arXiv:2601.14040v1 [math.GT] 20 Jan 2026

三维空间、球与球面上的不变紧接触结构分类

MIRKO TORRESANI

摘要。我们证明了关于三维空间、球与球面上紧接触结构的一些分类结果，这些结构在某个任意对合下保持不变，也就是说，该对合共轭于绕 x 轴的标准旋转。与经典情形不同，这里出现了一种新的整数扭转，它决定了等价类之间的分裂。这些工具或可用于强可逆 Legendrian 结的后续分类研究。

目录

1. 引言 1 2. 等变 Giroux 定理与 Darboux 定理 3 3. 等变凸理论 8 4. 等变断层理论 16 4.1. 重构与唯一性引理 18 4.2. 定义扭转挠子 20 4.3. 定理 5 的证明 23 5. 定理 1 和定理 2 的证明 28 6. 定理 3 和定理 4 的证明 30 参考文献 31

1. 引言

近年来，强可逆 Legendrian 结的研究受到了广泛关注。本文旨在为 $\mathbb{R}^3$、 S^3 和 B^3_{std} 中的紧接触结构建立一些基本分类结果，这些结构在此类空间上的某种 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$作用下保持不变。

回顾一下，在定向三维流形 M 上，接触结构 ξ 是一个平面分布：若在局部取一个形式 α，其核为 ξ，则$\alpha \wedge d\alpha$ 是一个处处不为零的三形式。若存在全局 1-形式 α，使得结构 ξ 与 Ker(α) 重合，且 $\alpha \wedge d\alpha$ 相对于 M上的定向为正，则称该结构为正向共定向。下文中我们始终假设这一条件成立。

若存在一个嵌入圆盘 D，使得对每个 $p \in \partial D$，T_pD 与 ξ_p 仅在 $T_p\partial D$ 处相交，则接触结构 ξ 是过扭的。若 ξ 不是过扭的，则称其为紧。

2020 数学学科分类。主要分类：57K33、57M60；次要分类：57K10。

此外，对于定向曲面 S，在邻域 $S \times \mathbb{R}$ 中，接触形式可写为 $\beta_z + w_z\, dz$，其中 w_z: $S \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，且β_z 可视为一个 1-形式 S。接触条件为

$$w_z\, d\beta_z + \beta_z \wedge (dw_z - \dot{\beta}_z) > 0\,. \tag{1}$$

此外，若我们赋予 S 一个面积形式 Ω，那么我们将 特征叶状结构 S_ξ 定义为满足以下条件的唯一向量场 X： $i_X\Omega = \beta_0$，其中 i_X 是通过将 X 代入第一个分量得到的缩并。 X 的奇点是平面 ξ_p 与 T_pS 重合的点。我们为这些奇点赋予符号：如果这些平面具有相同的定向，则为正；否则为负。

最后，给定一个全局接触形式 α，*Reeb* 向量场 是满足以下条件的唯一向量场 $R_\alpha \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$:

$$d\alpha(R_\alpha, \cdot) \equiv 0$$
$$\alpha(R_\alpha) \equiv 1.$$

现在让我们介绍将要使用的对合。起初，我们希望固定一个一般位置的对合 u，其作用于 $\mathbb{R}^3$，并具有以下性质：

1）它可扩展为 S^3的保无穷远对合；2）不动点集非空，并且在每个不动点处，视为切空间上的自同态的微分可对角化为$[1] \oplus [-1] \oplus [-1]$。

感谢 Waldhausen的结果，这样的 u 与一个标准旋转共轭。不过，将这一推理抽象化并延伸至最后一节会更有用。

我们称接触结构 ξ 不变，若 $u^*\xi = \xi$ 且 $u^*\alpha = -\alpha$。我们的目标是将这类对象按等变同伦分类，即按满足 $\psi_t \circ u$ 与 $u \circ \psi_t$重合的空间的同伦 ψ_t 分类。于是，三个主要定理如下。为便于后文引用，我们的同伦总是从恒等映射开始。

定理 1。在 $\mathbb{R}^3$ 上的紧接触结构，按等变同伦分类只有一个等价类。

定理 2。若这样的作用 u保持标准3球的补集，则在$(B^3_{std})^c$上、在 $S^3 = \partial B^3_{std}$上诱导固定特征叶状结构的不变紧接触结构，按等变同伦分类只有一个等价类。

定理 3. 若此作用 u 保持标准3维球，则在 B^3_{std} 上诱导固定特征叶状结构于 $S^3 = \partial B^3_{std}$ 的不变紧接触结构集合，模去等变同伦后构成一个 $\mathbb{Z}$-挠子。

定理 4. 在 S^3 上的不变紧接触结构集合，模去等变同伦后构成一个 $\mathbb{Z}$-挠子。

在进入下一节之前，我们先简要定义一下将要讨论的曲面和向量场。所有曲面均为定向连通曲面。

定义。若曲面 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ 在 u 下保持不变，且配备面积形式 $\Omega \in \Lambda^2 S$，满足 $u^*\Omega = \Omega$，则称其为 u-定向的。

定义。给定一个 u-定向曲面 S，其上的反不变奇异叶状结构是

$$\{X \in \mathfrak{X}(S) \mid u^*X = -X\}/\sim,$$

其中

1) 点 p 处的 u^*X 定义为通过微分对 $X(u(p))$ 的拉回；2) 若存在光滑函数 $f\colon Z \to \mathbb{R}^+$ 使得 $f \circ u = f$ 且 $X' = fX$，则 X 与 X' 等价。

由不变接触结构诱导的 u-定向曲面上的特征叶状结构的等价类，是此类叶状结构的一个例子。

此后将省略术语反不变，并将前述向量场统称为奇异叶层。

本文结构安排如下。第2节陈述并证明接触拓扑中经典定理的等变版本；第3节专门进一步阐述该定理，以为基础等变凸理论奠定基础。尽管这是一个全新的研究框架，大部分工作在于验证 u 作用保持相关量不变。最后的准备工作在第4节完成，该节证明了 $S^2 \times [-1,1]$ 中不变紧接触结构的分类定理。等变情形与经典情形的分歧也由此显现：出现了一个新的 $\mathbb{Z}$-挠子，它决定了等价类之间的划分。最后，第5节和第6节用于证明主要结果。

2. 等变 Giroux 定理与 Darboux 定理

本节旨在陈述并证明接触拓扑中经典结果的等变版本：Gray 定理、Giroux 定理与 Darboux 定理。命题2.2、2.3和2.5分别给出了这些定理的相应表述。

引入如下记号：给定一个曲面 S，我们将把在 $S \times \mathbb{R}$ 上的作用扩展为 $u(x,\ y) = (u(x)\ y)$。

命题 2.1. 每个 u定向曲面都存在一个与 $S \times \mathbb{R}$微分同胚的管状邻域，该邻域是 u等变的，并且作用由上述约定给出。

证明. 由于 u 是一个对合，其作用可视为一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，而后者是紧群。因此，我们可以在 S上固定一个不变黎曼度量 g。根据 Bredon [Bre72, 定理 2.2]，在法丛 $N(S) = TS^{\perp} \subseteq T\mathbb{R}^3$中，存在一个足够小的不变邻域 U，使得指数映射 $\exp\colon U \to M$ 是一个嵌入。注意，指数映射是等变的，法丛上的作用由微分给出。

那么，映射 $\exp(U)$ 的像就是我们所要寻找的管状邻域。此外，由于 $N(S)$ 是一个定向1-丛，因此作为向量丛，它与 $S \times \mathbb{R}$ 同构。在每个纤维中取范数为 1 且方向为正的向量，即可赋予一个典范同构。

最后，由于 u 是一个 g-等距变换，它必将 $(x,\ y)$ 映射到 $(u(x)\ \pm y)$ 中。由于 u 保持 S 和 $\mathbb{R}^3$ 的定向，因此该符号必为负号。□

命题 2.2。 设 ξ_t、 $t \in [0,1]$ 是 S^3 上不变接触结构的光滑族。则存在一个等变同伦 ψ_t ，使得 $T\psi_t(\xi_0) = \xi_t$。

证明。 我们需要求解的方程是

$$\psi_t^* \alpha_t = \lambda_t \alpha_0$$

对于某个函数族 λ_t: $S^3 \to \mathbb{R}$。对前一个方程取导数，我们得到

$$\psi_t^*(\dot{\alpha}_t + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t) = \dot{\lambda}_t \alpha_0 = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\psi_t^*\alpha_t \,,$$

wh此处 t he dot d表示 t he d导数，关于 h 关于 t [Gei08, Lemma 2.2.1]

令 $\mu_t := \frac{d}{dt}(\log \lambda_t) \circ \psi_t^{-1}$，并使用嘉当公式[1]，得到

$$\psi_t^*(\dot{\alpha}_t + d(\alpha_t(X_t)) + \iota_{X_t}\alpha_t) = \dot{\lambda}_t\alpha_0 = \psi_t^*(\mu_t\alpha_t)\,.$$

作拟设 $X_t \in \xi_t$，前一个方程推出

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_t + i_{X_t} d\alpha_t = \mu_t \alpha_t \\ \dot{\alpha}_t(R_t) = \mu_t \end{cases}, \tag{2}$$

