# 使用贝叶斯方法对零膨胀纵向圆形数据建模：眼科学应用

Prajamitra Bhuyan[‡]、Soutik Halder[†]、Jayant Jha[†]

[‡]印度加尔各答管理学院运营管理组，印度加尔各答

[†]印度统计研究所跨学科统计研究单位，印度加尔各答

arXiv:2601.13998v1 [stat.ME] 20 Jan 2026

**摘要**

本文介绍了在纵向框架下对过多零值的圆形数据进行建模，其中响应变量是圆周变量，而协变量既可以是线性变量，也可以是圆形变量。文献中已研究并应用了各种圆形-圆形和圆形-线性回归模型，以解决不同的现实问题。然而，在纵向研究背景下，尚无模型可用于处理零膨胀圆形观测值。受一项真实案例研究启发，本文提出一种基于投影正态分布的混合效应两阶段模型，以处理此类问题。文中讨论了模型参数的解释，并推导了可识别性条件。本文开发了一种基于吉布斯抽样的贝叶斯方法，用于估计相关模型参数。模拟结果表明，所提方法在多种情形下均优于其他方法。本文分析了一个有关术后散光的真实数据集，以展示所提方法的实际应用。所提方法有助于有效制定治疗选择决策，并指导随访阶段的决策。

**关键词：**散光、数据增广、吉布斯抽样、可识别性、投影正态分布、零膨胀。

## 1 引言

在临床眼科实践中，散光是最常见的屈光障碍之一，由角膜表面变形或眼内晶状体形状不规则所致（Read 等人，2007年）。对于健康人而言，眼睛前部的角膜呈均匀的圆形，有助于将光线清晰地聚焦到视网膜上，从而形成清晰的视力。由于散光，光线进入眼睛前部时发生不正确的折射，并在视网膜上形成多个焦点，影响视力质量（Wolffsohn 等人，2011年）。

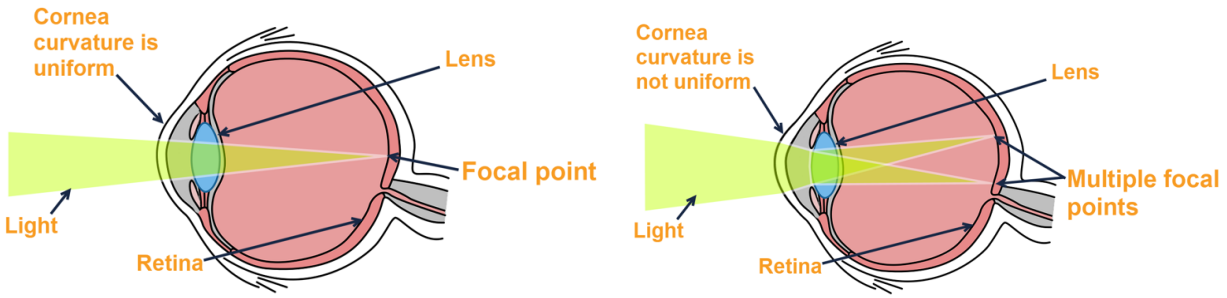


图 1：正常眼（左）和散光眼（右）中光线在视网膜上的聚焦情况。

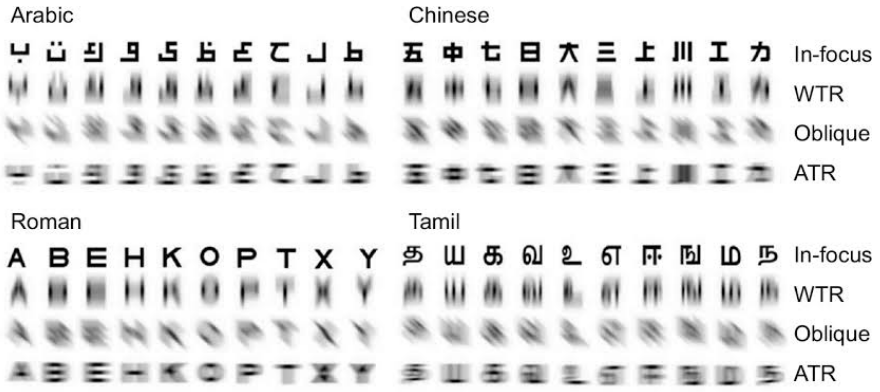


图 2：顺规散光、逆规散光和斜轴散光下的视觉变形。

因此，远处和近处的物体都会显得模糊、变形或不清晰；例如，散光患者可能难以舒适地阅读道路标志或进行电脑操作。图1 展示了散光眼与健康眼之间的差异。根据散光轴，散光通常分为：（i）顺规散光（WTR）、（ii）逆规散光（ATR）和（iii）斜轴散光（Remón 等人，2017年）。在顺规散光中，眼睛对垂直线（90°）的感知比对水平线（180°）更清晰，而在逆规散光中则相反。然而，当较陡子午线位于（30°，60°）或（120°，150°）范围内时，就会出现斜轴散光。与顺规散光或逆规散光相比，斜轴散光的危害更大，因为它会扭曲对水平和垂直物体（如字母或数字）的感知。图2展示了不同类型散光造成的视觉扭曲。为仅保留一个优选方向，将观测角乘以4，然后通过取模 360°进行变换。

许多研究文章都描述了散光的不同成因和风险因素，例如遗传因素、眼部损伤、青光眼、眼科手术等（Shing 等人，2025年）。根据 Hashemi 等人（2018年），在世界卫生组织各区域的成年人中，角膜散光的患病率为34.3%至46.6%，且通常在老年人群中更高。在各种成因中，白内障手术是导致角膜散光的一个主要因素（Kim 等人，2016年）。白内障手术的主要目的是摘除眼内混浊的天然晶状体，并植入新的人工眼内 lens，以恢复视力。白内障摘除治疗领域中两种常见的方法是小切口白内障手术（SICS）（Singh 等人，2017年）和超声乳化白内障手术（PECS）（Kelman，1967）。在前一种技术中，使用局部麻醉剂，并通过一个微小的自闭合

角膜切口，并在晶状体囊上开一个圆孔以取出白内障核心。后一种是先进的技术，通过超声振动将白内障晶状体乳化，再经显微切口取出。在欠发达国家和发展中国家，由于价格差异，超声乳化白内障手术的应用有限，相比之下，小切口白内障手术是更常用的技术。

研究角度观测值的统计学分支通常称为“圆形统计学”或“方向统计学”（Jammalamadaka 和 SenGupta，2001；Mardia 和 Jupp，2009）。与欧几里得（线性）随机变量不同，由于拓扑结构不同，圆形变量需要采用不同的处理方式。因此，分析圆形观测值需要专门的统计模型。这些模型广泛应用于多个科学领域，例如晶体学（Mackenzie，1957年）、运动生态学（Fisher 和 Lee，1992年）、气象学（Bhattacharya 和 SenGupta，2009年）和基因组学（SenGupta 和 Kim，2016年）等。Sarma 和 Jammmalamadaka（1993年）提出了一种通用的圆形—圆形回归模型，使用三角多项式函数，将圆形响应变量的正弦和余弦函数对圆形协变量进行回归。与此不同，Rivest（1997年）提出了一种通过旋转偏心圆形协变量来预测圆形响应的模型，并将其用于预测地震期间的地面运动方向。针对一个圆形响应变量和一个圆形协变量，Downs 和 Mardia（2002年）提出了一种新的圆形回归方法，随后 Kato 等人（2008年）对其进行了重新参数化。在大多数应用中，圆形响应变量对圆形或线性协变量进行回归；也有一些文献进一步考虑多个线性协变量，还有一些仅考虑多个圆形协变量；更多详情见 Fisher 和 Lee（1992年）以及 Jha 和 Biswas（2017年）。然而，许多应用涉及对圆形变量进行重复测量。例如，为了研究鸟类的定向机制，需要分析鸟类释放后相邻时点所在位置之间的角度差（Artes 等，2000年）。D’Elia 等人（2001年）提出了一种仅包含线性协变量的纵向圆形模型，用于研究小型动物的运动。Rivest 和 Kato（2019年）针对一种非常受限的情况提出了随机效应模型，其中每个协变量都包含一个圆形分量和一个线性分量。据我们所知，针对圆形和线性回归变量对纵向圆形响应变量进行回归的研究仍然有限。更多详情见 Nuñez-Antonio 和 Gutiérrez-Peña（2014年）及 Maruotti（2016年）。然而，这些纵向研究均未考虑观测圆形变量中的零膨胀现象，而这种现象可能出现在各种现实场景中。正如 Jha 和 Bhuyan（2021）以及 Jha 和 Biswas（2018）所讨论的，未考虑零膨胀的传统模型会导致估计值产生偏差。此外，圆形观测值中的零膨胀会使估计在计算上面临挑战，因为似然函数难以求解。响应变量的纵向特性还可能带来可识别性问题。受一项关于术后散光患者的案例研究启发，我们尝试解决这些挑战。

## 1.1 分析散光数据面临的挑战

本文研究一个关于白内障手术患者的真实案例，这些患者接受了小切口白内障手术或超声乳化白内障手术，并在两年期间（2008–2010年）接受观察。在本研究中，记录了患者散光轴的纵向测量值以及其人口统计特征。有关数据集的更多详情，请参阅 Bakshi (2010)。本文的主要目的是比较不同手术方式，以及手术后散光所对应的视力恢复情况。

本研究中的测量精度达到 $1^\circ$。如前所述，将观测值乘以 4，再对结果取模 $360^\circ$，从而使数据仅保留一个偏好方向。因此，由于对范围 $(-2^\circ, 2^\circ)$ 内的散光测量值进行了删失，转换后的数据集中包含许多零值。在线性变量的研究中，文献中已有一些零膨胀线性模型（Ghosh 等，2006年）。由于圆的拓扑结构不同于直线，$0^\circ$ 不能视为圆周变量样本空间中的边界点。在不失一般性的前提下，可以固定圆周变量的原点；这不会影响对圆周变量是否在零点或其他角度处发生膨胀的解释。Jha 和 Biswas 提出了零膨胀圆周建模(2018年)，Jha 和 Bhuyan 也提出了相关模型(2021年)。然而，这些模型无法处理纵向响应和线性协变量。

为应对上述挑战，我们在两阶段框架下提出了一种混合效应圆周回归模型。所提出的模型采用投影正态（PN）分布及其增广密度表示来刻画纵向圆形响应的条件分布。这种方法为复杂圆形数据建模提供了灵活且易于处理的框架，尤其能够兼顾各种类型的协变量以及纵向依赖。我们对模型参数作了全面阐释，并解决了纵向依赖所引发的可识别性问题。所提出的模型通过考虑一种受当前真实案例研究启发的删失机制来处理零膨胀。为估计模型参数，我们在贝叶斯范式下开发了一种高效的吉布斯抽样算法，并将可识别性条件纳入其中。我们还进一步推广了该模型及相应的推断方法，以处理由删失和随机性共同导致的零膨胀。大量模拟结果表明，即使圆形响应和协变量中的零值比例不断增加，所提出的模型仍能保持稳定的表现。此外，模型比较结果显示，所提方法表现更优，证实了其在实践中的有效性和适用性。详细的敏感性分析进一步凸显了我们方法的稳健性和可靠性。我们对散光数据的分析有助于比较不同手术方式的疗效，也识别出影响术后恢复的重要因素。最后，本研究的结果提供了有意义的见解，并为量化恢复过程中的不确定性奠定了基础。

我们首先在第2节讨论用于圆形数据的 PN 分布，并在第3节介绍所提出的模型和方法。在第4节讨论与所提出的模型相关的不同可识别性问题。贝叶斯框架下的估计过程

在第5 节提出，并在第6节给出推广。第7节通过模拟实验研究所提出模型的性能。第8节将所提方法应用于术后散光数据的分析，并在第9节给出一些总结性意见。

# 2 预备知识

获得圆周随机变量分布的一种常用方法，是将定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的分布沿径向投影到单位圆上。设随机向量 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\ Y_2)^\top \in \mathbb{R}^2$服从二元正态分布，记为 $\mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$，其均值向量为 $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^2$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$。则单位向量 $\boldsymbol{W}=\frac{\boldsymbol{Y}}{R}$ 服从 PN 分布，记为$\mathcal{PN}_2(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$，其中 $R=\|\boldsymbol{Y}\|$ 和 $\|.\|$ 表示欧几里得范数。注意，$\boldsymbol{W}$可用角坐标 $\theta$ 表示为 $\boldsymbol{W}=(\cos\ \theta,\ \sin\ \theta)^\top$，因此，$Y_1=R\cos\theta$且 $Y_2=R\sin\ \theta$，其中 $\theta\in(-\pi,\ \pi]$。此外，可以得到 $R$和$\theta$的联合密度函数，如下所示

$$f_{R,\theta}(r,\theta|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})=\frac{r}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(r\boldsymbol{w}-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(r\boldsymbol{w}-\boldsymbol{\mu})\right\},\quad r>0,\ -\pi<\theta\leq\pi, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{w}=(\cos\theta,\ \sin\ \theta)^\top$。注意，$R$不可观测，唯一观测到的变量是 $\theta$。将式（ $R$ 中的1积分消去后，可得到 $\theta$的边际密度函数，表示为

$$f_{PN}(\theta|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})=\frac{1}{2\pi}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}A_3^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}A_1\right\}\left[1+\frac{\left(A_2A_3^{-\frac{1}{2}}\right)\Phi\left(A_2A_3^{-\frac{1}{2}}\right)}{\phi\left(A_2A_3^{-\frac{1}{2}}\right)}\right],\ -\pi<\theta\leq\pi, \tag{2}$$

其中，$A_1=\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$、$A_2=\boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{w}$、$A_3=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{w}$和 $\Phi(\cdot)$以及 $\phi(\cdot)$分别表示标准正态分布的累积分布函数和概率密度函数。

$\theta$的平均方向定义为单位向量 $\frac{E(\boldsymbol{w})}{\|E(\boldsymbol{w})\|}$，其中平均合向量长度$\|E(\boldsymbol{W})\|\ \in(0,1]$。请注意，当且仅当 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{\Sigma}=\sigma^2\boldsymbol{I}_2$（其中 $\boldsymbol{I}_2$表示二阶单位矩阵）时，$\|E(\boldsymbol{W})\|=0$，此时 $\theta$ 的分布退化为平均方向未定义的圆周均匀分布。当 $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{I}_2$时，$\theta$的分布为单峰分布，且围绕其平均方向旋转对称；随着 $\|\boldsymbol{\mu}\|$增大，密度的集中度也随之增加。一般而言，当 $\boldsymbol{\Sigma}\neq\boldsymbol{I}_2$ 时，PN 分布可能是不对称的，甚至呈双峰分布（Wang 和 Gelfand，2013年）。

## 2.1 投影正态回归模型

基于 PN 分布的 $\theta_i$ 关于 $x_i$ 的回归模型为

$$\theta_i|\boldsymbol{x}_i\overset{ind}{\sim}\mathcal{PN}_2\left(\left(\boldsymbol{x}_i^\top\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{x}_i^\top\boldsymbol{\beta}_2\right)^\top,\boldsymbol{\Sigma}\right), \tag{3}$$

其中 $\theta_i \in (-\pi,\ \pi]$ 是圆形响应变量，$\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^p$ 是线性协变量向量，$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$，且 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R}^p$ 是回归系数向量。假设 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_2$，Presnell 等人(1998年) 提出了用于估计式(3) 中相关模型参数的最大似然估计方法。在相同设定下，Nuñez-Antonio 等人(2011年) 提出了采用 Gibbs内的Metropolis-Hastings算法的贝叶斯方法。

