这应当使人联想到带误差项的素数定理（1））。图或曲面的迹方法背后的总体思路都包括估计迹公式的平均值，并证明平均而言，除平凡特征值所产生的指数贡献之外，不存在其他指数贡献（或者至少可以界定它们的指数率）。这样便可以得出结论：以高概率，不存在小特征值（或者至少不存在过于接近0的非平凡特征值）。所得到的谱隙质量取决于我们对 Selberg迹公式平均值的估计精度，这也解释了为什么随着我们接近最优谱隙，该技术会越来越困难 $1/4$。

3.2 随机覆盖及其谱隙：从共振到 L^2-特征值。

第二作者最初对随机覆盖产生兴趣，源于对无限体积曲面的谱理论。设 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ 是一张凸共紧曲面，也就是说， Γ 是一个第二类有限生成福克斯群，不含椭圆元素或抛物元素。在这种情况下， X 具有无限体积，并且与一张紧曲面等距；这张紧曲面带有测地边界，边界上粘接着漏斗（无限体积部分）。

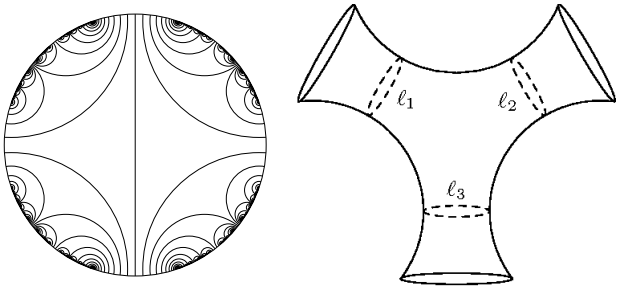
在这种情况下， Δ_X 的谱已由帕特森和沙利文描述，它由绝对连续谱 $[1/4, +\infty)$ 以及有限多个低于 $1/4$ 的特征值组成。关于该主题及相关参考文献的介绍，参见例如 [16] 。谱底在 $\delta > 1/2$ 时为 $\delta(1-\delta)$, 其中 δ 是 Γ 的极限集的豪斯多夫维数；否则，谱底为 $1/4$ 。

如果 $s \in \mathbb{C}$ 是塞尔伯格谱参数，那么预解式

$$R(s) := (\Delta_X - s(1-s))^{-1} : L^2(X) \to L^2(X),$$

作为 s 的函数，它是定义在右半平面上的有界算子全纯族

$$\{\mathrm{Re}(s) > 1/2\},$$



Fi图 2：舒托基群的极限集 Γ 以及带有漏斗的裤子曲面作为商曲面 X。

除实数轴上可能存在的有限多个点外，这些点对应于 L^2- 特征值，且小于 $1/4$；此时它是一个有限亚纯算子值映射。根据 Mazzeo–Melrose [64] 和 Guillopé–Zworski[37],的结果，可以证明预解式

$$R(s) : C_0^\infty(X) \to C^\infty(X),$$

可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，其极点称为共振，我们将这个集合（计入重数）记为 $\mathcal{R}_X$。众所周知，共振确实与塞尔伯格ζ函数$Z_\Gamma(s)$的零点重合，参见 [16, 第 10], 章；此外，共振实际上是内禀量，只取决于 X的长度谱。在这一双曲情形下对共振的数学研究，只是更广泛的散射理论图景的一个例子；对于结果和未解决猜想的全面概述，我们推荐阅读 Zworski [90] 的综述。

在 $s = \delta$处，我们始终有一个共振；此外，已知 [75] 存在 $\epsilon(X) > 0$ 使得$\mathcal{R}_X \setminus \{\delta\} \subset \{\mathrm{Re}(s) < \delta - \epsilon\}$。这自然引出了无限体积情形下的谱隙的定义，即最大的可能 $\epsilon(X)$ 的大小。我们也可以放宽这一定义，并将本质谱隙定义为

$$\varepsilon_0(X) := \inf\{\sigma \le \delta \ : \ \mathcal{R}_X \cap \{\mathrm{Re}(s) \ge \sigma\} \text{ is finite}\}.$$

Bourgain 和 Dyatlov 在 [17] 中证明，确实存在 $\varepsilon_0(\delta) < \delta$，它仅取决于仅取决于$\delta$，使得 $\mathcal{R}_X \cap \{\mathrm{Re}(s) \ge \sigma\}$ 是有限的。人们在 [48, 49], 中猜想，总是有 $\varepsilon_0(X) = \varepsilon_0(\delta) = \frac{\delta}{2}$。

受 Gamburd [34], Bourgain–Gamburd–Sarnak [18] 以及 Oh–Winter [76] 关于 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 的无限指标同余子群（以及无限体积情形下广义塞尔伯格猜想）的研究启发，Michael Magee 和第二作者开始研究随机情形下高次数覆盖中的共振行为。可以如下定义次数为 n 的均匀随机覆盖。设 $X = \backslash\mathbb{H}^2$ 为一个固定的带基点曲面，其中 Γ 是一个有限生成的福克斯群，且令 $\phi_n : \Gamma \to S_n$ 为从 Γ 到阶数为 n的置换对称群的同态。定义 X_n 为 $\mathbb{H}^2 \times \{1, \dots, n\}$ 在 Γ 给出的作用下的商：

$$\gamma.(z, j) := (\gamma(z), \phi_n(\gamma)(j)),$$

对所有 $\gamma \in \Gamma$。存在自然的覆盖映射 $X_n \to X$，且曲面 X_n 与有限个双曲曲面的不交并等距

$$X_n = \bigsqcup_k \Gamma_k \backslash \mathbb{H}^2,$$

其中所有子群 $\Gamma_k \subset \Gamma$ 的指标都有限，且 $\sum_k [\Gamma : \Gamma_k] = n$。由于空间 $\mathrm{Hom}(\Gamma, S_n)$ 是有限的，我们在其上赋予均匀概率测度，从而得到一个定义良好的随机覆盖概念。注意，覆盖可能不是连通的，但这种情况发生的概率通常会随着 $n \to +\infty$ 而趋于 0（例如，这可由自由群的 [19] 推得）。当 X 是非紧曲面时，Γ 是一个自由群，因此可以使用为随机图 [19, 79] 开发的组合工具。一个关键事实是关于不动点数的渐近行为：给定 $\gamma \in \Gamma$，它是一个本原字（即 γ 不是某个 $k \ge 2$ 的幂 $\gamma = \gamma_0^k$），当 $n \to +\infty$ 时，期望的渐近式为

$$\mathbb{E}_n(\mathrm{Fix}(\phi_n(\gamma))) = 1 + O_\gamma\left(\frac{1}{n}\right), \tag{7}$$