其中 R_t 是 α_t的Reeb向量场。

最后，在定义了 μ_t 之后，我们可以选取唯一满足方程 (2) 的元素 $X_t \in \xi_t$: 将 1-形式限制到 ξ_t 上，就能确定一个精确的 X_t，这得益于 $d\alpha_t$ 的非退化性；作出这样的选择后，方程 (2) 成立，因为 $R_t \in$ 核$(\mu_t\alpha_t - \dot{\alpha}_t)$。

此外

$$\mu_t \circ u = u^*\mu_t = u^*[\dot{\alpha}_t(R_t)] = -\dot{\alpha}_t(-R_t) = \mu_t\,.$$

因此， u^*X_t 满足以下等式:

$$u^*\dot{\alpha}_t + i_{u^*X_t} du^*\alpha_t = \mu_t u^*\alpha_t\,,$$

可改写为

$$-\dot{\alpha}_t - i_{u^*X_t} d\alpha_t = -\mu_t\alpha_t\,.$$

因此， u^*X_t 满足与 X_t 相同的方程，故两者必定相等。对 X_t 积分后，我们得到具有所需性质的等变同伦 ψ_t 。□

前述讨论对于 $\mathbb{R}^3$中的接触结构同样成立。然而，最后一步不再成立，而且我们只能在紧集上对 $[0,1]$ 上的 X_t 积分；若 X_t 在该集合之外消失，则也可以在整个 $\mathbb{R}^3$ 上积分。

命题 2.3. 设 S_0 和 S_1 是 $\mathbb{R}^3$中的两个 u定向紧曲面，并设 ϕ: $S_0 \to S_1$ 是一个等变微分同胚，使得对于两个不变接触结构，有 $\phi(S_{0,\xi_0}) = S_{1,\xi_1}$是奇异叶状结构。那么存在适当的不变邻域及一个等变接触同胚ψ: $\mathcal{N}(S_0) \to \mathcal{N}(S_1)$，使得 $\psi|_{S_0}$可通过保持特征叶状结构的同伦与 ψ 同伦。

[1]对时变向量场也成立，参见 [Gei08，附录 B]。

证明。 在 S_0 和 S_1的不变管状邻域上（它们与$S_i \times \mathbb{R}$微分同胚），接触形式可写为 $\beta_z^i + w_z^i dz$，其中 β_z^i 和 u_z^i 是反不变的。

根据假设，存在一个函数 $f\colon S \to \mathbb{R}$，使得 β_0^0 与 $f\phi^*\beta_0^1$重合，且 f 恒为正或恒为负。其符号取决于 ϕ 是否保持了 S_0 和 S_1的定向。此外， f 关于 u作用是不变的。

其次，考虑将 ϕ 从 $S_0 \times \mathbb{R}$ 自然延拓到 $S_1 \times \mathbb{R}$，并将其与不变邻域相对应，使得接触形式$f\,\phi^*\alpha_1$ 在 $S_0 \times \mathbb{R}$中正向共定向。

定义 $\mathcal{N}(S_0) \cong S_0 \times \mathbb{R}$ 上的形式族 α_t 如下：

$$\alpha_t \coloneqq (1-t)\alpha_0 + t f \phi^* \alpha_1 \,.$$

方程 (1) 关于 β_z 和 w_z同时为线性，且 α_t 在 $S \times \{0\}$上诱导相同的形式 β_0。因此，接触条件在 $S \times \{0\}$上满足，并且在一个小邻域 $|z| < 1$ 内也将满足。此外， α_t 始终是反不变的。

根据命题 2.2，我们可以在 S_0 的一个小邻域 $\mathcal{N}(S_0)$ 中构造一个等变接触同伦，并保持 S_0 不变。将 X_t 称为向量场 $\frac{d}{dt}\psi_t$。

在空间 TS_0 上，我们有 $\dot{\alpha}_t \equiv 0$，因为 α_0 和 $f\phi^*\alpha_1$ 诱导出相同的形式 β_0。因此，对于每个切于 $(S_0)_{\xi_0}$ 的 v，我们有

$$\mathcal{L}_{X_t}\alpha_t(v) \overset{(\triangle)}{=} i_{X_t} d\alpha_t(v) + d i_{X_t}\alpha_t(v) \overset{X_t \in \xi_t}{=} i_{X_t} d\alpha_t(v) \overset{(*)}{=} -\dot{\alpha}_t(v) = 0\,,$$

其中，等式 (△) 由嘉当公式得以证明，而等式 (∗) 则由命题 2.2 的证明中出现的方程 (2) 得以证明。因此， X_t 的流必定保持 β_0 不变，从而保持特征叶状结构。

最后，通过设定 $\psi \coloneqq \phi \circ \psi_1$，分布 $T\psi(\xi_0)$ 与 ξ_1 重合，而 ψ 就是所需的微分同胚。□

命题 2.4。 在前述定理的假设下，我们可以找到一个更强的 ψ，使得 $\psi|_{S_0} = \phi$。

证明。 我们希望重用命题 2.2 的证明，而不强制要求 X_t 属于 ξ_t。

如同前面的定理，我们知道，对于某个函数 f， α_0 和 $f\phi^*\alpha_1$ 在 $S_0 = S_0 \times \{0\}$ 上诱导出相同的形式 β_0；特别地， $\dot{\alpha}_t|_{TS_0} \equiv 0$。不再要求 X_t 在 α_t 上消失后，所需的条件变为

$$\dot{\alpha}_t + d(\alpha_t(X_t)) + i_{X_t} d\alpha_t = \mu_t \alpha_t \,,$$

其中

$$\mu_t = \frac{d}{dt} \log \lambda_t \circ \psi_t^{-1} \,.$$

记 $X_t = H_t R_t + Y_t$，其中 $Y_t \in$ 核 α_t。于是前面的条件变为

$$\dot{\alpha}_t + dH_t + i_{Y_t} d\alpha_t = \mu_t \alpha_t \,. \tag{3}$$

方程（3）在 Reeb 向量场上取值后，便可通过 H_t 完全确定 μ_t。完成这一步后， Y_t 由非退化性 $d\alpha_t|_{\xi_t}$ 确定。

函数 H_t 由以下系统确定；由于条件 $\dot\alpha_t|_{TS_0} \equiv 0$，其中的方程彼此相容：

$$\begin{cases} \dot\alpha_t + dH_t = 0 & \text{on } S_0 \\ H_t \equiv 0 & \text{on } S_0 \end{cases}. \tag{4}$$

此时，向量场 X_t 确定了一个逐点固定 S_0 的流 ψ_t。

此外，我们来证明 $u^* X_t = X_t$ 成立。首先，由方程（4）可得

$$u^* dH_t = -u^* \dot\alpha_t = \dot\alpha_t = -dH_t\,.$$

因此，方程（3）推出 $u^* Y_t = Y_t$。于是 u^* 也保持 $X_t = H_t R_t + Y_t$。□

命题 2.5. 设 u 由 $(x, y, z) \mapsto (x, -y - z)$给出。给定 $\mathbb{R}^3$ （或 S^3）中的一个不变接触结构，我们可以找到一个全局等变同伦，使得在原点的一个小邻域内，ξ 与核$(dz - y\,dx)$ 重合。

证明。 我们将构造接触结构的一个变形，并通过命题 2.2 实现它。

首先，令 $v \in T_{\mathbf{0}}\mathbb{R}^3$ 满足 $\alpha(\mathbf{0})$ 与 $\langle v,\ \cdot \rangle$ 重合。由于 $u^*\alpha$ 等于 $-\alpha$，因此 $d_p u(v)$ 与 $-v$ 重合。

因此，向量 v 属于 yz-平面。此外，经过如下形式的同伦

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

我们可以假设 v 是向量 ∂_z 的正倍数。因此，$\xi(\mathbf{0})$ 被置于 xy-平面上。此外，不失一般性，我们可以假设所选的接触形式满足 v 是向量 ∂_z。此外，$d\alpha(\mathbf{0})$ 是 $\xi(\mathbf{0})$ 上一个正向定向的辛 2-形式。因此，对于某个正的 λ，$d\alpha|_{\xi(\mathbf{0})}$ 等于 $\lambda\, dx \wedge dy$。

因此，通过如下形式的同伦对 x-轴和 y-轴进行缩放

$$\psi_t\colon \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto (1-t) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda}\, x \\ \sqrt{\lambda}\, y \\ z \end{bmatrix}$$

并用 $T\psi_1^{-1}(\xi)$ 替换 ξ，我们实际上可以假设 $d\alpha|_{\xi(\mathbf{0})}$ 与 $dx \wedge dy$ 重合。

现在我们希望在整个切空间 $T_{\mathbf{0}}\mathbb{R}^3$ 上调整二形式 $d\alpha$。首先，由于它是反不变的，等式

$$d\alpha(\mathbf{0}) = dx \wedge dy + \mu\, dx \wedge dz\,.$$

必须成立。接下来，将 α 替换为一个新的接触形式 α'，它定义了相同的结构，具体如下：

$$\alpha_1 \coloneqq e^{-\mu x}\alpha\,.$$

Then

$$d\alpha_1 = -\mu e^{-\mu x}\, dx \wedge \alpha + e^{-\mu x}\, d\alpha\,,$$

and

$$\begin{cases} d\alpha_1(\mathbf{0}) = dx \wedge dy \\ \alpha_1(\mathbf{0}) = \partial_z \end{cases}.$$