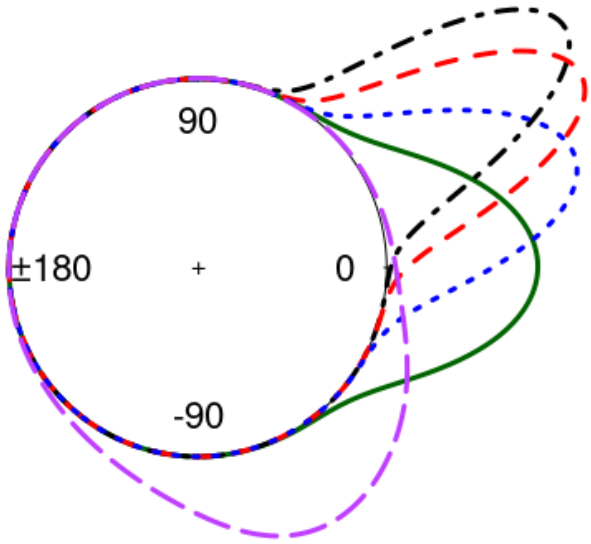


图 3：当系数为 $\beta_{10} = 1$、$\beta_{11} = 3$、$\beta_{20} = -2$和 $\beta_{21} = 2$时，$x = 0$（深兰花紫）、$x = 1$（深绿色）、$x = 2$（蓝色）、$x = 5$（红色）和 $x = 100$（黑色）的$\mathcal{PN}_2((\beta_{10} + \beta_{11}x,\ \beta_{20} + \beta_{21}x)^\top,\ \boldsymbol{I}_2)$圆分布密度图。

为简化符号表示，我们将 $\theta$ 和 $\boldsymbol{x}$ 分别作为 $\theta_i$ 和 $\boldsymbol{x}_i$的一般形式。这里，我们考虑一个线性协变量，例如 $x$，其中 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_2$，且给定 $x$ 时，$\theta$的角均值方向为 $m(x)$ = 双参数反正切函数$(\beta_{20} + \beta_{21}x,\ \beta_{10} + \beta_{11}x)$，其中'双参数反正切函数'（Agarwal等人，2011年，第 9 页）定义为

$$\operatorname{atan2}(S, C) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{S}{C}\right) & \text{if } C > 0, \\ \arctan\left(\frac{S}{C}\right) + \pi \times \operatorname{sgn}(S) & \text{if } C < 0, \\ \frac{\pi}{2} \times \operatorname{sgn}(S) & \text{if } C = 0 \text{ and } S \neq 0, \\ \text{undefined} & \text{if } C = S = 0. \end{cases}$$

请注意，'arctan'表示取值范围为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的标准反正切函数，且对于 $u \in \mathbb{R}$，$\operatorname{sgn}(u) = \mathbb{1}(u \geq 0) - \mathbb{1}(u < 0)$，其中 $\mathbb{1}(.)$ 表示指示函数。于是，$m'(x) = \frac{\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{20}}{\|\boldsymbol{\mu}\ x\ \|^2}$ ( )，其中 $m'(x) = \mathrm{d}\ \mathrm{d}_x m(x)$，且 $\|\boldsymbol{\mu}(x)\| = \sqrt{(\beta_{10} + \beta_{11}x)^2 + (\beta_{20} + \beta_{21}x)^2} (\neq 0)$。因此，集中度越高，角均值方向的偏移越小。这种现象也可以从图 3 中看出。显然，集中度平方的变化率是 $x$ 的线性函数，可表示为 $\mathrm{d}\ \mathrm{d}_x \|\boldsymbol{\mu}(x)\|^2 = 2(\beta_{10}\beta_{11} + \beta_{20}\beta_{21}) + 2(\beta_{11}^2 + \beta_{21}^2)x$. 当 $\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{20} \neq 0$ 时，给定 $x = 0$，$\theta$ 的角均值方向为 $\operatorname{atan2}(\beta_{20}, \beta_{10})$；随着 $x$ 增大，它逐渐趋向于 $\operatorname{atan2}(\beta_{21}, \beta_{11})$。

接下来，我们考虑 $\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{20} = 0$ 的情况。在此情况下，对于 $x \in \mathbb{R}$ 的所有取值，角均值方向为双参数反正切函数$(\beta_{20},\ \beta_{10})$；当满足 $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$ 时，集中度与 $x$ 无关。当 $\beta_{21} > 0$ 时，对于 $x > -\frac{\beta_{20}}{\beta_{21}}$，角均值方向为双参数反正切函数$(\beta_{21},\ \beta_{11})$，它 —

恰好相反（即，双参数反正切函数$(\beta_{21},\ \beta_{11})+\pi$），对于 $x<-\frac{\beta_{20}}{\beta_{21}}$ 而言如此，并且在 $x=-\frac{\beta_{20}}{\beta_{21}}$ 处未定义。对于 $\beta_{21}$ 的负值，$x$ 的两个区域的作用将互换。可以对 $\beta_{11}(\neq 0)$ 作出类似解释。

# 3 零膨胀纵向圆形数据的所提出的模型

本节提出一种两阶段纵向圆形回归混合效应模型，用于分析连续随访期内散光轴的零膨胀纵向测量。个体患者以 $i\in I:=\{1,\ldots,n\}$ 为索引；对于每位患者 $i$，测量时间点以 $j\in J_i:=\{1,\ldots,m_i\}$为索引。我们分别用 $\theta_{Y_{ij}}\in(-\pi,\ \pi]$, $\boldsymbol{x}_{ij}=(1,\ x_{1ij},\ \ldots,\ x_{pij})^\top\in\mathbb{R}^{p+1}$ 和 $\theta_{X_i}\in(-\pi,\ \pi]$表示圆形响应变量、线性协变量向量和圆形协变量。现在，我们考虑潜变量 $Y_{1ij}=r_{Y_{ij}}\cos(\theta_{Y_{ij}})$ 和 $Y_{2ij}=r_{Y_{ij}}\sin(\theta_{Y_{ij}})$，并将纵向圆形回归混合效应（LCRM）模型定义为

$$\begin{aligned}Y_{1ij}&=\beta_{10}+\sum_{k=1}^{p}\beta_{1k}x_{kij}+\beta_{1C}\cos(\theta_{X_i})+\beta_{1S}\sin(\theta_{X_i})+b_{1i}+\varepsilon_{Y_{1ij}},\\ Y_{2ij}&=\beta_{20}+\sum_{k=1}^{p}\beta_{2k}x_{kij}+\beta_{2C}\cos(\theta_{X_i})+\beta_{2S}\sin(\theta_{X_i})+b_{2i}+\varepsilon_{Y_{2ij}}.\end{aligned}\tag{4}$$

在式（4）给出的 LCRM模型中，$\tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}=\left(1,\boldsymbol{x}_{ij}^\top,\cos(\theta_{X_i}),\sin(\theta_{X_i})\right)^\top$ 是固定部分，而$\boldsymbol{b}_i=(b_{1i},b_{2i})^\top$ 表示第 $i$ 个个体特异性随机效应，用于捕捉纵向依赖。我们假设 $\boldsymbol{b}_i$' 均为独立同分布的 $N_2(0,\Sigma_b)$，且误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{Y_{ij}}=(\varepsilon_{Y_{1ij}},\varepsilon_{Y_{2ij}})^\top$均为独立同分布的 $N_2(0,\Sigma_Y)$，对所有 $i\in I$ 和 $j\in J_i$ 均成立。此外，假设 $\boldsymbol{b}_i$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{Y_{ij}}$ 相互独立，对所有 $i\in I$、$j\in J_i$ 均成立。因此，对于给定的 $\boldsymbol{b}_i$，$\theta_{Y_{ij}}$ 的条件分布为

$$\theta_{Y_{ij}}|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{x}_{ij},\theta_{X_i},\boldsymbol{b}_i\overset{ind}{\sim}\mathcal{PN}_2\left((\tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}^\top\boldsymbol{\beta}_1+b_{1i},\tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}^\top\boldsymbol{\beta}_2+b_{2i})^\top,\boldsymbol{\Sigma}_Y\right),\ \text{for all } i\in I, j\in J_i.$$

如前所述，上述 LCRM 模型不适用于处理圆形响应变量和/或圆形协变量中的过多零值。在此背景下，Jha 和 Bhuyan(2021年提出了一种用于处理过多零值的圆形—圆形回归模型，但该模型无法处理纵向响应和线性协变量。为处理零膨胀，我们将潜变量定义为 $\theta^*_{Y_{ij}}$ 和 $\theta^*_{X_i}$，分别为

$$\theta_{Y_{ij}}=\begin{cases}0 & \text{if } \theta^*_{Y_{ij}}\in(-\delta_Y,\delta_Y),\\ \theta^*_{Y_{ij}} & \text{otherwise,}\end{cases}\tag{5}$$

and

$$\theta_{X_i}=\begin{cases}0 & \text{if } \theta^*_{X_i}\in(-\delta_X,\delta_X),\\ \theta^*_{X_i} & \text{otherwise,}\end{cases}\tag{6}$$

，其中 $\delta_Y$、$\delta_X \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 为已知常数。为了对零膨胀圆形协变量建模，我们引入工具变量（Cameron and Trivedi，2005，第4章，第95页），这些变量可能不会直接影响响应变量 $\theta_{Y_{ij}}$，但只能通过协变量 $\theta_{X_i}$ 引起变化。我们将线性工具变量向量记为 $\boldsymbol{v}_i = (1, v_{1i}, \ldots\ldots, v_{qi})^\top \in \mathbb{R}^{q+1}$，将圆形工具变量记为 $\theta_{V_i} \in (-\pi, \pi]$。基于上述潜变量，我们提出两阶段 LCRM 模型如下：

$$
\begin{aligned}
\text{Stage-I:} \quad Y_{1ij}^* &= \beta_{10} + \sum_{k=1}^{p} \beta_{1k} x_{kij} + \beta_{1C} \cos(\theta_{X_i}^*) + \beta_{1S} \sin(\theta_{X_i}^*) + b_{1i} + \varepsilon_{Y_{1ij}}, \\
Y_{2ij}^* &= \beta_{20} + \sum_{k=1}^{p} \beta_{2k} x_{kij} + \beta_{2C} \cos(\theta_{X_i}^*) + \beta_{2S} \sin(\theta_{X_i}^*) + b_{2i} + \varepsilon_{Y_{2ij}},
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Stage-II:} \quad X_{1i}^* &= \alpha_{10} + \sum_{k=1}^{q} \alpha_{1k} v_{ki} + \alpha_{1C} \cos(\theta_{V_i}) + \alpha_{1S} \sin(\theta_{V_i}) + \varepsilon_{X_{1i}}, \\
X_{2i}^* &= \alpha_{20} + \sum_{k=1}^{q} \alpha_{2k} v_{ki} + \alpha_{2C} \cos(\theta_{V_i}) + \alpha_{2S} \sin(\theta_{V_i}) + \varepsilon_{X_{2i}},
\end{aligned} \tag{8}
$$

其中

$$
\begin{pmatrix} Y_{1ij}^* \\ Y_{2ij}^* \end{pmatrix} = r_{Y_{ij}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{Y_{ij}}^*) \\ \sin(\theta_{Y_{ij}}^*) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} X_{1i}^* \\ X_{2i}^* \end{pmatrix} = r_{X_i} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{X_i}^*) \\ \sin(\theta_{X_i}^*) \end{pmatrix},
$$

对于 $i \in I$，$j \in J_i$. 的分布假设 $\boldsymbol{b}_i$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{Y_{ij}}$ 与之前考虑的相同。此外，我们假设 $\boldsymbol{\varepsilon}_{X_i} = (\varepsilon_{X_{1i}}, \varepsilon_{X_{2i}})^\top \overset{iid}{\sim}$ 服从$\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\Sigma}_X$)N分布，且与 $\boldsymbol{\varepsilon}_{Y_{ij}}$ 和 $\boldsymbol{b}_i$ 相互独立，对所有 $i \in I$，$j \in J_i$ 均成立。值得注意的是，若 $\delta_Y = 0$，上述模型的第一阶段可简化为式（4）给出的 LCRM模型。同样，当 $\delta_X = 0$时，第二阶段模型可简化为式（3）给出的 PN 回归模型。

# 4 可识别性问题

Presnell 等人（1998年）讨论了式（2）中给出的 PN 分布的可识别性问题，并提出通过考虑 $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_2$ 来约束该分布。遵循同样的提议，我们在第3节提出的两阶段 LCRM 模型中取 $\boldsymbol{\Sigma}_X = \boldsymbol{\Sigma}_Y = \boldsymbol{I}_2$。然而，由于随机效应分布的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_b$ 的结构未受到约束，这些限制不足以确保式（7）中给出的 LCRM模型具有可识别性。注意，在给定 $\boldsymbol{b}_i$ 的条件下，$\boldsymbol{Y}_{ij} = (Y_{1ij}, Y_{2ij})^\top$ 的条件分布为 $\mathrm{N}_2\left(\mathrm{B}^\top \tilde{\boldsymbol{x}}_{ij} + \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{I}_2\right)$，而 $\boldsymbol{Y}_{ij}$ 的边缘分布为 $\mathrm{N}_2\left(\mathrm{B}^\top \tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}, \boldsymbol{\Gamma}_b\right)$，其中 $\mathrm{B}^\top \tilde{\boldsymbol{x}}_{ij} = \left(\tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}_1, \tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}_2\right)^\top$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_b = \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{\Sigma}_b$。因此，圆形响应 $\theta_{Y_{ij}} \sim$PN $_2\left(\mathrm{B}^\top \tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}, \boldsymbol{\Gamma}_b\right)$。对于任意 $c > 1$，考虑如下恒等式：

$$
\begin{aligned}
&f_{PN}(\theta_{Y_{ij}}|c\mathbf{B}^\top\tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}, c^2\boldsymbol{\Gamma}_b)\\
&= \frac{1}{2\pi}|c^2\boldsymbol{\Gamma}_b|^{-\frac{1}{2}}A_{3ij}(c)^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}A_{1ij}(c)\right\}\left[1+\frac{\left(A_{2ij}(c)A_{3ij}(c)^{-\frac{1}{2}}\right)\ \Phi\left(A_{2ij}(c)A_{3ij}(c)^{-\frac{1}{2}}\right)}{\phi\left(A_{2ij}(c)A_{3ij}(c)^{-\frac{1}{2}}\right)}\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}|\boldsymbol{\Gamma}_b|^{-\frac{1}{2}}A_{3ij}^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}A_{1ij}\right\}\left[1+\frac{\left(A_{2ij}A_{3ij}^{-\frac{1}{2}}\right)\ \Phi\left(A_{2ij}A_{3ij}^{-\frac{1}{2}}\right)}{\phi\left(A_{2ij}A_{3ij}^{-\frac{1}{2}}\right)}\right]\\
&= f_{PN}(\theta_{Y_{ij}}|\mathbf{B}^\top\tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}, \boldsymbol{\Gamma}_b),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

其中，$A_{1ij}(c) = (c\mathbf{B}^\top\tilde{\boldsymbol{x}}_{ij})^\top(c^2\boldsymbol{\Gamma}_b)^{-1}(c\mathbf{B}^\top\tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}) = A_{1ij}$，$A_{2ij}(c) = (c\mathbf{B}^\top\tilde{\boldsymbol{x}}_{ij})^\top(c^2\boldsymbol{\Gamma}_b)^{-1}\boldsymbol{w}_{ij} = c^{-1}A_{2ij}$，以及 $A_{3ij}(c) = \boldsymbol{w}_{ij}^\top(c^2\boldsymbol{\Gamma}_b)^{-1}\boldsymbol{w}_{ij} = c^{-2}A_{3ij}$。因此，如式（9）所示，即使对于 $c > 1$，当 $(\mathbf{B}\ \boldsymbol{\Gamma}_b) \neq (c\mathbf{B}\ c^2\boldsymbol{\Gamma}_b)$ 时，$\theta_{Y_{ij}}$ 的边际密度仍保持不变。因此，所提出的模型不具有可识别性。据我们所知，文献中尚未讨论 LCRM模型的可识别性问题。为解决这一问题，我们在以下定理中给出了可识别性的一个充分条件。