其中 $\mathrm{Fix}(\sigma)$ 是置换 $\sigma \in S_n$ 的不动点数。我们指出，对于均匀分布的随机置换 $\alpha \in S_n$，不难验证 $\mathbb{E}(\mathrm{Fix}(\alpha)) = 1$。

界（7）中隐含的常数取决于 $|\gamma|$ 的词长 γ。如果词长相对于 n的增长适中，即 $|\gamma| \le C_1 \log(n)$，那么可以找到一个统一常数 C_2使得

$$|\mathbb{E}_n(\mathrm{Fix}(\phi_n(\gamma))) - 1| \le C_2 \log(n)/n.$$

结合这些组合工具与 [49],Michael Magee 和第二作者 [58] 关于转移算子的希尔伯特–施密特估计，他们得以证明以下事实。设

$$M(\sigma, T) := \{s \in \mathbb{C} \ : \ \sigma \le \mathrm{Re}(s) \le \delta \text{ and } |\mathrm{Im}(s)| \le T\}.$$

定理 5. 固定 $T > 0$ 并取 $\frac{3}{4}\delta < \sigma < \delta$，则当 $n \to +\infty$时，以高概率有

$$\mathcal{R}_{X_n} \cap M(\sigma, T) = \mathcal{R}_X \cap M(\sigma, T).$$

换言之，在区域 $M(\sigma, T)$中没有新的共振，且当n 趋于无穷时，此事件发生的概率趋于 1。注意， X 上的拉普拉斯算子的共振或特征值始终是 $\mathcal{R}_{X_n}$的子集（重数也计入其中）。我们指出，若形式上 $\delta = 1$，并考虑原始谱参数 $s(1-s)$，那么得到的谱隙与塞尔伯格的 3/16相同。我们在 [58] 给出的证明，基本上可以视为 [19, 79] 中用于随机置换图的迹方法 的无限维版本。

现在让我们回到有限体积曲面或紧曲面。我们回顾一下，之前所有关于谱隙的统一界都是通过应用切格不等式证明的，而这种方法存在局限，无法使谱隙接近最优值 $1/4$ 。此时人们已清楚，要解决紧曲面的问题，需要一种曲面群版本的 [79]。Michael Magee 和 Doron Puder 首先在 [61], 中实现了这一点，并在 [60] 中针对当前问题进行了改进，从而得到以下结果。

定理 6。 A 设 X 是一个紧曲面。对于任意 $0 < \lambda < \frac{3}{16}$，当 $n \to +\infty$时，以高概率 ，我们有

$$\mathrm{Sp}(X_n) \cap [0, \lambda] = \mathrm{Sp}(X) \cap [0, \lambda],$$

其中$\mathrm{Sp}(X)$ 是 X上拉普拉斯算子的（离散） L^2-谱。

证明结合了塞尔伯格迹公式（使用适当的测试函数）以及如上所述不动点数的期望渐近式，这与图的迹方法完全类似。难点在于证明曲面群组合学中与（7）对应的版本。

3.3 韦伊–彼得森随机曲面与谱隙。

在针对固定双曲曲面的随机覆盖定理 11 提出后不久，Wu 和 Xue [89] 以及独立地，Lipnowski 和 Wright [53] 证明了一个类似的 3/16结果，适用于大亏格范围内的韦伊–彼得森模型（另见 [39]）。

定理 7。 对于任意 $0 < \lambda < \frac{3}{16}$，我们有 $\lambda_1(X) > \lambda$，当 $g \to +\infty$ 时以高概率成立。

在这两篇文章中，作者都采用了类似的迹方法，利用塞尔伯格迹公式得出结果；随机覆盖文章 [60] 也采用了这一方法，因为这是解决该问题的自然途径。作者对较大的 L，使用膨胀后的测试函数 $h_L(r) = h(r/L)$，找出与平凡特征值对应的贡献，并证明其余部分足够小，从而达到所需的谱隙。非最优值 3/16 而非 $1/4$，是所有估计所达到的精度水平所致， $1/g$或 $1/n$分别如此。

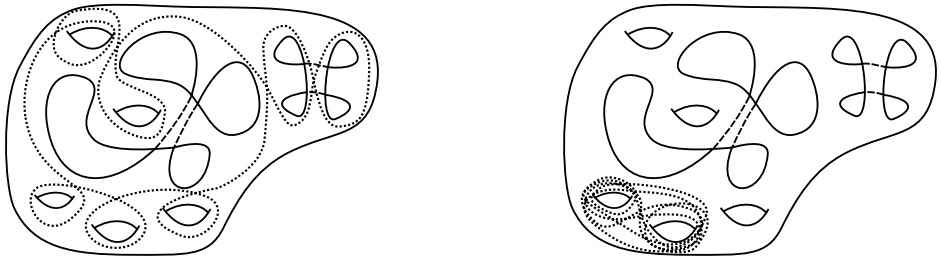
相似之处到此为止，接下来的证明则取决于具体模型。对于 Weil– Petersson 模型，不同于式（7）中对随机置换的不动点数进行计数，我们需要对以下形式的量取平均 $\sum_{\gamma \in \mathcal{P}_X} F(\ell(\gamma))$，也就是对所有本原闭测地线求和。这应该会让人想起 Mirzakhani 研究的几何函数，正如我们在第 2.2.4 节所见，这些函数可以积分。遗憾的是，这里有一个重要的难点：Mirzakhani积分公式仅适用于简单的闭测地线（没有自交点），而塞尔伯格迹公式中出现的却是所有闭测地线。

此时，两支团队都做出了一个惊人的发现：如果只将塞尔伯格迹公式限制在简单闭测地线上，并用 Mirzakhani 的技巧对其积分，就能恢复平凡特征值 $\lambda_0 = 0$ 的贡献，误差很小。更准确地说，

$$\mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}_X \\ \text{simple}}} \frac{\ell h_L(\ell(\gamma))}{2\sinh(\ell(\gamma)/2)}\right] = 2\int_0^L h_L(\ell) \sinh\left(\frac{\ell}{2}\right) \mathrm{d}\ell + \mathcal{O}_\epsilon\left(\frac{e^{(1+\epsilon)L/2}}{g}\right) \tag{8}$$

其中第一项非常接近 $h_L(i/2) = 2\int_0^L h_L(\ell)\cosh(\ell/2)\,\mathrm{d}\ell$ 当 L 取较大值时。这一发现与随机覆盖情形下的式（7）相似，但其出发点截然不同。