最后，只需令 $\alpha_0 := dz - y\,dx$，并将其与 α_1进行插值。由于原点处的 α_t、$d\alpha_t$ 分别恒为 α_1 和 $d\alpha_1$，因此在原点附近，该插值是一个接触形式。最后，只需使用截断函数，在远离原点处将 α_t 与 α 进行径向插值。于是由命题 2.2 得出结论。□

推论 2.6. 假设 u 由 $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$ 给出。在等变同伦意义下，任意两个 $\mathbb{R}^3$ 上的不变接触结构都可以在原点的一个小邻域内变得相同。

最后，我们用一个引理结束本节，它使我们能够从奇异叶状结构重构接触结构。

引理 2.7. 设 S 是嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 u 定向紧曲面。S 上的向量场 X 表示某个在 S 附近定义的不变接触结构的特征叶状结构，当且仅当它满足条件

$$\mathrm{div}_\Omega(X)(p) \neq 0 \ \textit{if}\ X(p) = 0\,.$$

证明. 我们先证明一个方向：固定一个在 S 附近的不变接触结构 ξ，以及一个定义特征叶状结构的向量场 X。局部接触形式可写为 $\beta_z + w_z dz$，其中 $\beta := \beta_0$。若 X 的一个奇点为 p，我们知道平面 T_pS 与 ξ_p 重合。因此

$$\mathrm{div}_\Omega(X)(p)\,\Omega_p = (d(i_X\Omega))_p = (d\beta)_p = d\alpha|_{T_pS} = d\alpha|_{\xi_p} \neq 0\,.$$

因此，$\mathrm{div}_\Omega(X)$ 在 X 的任何奇点处都不能为零。

另一方面，固定 S 上满足散度条件的向量场 X，并令 $w\colon S \to \mathbb{R}$，使得 $d\beta = w\Omega$，其中 $\beta := i_X\Omega$。根据构造，$u^*w = -w$。

注意，β 和 X 的零点集相同。并且，如果 p 是这样的一个点，那么

$$0 \neq \mathrm{div}_\Omega(X)(p)\,\Omega_p = (d(i_X\Omega))_p = (d\beta)_p\,.$$

因此，$w(p)$ 在这些点处不能为零。

其次，在 S 上固定一个不变黎曼度量 g。由于 S 是定向的，我们知道存在唯一的 $\gamma \in \Lambda^1 S$，使得

$$\begin{cases} \|\gamma\|_g = \|\beta\|_g \\ \langle \beta, \gamma \rangle_g = 0 \\ (\beta \wedge \gamma)/\Omega \geq 0 \\ (\beta \wedge \gamma)/\Omega > 0 \quad \text{if } \beta(p) \neq 0 \end{cases}$$

此外，我们知道

$$\begin{cases} \|-u^*\gamma\|_g = \|\gamma\|_g = \|\beta\|_g \\ \langle \beta, -u^*\gamma \rangle_g = \langle u^*\beta, u^*\gamma \rangle_g = \langle \beta, \gamma \rangle_g = 0 \\ (\beta \wedge -u^*\gamma)/\Omega = u^*[(\beta \wedge \gamma)/\Omega] \geq 0 \end{cases},$$

因此 $u^*\gamma$ 与 $-\gamma$重合。

现在令

$$\beta_z \coloneqq \beta + z(dw - \gamma)$$

and

$$\alpha' \coloneqq \beta_z + w\, dz\,.$$

那么 $u^*\alpha' = -\alpha'$，并且

$$w\, d\beta_0 + \beta_0 \wedge (dw - \dot{\beta}_z|_{z=0}) = w^2\Omega + \beta \wedge \gamma > 0,.$$

因此， α' 在 S 附近定义了一个不变接触结构。 □

3. 等变凸理论

本节的目标是构建必要的基础工具，以便将基本凸理论应用于我们的等变情形。

定义 3.1. 若群 G 在流形 X 上的作用满足：对于某些 $g \in G$ 和 $x \in X$，$g \cdot x = x$ 蕴含 $g = \mathrm{id}_X$，则称该作用为自由。

命题 3.2. 设 G 是有限群；令 M, N 为 G-流形，后者配备了一个 G-不变黎曼度量； A 是 M 的一个 G-不变闭子集， Y 是 N 的一个 G-子流形。设 $f\colon\ M \to N$ 是一个光滑等变映射，在 A 上横截于 N 中的 Y。假设 $M \setminus A$ 上的 G- 作用是自由的。那么对于任意 G- 不变正连续函数 $\delta\colon$ $M \to \mathbb{R}$，都存在一个光滑 G-映射 $g\colon\ M \to N$，满足以下条件：

1) g 在 M 上横截于 N 中的 Y；*2)* $g|_A = f|_A$；*3)* $d_N(f(x)\ g(x)) < \delta(x)$ 对所有 $x \in M$ 均成立，其中 d_N 表示由 N 的黎曼度量诱导的 N 上的距离函数。

证明。 参见 [Mor14，定理 1.1]。 □

引理 3.3. 设 S 是一个闭曲面，配备一个除有限个点外均自由作用的对合，以及一个没有闭轨道、且在这些点上不消失的反不变向量场。那么它可以被C^∞-逼近为一个具有有限个奇点且这些奇点均非退化（即与零截面横截）的反不变向量场。

证明。 设 $G \coloneqq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。考虑 G-空间 $M \coloneqq S$ 和 $N \coloneqq TS$，其中第二个空间上的作用为

$$g \cdot (p, v) = (g \cdot p, -d_p g[v])\,.$$

反不变向量场恰好是命题 3.2 意义下的 G-等变截面。此外，我们知道，向量场 X 在 G的不动点处不消失。因此我们有

1) 在这些点之外， G 作用是自由的；
2) 在这些点上， X 与 TS的零点集横截这一条件自动成立。

因此，我们可以用一个新的映射 $X'\colon\ S \to TS$ 来逼近 X，该映射与零截面横截，但不一定是截面。令$X'(x) = (h(x)\ Y(x))$为属于 $h(x)$切空间的向量 $Y(x)$。令 π 为从 TS 到 S的自然投影。

由于 h 与恒等映射任意接近，因此可以认为它是从 S 到自身的微分同胚。于是， $Z := X' \circ h^{-1}$ 是一个接近 X且与 S横截的向量场。此外

$$(h \circ u)(x) = (\pi \circ X' \circ u)(x) = \pi[-d_{h(x)}u(Y(x))] = u(h(x)) \,,$$

因此 h 是 u-等变的。最后， Z 是一个反不变向量场:

$$\begin{aligned}(Z \circ u)(x) &= (X' \circ h^{-1} \circ u)(x) \\ &= (X' \circ u \circ h^{-1})(x) \\ &= -d_{hh^{-1}(x)}u[X'(h^{-1}(x))] \\ &= -d_x u[Z(x)] \,.\end{aligned}$$

因此 Z 就是所需的扰动。 □

回顾一下，给定曲面 S上的向量场 X ，奇点 p 是非退化的，当且仅当在坐标图中，来自 $\mathbb{R}^2$ 且映射到自身的线性映射 d_pX 的行列式非零。这样的点必然是一个孤立奇点。此外，如果该线性映射的特征值实部均非零，则 p 是一般位置的。最后，如果这些特征值的实部符号相同，我们称p 为椭圆型。否则， p 为双曲型。

定义 3.4. 若向量场 X 满足以下条件，则称其为莫尔斯–斯梅尔型:

1）奇点的数量有限，且均为一般位置；2）每条轨道的 α极限集和 ω 极限集只能是奇点或闭轨道；3）没有轨道连接双曲点；4）闭轨道的数量有限，且均为“简单”闭轨道。

我们不打算说明最后一项要求的含义，因为我们将完全避免闭轨道。

下一个命题是对 Peixoto 关于曲面上结构稳定向量场的经典工作的等变推广 [Pei62]。

命题 3.5。 设(S,Ω) 是一个配备面积形式的定向闭曲面。此外，假设 S 配备了一个具有有限个不动点且保持Ω不变的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-作用，并配备了一个没有闭轨道且在这些点上不消失的反不变向量场。那么，它可以被一个莫尔斯–斯梅尔反不变向量场 C^∞-逼近。

证明。 由引理 3.3 可知，我们可以对 X 进行扰动，使得所有奇点均为非退化。接着，适当的扰动可以使这些奇点处于一般位置；由于这种修改是在奇点的邻域内进行的，而这些奇点并非不动点，因此我们只需对称地进行操作，即可得到反不变扰动。

关于定义 3.4 的第二项和第三项要求，Peixoto 通过在远离奇点处、任意小的矩形区域内进行扰动来实现这些要求。这些矩形是围绕不动点定义的，其中 x-坐标使用 X 的流进行参数化。因此，采用与命题 2.1 相同的步骤，我们可以固定坐标 (x, y)，使 u-作用由 $(-x, -y)$ 给出。