**定理1**。若 $\theta_{Y_{ij}} \sim \mathcal{PN}_2(\boldsymbol{\mu}_{Y_{ij}},\ \boldsymbol{\Gamma}_b)$，其中 $\boldsymbol{\mu}_{Y_{ij}} = \boldsymbol{B}^\top\tilde{\boldsymbol{x}}_{ij}$ 且 $\boldsymbol{\Gamma}_b = \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{\Sigma}_b$，则由（4）给出的模型在随机效应 $\boldsymbol{b}_i$ 的广义方差等于 *1* 时可识别（即$|\boldsymbol{\Sigma}_b| = 1$）。

证明。定理的详细证明见补充文件的 A 节 . □

请注意，协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_b$ 的对角元素分别体现了 $Y_{1ij}$ 和 $Y_{2ij}$内部的纵向依赖，而 $\boldsymbol{\Sigma}_b$ 的非对角元素则捕捉了 $Y_{1ij}$ 与 $Y_{2ij}$之间的依赖。由于 $r_{Yij}$ 不可观测，上述方法会导致模型中存在冗余。因此，对随机效应分布的广义方差施加限制，可使 LCRM模型具有可识别性。

# 5 推断方法

我们提出一种贝叶斯方法，使用吉布斯采样器估计式（7）和（8）中涉及的模型参数。由于似然函数在解析上难以处理，我们采用数据增广来处理完全数据似然函数。这种方法有助于构造全条件分布并执行吉布斯抽样算法。

## 5.1 贝叶斯估计

分别将圆形响应变量和圆形协变量的潜在半径记为 $\Psi_{r_Y} = \{r_{Y_{ij}} : i \in I, j \in J_i\}$和$\Psi_{r_X} = \{r_{X_i} : i \in I\}$。此外，将式（5）和式（6）中提到的圆形潜变量分别记为$\Psi_{\theta_Y} = \{\theta^*_{Y_{ij}} : i \in I, j \in J_i\}$和$\Psi_{\theta_X} = \{\theta^*_{X_i} : i \in I\}$，将式（7）中描述的随机效应记为 $\Psi_b = \{\boldsymbol{b}_i : i \in I\}$。进一步地，将潜在向量记为 $\Psi_Y = \{\boldsymbol{Y}^*_{ij} : i \in I, j \in J_i\}$和 $\Psi_X = \{\boldsymbol{X}^*_i : i \in I\}$，并将观测数据记为

$\mathcal{D} = \{(\theta_{Y_{ij}}, \boldsymbol{x}_{ij}, \theta_{X_i}, \boldsymbol{v}_i, \theta_{V_i})\colon \ i \in I, j \in J_i\}$。此外，定义 $\Psi_{\mathcal{D}} = \{\Psi_{r_Y}, \Psi_{\theta_Y}, \Psi_{r_X}, \Psi_{\theta_X}, \Psi_b, \mathcal{D}\}$ 和 $\Psi^*_{\mathcal{D}} = \{\Psi_Y, \Psi_X, \Psi_b, \mathcal{D}\}$。

对于 $k = 1, 2$，我们分别考虑 $\boldsymbol{\beta}_k$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 的共轭先验密度：$\pi(\boldsymbol{\beta}_k|\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}_k}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_k}) \equiv \mathrm{N}_{p+3}(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}_k}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_k})$，以及 $\pi(\boldsymbol{\alpha}_k|\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_k}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_k}) \equiv \mathrm{N}_{q+3}(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_k}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_k})$。为确保模型参数的可识别性以及相关后验分布的共轭性，我们将 $\boldsymbol{\Sigma}_b = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ 重新参数化为 $s_1 = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ 和 $s_2 = \sigma_2^2(1-\rho^2)$。在此设定下，我们考虑正态-伽马先验：$\pi(s_1|\tau, \lambda_0) \equiv \mathrm{N}\left(0, \frac{1}{\tau\lambda_0}\right)$，且 $\pi(\tau|\nu_0, \kappa_0) \equiv \mathrm{G}(\nu_0, \kappa_0)$，其中 $\tau = 1/s_2$，而 $\lambda_0$、$\nu_0$ 和 $\kappa_0$ 是已知的超参数。我们将未知参数集合记为 $\Delta = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, s_1, \tau, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$，而 $\Delta(-\chi)$ 表示除未知实体 $\chi$ 之外的整个集合 $\Delta$。式 (7) 和 (8) 中涉及的未知模型参数 $\Delta$、随机效应 $\boldsymbol{b}_i$ 以及潜变量 $\Psi_Y$ 和 $\Psi_X$ 的联合后验密度可写为

$$\pi(\Delta, \Psi_b, \Psi_Y, \Psi_X|\mathcal{D}) \propto \pi(\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}_1}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_1})\ \pi(\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}_2}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_2})\ \pi(s_1|\tau, \lambda_0)\ \pi(\tau|\nu_0, \kappa_0)\ \pi(\boldsymbol{\alpha}_1|\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_1}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_1})$$
$$\times \pi(\boldsymbol{\alpha}_2|\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_2}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_2}) \times \prod_{i=1}^{n}\left[f_N\left(\boldsymbol{X}_i^*|\boldsymbol{\mu}_{X_i}, \boldsymbol{I}_2\right) \times f_N\left(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_b\right) \times \left\{\prod_{j=1}^{m_i} f_N\left(\boldsymbol{Y}_{ij}^*|\boldsymbol{\mu}_{Y_{ij}}^* + \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{I}_2\right)\right\}\right],$$

其中，$\boldsymbol{\mu}_{X_i} = (\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^\top\boldsymbol{\alpha}_1, \widetilde{\boldsymbol{v}}_i^\top\boldsymbol{\alpha}_2)^\top$，$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i = (1, \boldsymbol{v}_i^\top, \cos(\theta_{V_i}), \sin(\theta_{V_i}))^\top$，$\boldsymbol{\mu}_{Y_{ij}}^* = (\widetilde{\boldsymbol{x}}_{ij}^{*\top}\boldsymbol{\beta}_1, \widetilde{\boldsymbol{x}}_{ij}^{*\top}\boldsymbol{\beta}_2)^\top$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{x}}_{ij}^* = (1, \boldsymbol{x}_{ij}^\top, \cos(\theta_{X_i}^*), \sin(\theta_{X_i}^*))^\top$，而 $f_N(.|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 表示参数为 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的二元正态密度。或者，可以考虑潜变量 $(\Psi_{r_Y}, \Psi_{\theta_Y}, \Psi_{r_X}, \Psi_{\theta_X})$，而不是 $\Psi_Y$ 和 $\Psi_X$，并得到如下联合后验密度

$$\pi(\Delta, \Psi_b, \Psi_{r_Y}, \Psi_{\theta_Y}, \Psi_{r_X}, \Psi_{\theta_X}|\mathcal{D}) \propto \pi(\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}_1}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_1})\ \pi(\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}_2}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}_2})\ \pi(s_1|\tau, \lambda_0)\ \pi(\tau|\nu_0, \kappa_0)$$
$$\times \pi(\boldsymbol{\alpha}_1|\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_1}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_1})\ \pi(\boldsymbol{\alpha}_2|\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_2}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_2}) \times \prod_{i=1}^{n}\left[\left\{\left[f_R(r_{X_i}|\theta_{X_i}, \boldsymbol{\mu}_{X_i}) \times f_{PN}(\theta_{X_i}|\boldsymbol{\mu}_{X_i}, \boldsymbol{I}_2)\right]^{\mathbb{1}(\theta_{X_i}\neq 0)}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \left[f_R(r_{X_i}|\theta_{X_i}^*, \boldsymbol{\mu}_{X_i}) \times C_{X_i} \times f_{TPN}(\theta_{X_i}^*|\boldsymbol{\mu}_{X_i}, \boldsymbol{I}_2; -\delta_X, \delta_X)\right]^{\mathbb{1}(\theta_{X_i}=0)}\right\}\right]$$
$$\times \prod_{i=1}^{n}\left[f_N\left(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_b\right) \times \prod_{j=1}^{m_i}\left\{\left[f_R(r_{Y_{ij}}|\theta_{Y_{ij}}, \boldsymbol{\mu}_{Y_{ij}}^* + \boldsymbol{b}_i) \times f_{PN}(\theta_{Y_{ij}}|\boldsymbol{\mu}_{Y_{ij}}^* + \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{I}_2)\right]^{\mathbb{1}(\theta_{Y_{ij}}\neq 0)}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \left[f_R(r_{Y_{ij}}|\theta_{Y_{ij}}^*, \boldsymbol{\mu}_{Y_{ij}}^* + \boldsymbol{b}_i) \times C_{Y_{ij}} \times f_{TPN}(\theta_{Y_{ij}}^*|\boldsymbol{\mu}_{Y_{ij}}^* + \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{I}_2; -\delta_Y, \delta_Y)\right]^{\mathbb{1}(\theta_{Y_{ij}}=0)}\right\}\right],$$

其中 $C_{Y_{ij}} = \int_{-\delta_Y}^{\delta_Y} f_{PN}(\theta_{Y_{ij}}^*|\boldsymbol{\mu}_{Y_{ij}}^* + \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{I}_2)d\theta_{Y_{ij}}^*$ 和 $C_{X_i} = \int_{-\delta_X}^{\delta_X} f_{PN}(\theta_{X_i}^*|\boldsymbol{\mu}_{X_i}, \boldsymbol{I}_2)d\theta_{X_i}^*$。这里，截断投影正态（TPN）分布的密度记为 $f_{TPN}(\theta^*|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I}_2;\ -\delta, \delta) = C^{-1}f_{PN}(\theta^*|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I}_2)\mathbb{1}(\theta^* \in (-\delta, \delta))$，其中 $C = \int_{-\delta}^{\delta} f_{PN}(\theta^*|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I}_2)d\theta^*$。现在，根据上述联合后验密度，我们得到潜变量 $\theta_{Y_{ij}}^*$、$r_{Y_{ij}}$、$\theta_{X_i}^*$ 和 $r_{X_i}$（对所有 $i \in I$、$j \in J_i$）、随机效应 $\boldsymbol{b}_i$（对每个 $i \in I$），以及式（7）和（8）中涉及的模型参数的全条件密度。这些条件密度具有以下形式：

$$\pi(\theta^*_{Y_{ij}}|\Delta,\Psi_{\mathcal{D}}(-\Psi_{\theta_Y}))\equiv\begin{cases}\mathbb{1}(\theta^*_{Y_{ij}}=\theta_{Y_{ij}}) & \text{if } \theta_{Y_{ij}}\neq 0,\\ f_{TPN}(\theta^*_{Y_{ij}}|\boldsymbol{\mu}^*_{Y_{ij}}+\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{I}_2;-\delta_Y,\delta_Y) & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{10}$$

$$\pi(r_{Y_{ij}}|\Delta,\Psi_{\mathcal{D}}(-\Psi_{r_Y}))\equiv K_Y^{-1}r_{Y_{ij}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(r_{Y_{ij}}-a^*_{Y_{ij}}\right)^2\right\}\mathbb{1}(r_{Y_{ij}}\in(0,\infty)), \tag{11}$$

$$\pi(\boldsymbol{\beta}_k|\Delta(-\boldsymbol{\beta}_k),\Psi^*_{\mathcal{D}})\equiv\mathcal{N}_{p+3}\left(\mathbf{G}_k^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\widetilde{\boldsymbol{x}}^*_{ij}(Y^*_{kij}-b_{ki})+\boldsymbol{\Sigma}^{-1}_{\beta_k}\boldsymbol{\mu}_{\beta_k}\right\},\mathbf{G}_k^{-1}\right), \tag{12}$$

$$\pi(\boldsymbol{b}_i|\Delta,\Psi^*_{\mathcal{D}}(-\Psi_b))\equiv\mathcal{N}_2\left(\boldsymbol{S}_b^{-1}\sum_{j=1}^{m_i}\left(\boldsymbol{Y}^*_{ij}-\mathbf{B}^\top\widetilde{\boldsymbol{x}}^*_{ij}\right),\boldsymbol{S}_b^{-1}\right),\ \text{for each } i\in I,, \tag{13}$$

$$\pi(s_1|\Delta(-s_1),\Psi^*_{\mathcal{D}})\equiv\mathcal{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^n b_{1i}b_{2i}}{\lambda_0+\sum_{i=1}^n b_{1i}^2},\frac{1}{\tau(\lambda_0+\sum_{i=1}^n b_{1i}^2)}\right), \tag{14}$$

$$\pi(\tau|\Delta(-\tau),\Psi^*_{\mathcal{D}})\equiv\mathcal{G}\left(\nu_0+\frac{n+1}{2},\kappa_0+\frac{\sum_{i=1}^n(b_{2i}-s_1b_{1i})^2+\lambda_0s_1^2}{2}\right), \tag{15}$$

$$\pi(\theta^*_{X_i}|\Delta,\Psi_{\mathcal{D}}(-\Psi_{\theta_X}))\equiv\begin{cases}\mathbb{1}(\theta^*_{X_i}=\theta_{X_i}) & \text{if } \theta_{X_i}\neq 0,\\ f_{TPN}(\theta^*_{X_i}|\boldsymbol{\mu}_{X_i},\boldsymbol{I}_2;-\delta_X,\delta_X) & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{16}$$

$$\pi(r_{X_i}|\Delta,\Psi_{\mathcal{D}}(-\Psi_{r_X}))\equiv K_X^{-1}r_{X_i}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(r_{X_i}-a^*_{X_i}\right)^2\right\}\mathbb{1}(r_{X_i}\in(0,\infty)), \tag{17}$$

$$\pi(\boldsymbol{\alpha}_k|\Delta(-\boldsymbol{\alpha}_k),\Psi^*_{\mathcal{D}})\equiv\mathcal{N}_{q+3}\left(\mathbf{H}_k^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{v}}_iX^*_{ki}+\boldsymbol{\Sigma}^{-1}_{\boldsymbol{\alpha}_k}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_k}\right\},\mathbf{H}_k^{-1}\right), \tag{18}$$

对于 $k=1$，2，其中 $K_Y=\sqrt{2\pi}[\phi(a^*_{Y_{ij}})+a^*_{Y_{ij}}\Phi(a^*_{Y_{ij}})]$、$a^*_{Y_{ij}}=\boldsymbol{w}^{*\top}_{Y_{ij}}(\boldsymbol{\mu}^*_{Y_{ij}}+\boldsymbol{b}_i)$、$\boldsymbol{w}^*_{Y_{ij}}=(\cos(\theta^*_{Y_{ij}}),\sin(\theta^*_{Y_{ij}}))^\top$、$\mathrm{G}_k=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{m_i}\widetilde{\boldsymbol{x}}^*_{ij}\widetilde{\boldsymbol{x}}^{*\top}_{ij}+\boldsymbol{\Sigma}^{-1}_{\beta_k}$、$\boldsymbol{S}_b=(m_i\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{\Sigma}_b^{-1})$、$K_X=\sqrt{2\pi}[\phi(a^*_{X_i})+a^*_{X_i}\Phi(a^*_{X_i})]$、$a^*_{X_i}=\boldsymbol{w}^{*\top}_{X_i}\boldsymbol{\mu}_{X_i}$、$\boldsymbol{w}^*_{X_i}=(\cos(\theta^*_{X_i}),\sin(\theta^*_{X_i}))^\top$ 和 $\mathrm{H}_k=\sum_{i=1}^n\widetilde{\boldsymbol{v}}_i\widetilde{\boldsymbol{v}}_i^\top+\boldsymbol{\Sigma}^{-1}_{\boldsymbol{\alpha}_k}$。从式（14）和（15）给出的相应全条件密度中抽取 $s_1$和 $s_2(=1/\tau)$ 的后验样本后，我们得到 $\rho$和 $\sigma_2^2$的后验样本。请注意，$\sigma_1^2$ 的条件后验分布样本是在可识别性约束 $\sigma_1^2=1/(\sigma_2^2(1-\rho^2))$ 下生成的。相关模型参数和随机效应的全条件密度推导见补充文件 B 节。下文将讨论式（10）、（11）、（16）和（17）中提到的潜变量生成抽样算法。