最后（也是最重要）的一步，是证明其他贡献都很小。回想一下，这里的塞尔伯格迹公式包含长度为 $\leq L$ 的所有闭测地线，其中L取较大的值。根据Huber计数结果，我们知道这类测地线的数量呈指数级增长，这意味着求和中的项数先验上过多，无法据此得出任何结论。我们需要进一步了解这种指数增长，特别是对于随机双曲曲面以及我们选取的特定L（这里是 $L = 4\log\ g$）。



(a) 填充一个大子曲面。　　(b) 填充一个裤子曲面。

图3：高亏格曲面上的两条长闭测地线。

紧双曲曲面上的长测地线可能有不同的表现，如图3所示。有些测地线可能遍历曲面中非常大的一片区域（如图3a），而另一些则可能局限于一小片区域，却反复绕行许多次（如图3b）。因此，引入被闭测地线填充的曲面这一概念颇有意义，即包含该闭测地线的、边界为测地线的最小曲面。Mirzakhani估计可以相当直接地证明，填充曲面的欧拉示性数非常负的测地线（如图3a所示）平均而言贡献极小，因此可以忽略。

因此，困难在于测地线在曲面的一小块区域内反复绕行多次，如图 3b所示。当曲面包含缠结时，尤其会出现这种情况。缠结是嵌入曲面，其欧拉示性数为 -1，且边界长度较短。这个概念由第一作者和 Joe Thomas 在 [74], 中提出，他们借鉴了 Friedman 和 Bordenave 关于 Alon猜想的研究中一个类似的概念。缠结曲面（包含缠结的曲面）具有过多的闭测地线，导致迹方法失效。它们出现的概率很低，却会在平均意义上产生很大的贡献。文献 [89] 和 [53], 分别以两种截然不同的方式克服了这一难题，并由此揭示了随机 Weil–Petersson曲面的几何性质；下面我们将详细介绍。

- 一方面，Wu 和 Xue 证明了对填充给定曲面的闭测地线数量的一个精细上界。设 Y 为一条具有测地边界的曲面。那么，Wu 和 Xue 证明，长度为 $\leq L$ 且填充 Y 的闭测地线数量至多为 $e^{L-(1-\epsilon)\ell(\partial Y)/2}$。换言之，可以通过一个随 Y边界长度呈指数衰减的修正项改进 Huber界。这一精化恰好满足了达到 3/16结果所需的精度。

- 另一方面，Lipnowski 和 Wright 证明了无缠结曲面上长度为 $\leq L$ 的闭测地线数量具有多项式上界。从指数上界转为多项式上界，足以大幅降低论证的难度，但也带来了一个主要的权衡。现在，他们需要在模空间的一个子集上积分，这里指厚部分 $\mathcal{M}_g^{>\kappa}$（单射半径为 $>\kappa$ 的双曲曲面）。我们在第 2.2.4 节已经看到，在模空间上进行积分的理论颇具挑战，而且可供积分的函数类型受到严格限制。幸运的是，可以通过一个简单的容斥原理来改写厚部分的指示函数，这一做法最早见于 [70]:

$$\mathbb{1}_{\mathcal{M}_g^{>\kappa}}(X) = 1 - \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q+1}}{2^q q!} \sum_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_q)} \prod_{j=1}^{q} \mathbb{1}_{[0,\kappa]}(\ell(\gamma_j)). \tag{9}$$

上述求和遍历所有由互不相同的本原闭测地线组成的族（γ_1、……、γ_q）。得益于领圈引理，当 κ 足够小时，对该求和有贡献的所有测地线都是简单且互不相交的，因此，上述公式可以看作是将 $\mathbb{1}_{\mathcal{M}_g^{>\kappa}}$改写为

几何函数的组合，随后可以使用 Mirzakhani积分公式对其进行积分。

这一~~3 16~~ 结果大幅改进了 Mirzakhani 使用 Cheeger不等式 证明的初始界 0.002。我们从 Friedman 和 Bordenave 证明 Alon猜想 的工作中了解到，迹方法有望达到最优谱隙1 4。Nalini Anantharaman 和第一作者于 2025年 实现了这一目标：

定理 8。 对于任意 $0 < \lambda < \frac{1}{4}$，当 $g \to +\infty$ 时，以高概率有 $\lambda_1(X) > \lambda$。

这一结果的证明发表于一篇两部分论文 [6, 8]，共 263 页；其内容在一篇介绍性文章 [7]中进行了概述。这一复杂性上的跃升，是因为数字3 16 因多个不同原因构成了精度障碍；若要改进这一结果并最终达到最优谱隙1 4，就必须逐一解决这些问题。下面介绍这一方法的几个方面。

谱隙3 16 通过计算Selberg迹公式在主阶处的平均值获得，即误差项按 $1/g$衰减。简单计算可以看出，为了通过迹方法获得更大的谱隙，必须提高计算的精度（见 [6,第3.4]节）。更准确地说，如果计算所有项时的误差按$1/g^N$ 衰减，我们所能期望的最佳谱隙是 $\frac{1}{4} - \frac{1}{(N+1)^2}$。因此，通过迹方法达到1 4 的唯一途径，需要对 $1/g$ 的~~幂进~~行任意精度的渐近展开。Mirzakhani和Zograf在 [71]中推导出了某些韦伊–彼得松体积的展开式，并在 [5]中获得了关于其系数的更多信息。

随着我们以越来越高的精度计算期望值，越来越复杂的闭测地线开始出现。例如，八字形曲线（恰有一次自交的测地线）对项 $1/g$作出贡献。这无疑是展开需求所带来的最大挑战，因为现有的唯一工具 Mirzakhani积分公式，从根本上说仅限于研究简单测地线。Anantharaman和第一作者在 [6] 中定义了闭曲线上的一种等价关系，称为局部拓扑类型 $\mathbf{T}$，从而可以将拓扑相似的闭测地线归为一组。对于给定的局部拓扑类型，与之对应的体积函数 的显式公式，即函数 $V_g^{\mathbf{T}}\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ 满足

$$\mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}\Big[\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}_X \\ \text{of type } \mathbf{T}}} F(\ell(\gamma))\Big] = \int_0^\infty F(\ell) V_g^{\mathbf{T}}(\ell)\, \mathrm{d}\ell, \tag{10}$$

在 [6] 中推导得出。由此获得了关于 $1/g$ 的幂次的完整渐近展开。该公式包含一个在某种程度上较为抽象的 Teichmüller 空间上的积分（它允许列出闭测地线的所有可能几何形态）。在 [8] 中，通过引入 Teichmüller 空间上的一组新坐标，使该公式变得明确且完全可计算；在这组坐标下，Weil–Petersson形式呈现出令人惊讶的简洁表达式。