因此，由于 Peixoto 扰动都具有如下形式

$$X' = X + \varepsilon\, u\, \phi\, Z$$

with

$$\begin{cases} \varepsilon, u \in \mathbb{R} \\ \phi \text{ some map } S \to \mathbb{R}, \phi > 0 \text{ only on the rectangle} \\ Z = (0, \pm 1) \end{cases},$$

显然， X' 是反不变的。

最后，经过小扰动不会出现闭轨道。 □

我们希望利用命题 3.5 对球面进行扰动，使特征叶状结构成为 Morse–Smale 型。首先，我们来确认所需的假设成立。

引理 3.6。 设 S 是一个与 S^2 同构的闭曲面，且配备对合 g ，使得在每个不动点处，微分都是负恒等映射。那么 g 必定恰有两个不动点。

证明。考虑所谓的*Lefschetz* 数

$$\Lambda_g := \mathrm{Tr}(g_{*,0}) + \mathrm{Tr}(g_{*,2}),$$

其中 $g_{*,\,i}$ 是由映射诱导的映射，作用于 $H_i(S^2,\ \mathbb{Q})$；当$i = 0,\ 2$ 时，该映射与 $\mathbb{Q}$ 同构，否则为零。

迹 $\mathrm{Tr}(g_{*,\,0})$ 为 1，因为 S 是连通的。迹 $\mathrm{Tr}(g_{*,\,1})$ 为 1，因为 g是保向微分同胚。因此 Λ_g 为 2。

运用不动点理论的经典结论（见[Dol12，第 VII 章],）可知

1）所有不动点的不动点指数均为不动点指数1，因为在这些点附近，u 可视为恒等映射的负映射；2）由于这些不动点都是孤立的，因此它们的数量有限，且 Lefschetz 数 Λ_g 等于它们的不动点指数之和。

因此 g 恰有 2 个不动点。 □

命题 3.7。 给定一个 u-定向曲面 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ，它与S^2微分同胚；再给定 $\mathbb{R}^3$中的一个紧不变接触结构 ξ ，我们可以对其作等变地C^∞微扰，使其特征叶状结构成为莫尔斯–斯梅尔。

证明。 首先观察到，条件

$$\mathrm{div}_\Omega(X)(p) \neq 0 \text{ if } X(p) = 0$$

仅取决于向量场 X，并且在 C^∞ 拓扑下是开集。此外，由于ξ 是紧的，且 S 与 S^2微分同胚，特征叶状结构不可能有闭轨道，因为其内部会是一个违反紧性条件的圆盘 [Gei08，命题 4.6。28]。

由引理 3.6，对合 $u|_S$ 恰好有 2 个不动点。此外，在这样的点 p 处，平面 ξ_p 和 T_pS 不可能重合，因为 d_pu 反转前者的定向，同时保持后者的定向。因此，我们可以应用命题 3.5。存在另一个向量场 $X' \in \mathfrak{X}(S)$，它是莫尔斯–斯梅尔的、反不变的，并且与 X C^∞-接近。由引理 2.7，我们可以在一个邻近的区域上找到反不变的接触形式 α'，

即 S 的邻域，并诱导出 X'。此外，它与 α C^∞-接近，并且可以使其在远离 S 的地方与后者重合。

因此我们可以定义 α_t 为 $t\alpha' + (1-t)\alpha$，由于α 和 α' 足够闭合，它是一个接触形式。根据命题 2.2，我们可以找到一个 $\mathbb{R}^3$ 的等变同伦 ψ_t，使得 $T\psi_t(\xi_t) = \xi$ [2]。注意到，$\psi_1^{-1}(S)$具有所需的特征叶状结构。事实上，如果我们用 ϕ 表示 ψ_1 在 $\psi_1^{-1}(S)$上的限制，并且在 $\psi_1^{-1}(S)$上施加面积形式 $\phi^*\Omega$，那么

$$i_{\phi^* X'}\, \phi^*\Omega = \phi^*(i_{X'}\Omega) = \phi^* j^* \alpha_1 = k^* \psi_1^* \alpha_1 = f\, k^* \alpha\,,$$

其中 j 和 k 分别是 S 和 $\psi_1^{-1}(S)$ 到 $\mathbb{R}^3$中的包含映射，而 f 是一个正函数。□

现在让我们进入本节的主要内容：凸曲面。回顾一下，相对于接触结构 ξ 而言，一个接触向量场 是指其流保持平面分布不变的向量场。此外，从 $\mathbb{R}^3$ （或 S^3）到 $\mathbb{R}$ 的光滑函数集合与接触向量场之间，通过以下对应关系 [Gei08, Thm. 2.3.1]构成一一对应：

$$X \mapsto \alpha(X)$$
$$H \mapsto X_H \text{ such that } \alpha(X_H) = H \text{ and } i_{X_H} d\alpha = dH(R_\alpha)\alpha - dH.$$

定义 3.8. 若一个 u-定向紧曲面 S 附近存在一个不变的接触向量场，且该向量场横截于 S，则称 S 为凸的。

命题 3.9. 一个 u-定向曲面 S 相对于不变接触结构 ξ 是凸的，当且仅当存在一个等变嵌入 $S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$，使得 $\Psi^*\alpha$ 确定一个竖直不变且 u-不变的接触结构。

证明。 考虑反不变函数 $H := \alpha(X)$，其中 X 为接触横截向量场。对 H 作扰动，使其在保持反不变的同时，在 S 之外为零。与 H 相关联的新接触向量场 Y是不变的，并且

$$\Psi(x,t) := \psi_t^Y(p)$$

就是所需的嵌入。此外，由于 $u^*Y = Y$，ψ_t 在空间变量上是 u-等变的，即 Ψ 按照我们关于 $S \times \mathbb{R}$的约定是等变的。因此 $\Psi^*\alpha$ 是反不变的。并且由于

$$T\Psi(p,t)(\partial_t) = \dot{\psi}_t^Y(p) = Y(\psi_t^Y(p))\,,$$

我们知道，$\mathrm{Ker}(\Psi^*\alpha)$ 在竖直方向上保持不变，因为 Y 是一个接触向量场。

反过来，只需令 $Y := T\Psi(\partial_t)$。 □

命题 3.10。 在前述情形中，我们可以假设 $\Psi^*\alpha$ 是一个垂直不变且反不变的接触形式。

[2]准确地说，命题 2.2 给出了 ψ_t^{-1} 。

证明。沿用前一个证明中的记号，我们刚刚证明了 $\mathcal{L}_{\partial_t}(\Psi^*\alpha) = \mu\Psi^*\alpha$，其中 $\mu \circ u$ 与 μ 重合。并且由于

$$\mathcal{L}_{\partial_t}(\lambda\Psi^*\alpha) = \left(\frac{\dot\lambda}{\lambda} + \mu\right) \cdot (\lambda\Psi^*\alpha)$$

成立，我们只需通过选取.....来调整该形式

$$\lambda \coloneqq \exp\Big(-\int_0^t \mu(p,s)\,ds\Big)\,.$$

此外

$$\lambda \circ u = \exp\Big(-\int_0^t (\mu\circ u)(p,s)\,ds\Big) = \lambda\,.$$

因此 $\lambda\Phi^*\alpha$ 是一个具有所需性质的接触形式。 □

与非等变情形一样，凸曲面的信息包含在一个由“少量”圆构成的族中，称为分界曲线。

定义3.11。设 $\mathcal{F}$ 是 u定向闭曲面S上的一个奇异叶层。若一个由嵌入圆构成的不变集合 Γ 满足以下条件，则称其分割 $\mathcal{F}$

1) Γ 与 $\mathcal{F}$横截；特别地，它不与 $\mathcal{F}$的奇点相交；2) 在 S 上存在一个不变面积形式 Ω 和一个反不变向量场 X，定义 $\mathcal{F}$，使得

$$\mathcal{L}_X\Omega \neq 0$$

在 $S \setminus \Gamma$上，并且 $S_\pm = \{p \in S \mid \pm\mathrm{div}_\Omega(X) > 0\}$。因此，如果 $S \setminus \Gamma = S_+ \sqcup S_-$，向量场 X 沿着 Γ指向 S_+ 外部。

命题 3.12。如果一个闭合的、定向为 u的紧曲面 S 被一组 Γ 嵌入圆分割，那么相对于 ξ， S 是凸的。

证明。假设 S_ξ 被某个集合 Γ分割。我们需要证明 S 是凸的。令 Ω 和 X 分别为定义3.11中的面积形式和向量场。

令 $\beta = i_X\Omega$，并考虑 $S \times \{0\}$ 在 M中邻域 $S \times \mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{R}$-不变1-形式 $\alpha = \beta + w\,dz$，其中 w 是 S上的任意反不变光滑函数，且 z 表示 $\mathbb{R}$坐标。α 在 S 上诱导的奇异叶层恰为 S_ξ。 α 为接触形式的条件由方程（1）给出，在此情形下变为

$$w\,\mathrm{div}_\Omega(X) - X(w) > 0.$$

在 $S_\pm$ 上，对 $w \equiv \pm 1$ 而言，这个条件成立。

现在利用 X 的流，将 Γ 在 S 中的一个邻域 A 识别为由互不相交的环带组成的集合，其中 $\Gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$，使得 Γ 与 $\Gamma \times \{0\}$ 相识别。