## 5.2 抽样过程

可以考虑使用接受-拒绝算法，从 $\theta^*_{Y_{ij}}$ 在 $\theta_{Y_{ij}}=0$ 时的条件分布中生成样本。在这种情况下，可以从 $f_{PN}(\theta^*_{Y_{ij}}|\boldsymbol{\mu}^*_{Y_{ij}}+\boldsymbol{b}_i,\ \boldsymbol{I}_2)$ 抽取观测值，然后接受落在 $(-\delta_Y,\ \delta_Y)$ 内的观测值。同样，当 $\theta_{X_i}=0$ 时，可以抽取 $\theta^*_{X_i}$

来自区间 $(-\delta_X,\ \delta_X)$ 的样本。然而，当 $\delta_Y$ 或 $\delta_X$ 的值较小时，接受率非常低。为解决这一问题，我们提出一种通用算法，用于从 $f_{TPN}(\theta^*|\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{I}_2;\ \delta_1,\ \delta_2)$ 生成样本，其中 $-\pi < \delta_1 < \delta_2 \leq \pi$。请注意，对于我们的应用，$\delta_1 = -\delta_2$。我们将截断正态密度记为 $f_{TN}(.|\mu,\ \sigma^2;\ a_1,\ a_2)$，其参数为 $\mu$ 和 $\sigma^2$，截断范围为 $(a_1,\ a_2)$。此外，我们定义 $I(k_1,\ k_2) := \int_{k_1}^{k_2} f_{PN}(\theta^* \mid \boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{I}_2)d\theta^*$，其中 $-\pi < k_1 \leq k_2 \leq \pi$。下面给出所提出的算法。

**从截断投影正态分布中抽样的算法**

抽样 $z_1 \sim f_{TN}(z_1 \mid \mu_1,\ 1;\ 0,\ \infty)$;
**如果** $\delta_1,\ \delta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, **则**
  抽样 $z_2 \mid z_1 \sim f_{TN}(z_2 \mid \mu_2,\ 1;\ z_1$正切 $\delta_1,\ z_1$正切 $\delta_2)$;
  计算 $\theta^* =$ 双参数反正切函数$(z_2,\ z_1)$;
**否则，如果** $\delta_1,\ \delta_2 \in (\frac{\pi}{2},\ \pi]$, **则**
  抽样 $z_2 \mid z_1 \sim f_{TN}(z_2 \mid \mu_2,\ 1;\ z_1 \tan\ \delta_1,\ z_1 \tan\ \delta_2)$;
  计算 $\theta^* =$ 双参数反正切函数$(z_2,\ z_1) + \pi$;
**否则，如果** $\delta_1,\ \delta_2 \in (-\pi,\ -\frac{\pi}{2})$, **则**
  抽样 $z_2 \mid z_1 \sim f_{TN}(z_2 \mid \mu_2,\ 1;\ z_1 \tan\ \delta_1,\ z_1 \tan\ \delta_2)$;
  计算 $\theta^* =$ 双参数反正切函数$(z_2,\ z_1) - \pi$;
**否则，如果** $\delta_1 \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 且 $\delta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, **则**
  抽样 $H_1 \sim$ 伯努利分布$(p_1)$，其中 $p_1 = I(\delta_1,\ -\frac{\pi}{2})/I(\delta_1,\ \delta_2)$;
  抽样 $z_2 \mid z_1,\ H_1 \sim p_1 f_{TN}(z_2 \mid \mu_2,\ 1;\ z_1$正切 $\delta_1,\ \infty) + (1-p_1) f_{TN}(z_2 \mid \mu_2,\ 1;\ -\infty,\ z_1$正切 $\delta_2)$;
  计算 $\theta^* =$ (双参数反正切函数$(z_2,\ z_1) - \pi)\ 1(H_1 = 1) +$ 双参数反正切函数$(z_2,\ z_1) 1(H_1 = 0)$;
**否则，如果** $\delta_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 且 $\delta_2 \in (\frac{\pi}{2},\ \pi]$, **则**
  抽样 $H_2 \sim$ 伯努利分布$(p_2)$，其中 $p_2 = I(\delta_1,\ \frac{\pi}{2})/I(\delta_1,\ \delta_2)$;
  抽样 $z_2 \mid z_1,\ H_2 \sim p_2 f_{TN}(z_2 \mid \mu_2,\ 1;\ z_1 \tan\ \delta_1,\ \infty) + (1-p_2) f_{TN}(z_2 \mid \mu_2,\ 1;\ -\infty,\ z_1 \tan\ \delta_2)$;
  计算 $\theta^* =$ 双参数反正切函数$(z_2,\ z_1) 1(H_2 = 1) +$ (双参数反正切函数$(z_2,\ z_1) + \pi)\ 1(H_2 = 0)$;
**否则如果** $\delta_1 \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 且 $\delta_2 \in (\frac{\pi}{2},\ \pi]$, **则**
  抽样 $(H_1,\ H_2) \sim$三项分布$(1,\ p_1,\ p_2)$，其中 $p_1 = I(\delta_1,\ -\frac{\pi}{2})/I(\delta_1,\ \delta_2)\ p_2 = I(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})/I(\delta_1,\ \delta_2)$;
  抽样 $z_2 \mid z_1,\ H_1,\ H_2 \sim p_1 f_{TN}(z_2 \mid \mu_2,\ 1;\ z_1 \tan\ \delta_1,\ \infty) + p_2 \phi(z_2 - \mu_2)$
  $+ (1 - p_1 - p_2) f_{TN}(z_2 \mid \mu_2,\ 1;\ -\infty,\ z_1 \tan\ \delta_2)$;
  计算 $\theta^* =$ (双参数反正切函数$(z_2,\ z_1) - \pi)\ 1(H_1 = 1,\ H_2 = 0) +$ 双参数反正切函数$(z_2,\ z_1) 1(H_1 = 0,\ H_2 = 1)$
  $+$ (双参数反正切函数$(z_2,\ z_1) + \pi)\ 1(H_1 = 0,\ H_2 = 0)$;
**结束 if**

为生成潜变量$r_{Y_{ij}}$ 和 $r_{X_i}$ 使用(11)以及(17)，我们分别采用 Hernandez-Stumpfhauser 等人(2017年)提出的抽样算法，如下所示。

**生成 $R$ 的抽样算法**

取一个初始值 $R = r_0$；抽取 $t_0 \sim \mathcal{U}\left(0, \exp\left\{-\frac{1}{2}(r_0 - \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\mu})^2\right\}\right)$；计算 $\zeta_1 = \max\left\{0, \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\mu} - \sqrt{-2\log(t_0)}\right\}$ 和 $\zeta_2 = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\mu} + \sqrt{-2\log(t_0)}$（使用 $t_0$）；独立抽取 $\kappa \sim \mathcal{U}(0,\ 1)$；更新 $r = \sqrt{(\zeta_2^2 - \zeta_1^2)\kappa + \zeta_1^2}$（使用逆累积分布函数方法）

# 6 推广

在第 3节中，我们认为零值观测是由于在指定区间内发生删失所致。然而，在一些实际情形中，零值的出现可能有两个原因：随机性以及删失。为建模上述现象，可以对由（7）和（8）给出的所提出的模型进行推广。我们将潜在指示变量记为 $Z_{Y_{ij}}$ ($Z_{X_i}$)，当零值由随机性导致时其取值为 1，否则为 0。于是，我们可以将$\theta_{Y_{ij}}$ 和 $\theta_{X_i}$ 表示如下：

$$\theta_{Y_{ij}} = Z_{Y_{ij}}\delta_0^Y + (1 - Z_{Y_{ij}})\ \theta^*_{Y_{ij}}\mathbb{1}(\theta^*_{Y_{ij}} \notin (-\delta_Y, \delta_Y)),$$
$$\theta_{X_i} = Z_{X_i}\delta_0^X + (1 - Z_{X_i})\ \theta^*_{X_i}\mathbb{1}(\theta^*_{X_i} \notin (-\delta_X, \delta_X)),$$

其中， $\delta_0^Y$($\delta_0^X$)表示一个退化分布，其概率质量函数在$\theta_{Y_{ij}} = 0$ ($\theta_{X_i} = 0$)处取值为1，在其他位置取值为0。请注意，潜变量 $\theta^*_{Y_{ij}}$ 和 $\theta^*_{X_i}$ 分别与式（5）和式（6）中给出的相同。这里，$Z_{Y_{ij}}$ 和 $Z_{X_i}$ 是伯努利随机变量，其参数分别为 $\eta_Y$ 和 $\eta_X$。如第5节.1所述，对于上述模型，我们考虑对 $\boldsymbol{\beta}_1$、 $\boldsymbol{\beta}_2$、 $s_1$、 $\tau$、 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 采用相同的一组共轭先验。此外，我们还考虑对 $\eta_Y$和 $\eta_X$ 分别采用共轭先验 $\pi(\eta_Y|c_Y, d_Y)$ $\equiv$Beta($c_Y, d_Y$)和 $\pi(\eta_X|c_X, d_X)$ $\equiv$Beta($c_X, d_X$)，其中 $c_Y$、 $d_Y$、 $c_X$和 $d_X$是已知的超参数。上述模型所涉及的参数和潜变量的全条件密度，以及吉布斯采样器，均见补充文件C节。

# 7 模拟

我们通过大量模拟研究所提方法的性能。为此，我们考虑不同的参数取值，并针对三种不同的样本量生成数据，分别为 $n = 50$，100 和 500。在第一阶段，考虑一个线性协变量 $x_{1ij}$ 和一个圆形协变量$\theta_{X_i}$ ，并为每位个体生成三次重复测量。在第二阶段，我们使用一个线性工具变量 $v_{1i}$。模拟数据根据两阶段框架下零膨胀 LCRM 模型的以下设定生成：

$$\begin{pmatrix} Y^*_{1ij} \\ Y^*_{2ij} \end{pmatrix} \Big| \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, x_{1ij}, \theta^*_{X_i}, \boldsymbol{b}_i \sim \mathcal{N}_2 \left( \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}^{*\top}_{ij}\boldsymbol{\beta}_1 + b_{1i} \\ \tilde{\boldsymbol{x}}^{*\top}_{ij}\boldsymbol{\beta}_2 + b_{2i} \end{pmatrix}, \boldsymbol{I}_2 \right), \quad \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \end{pmatrix} \Big| \boldsymbol{\Sigma}_b \sim \mathcal{N}_2 \left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_b\right),$$
$$\text{and} \quad \begin{pmatrix} X^*_{1i} \\ X^*_{2i} \end{pmatrix} \Big| \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, v_{1i} \sim \mathcal{N}_2 \left( \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}^{\top}_i\boldsymbol{\alpha}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{v}}^{\top}_i\boldsymbol{\alpha}_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{I}_2 \right), \ i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, 3,$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{1C}, \beta_{1S})^\top$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{2C}, \beta_{2S})^\top$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (\alpha_{10}, \alpha_{11})^\top$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (\alpha_{20}, \alpha_{21})^\top$.

对于所有研究，我们生成 $x_{1ij}$和 $v_{1i}$，它们分别服从$\mathcal{N}(0, 1)$ 和$\mathcal{N}(2, 1)$。我们在所有研究中固定 $\delta_Y = \delta_X = 0.035$ 弧度（2°），并选择若干组参数值，使纵向圆形响应和圆形协变量中的零值近似百分比分别为 (10%, 10%)、(35%, 30%)、(15%, 0%)、(0%, 15%) 和 (0%, 0%)。我们考虑第5.1 节讨论的一组共轭先验，其中 $\boldsymbol{\mu}_{\beta_1} = \boldsymbol{\mu}_{\beta_2} = \boldsymbol{0}$,

表 1: 在 $\theta_Y$ 和 $\theta_X$中均有 *10%* 零值时，选择-*I* 的模拟研究

| $n = 50$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.3$ | 8.639 | 0.948 | 0.041 | 0.92 | $\beta_{20} =$-1.3 | -1.310 | 0.448 | 0.008 | 0.95 |
| $\beta_{11} = 4.6$ | 4.784 | 0.611 | 0.040 | 0.94 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.842 | 0.172 | 0.053 | 0.93 |
| $\beta_{1C} = 6.5$ | 6.796 | 0.828 | 0.046 | 0.92 | $\beta_{2C} = 2.1$ | 2.167 | 0.500 | 0.032 | 0.95 |
| $\beta_{1S} =$-5.1 | -5.229 | 1.207 | 0.025 | 0.97 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.449 | 0.898 | 0.020 | 0.95 |
| $\rho = 0.5$ | 0.393 | 0.466 | -0.215 | 0.94 | $\sigma_2^2 = 2$ | 2.535 | 1.218 | 0.268 | 0.98 |
| $\alpha_{10} =$ -6.4 | -6.757 | 1.232 | 0.056 | 0.94 | $\alpha_{20} = 1.8$ | 1.871 | 0.541 | 0.040 | 0.95 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 4.750 | 0.759 | 0.055 | 0.94 | $\alpha_{21} =$ -0.8 | -0.836 | 0.238 | 0.045 | 0.93 |
| $n = 100$ | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.3$ | 8.457 | 0.621 | 0.019 | 0.94 | $\beta_{20} =$-1.3 | -1.336 | 0.303 | 0.028 | 0.96 |
| $\beta_{11} = 4.6$ | 4.686 | 0.412 | 0.019 | 0.94 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.816 | 0.119 | 0.020 | 0.93 |
| $\beta_{1C} = 6.5$ | 6.648 | 0.531 | 0.023 | 0.93 | $\beta_{2C} = 2.1$ | 2.160 | 0.339 | 0.028 | 0.95 |
| $\beta_{1S} =$-5.1 | -5.140 | 0.784 | 0.008 | 0.94 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.478 | 0.614 | 0.032 | 0.94 |
| $\rho = 0.5$ | 0.467 | 0.329 | -0.066 | 0.94 | $\sigma_2^2 = 2$ | 2.272 | 0.758 | 0.136 | 0.96 |
| $\alpha_{10} =$ -6.4 | -6.534 | 0.845 | 0.021 | 0.94 | $\alpha_{20} = 1.8$ | 1.846 | 0.372 | 0.026 | 0.95 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 4.588 | 0.513 | 0.019 | 0.94 | $\alpha_{21} =$ -0.8 | -0.822 | 0.165 | 0.028 | 0.95 |
| $n = 500$ | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.3$ | 8.335 | 0.265 | 0.004 | 0.96 | $\beta_{20} =$-1.3 | -1.313 | 0.133 | 0.010 | 0.94 |
| $\beta_{11} = 4.6$ | 4.620 | 0.178 | 0.004 | 0.95 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.804 | 0.051 | 0.005 | 0.95 |
| $\beta_{1C} = 6.5$ | 6.530 | 0.230 | 0.005 | 0.94 | $\beta_{2C} = 2.1$ | 2.115 | 0.147 | 0.007 | 0.94 |
| $\beta_{1S} =$-5.1 | -5.123 | 0.329 | 0.004 | 0.95 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.416 | 0.263 | 0.007 | 0.94 |
| $\rho = 0.5$ | 0.499 | 0.146 | -0.002 | 0.97 | $\sigma_2^2 = 2$ | 2.046 | 0.243 | 0.023 | 0.94 |
| $\alpha_{10} =$ -6.4 | -6.413 | 0.365 | 0.002 | 0.94 | $\alpha_{20} = 1.8$ | 1.801 | 0.167 | 0.001 | 0.94 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 4.510 | 0.220 | 0.002 | 0.95 | $\alpha_{21} =$ -0.8 | -0.800 | 0.073 | 0.000 | 0.95 |