平凡特征值的贡献与简单闭测地线的贡献之间这种奇妙的对应关系，仅在主阶出现，如式（8）所示。很难看出如何才能证明在任意高阶精度下都存在如此精确的抵消。因此，为了抵消0 中 [6, 8]的平凡特征值，我们采用了一种不同且更稳健的方法。将测试函数 h_L 替换为一个新的测试函数，使其傅里叶变换在 $r_0 = i/2$处为零。具体做法是对测试函数 h_L应用微分算子$\frac{1}{4} - \partial^2$ 的某个幂次；根据傅里叶分析，这相当于将傅里叶变换乘以 $\frac{1}{4} + r^2$的某个幂次。于是，目标转变为在迹公式的几何项中揭示非平凡的抵消。相关论证详见 [6, 第 3 节。4] 并由此引出一个基本假设：

定义 9。 局部可积函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称为 Friedman–Ramanujan 函数，如果存在一个多项式 p 使得 $f(\ell) = p(\ell)e^\ell + \mathcal{O}((\ell+1)^c e^{\ell/2})$。

这个表达式可以与素数定理公式（1）相比较：主项 $p(\ell)e^\ell$ 似乎来自平凡特征值 0，而指数 e^ℓ 与 $e^{\ell/2}$ 之间的间隔对应于 0 与 1 4之间的间隔。实际上，形式为 $p(\ell)e^\ell$ 的项恰好可在塞尔伯格迹公式中通过一次简单的分部积分消去，所用的微分算子为 $\frac{1}{4} - \partial^2$。于是， [8] 的主要结果可以改述如下。

定理10。 对于任意非简单局部拓扑类型 $\mathbf{T}$以及任意精度阶数 N，体积函数 $V_g^{\mathbf{T}}$的 N 阶近似在弱意义下是一个 *Friedman–Ramanujan* 函数。

完整结果还包含关于 Friedman–Ramanujan 函数的次数、常数和系数一致性的更多信息，而这些信息是获得谱隙所必需的。弱意义指的是对 Friedman–Ramanujan 函数采用一种较弱的积分定义。

证明定理时面临的最后一个重大挑战 8 来自消除缠结的必要性，正如上文提到的 Lipnowski 和 Wright 的方法。该方法遵循 Friedman 的思路解决了这一问题。基本思路是将无缠结曲面集合的指示函数改写为几何函数之和，与式（9）类似。然而，当精度超过 $3\ 16$ 时，必须将缠结（具有欧拉示性数 -1 且带有短边界的曲面）纳入这一容斥原理。与短闭测地线不同，这些缠结可能相交，因此原则上需要列出所有可能的缠结组合。通过证明一个莫比乌斯公式，这一问题得以解决；该公式在 [7], 中恰好实现了上述目标，同时避免了繁琐的拓扑枚举。

4 强收敛的突破。

除了迹方法之外，Bordenave-Collins 最近的一篇突破性论文 [15] 引起了 Michael Magee 和第二作者的关注。 [15] 的主要结果涉及随机置换矩阵之和的强收敛，尤其蕴含了关于正则图随机提升的 Alon 猜想。强收敛是迹方法的一种替代方法，在某些情况下更为有效。

4.1 强收敛。

首先来解释什么是强收敛。设 Γ 是一个有限生成离散群，令$\mathbb{C}[\Gamma]$ 为 Γ 的群环，即由形式有限和 $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ 构成的环，其中 $a_\gamma \in \mathbb{C}$。令 $\rho_n : S_n \to$End$(L^2(\{1,\dots,n\})$为对称群 S_n 的标准表示，其对 $\sigma \in S_n$ 定义为

$$\rho_n(\sigma)(f)(j) := f(\sigma^{-1}(j)),$$

其中 $f \in L^2(\{1,\dots,n\}) \simeq \mathbb{C}^n$。令 $V_n^0 \subset L^2(\{1,\dots,n\})$为与常值函数正交的向量所构成的子空间，即

$$V_n^0 = \Big\{ f \in L^2(\{1,\dots,n\}) \ : \ \sum_j f(j) = 0 \Big\}.$$

那么，将 ρ_n 限制到 V_n^0 后得到的是 S_n的一个不可约表示，以下将其记作 ρ_n^0。若一列置换表示 (ϕ_n) 满足 $\phi_n : \Gamma \to S_n$，则称其强收敛；若对任意元素 $z \in \mathbb{C}[\Gamma]$，我们都有

$$\lim_{n\to+\infty} \|\rho_n^0(\phi_n(z))\|_{V_n^0} = \|\lambda_\Gamma(z)\|_{\ell^2(\Gamma)},$$

其中涉及的范数均为算子范数，并且若 $z = \sum_\gamma a_\gamma$，则 $\rho_n^0(\phi_n(z)) = \sum_\gamma a_\gamma \rho_n^0(\phi_n(\gamma))$；而 $\lambda_\Gamma(z)$ 是作用在 $\ell^2(\Gamma)$ 上的左正则表示。换一种更直观的说法：在常向量的正交补上，置换矩阵之和的范数收敛于 z的左正则表示的范数。在 [15], 中，他们证明了，若 Γ 是自由群且 $\phi_n : \Gamma \to S_n$ 是按照 Hom(Γ, S_n) 上的均匀概率测度抽样得到的，那么随着 n 趋于无穷，强收敛以趋于 1 的概率发生。

需要指出的是，强收敛实际上蕴含与有限维矩阵作张量积时的收敛，这一技巧称为“矩阵放大”，可由强收敛推出。更多详情请参见 [57], 第 3 节及其中的参考文献。

4.2 对有限体积覆盖和具有近乎最优谱隙的紧曲面的应用。

在 [59], ，Michael Magee 和第二作者成功结合了[14] 的非回溯方法与 [58] 的转移算子技术，证明了以下事实。

定理 11. 设 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ 是上述凸余紧基曲面，其中 Γ 是一个自由群。令不动点数$T > 0$，并任取满足 $\frac{\delta}{2} < \sigma < \delta$的 σ，则当 $n \to +\infty$时，以高概率有

$$\mathcal{R}_{X_n} \cap M(\sigma, T) = \mathcal{R}_X \cap M(\sigma, T).$$

上文得到的 $\delta/2$-界如今成为上文针对紧曲面和有限体积曲面所述 $1/4$-谱隙的无限体积 对应结果，并证明了 [49] 中猜想的一部分。当时在 [59]给出的证明相当技术化，此后 [27], 使其更具概念性：我们直接结合 Bordenave-Collins 的强收敛结果与 Haagerup 不等式，来估计极限的范数