再次利用 Bredon 关于不变管状邻域的结果，我们可以假设前一个微分同胚满足： Γ 的每个 u-不变分支都与 S^1 的一个邻域相识别，其中 u 的作用由下式给出

$$(\vartheta, s) \mapsto (-\vartheta, -s)\,.$$

参数 $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ 的选取满足 $X = -\partial_s$，因此 s 的符号与 $S_\pm$ 中的符号一致。现在令

$$h(\vartheta, s) \coloneqq \exp\left(-\int_0^s \operatorname{div}_\Omega(X)(\vartheta, t)\, dt\right)$$

并作出拟设

$$w(\vartheta, s) = g(\vartheta, s) \cdot h(\vartheta, s).$$

然后，注意到 $X(w) = -\partial w/\partial s$，可以计算得

$$w \operatorname{div}_\Omega(X) - X(w) = \frac{\partial g}{\partial s}\, h(\vartheta, s).$$

因此，若我们选择 g 使其满足以下条件，则 α 将是一个接触形式，且在 Γ 之外与 $\beta + dz$一致

$$\begin{cases} \partial g/\partial s > 0, \\ g(\vartheta, s) = \pm 1/h(\vartheta, s) \quad \text{near } s = \pm\varepsilon. \end{cases} \tag{5}$$

确实可以找到这样的光滑函数 $g(\vartheta, s)$，至少在忽略 u作用的情况下是如此。由此我们在 $S \times \mathbb{R}$ 上构造了一个 $\mathbb{R}$–不变接触结构 $\operatorname{Ker}\alpha$，因此相对于这个新的接触结构，S 是一个凸曲面。此外，由于 $\operatorname{Ker}\alpha$ 诱导出给定的特征叶状结构 S_ξ，根据命题 2.3，$\operatorname{Ker}\alpha$ 和 ξ 在 S 附近的芽相同。这意味着对于 ξ而言，S 也是一个凸曲面。

此外，在 Γ 的不变分支上，我们有 $w \circ u$ 与 $-w$一致。事实上，

$$\begin{aligned} h \circ u &= \exp\left(-\int_0^{-s} \operatorname{div}_\Omega(X)(-\vartheta, t)\, dt\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^{s} -\operatorname{div}_\Omega(X)(-\vartheta, -t)\, dt\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^{s} -u^* \operatorname{div}_\Omega(X)(\vartheta, t)\, dt\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^{s} -\operatorname{div}_{u^*\Omega}(u^* X)(\vartheta, t)\, dt\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^{s} \operatorname{div}_\Omega(X)(\vartheta, t)\, dt\right) = h\,, \end{aligned}$$

并且，选择 g 关于 s 为奇函数，可知 g，因此 w 是反不变的。对于由 u 互换的分量，只需在其中一个配对分量上定义函数 w，并令 $w \circ u$ 为 $-w$。

最后，我们还可以假设 $g(p, 0) = 0$，这样 Γ 实际上就是相对于向量场 ∂_z 的 分界集；关于相对定义，见 [Gei08，定义 4.8。1] □

当 S 是球面时，紧性条件迫使分界集尽可能简单。

命题 3.13。设 S 是一个闭的、凸的 u 定向曲面。若分界集 Γ 含有一个在 S 中可缩的圆 γ，则 S 的任何竖直不变邻域都是过扭的，除非 $S = S^2$ 和 Γ 是连通的。

证明。 参见 [Gei08，第 4.8 条命题。13] □

鉴于命题 3.12，我们想证明，当 S是球面且接触结构是紧的情况下，曲面的凸条件实际上是一般位置的。在此之前，我们需要给出一些关于与环带同构的曲面的定义。

定义 3.14. 设 A 是一个环带 $S^1 \times [-1,1]$，其上赋有保持定向的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-作用 u。神经 N 是形如$\{(\vartheta, f(\vartheta))\}$的不变集，其中 f是一个光滑函数 $S^1 \to [-1,1]$，且该作用在 N 上的定义为 $\vartheta \mapsto -\vartheta$。

引理 3.15. 假设该作用 u满足以下性质：

1) 在每个不动点处，视为切空间上自同态的微分都是负恒等映射；*2)* 该作用可写为 $(\vartheta, t) \mapsto (g(\vartheta)\ h(\vartheta, t))$；*3)* $h(\vartheta, \cdot)$ 对每个 ϑ都反转区间的定向。

那么 A 有一个神经。

证明。 我们采用引理 3.6 中的相同思路。

由于 u 保定向，而 h 反定向，因此映射 g：$S^1 \to S^1$ 是一个反定向微分同胚。此外，Lefschetz 数

$$\Lambda_u := \mathrm{Tr}(u_{*,0}) - \mathrm{Tr}(u_{*,1})$$

与 Λ_g一致。事实上，A 与 S^1同伦等价，其中 u 与 g被识别。

迹 $\mathrm{Tr}(g_{*,\,0})$ 为 1，因为 A 是连通的。迹 $\mathrm{Tr}(g_{*,\,1})$ 为 -1，因为g 与一个反射同伦等价，且反定向。因此$\Lambda_u = \Lambda_g$ 为 2。

因此，u和 g恰有 2 个不动点。设 $(\vartheta_1,\ t_1)$ 和 $(\vartheta_2,\ t_2)$ 为这两个不动点。经过缩放，可以将它们视为 $(0,\ t_1)$ 和 $(\pi,\ t_2)$。最后，若考虑任意映射 m：$[0,\pi] \to [-1,1]$，则由集合给出一个神经

$$N := \mathrm{Im}(m) \cup u(\mathrm{Im}(m))\,.$$

由于微分作用是恒等映射的负映射，集合 N 自然也粘合成一个光滑子流形。□

命题 3.16. 具有莫尔斯–斯梅尔叶状结构的 S，若其定向为 u，则为凸曲面。

证明。 根据命题 3.12，只需证明 S_ξ 存在分界曲线。我们保留定义 S_ξ 的向量场 X，但将调整 S上的面积形式 Ω。

令 $S^0_\pm \subset S$ 为由以下部分组成的带边界子流形：S_ξ 中（相应符号的）椭圆点周围的圆盘、分别围绕排斥或吸引周期轨道的环带，以及分别围绕正或负双曲点的稳定或不稳定分离曲线的带。我们可以假设 $S^0_+ \cap S^0_- = \emptyset$，且 X 横截于 $S^0_\pm$ 的边界。

在 $A := S \setminus (S^0_+ \cup S^0_-)$ 上，特征叶状结构无奇点、与边界横截，且没有闭叶。因此， A 是一组环带；令我们固定一个微分同胚

$$h \colon A \to \bigsqcup_i S^1 \times [-1,1] =: \bigsqcup_i S_i \,.$$

对于每个由 u 保持不变的环带 $S_{\bar{\imath}}$，引理 3.15 确定一个神经，并设定一个微分同胚，使得 $S_{\bar{\imath}}$ 上的作用具有形式 $(\vartheta,\ s) \mapsto (-\vartheta,\ -s)$。

此外，通过选择 S^0_- 并将 S^0_- 设为 $u(S^0_+)$，我们可以假设这些集合 $S^0_\pm$ 是 u 不变的。事实上， u 必须反转奇点的符号，因为它保持曲面 S 的定向，同时反转接触平面的定向。

在 A 上，我们赋予一个面积形式 Ω_A，其形式为 $f(s)\, d\vartheta \wedge ds$，使得 $\pm \mathrm{div}^{\Omega_A}(X) > 0$ 在 $A \cap S_\pm$ 上。事实上，计算可得

$$\mathrm{div}_{\Omega_A}(-\partial_s) = -\frac{f'}{f}\,,$$

因此，我们只需选择一个正函数 $f(s)$，使其在 $[-\varepsilon, 0)$ 上严格递增，并在 $(0,\ \varepsilon]$ 上严格递减。此外，显然可以选择这样的 f，使其为偶函数。这样， $u^*\Omega_A$ 就与 Ω_A 重合。

方程

$$\mathrm{div}_{g\Omega}(X) = \frac{X(g)}{g} + \mathrm{div}_{\Omega}(X)$$

表明，如果将面积形式缩放为 $g\Omega$（其中 $g\colon\ S \to \mathbb{R}^+$），奇点处的散度不会改变。同一方程还表明，沿着 X 的流线使 g 增长得足够快（并在每个奇点附近取某个常数），就可以使 $> 0 \mathrm{div}^{g\Omega}(X) > 0 \text{on } S^0_+$。同样，我们可以确保 $< 0\ \mathrm{div}^{g\Omega}(X) < 0 \text{ on } S^0_-$。如果假设 f 为 s-偶函数，我们可以令 g 不变。