表 2: 选择-*I* 在 $\theta_Y$ 中含有 *35%* 零值、在 $\theta_X$中含有 *30%* 零值的模拟研究

| $n = 50$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 13.5$ | 13.948 | 1.942 | 0.033 | 0.96 | $\beta_{20} =$-1.3 | -1.408 | 0.572 | 0.083 | 0.96 |
| $\beta_{11} =$-8.6 | -8.975 | 1.154 | 0.044 | 0.94 | $\beta_{21} = 0.5$ | 0.528 | 0.155 | 0.056 | 0.92 |
| $\beta_{1C} = 9.2$ | 9.825 | 1.769 | 0.068 | 0.95 | $\beta_{2C} = 1.2$ | 1.309 | 0.549 | 0.091 | 0.95 |
| $\beta_{1S} =$-8.1 | -7.546 | 3.886 | -0.068 | 0.98 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.620 | 1.306 | 0.092 | 0.96 |
| $\rho = 0.9$ | 0.838 | 0.235 | -0.069 | 1.00 | $\sigma_2^2 = 1$ | 1.853 | 1.609 | 0.853 | 1.00 |
| $\alpha_{10} =$ -8.4 | -8.559 | 1.617 | 0.019 | 0.94 | $\alpha_{20} = 1.8$ | 1.853 | 0.550 | 0.030 | 0.94 |
| $\alpha_{11} = 10.5$ | 10.739 | 1.582 | 0.023 | 0.94 | $\alpha_{21} =$ -0.8 | -0.822 | 0.249 | 0.028 | 0.95 |
| $n = 100$ | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 13.5$ | 13.950 | 1.380 | 0.033 | 0.95 | $\beta_{20} =$-1.3 | -1.331 | 0.369 | 0.024 | 0.97 |
| $\beta_{11} =$-8.6 | -8.899 | 0.813 | 0.035 | 0.92 | $\beta_{21} = 0.5$ | 0.526 | 0.109 | 0.051 | 0.93 |
| $\beta_{1C} = 9.2$ | 9.698 | 1.211 | 0.054 | 0.94 | $\beta_{2C} = 1.2$ | 1.254 | 0.361 | 0.045 | 0.97 |
| $\beta_{1S} =$-8.1 | -7.941 | 2.657 | -0.020 | 0.96 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.513 | 0.865 | 0.047 | 0.96 |
| $\rho = 0.9$ | 0.887 | 0.141 | -0.015 | 1.00 | $\sigma_2^2 = 1$ | 1.723 | 1.390 | 0.723 | 1.00 |
| $\alpha_{10} =$ -8.4 | -8.471 | 1.111 | 0.008 | 0.94 | $\alpha_{20} = 1.8$ | 1.829 | 0.380 | 0.016 | 0.93 |
| $\alpha_{11} = 10.5$ | 10.611 | 1.084 | 0.011 | 0.96 | $\alpha_{21} =$ -0.8 | -0.816 | 0.171 | 0.020 | 0.95 |
| $n = 500$ | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 13.5$ | 13.658 | 0.605 | 0.012 | 0.92 | $\beta_{20} =$-1.3 | -1.302 | 0.156 | 0.001 | 0.95 |
| $\beta_{11} =$-8.6 | -8.665 | 0.355 | 0.008 | 0.93 | $\beta_{21} = 0.5$ | 0.509 | 0.049 | 0.018 | 0.94 |
| $\beta_{1C} = 9.2$ | 9.297 | 0.471 | 0.011 | 0.96 | $\beta_{2C} = 1.2$ | 1.213 | 0.152 | 0.011 | 0.95 |
| $\beta_{1S} =$-8.1 | -8.175 | 1.063 | 0.009 | 0.95 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.411 | 0.363 | 0.005 | 0.95 |
| $\rho = 0.9$ | 0.892 | 0.077 | -0.009 | 1.00 | $\sigma_2^2 = 1$ | 1.175 | 0.462 | 0.175 | 1.00 |
| $\alpha_{10} =$ -8.4 | -8.421 | 0.493 | 0.003 | 0.97 | $\alpha_{20} = 1.8$ | 1.799 | 0.162 | -0.001 | 0.96 |
| $\alpha_{11} = 10.5$ | 10.525 | 0.477 | 0.002 | 0.97 | $\alpha_{21} =$ -0.8 | -0.799 | 0.074 | -0.002 | 0.95 |

$\boldsymbol{\Sigma}_{\beta_1} = \boldsymbol{\Sigma}_{\beta_2} = 100\boldsymbol{I}_4$, $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_1} = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_2} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_1} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_2} = 100\boldsymbol{I}_2$, $\lambda_0 = 1$, $\nu_0 = 1$和 $\kappa_0 = 0.01$。上述超参数选择会导致先验分布具有很大的变异性，因此只能为参数提供模糊的信息。我们按照第5 节所述的吉布斯抽样算法，从相关模型参数的全条件密度中生成 1,00,000 个后验样本，并将前 40,000 个样本作为预热期丢弃。我们还基于剩余样本中每第 10 个迭代值，计算所有参数的后验均值、标准误（SE）和相对偏差（RB）。整个过程重复 500 次，最后在表 1-5中给出平均估计值。正如预期，随着样本量增加，标准误和偏差均减小。此外，我们还报告了所有参数对应的覆盖概率（CP）。我们观察到，大多数参数的覆盖概率都在 95% 左右。

表3： 仅在 $\theta_Y$ 中，含*15%* 零值的选择-*I*模拟研究

| $n = 50$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10}$ = 10.2 | 10.818 | 1.872 | 0.061 | 0.92 | $\beta_{20}$ =-1.3 | -1.348 | 1.894 | 0.037 | 0.95 |
| $\beta_{11}$ =-5.6 | -5.794 | 0.675 | 0.035 | 0.93 | $\beta_{21}$ = 0.8 | 0.829 | 0.181 | 0.037 | 0.94 |
| $\beta_{1C}$ = 2.5 | 2.324 | 1.041 | -0.071 | 0.93 | $\beta_{2C}$ = 2.6 | 2.681 | 1.330 | 0.031 | 0.94 |
| $\beta_{1S}$ = 2.1 | 2.176 | 2.568 | 0.036 | 0.94 | $\beta_{2S}$ = 2.4 | 2.488 | 2.924 | 0.037 | 0.96 |
| $\rho = 0$ | -0.012 | 0.386 | -0.012* | 1.00 | $\sigma_2^2$ = 8 | 9.001 | 3.157 | 0.125 | 0.95 |
| $\alpha_{10}$ = -8.4 | -8.585 | 1.491 | 0.022 | 0.95 | $\alpha_{20}$ = 1.8 | 1.900 | 0.590 | 0.056 | 0.93 |
| $\alpha_{11}$ = 10.5 | 10.788 | 1.566 | 0.027 | 0.93 | $\alpha_{21}$ = 1.5 | 1.528 | 0.334 | 0.018 | 0.95 |
| $n = 100$ | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10}$ = 10.2 | 10.380 | 1.091 | 0.018 | 0.95 | $\beta_{20}$ =-1.3 | -1.278 | 1.227 | -0.017 | 0.95 |
| $\beta_{11}$ =-5.6 | -5.682 | 0.447 | 0.015 | 0.94 | $\beta_{21}$ = 0.8 | 0.816 | 0.120 | 0.020 | 0.97 |
| $\beta_{1C}$ = 2.5 | 2.464 | 0.568 | -0.014 | 0.95 | $\beta_{2C}$ = 2.6 | 2.591 | 0.841 | -0.004 | 0.95 |
| $\beta_{1S}$ = 2.1 | 2.284 | 1.670 | 0.087 | 0.93 | $\beta_{2S}$ = 2.4 | 2.422 | 1.985 | 0.009 | 0.96 |
| $\rho = 0$ | 0.001 | 0.378 | 0.001* | 1.00 | $\sigma_2^2$ = 8 | 8.464 | 2.085 | 0.058 | 0.95 |
| $\alpha_{10}$ = -8.4 | -8.570 | 1.016 | 0.020 | 0.94 | $\alpha_{20}$ = 1.8 | 1.847 | 0.398 | 0.026 | 0.94 |
| $\alpha_{11}$ = 10.5 | 10.737 | 1.072 | 0.023 | 0.94 | $\alpha_{21}$ = 1.5 | 1.536 | 0.228 | 0.024 | 0.94 |
| $n = 500$ | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10}$ = 10.2 | 10.215 | 0.461 | 0.001 | 0.93 | $\beta_{20}$ =-1.3 | -1.296 | 0.515 | -0.003 | 0.96 |
| $\beta_{11}$ =-5.6 | -5.611 | 0.203 | 0.002 | 0.94 | $\beta_{21}$ = 0.8 | 0.804 | 0.055 | 0.005 | 0.94 |
| $\beta_{1C}$ = 2.5 | 2.496 | 0.222 | -0.001 | 0.95 | $\beta_{2C}$ = 2.6 | 2.610 | 0.353 | 0.004 | 0.95 |
| $\beta_{1S}$ = 2.1 | 2.165 | 0.683 | 0.031 | 0.94 | $\beta_{2S}$ = 2.4 | 2.375 | 0.874 | -0.010 | 0.96 |
| $\rho = 0$ | -0.003 | 0.293 | -0.003* | 0.97 | $\sigma_2^2$ = 8 | 8.121 | 0.891 | 0.015 | 0.93 |
| $\alpha_{10}$ = -8.4 | -8.429 | 0.447 | 0.003 | 0.95 | $\alpha_{20}$ = 1.8 | 1.813 | 0.176 | 0.007 | 0.93 |
| $\alpha_{11}$ = 10.5 | 10.528 | 0.470 | 0.003 | 0.95 | $\alpha_{21}$ = 1.5 | 1.501 | 0.100 | 0.001 | 0.93 |

*此处报告偏差，而非相对偏差。

## 7.1 模型比较

我们考虑三种不同的模型进行比较：模型-I、模型-II和模型-III。模型-I由（7）和（8）给出，同时考虑纵向圆形响应和圆形协变量中的零膨胀；模型-II则不考虑二者中的零膨胀；模型-III仅考虑纵向圆形响应中的零膨胀，而不考虑圆形协变量中的零膨胀。首先，我们评估当数据由模型-I生成时，模型-I、II和III对参数的估计效果。对于这种情况，我们考虑

表4： 仅在 $\theta_X$ 中含有*15%* 零值的选择-*I*模拟研究

| $n = 50$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10}$ = 10.2 | 10.589 | 1.133 | 0.038 | 0.93 | $\beta_{20}$ = 5.2 | 5.341 | 0.995 | 0.027 | 0.95 |
| $\beta_{11}$ =-5.6 | -5.764 | 0.607 | 0.029 | 0.94 | $\beta_{21}$ = 3.8 | 3.942 | 0.426 | 0.037 | 0.93 |
| $\beta_{1C}$ = 2.5 | 2.500 | 0.626 | 0.000 | 0.95 | $\beta_{2C}$ = 2.6 | 2.687 | 0.967 | 0.034 | 0.95 |
| $\beta_{1S}$ = 2.1 | 2.087 | 1.639 | -0.006 | 0.95 | $\beta_{2S}$ = 2.4 | 2.429 | 2.500 | 0.012 | 0.94 |
| $\rho = 0$ | -0.068 | 0.448 | -0.068* | 0.96 | $\sigma_2^2 = 5$ | 5.437 | 2.098 | 0.087 | 0.96 |
| $\alpha_{10}$ = -8.4 | -8.635 | 1.690 | 0.028 | 0.95 | $\alpha_{20}$ = 1.5 | 1.520 | 0.519 | 0.013 | 0.94 |
| $\alpha_{11}$ = 10.5 | 10.846 | 1.627 | 0.033 | 0.95 | $\alpha_{21}$ = -1.2 | -1.228 | 0.272 | 0.023 | 0.95 |
| $n = 100$ | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10}$ = 10.2 | 10.414 | 0.772 | 0.021 | 0.92 | $\beta_{20}$ = 5.2 | 5.268 | 0.673 | 0.013 | 0.94 |
| $\beta_{11}$ =-5.6 | -5.709 | 0.432 | 0.019 | 0.92 | $\beta_{21}$ = 3.8 | 3.885 | 0.298 | 0.022 | 0.94 |
| $\beta_{1C}$ = 2.5 | 2.531 | 0.403 | 0.012 | 0.95 | $\beta_{2C}$ = 2.6 | 2.702 | 0.649 | 0.039 | 0.96 |
| $\beta_{1S}$ = 2.1 | 2.107 | 1.058 | 0.004 | 0.95 | $\beta_{2S}$ = 2.4 | 2.476 | 1.650 | 0.032 | 0.97 |
| $\rho = 0$ | -0.043 | 0.386 | -0.043* | 0.95 | $\sigma_2^2 = 5$ | 5.262 | 1.454 | 0.052 | 0.96 |
| $\alpha_{10}$ = -8.4 | -8.480 | 1.193 | 0.009 | 0.93 | $\alpha_{20}$ = 1.5 | 1.524 | 0.374 | 0.016 | 0.91 |
| $\alpha_{11}$ = 10.5 | 10.618 | 1.126 | 0.011 | 0.94 | $\alpha_{21}$ = -1.2 | -1.215 | 0.193 | 0.012 | 0.93 |
| $n = 500$ | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10}$ = 10.2 | 10.241 | 0.323 | 0.004 | 0.93 | $\beta_{20}$ = 5.2 | 5.218 | 0.294 | 0.003 | 0.94 |
| $\beta_{11}$ =-5.6 | -5.615 | 0.182 | 0.003 | 0.95 | $\beta_{21}$ = 3.8 | 3.818 | 0.129 | 0.005 | 0.94 |
| $\beta_{1C}$ = 2.5 | 2.503 | 0.165 | 0.001 | 0.95 | $\beta_{2C}$ = 2.6 | 2.607 | 0.281 | 0.003 | 0.94 |
| $\beta_{1S}$ = 2.1 | 2.098 | 0.423 | -0.001 | 0.95 | $\beta_{2S}$ = 2.4 | 2.405 | 0.705 | 0.002 | 0.95 |
| $\rho = 0$ | -0.013 | 0.208 | -0.013* | 0.95 | $\sigma_2^2 = 5$ | 5.091 | 0.622 | 0.018 | 0.95 |
| $\alpha_{10}$ = -8.4 | -8.454 | 0.505 | 0.006 | 0.96 | $\alpha_{20}$ = 1.5 | 1.504 | 0.156 | 0.003 | 0.96 |
| $\alpha_{11}$ = 10.5 | 10.552 | 0.490 | 0.005 | 0.96 | $\alpha_{21}$ = -1.2 | -1.204 | 0.081 | 0.003 | 0.95 |

*给出的是偏差，而非相对偏差。

$n = 200$ 和 $\delta_Y = \delta_X = 0.14$ 弧度（8°）。使用与前文所述相同的超参数设定共轭先验。表6列出了重复模拟500次后参数估计值的平均值。可以看出，模型-I在两个阶段中所有参数的相对偏差均较低，覆盖概率约为95%。然而，与模型-I相比，模型-II和模型-III中大多数参数的偏差较大，覆盖概率也较低。请注意，基于模型-II和模型-III得到的 $\theta_{X_i}$ 对 $v_{1i}$ 的回归估计值，由于这两个模型未考虑圆形协变量中的零膨胀，因此比考虑了圆形协变量零膨胀的模型-I所得估计值偏差更大。在纵向圆形响应和圆形协变量均存在零膨胀的情况下，表6 中的模拟研究结果表明，模型-II和模型-III可能都不适合描述数据中的潜在关系。

## 7.2 敏感性分析

### 7.2.1 对模型设定错误的敏感性

我们考虑一个错设模型，以对所提方法进行敏感性分析。在此情境下，首先按照前文所述生成并删失 $\theta_{Y_{ij}}$ 和 $\theta_{X_i}$。随后，以 $\eta_Y$ 和 $\eta_X$的概率向它们掺入随机零值。此处，我们考虑 $n = 200$、 $\delta_Y = \delta_X = 0.14$ 弧度（8°），并采用前文讨论的相同超参数选择