算子。强收敛方法能够在无限体积情形下直接导出近乎最优的结果，这一事实清楚地表明，有限体积情形或许也可以解决。Hide 和 Magee 正是 [41]所取得的成果。

定理 12. 设 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ 是一个有限体积基曲面，特别地， Γ 是一个自由群。对于所有 $\epsilon > 0$，当 $n \to +\infty$ 时，以高概率有

$$\mathrm{Sp}(X_n) \cap [0, 1/4 - \epsilon] = \mathrm{Sp}(X) \cap [0, 1/4 - \epsilon],$$

其中 $\mathrm{Sp}(X)$ 是 X 上拉普拉斯算子的 L^2-谱。

例如，若基曲面 X 的欧拉示性数 $\chi(X)$ 为 $= -1$，那么根据 Otal 和 Rosas 的一个界， [78], 0 是低于 $1/4$ 的唯一特征值，因此当 n 足够大时，以高概率有

$$\mathrm{Sp}(X_n) \cap [0, 1/4 - \epsilon] = \{0\}.$$

在同一篇论文中，Hide 和 Magee 解释了如何利用 [25] 将一列具有近最优谱隙的有限体积曲面紧化，同时控制亏格，并且在 λ_1 上的损失不太大。因此，他们由此获得了首个存在性证明：存在一列紧曲面（X_k），其亏格趋于无穷，且 $\lim_{k\to\infty} \lambda_1(X_k) = 1/4$。 [41] 中的证明基于曲面覆盖 X_n 上拉普拉斯算子的预解式 $R_{X_n}(s)$ 的一个显式拟逆。这个拟逆涉及对群 Γ 的（有限）求和，并写成置换矩阵与紧算子张量积之和。直接应用强收敛结果，即可将拟逆的范数估计与万有覆盖 $\mathbb{H}^2$ 上预解式的范数估计联系起来（以高概率），其谱已知为 $[1/4, +\infty)$。Michael Magee 最近成功证明了 [57], ，对于有限体积局部对称覆盖，可以仅通过表示论论证证明近最优谱隙，从而省去证明中所有非必要的具体分析。

最后，我们指出，在撰写本文时，Brooks-Makeover 模型的最优谱隙结果尚未得到证明。主要有两个原因。首先，Brooks-Makeover 曲面是通过从循环群的自由积的有限指数子群中选取粘合组合结构构造出来的（其中一个循环群的阶为 3）。因此，Bordenave-Collins 结果无法直接应用。其次，该自由积的有限指数子群空间上的一致概率测度与 Brooks-Makeover 概率测度略有不同。不过，使用新的强收敛多项式方法 [29] 很可能可以得到 $1/4$-谱隙。

4.3 曲面群的强收敛。

鉴于置换矩阵之和的强收敛所带来的有力应用，一个令人振奋的问题是：能否证明曲面群的强收敛？迄今为止，强收敛只针对自由群得到证明。Louder 和 Magee 在 [54] 给出了一个初步的部分答案，他们证明，对于任意抽象曲面群 Γ，都存在一个置换表示序列 (ϕ_n)：$\Gamma \to S_n$，使得相应的置换矩阵序列（作用于 V_n^0）强收敛到 $\ell^2(\Gamma)$ 上的左正则表示。他们的证明基于“微扰论证”，并依赖于自由群情形和 Bordenave-Collins 结果。其新意在于，可以从任意基紧曲面出发，得到一列具有近乎最优相对谱隙的覆盖。例如，从X 作为 Bolza 曲面（它是算术的，且已知具有 $\lambda_1 \simeq 3.8388$）出发，他们证明存在一列亏格趋于无穷的紧算术曲面，使得 $\lim_{k\to\infty} \lambda_1(X_k) = 1/4$。

4.4 多项式方法。

最近，Chen、Garza-Vargas、Tropp 和 Van Handel [29], 提出了（针对自由群）强收敛的一种替代证明，表明可以用较为温和的方法“引导”矩渐近（即文献中称为渐近自由性的结果）。关键在于，对于许多模型（随机置换矩阵、随机 Haar 酉矩阵），矩渐近是关于 $1/N$ 的有理函数，其中 N 是矩阵大小。所用的技术是多项式逼近理论和基础的傅里叶分析。

这种被称为“多项式方法”的新方法为强收敛研究开辟了新的视角。Magee、Puder 和 Van Handel 于 2025年发表的一篇预印本 [62] 解决了曲面群的情形：他们成功运用多项式方法证明了强收敛。这篇论文包含一些关键的新思想，因为矩函数的有理性在曲面群的情形下并不成立：他们转而在 Gevrey 正则性类中开展研究，但仍然成功证明了强收敛，堪称一项非凡成就。因此，我们可以陈述以下主要结论。

定理 13。 设 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ 为一紧双曲曲面。对于所有 $\epsilon > 0$，当.....时，以高概率 $n \to +\infty$，我们有 h_{ave}

$$\mathrm{Sp}(X_n) \cap [0, 1/4 - \epsilon] = \mathrm{Sp}(X) \cap [0, 1/4 - \epsilon],$$

其中$\mathrm{Sp}(X)$ 是 X 上拉普拉斯算子的 L^2-谱。

值得一提的是，[62]中的强组合结果在双曲曲面以外也有广泛的应用潜力。这里仅提及 Moy、Hide 与第二作者近期的一项工作 [42], ，我们通过结合[62] 和热核技术，得到了适用于（可变）负曲率曲面覆盖的随机覆盖的类似结果。最近，Hide、Macera 和 Thomas 成功地将多项式方法的思想应用于魏尔–彼得森模型 [40], ，从而得到了另一种证明，证明其具有多项式速率的谱隙 $\frac{1}{4} - \frac{1}{g^c}$，适用于 $c > 0$。

– —

致谢。

我们二人都感谢 Bram Petri 仔细阅读本文并提出意见。本研究由英国工程与自然科学研究委员会拨款 EP/W007010/1 以及授予第一作者的英国皇家学会多萝西·霍奇金研究员奖资助。