现在我们使用 s 坐标，将 Ω_A 与 $g\Omega$ 拼接起来，定义第三个体积形式 Ω'。显然，可以通过使用偶截断函数使拼接具有 u-不变性。

最后，定义 $\Omega'' := k\Omega'$，其中 k 是一个函数，它在环带边界附近 $\equiv 1$，具有 u-不变性，并在 Γ 周围取某个较大的正数。若使它增长得足够快，则在 $\Gamma \times [-\varepsilon/3, \varepsilon/3]$ 的补集上， $\pm \mathrm{div}_{k\Omega'}(X) > 0$。最后，如果借助 Ω_A 满足了定义3.11的散度条件，那么借助 $K\Omega_A$ 也必定满足，因此在 Γ 附近，Ω'' 也满足该条件。

总之， A 的任意神经将 S_ξ分开，而根据命题 3.12， S 是凸的。□

推论 3.17. 给定一个 u定向的曲面 $S \subseteq \mathbb{R}^3$，它与S^2微分同胚，并且 ξ 在 $\mathbb{R}^3$ 上具有紧不变接触结构，我们可以对 S 进行等变地C^∞扰动，使其变为凸的。

证明。 只需使用命题3.7使 S_ξ 成为莫尔斯–斯梅尔型，因此根据命题 3.16， S 是凸的。□

4. 等变断层理论

本节将探讨断层理论，即通过切片$S^z := S^2 \times \{z\}$上的特征叶状结构来研究 $S^2 \times [-1,1]$ 上的接触结构。

我们假设乘积 $S^2 \times [-1,1]$ 配备了一个对合 u，使得

1）不动点集非平凡，由两条线段组成，每条线段都连接 $S^2 \times \{-1\}$ 和 $S^2 \times \{1\}$；2）在每个不动点处，微分均可对角化为 $[1] \oplus [-1] \oplus [-1]$。

我们将这种情形称为< стиль id='1'>等变层析。注意，在这种情形下，边界球面的定向必须保持不变，而对合在不动点处的微分限制为 $TS^{\pm 1}$ 负恒等映射。

基于这一设定，本节旨在证明以下结果。

定理 5. 设 $S^2 \times [-1,1]$ 是一个等变层析。对于 $S^2 \times [-1,1]$ 上边界具有固定特征叶状结构的不变紧接触结构，按相对边界的等变同伦取等价类后，其集合是一个 $\mathbb{Z}$-挠子。

在着手介绍证明定理 5 所需的工具之前，我们先为这个作用证明一个重要的约化结果。为此，我们将先给出几个技术性引理。

引理 4.1. 给定一个紧流形 M 和一个子流形 N，自然映射 $\mathrm{Diff}(M)$ 到 $\mathrm{Emb}(N, M)$ 是一个 *Serre* 纤维化（这些空间均赋予 C^∞ 拓扑）。

证明。 实际上，结论更强：根据 Palais，上述映射是一个局部平凡纤维丛 [Pal60]。不过，为了今后参考，给出一个部分证明仍然有用。

考虑任意映射 $\phi_{u,t}$，其定义域为 $D^n \times I$，陪域为 $\mathrm{Emb}(N, M)$，并且 $\phi_{u,t}$ 是从 N 到 M 的一个嵌入的光滑同伦；固定 ϕ_0 的一个提升 τ_u。我们希望将这个提升延拓到整个区间 I。换言之，我们需要找到一个微分同胚的同伦 $\sigma_{u,t}$，使得 $\sigma_{u,t}(N)$ 与 $\phi_{u,t}(N)$ 重合，并且 $\sigma_{u,0}$ 与 τ_u 重合。¨

对于每个点 $u \in D^n$，我们定义如下向量场：

$$X_{u,t} := \frac{d}{dt}\phi_{u,t} \in TM|_N .$$

在 M 上固定一个黎曼度量后，可以将 $X_{u,\,t}$ 规范地延拓为˜整个流形 M 上的一个新向量场 $X_{u,\,t}$，它在 N 的一个小邻域之外处处为零。因此，我们只需对这个向量场积分，即可定义 M 的一个新同伦 $\Phi_{u,\,t}$，使得

$$\begin{cases} \Phi_{u,0} = \mathrm{id}_M \\ \frac{d}{dt}\Phi_{u,t} = \tilde{X}_{u,t} \end{cases} .$$

˜由于$X_{u,t}$ 已扩展$X_{u,t}$ 该等式

$$\Phi_{u,t} \circ \phi_{u,0} = \phi_{u,t}$$

根据构造成立。因此我们将$\sigma_{u,t}$ 定义为$\Phi_{\bullet,\bullet} \circ \tau_{\bullet}$。于是$\sigma_{u,0}$ 与 σ_u重合，并且根据前一个等式，$\sigma_{u,t}$ 提升了ϕ_{u,t_0}。

Palais 的论证类似，而且很容易理解。他利用向量场和指数映射，为他声称局部平凡的映射找到局部截面。请注意，上述推理并不完整，因为先验地 我们必须处理从 $D^n \times I$到 Emb(N, M) 的连续映射，而这些映射在时间上没有任何光滑性假设。不过，如果 N 和 M 维数较低，我认为可以稍微修改上述证明，使其成立。□

命题 4.2. 考虑由固定两个不动点 s, s'的 S^2 的对合集合 $\mathcal{I}$ 。那么，从 $\mathrm{Diff}(S^2, s, s')$ 到 $\mathcal{I}$的自然共轭作用是 *Serre* 纤维化。

证明。 共轭作用是满射，见 [Eil34，定理 1]。然而，深入研究所引证明便可发现，实际情况更进一步。固定一条从 s 到 s'的弧 A ，并考虑一个对合 $g \in \mathcal{I}$。可以轻易构造出一个将 g 共轭到参考对合 g_0 的微分同胚。首先，固定一个将 $A \cup g(A)$映至 $A \cup g_0(A)$的标准映射。接下来，关键在于将这个映射延拓为两个圆盘之间的微分同胚，这两个圆盘分别由 $A \cup g(A)$和 $A \cup g_0(A)$围成。此时，只需延拓嵌入，最后可借助 Palais 的工作得出结论。

注意，若我们从一个光滑同伦 $g_t \in \mathcal{I}$ 开始，那么引理 4.1 的证明告诉我们，可以找到一个微分同胚的光滑同伦 ψ_t，使其固定 s 和 s'，并且 $\psi_t \circ g_t \circ \psi_t^{-1}$与 g_0 重合。□

命题 4.3. 存在一个从 $S^2 \times [-1, 1]$ 到其自身的微分同胚，它将 u 共轭为一个对合，该对合将 (s, z) 映射到 $(u|_S(s)\ z)$，其中 $S = S^2 \times \{-1\}$。

证明. u 的性质告诉我们，不动点集是一维子流形，而 $M := S^2 \times [-1, 1]$ 关于 u 的商空间 Q 是一个光滑可定向三维流形，其边界由来自 M 的两个球面的不交并构成。

此外，可以应用针对轨形的 Armstrong 定理 [Arm68]： 该商空间的基本群同构于 G/H，其中 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和 H 是由至少有一个不动点的元素构成的子群。因此，这样的基本群是平凡的。

因此， Q 是一个边界为 $S^2 \sqcup S^2$的单连通三维流形。由于庞加莱猜想已获证明，曲面之间的 h-协边界定理成立，因此流形 Q 实际上同构于 $S^2 \times [-1, 1]$。令 ϕ 为从 Q 到该乘积流形的一个微分同胚。

令 h为复合映射 $p_2 \circ \phi \circ \pi$，其中 π: $M \to Q$是乘积映射， p_2 是到第二个因子的投影。

该映射是满射下沉，且 M 是紧致的。因此，根据 Ehresmann 引理， [Ehr51] 该映射是$[0, 1]$上的局部平凡纤维丛。此外，由于该空间可缩，存在一个纤维丛微分同胚 ψ，将 M映至平凡纤维丛 $F \times [0, 1]$，其中 $F = S^2$。

我断言， ψ 就是我们要找的微分同胚。事实上，考虑 $S^2 \times [-1, 1]$中的一点（s， z），并应用 $\psi \circ u \circ \psi^{-1}$。点 ψ^{-1}（s， z）和

$u(\psi(s,\ z))$ 位于同一个 h-纤维中。由于 ψ 将 M 中的 h-纤维映射为形如 $S^2\times\{z\}$的集合，因此 $\psi(u(\psi^{-1}(s,\ z)))$ 的 z坐标必定保持不变。

因此我们得到这样一种情形：$u(s,\ z)$具有$(g(s,\ z),\ z)$的形式。我们希望找到 M 的一个微分同胚，使 g 与 z无关。首先，由于$u|_{S^z}$ 在 $z=\pm1$ 层保持定向，根据连续性，它必然在每一层都如此。因此，不动点集现在必定由两条与每一层恰好相交一次的线段组成：否则，球面 $S^2\times\{z\}$ 将带有一个仅具有正则不动点、且这样的不动点多于两个的保定向对合。这与引理 3.6 中的计算相矛盾。

因此，我们可以考虑由这类不动点构成的光滑变化的点对$(s_z,\ s'_z)$。根据引理 4.1 的证明，存在一个微分同胚的光滑族 ψ_z，使得 $\psi_z(s_z,\ s'_z)$等于$(s_0,\ s'_0)$。因此，微分同胚 $\psi_z\times\mathrm{id}_{[-1,1]}$ 将 M 映射到自身，并将 u 映射为一个以线段 $\{s\}\times[-1,1]$ 和 $\{s'\}\times[-1,1]$ 为不动点的对合。