表5： 无零膨胀条件下选择-*I*的模拟研究

| $n = 50$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 5.3$ | 5.558 | 2.477 | 0.049 | 0.98 | $\beta_{20} = 2.5$ | 2.652 | 1.498 | 0.061 | 0.95 |
| $\beta_{11} = 4.6$ | 4.798 | 0.565 | 0.043 | 0.92 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.817 | 0.260 | 0.022 | 0.94 |
| $\beta_{1C} = 2.5$ | 2.589 | 1.144 | 0.035 | 0.98 | $\beta_{2C} = 2.6$ | 2.720 | 0.711 | 0.046 | 0.95 |
| $\beta_{1S} = 2.1$ | 2.256 | 2.953 | 0.074 | 0.98 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.507 | 1.831 | 0.045 | 0.95 |
| $\rho = 0.8$ | 0.808 | 0.203 | 0.010 | 0.95 | $\sigma_2^2 = 1$ | 1.688 | 1.392 | 0.688 | 1.00 |
| $\alpha_{10} = -5.4$ | -5.628 | 0.957 | 0.042 | 0.93 | $\alpha_{20} = 1.8$ | 1.915 | 0.673 | 0.064 | 0.95 |
| $\alpha_{11} = 3.5$ | 3.652 | 0.565 | 0.044 | 0.93 | $\alpha_{21} = 1.5$ | 1.557 | 0.385 | 0.038 | 0.95 |
| $n = 100$ | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 5.3$ | 5.415 | 1.657 | 0.022 | 0.96 | $\beta_{20} = 2.5$ | 2.573 | 0.989 | 0.029 | 0.95 |
| $\beta_{11} = 4.6$ | 4.695 | 0.372 | 0.021 | 0.92 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.799 | 0.176 | -0.002 | 0.94 |
| $\beta_{1C} = 2.5$ | 2.543 | 0.743 | 0.017 | 0.97 | $\beta_{2C} = 2.6$ | 2.657 | 0.478 | 0.022 | 0.96 |
| $\beta_{1S} = 2.1$ | 2.203 | 1.999 | 0.049 | 0.95 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.466 | 1.202 | 0.027 | 0.96 |
| $\rho = 0.8$ | 0.814 | 0.151 | 0.018 | 0.96 | $\sigma_2^2 = 1$ | 1.434 | 0.929 | 0.434 | 0.99 |
| $\alpha_{10} = -5.4$ | -5.557 | 0.663 | 0.029 | 0.94 | $\alpha_{20} = 1.8$ | 1.844 | 0.466 | 0.025 | 0.94 |
| $\alpha_{11} = 3.5$ | 3.597 | 0.390 | 0.028 | 0.93 | $\alpha_{21} = 1.5$ | 1.536 | 0.269 | 0.024 | 0.94 |
| $n = 500$ | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 5.3$ | 5.326 | 0.670 | 0.005 | 0.94 | $\beta_{20} = 2.5$ | 2.525 | 0.415 | 0.010 | 0.96 |
| $\beta_{11} = 4.6$ | 4.618 | 0.155 | 0.004 | 0.96 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.799 | 0.073 | -0.002 | 0.96 |
| $\beta_{1C} = 2.5$ | 2.524 | 0.299 | 0.010 | 0.96 | $\beta_{2C} = 2.6$ | 2.617 | 0.200 | 0.006 | 0.96 |
| $\beta_{1S} = 2.1$ | 2.110 | 0.812 | 0.005 | 0.95 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.396 | 0.509 | -0.002 | 0.95 |
| $\rho = 0.8$ | 0.802 | 0.073 | 0.002 | 0.98 | $\sigma_2^2 = 1$ | 1.047 | 0.178 | 0.047 | 0.97 |
| $\alpha_{10} = -5.4$ | -5.426 | 0.282 | 0.005 | 0.96 | $\alpha_{20} = 1.8$ | 1.815 | 0.202 | 0.009 | 0.95 |
| $\alpha_{11} = 3.5$ | 3.517 | 0.166 | 0.005 | 0.96 | $\alpha_{21} = 1.5$ | 1.506 | 0.116 | 0.004 | 0.95 |

表6： 在 $\theta_Y$ 中有*45%*的零值、在 $\theta_X$中有*55%*零值的模拟研究

| 模型-I | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.8$ | 8.760 | 3.489 | -0.005 | 0.96 | $\beta_{20} = -1.6$ | -1.606 | 3.662 | 0.004 | 0.97 |
| $\beta_{11} = 5.2$ | 5.269 | 0.348 | 0.013 | 0.95 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.813 | 0.106 | 0.017 | 0.94 |
| $\beta_{1C} = 1.5$ | 1.661 | 3.564 | 0.107 | 0.95 | $\beta_{2C} = 1.2$ | 1.175 | 3.777 | -0.021 | 0.97 |
| $\beta_{1S} = 1.2$ | 1.046 | 1.521 | -0.129 | 0.95 | $\beta_{2S} = 1.8$ | 1.765 | 1.630 | -0.020 | 0.95 |
| $\rho = 0.8$ | 0.661 | 0.228 | -0.174 | 0.99 | $\sigma_2^2 = 5$ | 5.249 | 1.070 | 0.050 | 0.97 |
| $\alpha_{10} = 3.4$ | 3.465 | 0.649 | 0.019 | 0.95 | $\alpha_{20} = -1.2$ | -1.203 | 0.256 | 0.002 | 0.95 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 4.567 | 0.606 | 0.015 | 0.95 | $\alpha_{21} = 1.3$ | 1.314 | 0.164 | 0.011 | 0.95 |
| 模型-II | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.8$ | 8.165 | 3.168 | -0.072 | 0.96 | $\beta_{20} = -1.6$ | -1.779 | 3.162 | 0.112 | 0.94 |
| $\beta_{11} = 5.2$ | 4.770 | 0.490 | -0.083 | 0.43 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.638 | 0.175 | -0.202 | 0.25 |
| $\beta_{1C} = 1.5$ | 1.331 | 3.160 | -0.113 | 0.96 | $\beta_{2C} = 1.2$ | 1.445 | 3.240 | 0.205 | 0.94 |
| $\beta_{1S} = 1.2$ | 0.972 | 1.473 | -0.190 | 0.96 | $\beta_{2S} = 1.8$ | 1.335 | 1.469 | -0.258 | 0.90 |
| $\rho = 0.8$ | 0.692 | 0.201 | -0.135 | 0.98 | $\sigma_2^2 = 5$ | 3.837 | 1.430 | -0.233 | 0.56 |
| $\alpha_{10} = 3.4$ | 3.810 | 0.797 | 0.120 | 0.84 | $\alpha_{20} = -1.2$ | -0.938 | 0.334 | -0.218 | 0.67 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 2.871 | 1.655 | -0.362 | 0.00 | $\alpha_{21} = 1.3$ | 0.833 | 0.476 | -0.360 | 0.00 |
| 模型-III | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.8$ | 8.639 | 3.293 | -0.018 | 0.96 | $\beta_{20} = -1.6$ | -1.942 | 3.498 | 0.214 | 0.97 |
| $\beta_{11} = 5.2$ | 5.278 | 0.351 | 0.015 | 0.94 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.815 | 0.102 | 0.019 | 0.95 |
| $\beta_{1C} = 1.5$ | 1.834 | 3.346 | 0.223 | 0.95 | $\beta_{2C} = 1.2$ | 1.574 | 3.581 | 0.312 | 0.97 |
| $\beta_{1S} = 1.2$ | 0.945 | 1.558 | -0.212 | 0.96 | $\beta_{2S} = 1.8$ | 1.675 | 1.611 | -0.070 | 0.95 |
| $\rho = 0.8$ | 0.681 | 0.217 | -0.149 | 0.99 | $\sigma_2^2 = 5$ | 5.301 | 1.143 | 0.060 | 0.96 |
| $\alpha_{10} = 3.4$ | 3.877 | 0.842 | 0.140 | 0.81 | $\alpha_{20} = -1.2$ | -0.955 | 0.330 | -0.204 | 0.67 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 2.836 | 1.690 | -0.370 | 0.00 | $\alpha_{21} = 1.3$ | 0.839 | 0.469 | -0.354 | 0.00 |

表 7： 在错设模型下进行模拟研究，使用 $\eta_Y = \eta_X = 0.05$

| 模型-I | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.3$ | 7.894 | 3.650 | -0.049 | 0.97 | $\beta_{20}$ =-1.3 | -1.463 | 2.419 | 0.125 | 0.94 |
| $\beta_{11} = 5.2$ | 5.038 | 0.398 | -0.031 | 0.87 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.757 | 0.102 | -0.053 | 0.90 |
| $\beta_{1C} = 1.5$ | 1.837 | 3.741 | 0.225 | 0.98 | $\beta_{2C} = 2.1$ | 2.248 | 2.486 | 0.070 | 0.94 |
| $\beta_{1S} = 1.2$ | 0.984 | 1.823 | -0.180 | 0.95 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.115 | 0.918 | -0.119 | 0.93 |
| $\rho = 0.25$ | 0.244 | 0.254 | -0.024 | 0.93 | $\sigma_2^2 = 1$ | 0.943 | 0.252 | -0.057 | 0.93 |
| $\alpha_{10} = 3.4$ | 3.635 | 0.707 | 0.069 | 0.92 | $\alpha_{20}$ = -1.2 | -1.166 | 0.267 | -0.028 | 0.93 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 4.444 | 0.623 | -0.012 | 0.92 | $\alpha_{21}$ = 1.3 | 1.269 | 0.170 | -0.023 | 0.93 |
| 模型-II | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.3$ | 6.377 | 3.785 | -0.232 | 0.89 | $\beta_{20}$ =-1.3 | -1.335 | 1.895 | 0.027 | 0.94 |
| $\beta_{11} = 5.2$ | 4.341 | 0.889 | -0.165 | 0.04 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.454 | 0.350 | -0.432 | 0.00 |
| $\beta_{1C} = 1.5$ | 2.439 | 3.505 | 0.626 | 0.98 | $\beta_{2C} = 2.1$ | 1.827 | 1.962 | -0.130 | 0.91 |
| $\beta_{1S} = 1.2$ | 0.515 | 1.875 | -0.571 | 0.94 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 1.603 | 1.023 | -0.332 | 0.65 |
| $\rho = 0.25$ | -0.225 | 0.517 | -1.899 | 0.29 | $\sigma_2^2 = 1$ | 0.619 | 0.409 | -0.381 | 0.20 |
| $\alpha_{10} = 3.4$ | 4.005 | 0.916 | 0.178 | 0.77 | $\alpha_{20}$ = -1.2 | -0.895 | 0.365 | -0.254 | 0.57 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 2.760 | 1.764 | -0.387 | 0.00 | $\alpha_{21}$ = 1.3 | 0.791 | 0.516 | -0.392 | 0.00 |
| 模型-III | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.3$ | 7.764 | 3.626 | -0.065 | 0.96 | $\beta_{20}$ =-1.3 | -1.774 | 2.354 | 0.365 | 0.95 |
| $\beta_{11} = 5.2$ | 5.017 | 0.398 | -0.035 | 0.87 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.755 | 0.106 | -0.056 | 0.88 |
| $\beta_{1C} = 1.5$ | 1.960 | 3.692 | 0.307 | 0.96 | $\beta_{2C} = 2.1$ | 2.618 | 2.412 | 0.247 | 0.95 |
| $\beta_{1S} = 1.2$ | 0.937 | 1.826 | -0.219 | 0.94 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.034 | 0.906 | -0.153 | 0.91 |
| $\rho = 0.25$ | 0.246 | 0.267 | -0.016 | 0.91 | $\sigma_2^2 = 1$ | 0.947 | 0.259 | -0.053 | 0.92 |
| $\alpha_{10} = 3.4$ | 4.011 | 0.954 | 0.180 | 0.74 | $\alpha_{20}$ = -1.2 | -0.882 | 0.377 | -0.265 | 0.53 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 2.755 | 1.770 | -0.388 | 0.00 | $\alpha_{21}$ = 1.3 | 0.782 | 0.525 | -0.399 | 0.00 |

第 7.1 节。需要注意的是，当 $\eta_Y = \eta_X = 0$ 时，该污染模型将简化为由（7）和（8）给出的所提出的零膨胀 LCRM 模型。随后，我们基于 500 次重复模拟，给出后验均值、相对偏差和标准误的平均估计值，并根据相对偏差和覆盖概率对三个模型——模型-I、模型-II 和模型-III——进行比较。我们分别在表 7 和 8 中报告 $\eta_Y = \eta_X = 0.05$ 和 $\eta_Y = \eta_X = 0.075$下模型设定错误时的模拟结果。结果表明，随着污染比例增加，所有模型的估计值表现均有所下降，相对偏差增大。与模型-II 和模型-III 相比，模型-I 中大多数参数的偏差显著更低。具体而言，模型-I 中大多数参数的覆盖概率明显高于另外两个模型（约为 93%）。特别是，根据模型-II 和模型-III 下的模拟结果，与第二阶段回归相关的大多数参数的覆盖概率都极低，通常接近于零。例如，表 7 和8中，模型-II 和模型-III 下 $\alpha_{11}$ 和 $\alpha_{21}$ 的覆盖概率约为零。结果表明，即使数据是由错设模型生成的，所提出的模型也比模型-II 和模型-III 表现好得多。

### 7.2.2 对先验设定的敏感性

我们针对两种不同的先验选择进行敏感性分析。我们将这两种选择分别记为选择-I和选择-II，其中选择-I采用D节中讨论的相同超参数7，选择-II则采用 $\boldsymbol{\mu}_{\beta_1} = \boldsymbol{\mu}_{\beta_2} = \mathbf{0}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{\beta_1} = \boldsymbol{\Sigma}_{\beta_2} = 1000\boldsymbol{I}_4$，$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_1} = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}_2} = \mathbf{0}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_1} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_2} = 1000\boldsymbol{I}_2$，$\lambda_0 = 1$，$\nu_0 = 0.01$以及 $\kappa_0 = 0.01$。平均估计值