参考文献

[1]M. Abert, N. Bergeron, I. Biringer, T. Gelander, N. Nikolov, J. Raimbault, 和 I. Samet, 《李群中格序列的 L^2不变量增长》, 《数学年刊》（第2辑）, 185（2017年）, 第711–790页, https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.1, https://doi.org/10. 4007/annals.2017.185.3.1.[2] L. V. Ahlfors, 《Teichmüller空间的曲率性质》, 《数学分析杂志》, 9（1961）, 第161–176页, https://doi.org/10.1007/BF02795342.[3] N. Alon, 《特征值与扩展图》, 《组合学》, 6（1986）, 第83–96页, https://doi.org/10. 1007/BF02579166.[4] N. Alon, 《图的边扩展》, 《组合学、概率与计算》, 6（1997）, 第145–152页, https://doi.org/10.1017/S096354839700299X.[5] N. Anantharaman 和 L. Monk, 《魏尔–彼得森体积多项式的大亏格渐近展开》, 《数学物理杂志》, 63（2022年）, 第043502页, https://doi.org/10.1063/5. 0039385.[6] N. Anantharaman 和 L. Monk, 《随机双曲几何中的Friedman-Ramanujan函数及其在谱隙中的应用》, arXiv:2304.02678, （2023年）。[7] N. Anantharaman 和 L. Monk, 《随机双曲曲面的谱隙》, arXiv:2403.12576, （2024年）。[8] N. Anantharaman 和 L. Monk, 《随机双曲几何中的Friedman-Ramanujan函数及其在谱隙中的应用 II》, arXiv:2502.12268, （2025年）。[9] G. V. Belyi, 《极大分圆域的伽罗瓦扩张》, 《苏联科学院院刊：数学辑》, 43（1979）, 第267–276页, 479。[10] I. Benjamini 和 O. Schramm, 《有限平面图的分布极限的递归性》, 《电子概率学杂志》, 6（2001）, 第23号, 13页, https://doi.org/10.1214/EJP.v6-96, https://doi.org/10. 1214/EJP.v6-96.[11] N. Bergeron, 《双曲曲面的谱》, 《当代知识》（Les Ulis）。 [《当代知识》（Les Ulis）], EDP Sciences, Les Ulis; CNRS Éditions, 巴黎, 2011年。[12] L. Bers, 《黎曼曲面上的一个不等式》, 载于《微分几何与复分析》, Springer, 柏林、海德堡, 1985年, 第87–93页, https://doi.org/10.1007/978-3-642-69828-6_7.[13] B. Bollobás, 《随机正则图的等周数》, 《欧洲组合学杂志》, 9（1988）, 第241–244页, https://doi.org/10.1016/S0195-6698(88)80014-3。

[14] C. Bordenave, 《Friedman第二特征值定理及其对随机提升的推广的新证明》, 《高等师范学校科学年刊》第四辑, 53（2020）, 第1393–1439页, https://doi.org/10.24033/asens.245.[15] C. Bordenave 和 B. Collins, 《随机提升的特征值与随机置换矩阵的多项式》, 《数学年刊》, 190（2019）, https://doi.org/10.4007/annals.2019.190.3.3.[16] D. Borthwick, 《无限面积双曲曲面的谱理论》, 《数学进展》第318卷, Birkhäuser/Springer, [Cham], 第二版, 2016年, https://doi.org/10.1007/978-3-319-33877-4, https://doi.org/10.1007/978-3-319-33877-4.[17] J. Bourgain 和 S. Dyatlov, 《双曲曲面的傅里叶维数与谱隙》, 《几何与泛函分析》, 27（2017）, 第744–771页, https://doi.org/10.1007/s00039-017-0412-0, https://doi. org/10.1007/s00039-017-0412-0.[18] J. Bourgain、A. Gamburd 和 P. Sarnak, 《塞尔伯格3 16定理的推广与仿射筛法》, 《数学学报》, 207（2011）, 第255–290页, https://doi.org/10.1007/s11511-012-0070-x, http: // dx.doi.org/10.1007/s11511-012-0070-x.[19] A. Broder 和 E. Shamir, 《随机正则图的第二特征值》, 载于第28届计算机科学基础年会（Sfcs 1987）, IEEE, 1987年, 第286–294页, https://doi. org/10.1109/SFCS.1987.45.[20] R. Brooks 和 E. Makover, 《黎曼曲面的随机构造》, 《微分几何杂志》, 68（2004）, 第121–157页。[21]T. Budzinski、N. Curien 和 B. Petri, 《闭双曲曲面的最小直径》, 《杜克数学杂志》, 170（2021）, 第365–377页, https://doi.org/10.1215/ 00127094-2020-0083.[22] T. Budzinski、N. Curien 和 B. Petri, 《双曲曲面的Cheeger常数》, 技术报告 arXiv:2207.00469, arXiv, 2022年7月, https://arxiv.org/abs/2207.00469.[23] P. Buser, 《三次图与黎曼曲面的第一特征值》, 《数学杂志》, 162（1978）, 第87–99页, https://doi.org/10.1007/BF01437826.[24] P. Buser, 《关于等周常数的注记》, 《高等师范学校科学年刊》第四辑, 15（1982）, 第213–230页。[25] P. Buser、M. Burger 和 J. Dodziuk, 《大亏格黎曼曲面与大 λ_1》, 载于《流形上的几何与分析》, 第1339卷, Springer, 柏林、海德堡, 1988年, 第54–63页, https://doi.org/ 10.1007/BFb0083046.[26]P. Buser 和 P. Sarnak, 《关于大亏格黎曼曲面的周期矩阵》, 《数学发明》, 117（1994）, 第27–56页, https://doi.org/10.1007/BF01232233, https://doi.org/10.1007/ BF01232233。附录由 J. H. Conway 和 N. J. A. Sloane 撰写。[27] I. Calderón、M. Magee 和 F. Naud, 《随机施托基曲面的谱隙》, arXiv:2407.21506, （2024年）。[28] J. Cheeger, 《拉普拉斯算子最小特征值的下界》, 载于《分析问题》, 普林斯顿大学出版社, 1970年, 第195–199页。[29] C.-F. Chen、J. Garza-Vargas、J. A. Tropp 和 R. van Handel, 《强收敛的新方法》, arXiv:2405.16026, （2025年）。[30] R. Fricke 和 F. Klein, 《自守函数理论讲义》, 莱比锡, B.G. Teubner, 1897年。[31] J. Friedman, 《Alon第二特征值猜想的证明》, 第三十五届ACM计算理论年会论文集, （2003年）, 第720–724页, https://doi.org/10.1145/780542. 780646.[32] J. Friedman, 《相对扩展图或弱相对拉马努金图》, 《杜克数学杂志》, 118（2003年）, https://doi.org/10.1215/S0012-7094-03-11812-8。