最后，由命题 4.2，我们可以固定一个光滑的微分同胚族 ψ_z，使得 $\psi_z\circ g_z\circ\psi_z^{-1}$ 与 g_0 重合。从 M 到其自身的最终微分同胚于是由 $\psi_z\times\mathrm{id}_{[-1,1]}$ 给出。□

因此，经过坐标变换后，我们可以假设 u 具有命题 4.3 所规定的形式。

4.1. 重构与唯一性引理。在深入证明定理 5 之前，我们先陈述两个引理，以说明我们将要遵循的思路。

引理 4.4（重构引理）。设 $S\times[-1,1]$ 是一个等变层析，配备两个不变接触结构 ξ_0 和 ξ_1，且对于每个 $z\in[-1,1]$，叶状结构 $S^z_{\xi_i}$ 都相同。那么 ξ_0 和 ξ_1 在相对边界的意义下等变同伦。

证明。特征叶状结构的假设意味着我们可以写成

$$\alpha_i=\beta_z+w^i_z\,dz\,,$$

其中 β_z 与 $i=0,1$ 无关。此外，条件

$$w^i_z d\beta_z+\beta_z\wedge(dw^i_z-\dot\beta_z)>0$$

在固定 β_z 时是凸的。因此

$$\alpha_t\coloneqq t\alpha_1+(1-t)\alpha_0$$

是一个接触形式。由此根据命题 2.2 可知，ξ_0 和 ξ_1 是等变同伦的；由于接触形式的同伦在 $TS^{\pm1}$上保持不变，因此可以按照命题 2.4 构造一个边界相对同伦。□

引理 4.5 (唯一性引理)。设 $S\times[-1,1]$ 是一个等变拓扑同胚，配备了两个不变接触结构 ξ_0 和 ξ_1，并具有以下性质：

1) *the characteristic foliations $S^{\pm1}_{\xi_i}$ on the boundary of $S\times[-1,1]$ coincide for $i=0,1$;*

2) 对于任一接触结构，曲面 S^z、 $z \in [-1,1]$ 都是凸的，并且存在一个光滑变化的多重曲线族 Γ_z ，分割 $S^z_{\xi_0}$ 和 $S^z_{\xi_1}$。

那么， ξ_0 和 ξ_1 等变地相对边界同痕

证明。 选取接触形式

$$\alpha^i = \beta^i_z + w^i_z\, dz, \quad i = 0,1,$$

定义 $\xi_i =$ 核 α^i，其中 $\beta^0_{\pm 1} = \beta^1_{\pm 1}$。回顾接触条件

$$A^i := w^i_z\, d\beta^i_z + \beta^i_z \wedge (dw^i_z - \dot\beta^i_z) > 0, \quad i = 0,1,$$

其中点表示对 z 求导。函数 A^i 是不变的。

凸性假设使我们能够对每个 $z \in [-1,1]$ 选取定义在 S 上的函数 v^0_z 和 v^1_z ，它们恰好在 Γ_z 上消失，且仅一阶消失，并满足接触条件

$$B^i := v^i_z\, d\beta^i_z + \beta^i_z \wedge dv^i_z > 0, \quad i = 0,1.$$

函数 B^i 是不变的。

定理 4.8.5 的证明中的构造给出了两族函数 v^i_z ，它们随 z 平滑变化，并且随 $v^0_{\pm 1} = v^1_{\pm 1}$ 平滑变化。注意，对于每个 z，函数 v^0_z/v^1_z 原本仅定义在 $S \setminus \Gamma_z$ 上，却可以无歧义地延拓为整个 S 上的正函数。计算

$$\begin{aligned} v^0\, d\left(\frac{v^0}{v^1}\beta\right) + \left(\frac{v^0}{v^1}\beta\right) \wedge dv^0 &= \left(\frac{v^0}{v^1}\right)^2 v^1 d\beta + \frac{v^0}{v^1} dv^0 \wedge \beta \\ &\quad - \left(\frac{v^0}{v^1}\right)^2 dv^1 \wedge \beta + \frac{v^0}{v^1}\beta \wedge dv^0 \\ &= \left(\frac{v^0}{v^1}\right)^2 (v^1 d\beta + \beta \wedge dv^1) \end{aligned}$$

表明，如果我们将 β^1_z 替换为 $(v^0_z/v^1_z)\cdot\beta^1_z$，则可以取 $v^1_z = v^0_z =: v_z$。注意，经过这次替换后，我们仍有 $\beta^0_{\pm 1} = \beta^1_{\pm 1}$。

令 $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 为反不变形式

$$\alpha^i_t := \beta^i_z + (1-t)w^i_z + t\,\lambda\, v_z\, dz, \quad i = 0,1, \quad t \in [0,1]\,.$$

Then

$$\alpha^i_t \wedge d\alpha^i_t = ((1-t)A^i - t\beta^i_z \wedge \dot\beta^i_z + t\lambda B^i) \wedge dz\,,$$

当 λ 取得足够大时，它对所有 $t \in [0,1]$ 都是正的。最后，将反不变形式族 α_s 定义为

$$\alpha_s := (1-s)\alpha^0_1 + s\alpha^1_1 = (1-s)\beta^0_z + s\beta^1_z + \lambda\, v_z\, dz, \quad s \in [0,1]\,.$$

Then

$$\alpha_s \wedge d\alpha_s = \lambda((1-s)B^0 + sB^1) \wedge dz + O_\lambda(1)\,,$$

当 λ 足够大时，对于所有 $s \in [0,1]$，它同样为正。然后

$$\begin{cases} \alpha^0_{3t}, & 0 \le t \le 1/3, \\ \alpha_{3t-1}, & 1/3 \le t \le 2/3, \\ \alpha^1_{3-3t}, & 2/3 \le t \le 1, \end{cases}$$

定义了一个通过接触形式从 α^0 到 α^1 的同伦，并且在 $TS^{\pm 1}$ 上保持不变。现在，证明按重构引理中的方式结束。□

注 4.6. 若前述两个引理中任一引理的接触结构ξ_0, ξ_1 在边界附近重合，则证明给出的同伦在边界附近保持不动。

此外，根据重构引理和唯一性引理的证明，我们可以得到以下结果。

引理 4.7. 设 ξ 是等变层析上的一个不变紧接触结构，且 S^z 是 ξ-凸的。则在边界附近重合的分界圆光滑族 Γ_z，在边界附近保持不动的保层各向同性 $S^2 \times [-1,1]$ 意义下唯一确定。

证明. 设 Γ_z^0 和 Γ_z^1 是两个分界圆族。

与唯一性引理的证明类似，我们可以将 α 写成

$$\alpha = \begin{cases} \beta_z + v_z^0\, dz & \text{using the circle } \Gamma_z^0 \\ \beta_z + v_z^1\, dz & \text{using the circle } \Gamma_z^1 \end{cases}.$$

因此我们可以定义这一族

$$\alpha_t \coloneqq \beta_z + ((1-t)v_z^0 + tv_z^1)\, dz\,,$$

并利用命题 2.4 得到一个保层各向同性ψ_t，将 α_t 拉回为 α_0的倍数。由于 v_z^0 的零点与其任意正倍数的零点相同，我们得到 ψ_1 将分界曲线 Γ_z^0 映射到Γ_z^1。□

4.2. **定义扭转挠子**。 本小节旨在介绍定理 5 陈述中出现的正确扭转不变量。

引理 4.8。 设 F是三维流形 $S \times [-1,1]$中的一条线，与每个 S^z恰好相交于一点。则与 F相切、具有固定端点的超平面分布 $\xi_p \subseteq T_pM$ 的集合，在边界相对同伦意义下，是一个 $\mathbb{Z}$-挠子。

证明。 上述等价类与法丛 $NF \subseteq TM$的平凡化集合一一对应，其中平凡化按关于 $S \times [-1,1]$ 的边界相对同伦取等价。于是，根据微分几何中的一个标准事实，这样的对象是一个 $\mathbb{Z}$-挠子。□

现在让我们考虑等变层析 $S^2 \times [-1,1]$上的任意不变紧接触结构 ξ，并任选一条$F = \{s\} \times [-1,1]$ 不动点直线。对于 F上的每个点 p，平面 ξ_p 都由 u保持不变。由于 $d_p u$ 可对角化为 $[1] \oplus [-1] \oplus [-1]$，因此$u|_{\xi_p}$也必然如此。最后，由于 u 反转了接触平面的定向， $u|_{\xi_p}$ 必然可以写成 $[1] \oplus [-1]$，因此 F必然与 ξ_p相切。

定义 4.9. 设 ξ_1 和 ξ_2 是 $S^2 \times [-1,1]$ 上两个在边界处重合的不变紧接触结构。选定一条不动点线 F 后， *F-扭转差* 就是使用 F 计算得到的引理 4.8 中的 $\mathbb{Z}$-差。