表 8： 采用错设模型进行模拟研究，使用 $\eta_Y = \eta_X = 0.075$

| 模型-I | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.3$ | 7.716 | 3.558 | -0.070 | 0.97 | $\beta_{20}$ =-1.3 | -1.323 | 2.283 | 0.018 | 0.95 |
| $\beta_{11} = 5.2$ | 4.937 | 0.444 | -0.051 | 0.79 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.734 | 0.114 | -0.083 | 0.83 |
| $\beta_{1C} = 1.5$ | 1.936 | 3.631 | 0.290 | 0.98 | $\beta_{2C} = 2.1$ | 2.080 | 2.350 | -0.010 | 0.95 |
| $\beta_{1S} = 1.2$ | 0.955 | 1.848 | -0.204 | 0.94 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 2.046 | 0.899 | -0.148 | 0.93 |
| $\rho = 0.25$ | 0.246 | 0.250 | -0.015 | 0.93 | $\sigma_2^2 = 1$ | 0.887 | 0.257 | -0.113 | 0.86 |
| $\alpha_{10} = 3.4$ | 3.659 | 0.707 | 0.076 | 0.91 | $\alpha_{20}$ = -1.2 | -1.167 | 0.269 | -0.027 | 0.94 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 4.423 | 0.626 | -0.017 | 0.93 | $\alpha_{21} = 1.3$ | 1.260 | 0.174 | -0.031 | 0.92 |
| 模型-II | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.3$ | 6.347 | 3.967 | -0.235 | 0.92 | $\beta_{20}$ =-1.3 | -1.285 | 1.970 | -0.011 | 0.93 |
| $\beta_{11} = 5.2$ | 4.274 | 0.954 | -0.178 | 0.01 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.434 | 0.370 | -0.458 | 0.00 |
| $\beta_{1C} = 1.5$ | 2.471 | 3.672 | 0.647 | 0.97 | $\beta_{2C} = 2.1$ | 1.763 | 2.056 | -0.160 | 0.87 |
| $\beta_{1S} = 1.2$ | 0.515 | 1.968 | -0.571 | 0.94 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 1.525 | 1.075 | -0.365 | 0.57 |
| $\rho = 0.25$ | -0.256 | 0.544 | -2.025 | 0.21 | $\sigma_2^2 = 1$ | 0.560 | 0.460 | -0.440 | 0.10 |
| $\alpha_{10} = 3.4$ | 3.999 | 0.914 | 0.176 | 0.78 | $\alpha_{20}$ = -1.2 | -0.850 | 0.401 | -0.291 | 0.45 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 2.736 | 1.789 | -0.392 | 0.00 | $\alpha_{21} = 1.3$ | 0.758 | 0.548 | -0.417 | 0.00 |
| 模型-III | | | | | | | | | |
| 参数 | Mean | SE | RB | CP | 参数 | Mean | SE | RB | CP |
| $\beta_{10} = 8.3$ | 7.865 | 3.679 | -0.052 | 0.97 | $\beta_{20}$ =-1.3 | -1.586 | 2.391 | 0.220 | 0.92 |
| $\beta_{11} = 5.2$ | 4.920 | 0.455 | -0.054 | 0.77 | $\beta_{21} = 0.8$ | 0.736 | 0.115 | -0.080 | 0.79 |
| $\beta_{1C} = 1.5$ | 1.784 | 3.735 | 0.189 | 0.98 | $\beta_{2C} = 2.1$ | 2.403 | 2.445 | 0.144 | 0.92 |
| $\beta_{1S} = 1.2$ | 1.096 | 1.838 | -0.087 | 0.95 | $\beta_{2S} = 2.4$ | 1.993 | 0.934 | -0.170 | 0.88 |
| $\rho = 0.25$ | 0.225 | 0.258 | -0.100 | 0.93 | $\sigma_2^2 = 1$ | 0.872 | 0.267 | -0.128 | 0.84 |
| $\alpha_{10} = 3.4$ | 4.066 | 0.963 | 0.196 | 0.75 | $\alpha_{20}$ = -1.2 | -0.852 | 0.401 | -0.290 | 0.46 |
| $\alpha_{11} = 4.5$ | 2.698 | 1.827 | -0.401 | 0.00 | $\alpha_{21} = 1.3$ | 0.754 | 0.552 | -0.420 | 0.00 |

选择-I的参数估计值已列于表1-5。对于选择-II，我们按照前文所述，采用相同的预热期生成数量相同的后验样本。随后，每隔10次迭代计算一次后验均值、标准误和相对偏差。在这种情况下，我们也将整个过程重复500次，并在表S1-S5中报告参数的平均估计值及其覆盖概率（见补充文件D节）。当$n = 50$时，我们发现，与选择-I（表1-5）相比，选择-II下大多数参数的偏差略高（表S1-S5）。例如，$\beta_{1S}$ 的相对偏差在表1中为0.025，而在表S1中为0.046。然而，在两种超参数选择下，大多数参数的覆盖概率都约为95%。因此，在大多数情况下，两种先验设定在相对偏差和覆盖概率方面的结果相似。

## 7.3 计算时间

我们根据表 9 所示的模拟设置，对每个数据集分别比较模型-I、II 和 III 的运行时间6、7和8。我们在一台配备 8 GB内存和 Intel Xeon(R) CPU E5-2640 v22.00GHz 处理器的计算机上运行代码。随着模型-I 和模型-III 中零值比例增加，计算时间也随之增加。此外，模型-I 所需的计算时间比模型-III 长，而模型-III 的计算时间又比模型-II 长。这是因为在模型-I 中，纵向圆形响应和圆形协变量均存在零值时需要生成潜变量，而在模型-III 中，仅纵向圆形响应存在零值时需要生成潜变量。表 1-5对应的模拟设置也呈现出相同情况。

此外，即使零值数量相当多，所有模型的运行时间也都不到 3 分钟。

表9： 平均计算时间（分钟）的比较

| | 模型-I | 模型-II | 模型-III |
|---|---|---|---|
| 表 6 | 2.326 | 1.306 | 1.948 |
| 表 7 | 2.406 | 1.367 | 2.196 |
| 表8 | 2.445 | 1.395 | 2.249 |

# 8 散光数据分析

我们研究了一个关于白内障手术的数据集。手术于2008年至2010年在印度西孟加拉邦巴拉克普尔的Disha眼科医院与研究中心开展。共有56名患者纳入本研究，接受了小切口白内障手术或超声乳化白内障手术。随后对患者进行了为期三个月的随访，并在手术前以及术后第1、7、30和90天测量散光轴。每位患者在手术前和术后第1天的散光强度分别记录为 $I_0$ 和$I_1$。此外，还获得了患者的年龄和性别信息。有关研究的更多详情，请参见Bakshi(2010年）。如第1节所述，我们分析的主要目的是比较接受两种不同手术方式的患者的恢复过程。医学专业人员了解患者基于其人口统计特征的恢复过程也很重要。

为此，我们首先使用包含年龄、性别、手术和 $I_1$的线性协变量向量，对手术后第7天、第30天和第90天测量的散光轴（$\theta_Y$）进行建模。其中，性别和手术是通过指示变量表示的二元协变量。在此背景下，女性和男性分别编码为1和0，PECS和SICS手术类型也分别表示为1和0。为了解患者随时间的改善情况，我们参照Twisk（2023年，第4章，第56—75页），在所提出的模型第一阶段中进一步纳入两个虚拟变量作为协变量，记为 $t_1$ 和$t_2$。注意，$(t_1, t_2)$分别对应手术后第7天、第30天和第90天时的取值(0,0)、(1,0)和(1,1)。为了解患者相对于手术第1天的恢复过程，我们还将该日的散光轴作为圆形协变量（$\theta_X$）纳入模型。在56名个体中，纵向圆形响应中的零值比例为33.93%，圆形协变量中的零值比例为35.71%。该数据集还包含 $I_0$ 以及手术前散光轴的测量值（$\theta_V$），二者分别被视为线性工具变量和圆形工具变量。由于圆形协变量中存在较高比例的零值，我们在第二阶段将 $\theta_X$ 建模为具有协变量 $I_0$ 和 $\theta_V$ 的形式。因此，上述两阶段模型表示为

第一阶段：$Y^*_{1ij} = \beta_{10} + \beta_{11}$年龄$_i + \beta_{12}$性别$_i + \beta_{13}$手术
$_i + \beta_{14} t_{1_{ij}} + \beta_{15} t_{2_{ij}} + \beta_{16} I_{1_i} + \beta_{1C} \cos(\theta^*_{X_i}) + \beta_{1S} \sin(\theta^*_{X_i}) + b_{1i} + \varepsilon_{Y_{1ij}}$，
$Y^*_{2ij} = \beta_{20} + \beta_{21}$年龄$_i + \beta_{22}$性别$_i + \beta_{23}$手术$_i + \beta_{24} t_{1_{ij}} + \beta_{25} t_{2_{ij}} + \beta_{26} I_{1_i} + \beta_{2C} \cos(\theta^*_{X_i})$
$+ \beta_{2S} \sin(\theta^*_{X_i}) + b_{2i} + \varepsilon_{Y_{2ij}}$，以及第二阶段：$X^*_{1i} = \alpha_{10} + \alpha_{11} I_{0_i} + \alpha_{1C} \cos(\theta_{V_i})$
$+ \alpha_{1S} \sin(\theta_{V_i}) + \varepsilon_{X_{1i}}$，$X^*_{2i} = \alpha_{20} + \alpha_{21} I_{0_i} + \alpha_{2C} \cos(\theta_{V_i}) + \alpha_{2S} \sin(\theta_{V_i}) + \varepsilon_{X_{2i}}$，

对于 $i = 1, 2, \ldots, 56$ 和 $j = 1, 2, 3$。

在分析中，我们取 $\delta_Y = \delta_X = 0.035$ 弧度（2°），因为散光轴的原始角度在区间（-2°, 2°）内被删失（参见第1.1节）。我们使用第5节提出的吉布斯抽样算法，从相关模型参数的后验分布中抽取70万个样本。因此，丢弃前15万次迭代作为预热期后，根据每第10个迭代值计算参数的后验均值和标准差。通过轨迹图（参见补充文件F节中的图S1和S2）以及Geweke诊断检验（参见补充文件E节中的表S6）以图形方式监测链的收敛情况。后验估计值汇总见补充文件E节中的表S6。

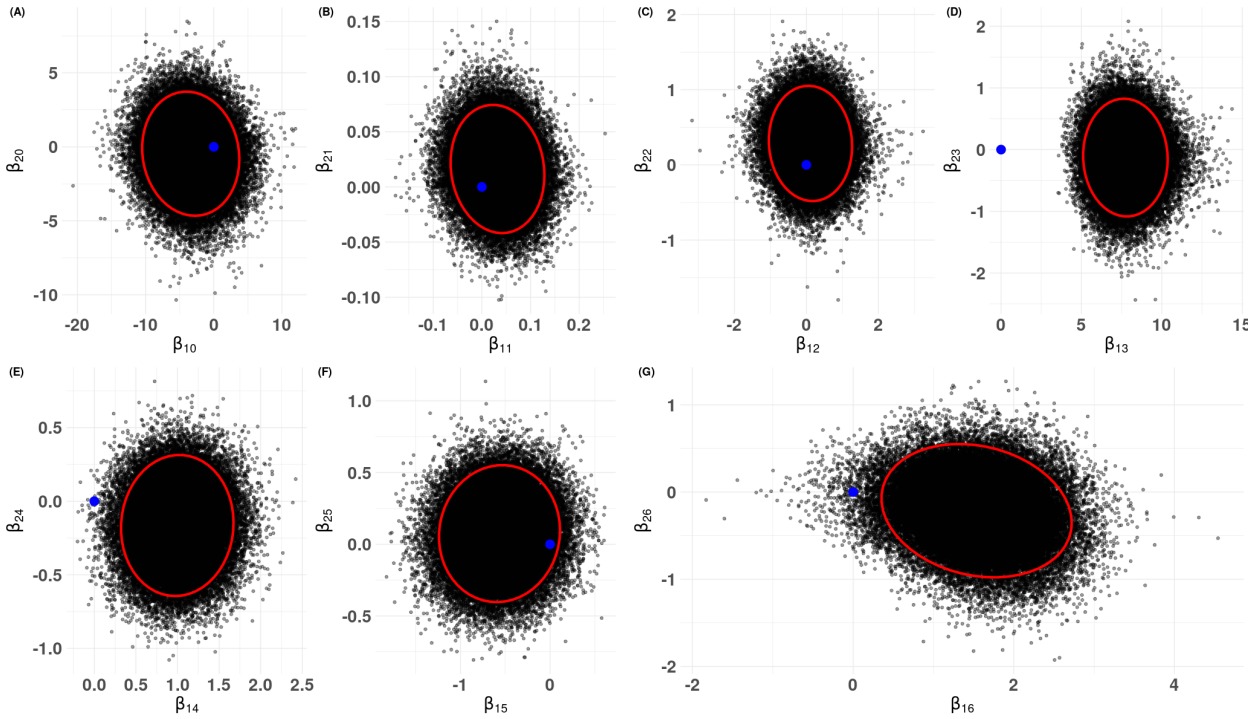


图 4：95% 水平的置信椭圆，显示以下因素的显著性：（**A**）截距，（**B**）年龄，（**C**）性别，（**D**）手术，（**E**） $t_1$，（**F**） $t_2$，以及（**G**）第一阶段术后第 1 天的散光强度，其中“•”表示 (0,0) 位置。

已通过图形方式检验参数的显著性，并展示于图4 和5中。这些图表明，手术、 $t_1$ 和 $I_1$ 是仅有的显著线性协变量

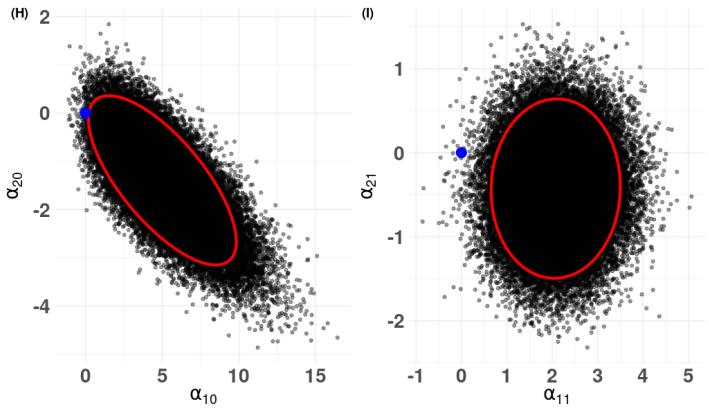


图 5：第一阶段 95% 水平的置信椭圆，显示第二阶段手术前（**H**）截距和（**I**）散光强度的显著性，其中‘●’表示（0,0）位置。

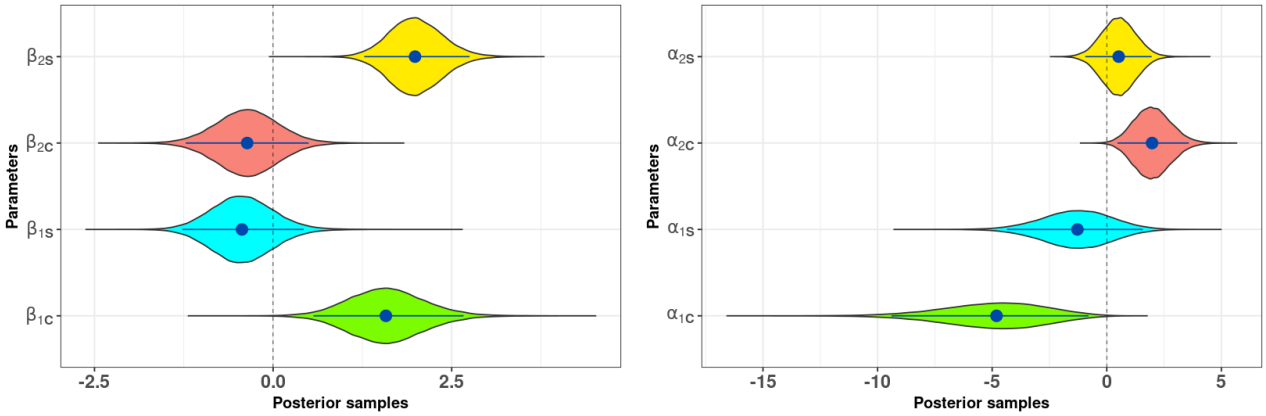


图 6：小提琴图显示术后第 1 天（左）散光轴和手术前（右）散光轴的显著性，其中‘●’和‘—●—’分别表示后验样本的中位数和 95% 最高后验密度可信区间。

因为在第一阶段，其95%最高后验密度（HPD）可信区间（CI）均不包含(0,0)。同样，在第二阶段，截距和线性协变量 $I_0$ 均显著。为了检验圆形协变量的显著性，我们在图6中给出带有95% HPD可信区间的 小提琴图，并检查 $\beta_{1C}$、 $\beta_{1S}$、 $\beta_{2C}$和 $\beta_{2S}$的可信区间中是否至少有一个不包含零。可以看出， $\beta_{1C}$ 和 $\beta_{2S}$ 的后验分布集中度较高，且远离零，这表明第1天的散光轴显著。同样，手术前的散光轴是显著的工具变量。为评估所提出的模型对真实数据的拟合效果，我们绘制了Jha和Biswas（2017年）提出的图7环形图。在图中，我们用彩色点绘制点 $[1+\cos(\hat{}\theta_Y - \theta_Y)](\cos\hat{}\theta_Y, \sin\hat{}\theta_Y)$，其中 $\theta_Y$ 为观测角， $\theta_Y$ 为预测角。在此图中，实心点表示预测值相对于相应观测值的顺时针偏差，空心点表示逆时针偏差。该图表明拟合效果良好，因为更多的点位于以0为中心、半径为2的较大圆周附近。