[33] *J. Friedman* 和 *D. Kohler*，《相对化阿隆第二特征值猜想 *III*：无缠结哈希本征迹的渐近展开》，*arXiv:1911.*05710 [*cs, math*], *(2019)*，*https://arxiv. org/abs/1911.05710.*[34]*A. Gamburd*，《SL_2*(Z)* 的无限指数“同余”子群的谱隙》，《以色列数学杂志》，*127 (2002)*，第 *157–200* 页，*https://doi.org/10.1007/BF02784530*，*https://doi.org/10. 1007/BF02784530.*[35] *G. Gavelli* 和 *C. Kamp*，*Benjamini-Schramm* 收敛与 *Plancherel* 收敛之比较，预印本，（*2024*）。[36]*K. Golubev* 和 *A. Kamber*，双曲曲面上的截断现象，《几何学专题》，*203 (2019)*，第 *225–255* 页，*https://doi.org/10.1007/s10711-019-00433-5*，*https://arxiv.org/abs/ 1712.10149.*[37] *L. Guillopé* 和 *M. Zworski*，非紧黎曼曲面上共振数量的上界，泛函分析杂志，*129 (1995)*，第 *364–389* 页，*https://doi.org/10.1006/jfan.1995.1055*，*https://doi.org/10.1006/jfan.1995.1055.*[38] *L. Guth*、*H. Parlier* 和 *R. Young*，随机曲面的裤子分解，《几何与泛函分析》，*21 (2011)*，第 *1069–1090* 页，*https://doi.org/10.1007/s00039-011-0131-x.*[39] *W. Hide*，带尖点的 *Weil–Petersson* 随机曲面的谱隙，《国际数学研究通知》，（*2022*），第 *rnac293* 页，*https://doi.org/10.1093/imrn/rnac293.*[40] *W. Hide*、*D. Macera* 和 *J. Thomas*，具有多项式速率的 *Weil-Petersson* 随机曲面谱隙，*2025* 年 *8* 月，*https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.14874*，*https://arxiv.org/abs/ 2508.14874.*[41] *W. Hide* 和 *M. Magee*，双曲曲面的近最优谱隙，《数学年刊》（即将出版），（*2021*），*https://arxiv.org/abs/2107.05292.*[42]*W. Hide*、*J. Moy* 和 *F. Naud*，关于负曲率曲面覆盖的谱隙，*arXiv:2502.10733*，（*2025*）。[43] *J. Huang*、*T. McKenzie* 和 *H.-T. Yau*，随机正则图的 *Ramanujan* 性质与边缘普适性，*arXiv:2412.20263*，（*2025*）。[44] *H. Huber*，《关于双曲空间形式和运动群的解析理论。*II*》，*Math. Ann.*，*142 (1960/61)*，第 *385–398* 页，*https://doi.org/10.1007/BF01451031*，*https://doi.org/10. 1007/BF01451031.*[45] *H. Huber*，《关于紧黎曼曲面上的拉普拉斯算子的第一特征值》，《赫尔维数学评论》，*49 (1974)*，第 *251–259* 页。[46] *Y. Imayoshi* 和 *M. Taniguchi*，《*Teichmüller* 空间导论》，*Springer*，东京，*1992* 年第一版的平装重印本，*1992* 年。[47] *H. Iwaniec*，《自守形式的谱方法》，《数学研究生教程》第 *53* 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛；《伊比利亚美洲数学杂志》，马德里，第二版，*2002* 年，*https://doi.org/10.1090/gsm/053*，*https://doi.org/10.1090/gsm/053*。[48] *D. Jakobson* 和 *F. Naud*，关于凸余紧双曲曲面的临界线，《几何与泛函分析》，*22 (2012)*，第 *352–368* 页，*https://doi.org/10.1007/s00039-012-0154-y.*[49]*D. Jakobson* 和 *F. Naud*，关于 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的凸余紧同余子群的共振与密度界，《以色列数学杂志》，*213 (2016)*，第 *443–473* 页，*https://doi.org/10.1007/ s11856-016-1332-7*，*https://doi.org/10.1007/s11856-016-1332-7.*[50] *H. Kesten*，群上的对称随机游走，美国数学会汇刊，*92 (1959)*，第 *336–354* 页，*https://doi.org/10.2307/1993160*，*https://doi.org/10.2307/1993160.*[51]*H. H. Kim*，GL_4 外平方与 GL_2，对称四次方的函子性，《美国数学会杂志》，*16 (2003)*，第 *139–183* 页，*https://doi.org/10.1090/S0894-0347-02-00410-1*，*https://doi.org/10.1090/S0894-0347-02-00410-1*。附录 *1* 由 *Dinakar Ramakrishnan* 撰写，附录 *2* 由 *Kim* 和 *Peter Sarnak* 撰写。