我们重新拟合所提出的模型，并剔除了不显著的协变量。图8 展示了两种手术方式下患者白内障手术后的恢复过程。为便于比较，图中给出了术后第7、30和90天散光轴的后验预测密度，并分别采用四种不同的初始条件 $0°$ （正常）、 $45°$

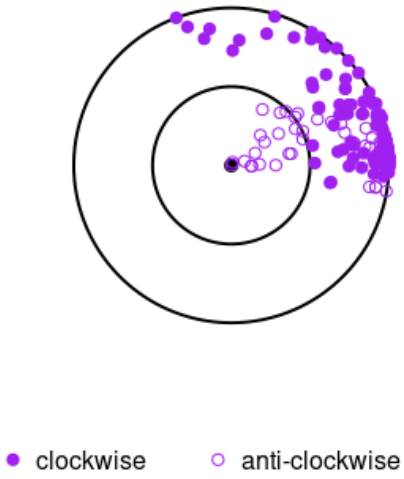


图 7：散光数据的环形图。

（中度）、 $90^\circ$ （中间）和 $180^\circ$ （严重），并将 $I_1 = 0.95$保持为平均值。对于超声乳化白内障手术，可以观察到，几乎所有情况下，无论初始条件如何，后验预测密度都集中在 $0^\circ$ 附近。另一方面，对于小切口白内障手术，只有当散光初始轴向在术后第一天接近 $0^\circ$ 时，后验预测密度才集中在 $0^\circ$ 附近。我们还观察到，在所有情况下，超声乳化白内障手术的后验预测分布变异程度均低于小切口白内障手术。这表明接受小切口白内障手术的患者在恢复过程中存在更大的不确定性。图8显示，对于初始散光轴向为 $45^\circ$、 $90^\circ$或 $180^\circ$的患者，小切口白内障手术后的改善十分缓慢，且相邻随访时间点之间的变化不大。具体而言，初始条件为 $45^\circ$ 的患者在第7天至第30天之间的改善幅度略大于初始条件为 $90^\circ$ 或 $180^\circ$的患者。根据后验预测密度，我们还检验了在初始条件分别为 $45^\circ$、 $90^\circ$和 $180^\circ$时，第30天相较于术后第1天散光轴的平均改善幅度分别为 $8.34^\circ$、 $19.48^\circ$和 $71.23^\circ$ 。在所有情况下，恢复过程中第30天至第90天之间均观察到轻微恶化。更多详情请参见补充文件E节中的表S7。这项分析有助于临床医生识别散光患者的状况随时间改善或恶化的情况。我们还使用选择-II中给出的备选先验（见7.2.2节）进行了相同的分析，发现后验预测分布与图8所示的结果非常相似。这表明我们的分析对于不同的先验选择具有稳健性。

# 9 讨论

本文提出了一种纵向圆形回归混合效应模型，用于处理圆形响应变量和圆形协变量中的零膨胀问题。

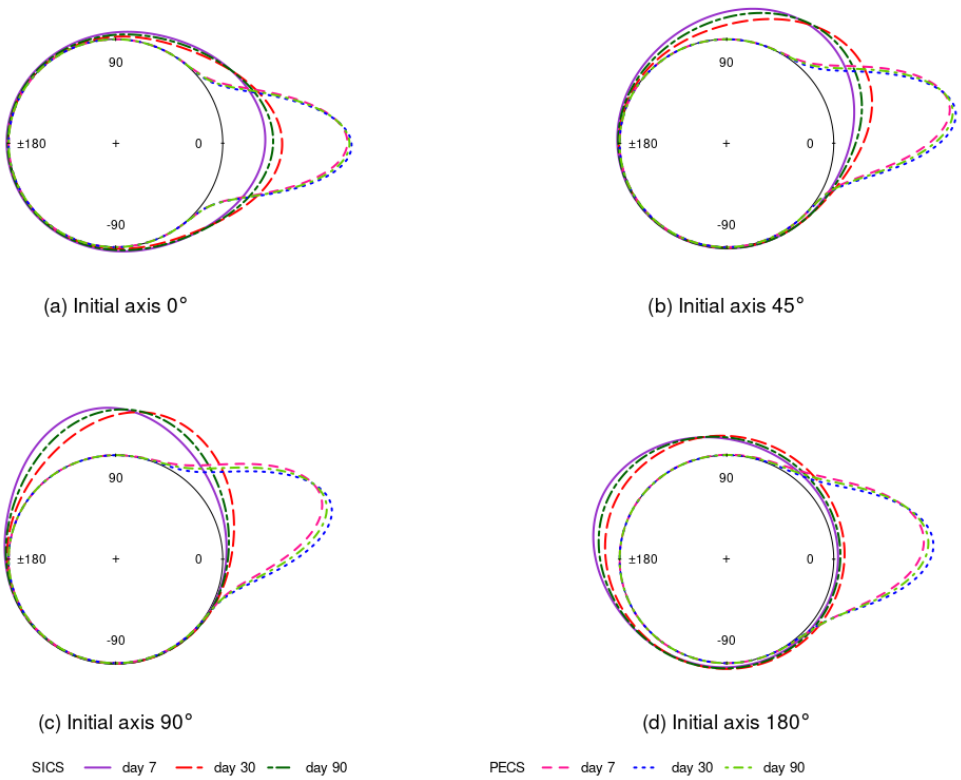


图 8：基于四种不同初始条件，通过后验预测密度图比较两种手术：术后散光轴在第 7、30 和 90 天测量时的（a）正常（0°）、（b）中度（45°）、（c）介于中度与重度之间（90°）和（d）重度（180°）病例。

所提方法在理解欧几里得空间上的概率模型投影到单位球面后的行为方面迈出了一步。尽管文献中已有研究将投影正态分布用于圆形数据，但对这些模型的深入理解仍然不足。本文在一个一般框架下，对响应变量和协变量均存在零膨胀的纵向研究进行了全面讨论。文中详细探讨了模型参数的解释和可识别性问题，并提出了用于估计模型参数的贝叶斯方法。所提方法应用于术后散光分析，有助于理解不同治疗方案下的恢复过程。所提方法的推广能够适用于自然与物理现象中出现的各种情形。因此，所提方法的适用范围远不止本文所研究的特定案例。尽管本文未考虑缺失数据，但可以轻松扩展数据增广策略，以抽样获得缺失观测。

有许多应用场景，其中观测值具有纵向性质，取值于单位球面（Wilson 等人，2020年）。为对此类数据建模，可以将潜在空间视为 $\mathbb{R}^d$，其中 $d > 2$。然而，这可能需要额外的可识别性约束，从而给开发用于估计的高效计算算法带来挑战。此外，投影正态分布可能无法充分刻画方向变量和/或线性变量之间复杂的依赖结构。为解决这一问题，可以在欧氏空间上采用非高斯多元分布进行投影，

其中有一种高效的抽样算法可用。这是一个兼具理论和方法论意义的有趣未来研究问题。

## 资金来源

Dr. Prajamitra Bhuyan 的研究获得印度加尔各答管理学院（印度加尔各答）I类研究项目资助（编号：3918/RP: BEMMS）的支持。Dr. Jayant Jha 的研究部分由印度政府通过科学技术部工程科学委员会提供的启动研究资助（编号：SRG/2022/000151）资助。

## 致谢

作者谨向 Dr. Sourabh Bhattacharya 致以谢意，感谢他提出富有见地的评论和宝贵建议，并感谢 Mr. Javed Hazarika 和 Mr. Sourojyoti Barick 在 R 编程方面提供的支持。

## 作者贡献

所有作者的贡献均等。

## 附加信息

补充信息：在线版本包含 《**使用贝叶斯方法对零膨胀纵向圆形数据进行建模：在眼科学中的应用》的补充材料** 可通过以下 DOI 获取：10.13140/RG.2.2.17773.24807。

## 参考文献

Agarwal, R. P., Perera, K., and Pinelas, S.（2011年）。《复分析导论》。Springer，纽约州纽约市。 https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0195-7。

Artes, R., Paula, G. A., and Ranvaud, R.（2000年）。基于广义估计方程的圆形纵向数据分析。《澳大利亚与新西兰统计学杂志》，42(3):347–358。 https://doi.org/10.1111/1467-842X.00131。

Bakshi, P.（2010年）。棕色白内障各种手术技术的评估。未发表的学位论文，Disha眼科医院，印度西孟加拉邦。

Bhattacharya, S. 和 SenGupta, A.（2009）。半参数线性-圆形模型的贝叶斯分析。《农业、生物与环境统计学杂志》，14(1)：33–65。https://doi.org/10.1198/jabes.2009.0003。

Cameron, A. C. 和 Trivedi, P. K.（2005）。微观计量经济学：方法与应用。剑桥大学出版社，剑桥。 http://www.cambridge.org/9780521848053。D'Elia, A.、Borgioli, C. 和 Scapini, F.（2001）。自然条件下沙跳虫在重复试验中的定向：一项使用纵向方向数据的分析。《河口、海岸与陆架科学》，53(6)：839–847。 https://doi.org/10.1006/ecss.2001.0827。Downs, T. D. 和 Mardia, K. V.（2002）。圆形回归。《生物统计学》，89(3)：683–698。 https://doi.org/10.1093/biomet/89.3.683。Fisher, N. I. 和 Lee, A. J.（1992）。角度响应变量的回归模型。《生物统计学》，48(3)：665–677。 https://doi.org/10.2307/2532334。Ghosh, S. K.、Mukhopadhyay, P. 和 Lu, J. C.（2006）。零膨胀回归模型的贝叶斯分析。《统计规划与推断杂志》，136(4)：1360–1375。 https://doi.org/10.1016/j.jspi.2004.10.008。Hashemi, H.、Fotouhi, A.、Yekta, A.、Pakzad, R.、Ostadimoghaddam, H. 和 Khabazkhoob, M.（2018）。屈光不正患病率的全球和区域估计：系统综述与荟萃分析。《当代眼科学杂志》，30(1)：3–22。 https://doi.org/10.1016/j.joco.2017.08.009。Hernandez-Stumpfhauser, D.、Breidt, F. J. 和 van der Woerd, M. J.（2017）。任意维度的一般投影正态分布：建模与贝叶斯推断。《贝叶斯分析》，12(1)：113–133。 https://doi.org/10.1214/15-BA989。Jammalamadaka, S. R. 和 SenGupta, A.（2001）。《圆统计学专题》。《多元分析丛书》第5卷。世界科学出版社。 https://doi.org/10.1142/4031。Jha, J. 和 Bhuyan, P.（2021）。具有零膨胀的两阶段圆形—圆形回归：应用于医学。《应用统计年刊》，15(3)：1343–1365。 https://doi.org/10.1214/20-AOAS1429。Jha, J. 和 Biswas, A.（2017）。多重圆-圆回归。《统计建模》，17(3)：142–171。 https://doi.org/10.1177/1471082X16679501。Jha, J. 和 Biswas, A.（2018）。具有零点尖峰的圆形-圆形回归模型。《医学统计学》，37(1)：71–81。 https://doi.org/10.1002/sim.7496。Kato, S.、Shimizu, K. 和 Shieh, G. S.（2008）。一种圆形-圆形回归模型。《中华统计学》，18：633–645。 https://www.jstor.org/stable/24308499。Kelman, C. D.（1967）。超声乳化与抽吸：一种新的白内障摘除技术：初步报告。《美国眼科学杂志》，64(1)：23–35。 https://doi.org/10.1016/0002-9394(67)93340-5。

Kim, H., Whang, W. J., and Joo, C. K.（2016）。白内障手术后患者的角膜散光：10年随访研究。《屈光手术杂志》，32(6):404–409。 https://doi.org/10.3928/1081597X-20160303-01。Mackenzie, J. K.（1957年）。取向关系的估计。《晶体学报》，10:61–62。 https://doi.org/10.1107/S0365110X57000146。Mardia, K. V. and Jupp, P. E.（2009）。《方向统计学》。Wiley概率与统计系列。约翰·威立父子出版公司。 https://books.google.co.in/books?id=PTNiCm4Q-M0C。Maruotti, A.（2016）。采用投影正态模型分析纵向圆形数据：一种基于有限混合模型的半参数方法。《环境与生态统计》，23:257–277。 https://doi.org/10.1007/s10651-015-0338-3。Nuñez-Antonio, G. and Gutiérrez-Peña, E.（2014）。一种基于投影正态分布的纵向圆形数据贝叶斯模型。《计算统计与数据分析》，71:506–519。 https://doi.org/10.1016/j.csda.2012.07.025。Nuñez-Antonio, G., Gutiérrez-Peña, E., and Escarela, G.（2011）。一种基于投影正态分布的圆形数据贝叶斯回归模型。《统计建模》，11(3):185–201。 https://doi.org/10.1177/1471082X1001100301。Presnell, B., Morrison, S. P., and Littell, R. C.（1998）。用于方向数据的投影多元线性模型。《美国统计学会杂志》，93:1068–1077。 https://doi.org/10.2307/2669850。Read, S. A., Collins, M. J., and Carney, L. G.（2007）。散光及其可能发生机制综述。《临床与实验验光学》，90(1):5–19。 https://doi.org/10.1111/j.1444-0938.2007.00112.x。Remón, L., Monsoriu, J. A., and Furlan, W. D.（2017）。不同类型散光对视力的影响。《验光学杂志》，10(3):141–148。 https://doi.org/10.1016/j.optom.2016.07.003。Rivest, L. P.（1997）。用于圆形—圆形回归的偏心预测变量。《生物统计学》，84(3):717–726。 https://doi.org/10.1093/biomet/84.3.717。Rivest, L. P. and Kato, S.（2019）。聚类圆形数据的随机效应模型。《加拿大统计学杂志》，47(4):712–728。 https://doi.org/10.1002/cjs.11520。Sarma, Y. R. and Jammmalamadaka, S. R.（1993）。圆形回归。载于《统计科学与数据分析》（东京，1991），第109–128页。VSP，乌得勒支。SenGupta, A. and Kim, S.（2016）。两个环状基因组中同源基因对的统计推断：一种新的圆形—圆形回归模型。《统计方法与应用》，25:421–432。 https://doi.org/10.1007/s10260-015-0341-8。

Shing, E., Kam, K. W., Zaabaar, E., Zhang, X. J., Young, A. L., Pang, C. P., Tham, C. C., Yam, J. C., and Chen, L. J.（2025年）。散光和角膜曲率的遗传力与遗传因素：系统综述与荟萃分析。《美国眼科学杂志》，269:161–171。 https://doi.org/10.1016/j.ajo.2024.08.019。Singh, K., Misbah, A., Saluja, P., and Singh, A. K.（2017年）。手法小切口白内障手术综述。《印度眼科杂志》，65(12):1281–1288。 https://doi.org/10.4103/ijo.ijo_863_17。Twisk, J. W. R.（2023年）。《医学科学中的应用纵向数据分析：实用指南》。剑桥大学出版社。 https://doi.org/10.1017/9781009288002。Wang, F. and Gelfand, A. E.（2013年）。一般投影正态分布下的方向数据分析。《统计方法学》，10(1):113–127。 https://doi.org/10.1016/j.stamet.2012.07.005。Wilson, R. P., Williams, H. J., Holton, M. D., Virgilio, A., Börger, L., Potts, J. R., Gunner, R., Arkwright, A., Fahlman, A., Bennett, N. C., Alagaili, A., Cole, N. C., Duarte, C. M., and Scantlebury, D. M.（2020年）。用于考察动物头部运动的“方向球”可视化方法。《生态学与进化》，10:4291–4302。 https://doi.org/10.1002/ece3.6197。Wolffsohn, J. S., Bhogal, G., and Shah, S.（2011年）。未矫正散光对视力的影响。《白内障与屈光手术杂志》，37(3):454–460。 https://doi.org/10.1016/j.jcrs.2010.09.022。