[52]*E. Le Masson* 和 *T. Sahlsten*，双曲曲面的量子遍历性与 *Benjamini-Schramm* 收敛，杜克数学杂志，*166 (2017)*，第 *3425–3460* 页，*https://doi.org/10.1215/ 00127094-2017-0027*，*https://doi.org/10.1215/00127094-2017-0027*。[53] *M. Lipnowski* 和 *A. Wright*，迈向大亏格中的最优谱隙，《概率年刊》（即将出版），（*2021*），*https://arxiv.org/abs/2103.07496*。[54] *L. Louder*、*M. M. w. A. b. W. Hide* 和 *M. Magee*，极限群的强收敛酉表示，*arXiv:2210.08953*，（*2022*），*https://arxiv.org/abs/2210.08953*。[55] *A. Lubotzky*、*R. Phillips* 和 *P. Sarnak*，拉马努金图，《组合学》，*8 (1988)*，第 *261–277* 页，*https://doi.org/10.1007/BF02126799*，*https://doi.org/10.1007/BF02126799*。[56] *M. Magee*，致 *Bram Petri* 的信，*2020* 年。[57]*M. Magee*，离散群的酉表示与置换表示的强收敛，*arXiv:2503.21619*，（*2025*）。[58] *M. Magee* 和 *F. Naud*，黎曼曲面随机覆盖的显式谱隙，高等科学研究所数学出版物，*132 (2020)*，第 *137–179* 页，*https://doi.org/10.1007/s10240-020-00118-w*，*dro.dur.ac.uk/31332/1/31332.pdf*。[59]*M. Magee* 和 *F. Naud*，将 *Alon* 猜想和 *Friedman* 猜想推广至施托基曲面，*arXiv:2106.02555*，（*2021*）。[60] *M. Magee*、*F. Naud* 和 *D. Puder*，紧双曲曲面的随机覆盖具有相对谱隙 *3/16-ε*，《几何与泛函分析》，*32 (2022)*，第 *595–661* 页，*https://doi.org/ 10.1007/s00039-022-00602-x*。[61] *M. Magee* 和 *D. Puder*，随机覆盖曲面的渐近统计，*Forum Math. Pi*，*11 (2023)*，第 *51* 页，*https://doi.org/10.1017/fmp.2023.13*。编号 *e15*。[62] *M. Magee*、*D. Puder* 和 *R. van Handel*，曲面群均匀随机置换表示的强收敛，*arXiv:2504.08988*，（*2025*）。[63] *J. Mathien*，新模型随机双曲曲面的直径，*arXiv:2403.01925*，（*2024*）。[64] *R. R. Mazzeo* 和 *R. B. Melrose*，在具有渐近常负曲率的完备空间上预解式的亚纯延拓，泛函分析杂志，*75 (1987)*，第 *260–310* 页，*https://doi.org/ 10.1016/0022-1236(87)90097-8*，*https://doi.org/10.1016/0022-1236(87)90097-8*。[65] *H. P. McKean*，负曲率流形上 Δ 的谱的上界，《微分几何杂志》，*4 (1970)*，第 *359–366* 页。[66] *H. P. McKean*，将塞尔伯格迹公式应用于紧黎曼曲面，《纯粹与应用数学通讯》，*25 (1972)*，第 *225–246* 页。[67] *G. McShane*，曲线长度的一个非凡恒等式，博士论文，华威大学（英国），*1991* 年。[68] *M. Mirzakhani*，双曲曲面上的简单测地线与曲线模空间的体积，博士论文，哈佛大学，美国马萨诸塞州，*2004* 年。[69]*M. Mirzakhani*，带边界黎曼曲面的模空间中的简单测地线与 *Weil–Petersson* 体积，《数学发明》，*167 (2007)*，第 *179–222* 页，*https://doi.org/10.1007/ s00222-006-0013-2*。[70] *M. Mirzakhani*，*Weil–Petersson* 体积的增长与大亏格随机双曲曲面，《微分几何杂志》，*94 (2013)*，第 *267–300* 页。[71] *M. Mirzakhani* 和 *P. Zograf*，迈向曲线模空间上交数的大亏格渐近，《几何与泛函分析》，*25 (2015)*，第 *1258–1289* 页，*https://doi.org/10. 1007/s00039-015-0336-5*。[72] *L. Monk*，典型双曲曲面的几何与谱，博士论文，斯特拉斯堡大学，*2021* 年。

[73] L. Monk, 《Benjamini-Schramm 收敛与高亏格随机双曲曲面的谱》, 《分析与偏微分方程》, 15（2022年）, 第727–752页, https://doi.org/10.2140/apde.2022.15.727, https://doi.org/10.2140/apde.2022.15.727。[74] L. Monk 和 J. Thomas, 《随机双曲曲面的无缠结假设》, 《国际数学研究通知》, 2022（2022年）, 第18154–18185页。[75] F. Naud, 《康托尔集上的扩张映射与ζ函数的解析延拓》, 《高等师范学校科学年刊》（第4辑）, 38（2005年）, 第116–153页, https://doi.org/10.1016/j.ansens.2004.11.002, https://doi.org/10.1016/j.ansens.2004.11.002。[76] H. Oh 和 D. Winter, 《$SL_2(\mathbb{Z})$ 的凸余紧同余子群的一致指数混合与无共振区域》, 《美国数学会杂志》, 29（2016年）, 第1069–1115页, https://doi.org/ 10.1090/jams/849, http://dx.doi.org/10.1090/jams/849。[77]R. Osserman, 《关于 Hayman 鼓的最低音定理的一则注记》, 《赫尔维数学评论》, 52（1977年）, 第545–555页, https://doi.org/10.1007/BF02567388, https://doi.org/10.1007/ BF02567388。[78] J.-P. Otal 和 E. Rosas, 《对于每个亏格为 g 的双曲曲面, $\lambda_{2g-2} > 1/4$》, 《杜克数学杂志》, 150（2009年）, 第101–115页, https://doi.org/10.1215/00127094-2009-048。[79]D. Puder, 《随机图的扩张性：新证明与新结果》, 《数学发明》, 201（2015年）, 第845–908页, https://doi.org/10.1007/s00222-014-0560-x, https://doi.org/10.1007/ s00222-014-0560-x。[80] B. Randol, 《紧黎曼曲面上拉普拉斯算子的小特征值》, 《美国数学会通报》, 80（1974年）, 第996–1000页, https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1974-13609-8, https: //doi.org/10.1090/S0002-9904-1974-13609-8。[81] M. 拉特纳, 《测地流与 horocycle 流的混合速率》, 《遍历理论与动力系统》, 7（1987年）, 第267–288页, https://doi.org/10.1017/S0143385700004004, https://doi.org/10.1017/ S0143385700004004。[82] B. 黎曼, 《阿贝尔函数论》, 《纯粹与应用数学杂志》, 54（1857年）, 第115–155页。[83] P. Sarnak, 《Selberg 特征值猜想》, 《美国数学会通告》, 42（1995年）, 第1272–1277页。[84] A. 塞尔伯格, 《弱对称黎曼空间中的调和分析与不连续群及其在狄利克雷级数中的应用》, 《印度数学会杂志》（新系列）, 20（1956年）, 第47–87页。[85] A. 塞尔伯格, 《关于模形式傅里叶系数的估计》, 载于《纯粹数学专题讨论会论文集》, 第VIII卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1965年, 第1–15页。[86] M.-F. Vignéras, 《关于猜想 $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}$ 的几则备注》, 载于《数论研讨会》, 巴黎 1981—1982年（巴黎, 1981/1982）, 《数学进展》第38卷, Birkhäuser Boston, 波士顿, 马萨诸塞州, 1983年, 第321–343页。[87] A. Weil, 《关于黎曼曲面模空间》, 载于《科学著作选集——论文集 II：1951—1964年》, Springer-Verlag, 柏林、海德堡, 1958年, 第379–389页。[88] S. Wolpert, 《Fenchel–Nielsen 扭转的一个初等公式》, 《赫尔维数学评论》, 56（1981年）, 第132–135页, https://doi.org/10.1007/BF02566203。[89] Y. Wu 和 Y. Xue, 《大亏格随机双曲曲面的第一特征值大于 3/16-ε》, 《几何与泛函分析》, 32（2022年）, 第340–410页, https://doi.org/10.1007/ s00039-022-00595-7。[90] M. Zworski, 《散射共振的数学研究》, 《数学科学通报》, 7（2017年）, 第1–85页, https: //doi.org/10.1007/s13373-017-0099-4, https://doi.org/10.1007/s13373-017-0099-4。