前述定义似乎取决于我们所选的不动点线。一种解决方法是注意到，在凸曲面族的情形下，该量与选择无关。我们将采用这种方法。

首先，定义等变无参数嵌入环空间为

$$\mathrm{Loop}^{eq}(S^2) \coloneqq \mathrm{Emb}^{eq}(S^1, S^2)/\mathrm{Diff}^{eq,+}(S^1)\,,$$

其中后一个微分同胚群从右侧作用。在下一个命题中，我们将计算其基本群。

命题 4.10。群$\mathrm{Loop}^{eq}(S^2)$与 SO_2 弱同伦等价，且其基本群是无限循环群。

证明。将 S^2 对 u 取商，我们得到一个双重覆盖 $S^2 \to S^2$，其在两个点 a、b 上分支。因此，我们所研究的空间可以视为空间 $E \coloneqq \Omega^{\mathrm{emb}}_{a,\,b} S^2$，即从 a 到 b 的嵌入路径空间。

固定一个元素 $e_0 \in E$。首先，我们注意到存在一个映射

$$\begin{aligned}\phi\colon G \coloneqq \mathrm{Diff}^+(S^2, a, b) &\to \Omega^{\mathrm{emb}}_{a,b} S^2\\ \phi &\mapsto \phi \circ e_0\end{aligned}$$

前者是固定点 a 和 b的保向微分同胚空间。ϕ 的满射性来自两个结果：由于 $\Omega_{a,\,b} S^2$ 是连通的，根据 Baer 定理，[Bae28]也必然是空间 $\Omega^{\mathrm{emb}}_{a,\,b} S^2$；然后，同伦延拓定理允许我们将同伦延拓为微分同胚的路径。此外，采用 Palais 的相同方法（其陈述见引理 4.1），可以证明 ϕ 是 Serre 纤维化。

沿着 e_0切开后，我们看到，固定 e_0 的 G 子群可识别为圆盘的保向微分同胚空间 $\mathrm{Diff}^+(D^2,\ \partial D^2)$，其中的微分同胚保持边界不变。根据 Smale 定理，[Sma59] 该空间是可缩的，因此 E 与全空间弱同伦等价。

根据引理 4.1，考虑以下 Serre 纤维化：

$$ev_a\colon \mathrm{Diff}^+(S^2, a) \to S^2 \setminus \{a\}$$

通过在 b 处求值得到。由于底空间是可缩的，纤维 G 与 $\mathrm{Diff}^+(S^2,\ a)$ 弱同伦等价。

最后，通过在 a 处求值，我们得到所关注的 Serre 纤维化：

$$\mathrm{Diff}^+(S^2, a) \to \mathrm{Diff}^+(S^2) \to S^2\,.$$

它位于下述纤维化的交换图中：

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Diff}^+(S^2, a) & \hookrightarrow & \mathrm{Diff}^+(S^2) & \longrightarrow & S^2\\ \uparrow & & \uparrow & & \| \\ SO_2 & \hookrightarrow & SO_3 & \longrightarrow & S^2\end{array}$$

根据 Serre [Sma59]，中间映射是同伦等价。通过比较长正合纤维化序列，纤维 G、SO_2 必须弱同伦等价。□

作为命题 4.10 的推论，群 $\mathbb{Z}$，可视为 $\pi_1(\mathrm{Loop}^{eq}(S^2))$，在空间 $S^2 \times [-1, 1]$ 中变化的圆族 Γ_z 上作为挠子作用

具有固定端点 Γ_0 和 Γ_1。因此，根据命题 3.13，我们可以利用凸理论重新定义扭转差。

定义 4.11. 设 ξ_1、ξ_2 是 $S^2 \times [-1,1]$ 上两个不变紧接触结构，它们在 $z=0$，1 级附近重合，并且对每个 z，S^z 都是凸的。此外，设已为这两个结构固定了两个分界圆的光滑族 Γ^1_z、Γ^2_z。则凸扭转差$\xi_1 - \xi_2$ 为积分之差

$$[\Gamma^1] - [\Gamma^2] \in \pi_1(\mathrm{Loop}^{eq}(S^2)) \cong \mathbb{Z}\,.$$

根据引理 4.7，上述定义与所选分界圆族无关。

命题 4.12. 设 $S^2 \times [0,1]$ 是一个等变层析，并考虑两个不变紧接触结构 ξ_1、ξ_2，它们在0、1 级处重合。假设存在两个边界相对同伦 $\phi_t^{(1)}$、$\phi_t^{(2)}$，使得 $\xi_i' := T\phi_1^{(i)}(\xi_i)$ 满足以下条件：

1) 曲面 S^z 是 ξ_i-凸的，且 *2)* 存在 $S^z_{\xi_i'}$的分界圆的光滑族。

于是有以下结论：

1) 定义 *4.9* 中的扭转差与我们所选取的不动点线无关，且 *2)* 它与凸扭转差一致。

证明。给定一条不动点线 F，记 F-扭转差为 $d_F(\xi_1,\xi_2)$。若 ϕ_t 是边界相对的等变同伦，它必将 F 映到一条（可能相同的）不动点线上。但由于这类线构成离散集，F实际上必须保持不变。因此，$d_F(\xi_1,\xi_2)$与 $d_F(T\phi_t(\xi_1)\ \xi_2)$一致，也与 $d_F(\xi_1, T\phi_t(\xi_2))$一致。此外，由引理 4.7 可知，凸扭转差在边界相对的等变同伦下也保持不变。因此，我们可以假设 $\xi_i' = \xi_i$。

$\mathrm{Loop}^{eq}(S^2)$ 的每个元素 γ 都确定了 T_aS^2 中的一个切向量 $\gamma'(a)$，它横截于 TF。因此，这类环路的一个族导出法丛 TF 的一个平凡化。另一方面，如果两个这样的族同伦，那么这种对应会给出平凡化的一个同伦。

由于 NF 的平凡化在边界相对意义下的同伦类与 $\mathbb{Z}$ 同构，因此存在一个先验上满射

$$\phi\colon \pi_1(\mathrm{Loop}^{eq}(S^2)) \to \mathbb{Z}\,,$$

根据命题 4.10，这更进一步是一个双射。

我们只需证明映射 ϕ 与定义 4.9 中给出的挠率作用相容，即证明

$$\phi([\Gamma^1] - [\Gamma^2]) = d_F(\xi_1,\xi_2)\,.$$

为证明这一点，我们考虑切空间 T_pS^z 随$p \in F$变化的情形。在每一点，分界曲线 Γ^i与 T_pS^z相切，并横截特征叶状结构 $S^z_{\xi_i}$，因此也横截平面 $\xi_i(p)$。由此，差值 $d_F(\xi_1,\ \xi_2)$（通过考察 ξ_2 相对于ξ_1的旋转来计算）必定与 $\phi([\Gamma^1] - [\Gamma^2])$一致，后者是利用分界曲线的切向量定义的。□

因此我们已经证明，在满足正确假设的情况下，我们的各种定义彼此协调。我们暂不立即证明当前情形符合命题 4.12，而是留待之后处理，因为这本来就是定理 5 证明的一部分。

4.3. 定理 5 的证明。 让我们从等变层析 $S \times [-1,1]$, $S = S^2$上的一个不变紧接触结构 ξ 开始。

假设 S^z 在 $z = 0$,1的邻域中为莫尔斯–斯梅尔型，因而为凸的，我们希望展示如何通过 ξ 的边界相对同伦来操纵特征叶状结构S^z_ξ，直到得到一个接触结构，使得每个 S^z 都是凸曲面。

我们在命题 3.7 中已经看到，给定接触三流形中一个定向的适当曲面 u，通过扰动接触结构，可以使该曲面具有莫尔斯–斯梅尔型的特征叶状结构，从而根据命题 3.16，该曲面是凸曲面。然而，现在我们处理的是一个曲面的一参数族，而莫尔斯–斯梅尔条件对于奇异叶状结构的一参数族而言并非一般位置。尽管如此，我们仍可施加一些简单的“一般位置”假设。其关键在于，接触条件在 C^1-拓扑中是开条件，并且不变接触结构具有等变格雷稳定性。因此，对于由 C^1-小扰动可以施加于奇异叶状结构薄膜上的任何性质，都可以通过接触结构的相应同伦来实现。

先从一个简单的引理开始，它使我们能够利用接触结构提供的一些额外信息。

引理 4.13. 逆行双曲-双曲连接（即从负双曲点到正双曲点的连接）不会以参数 z 为变量出现聚点。

证明。 由于不考虑群作用时该结论也成立，因此在此证明中可以忽略群作用。

反证法，假设在 $z = 0$ 处存在这样的聚点。

设 z_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ 是点列 z_ν，满足 $\lim_{\nu\to\infty} z_\nu = 0$，且每个 S_ξ 都包含一条逆行连接；当 $\nu \to \infty$ 时，这些连接聚集到一条这样的连接上。我们可以选取局部坐标，使得所讨论的是定义在 $\mathbb{R}^2 \times [-1,1]$ 上的接触结构，其中正（分别为负）双曲点位于 $(\pm 1, 0, z_\nu)$，包括 $z_\infty = 0$；并且对每个 ν，这两点之间的线段都沿 x 轴，是一条逆行连接。

在这些切片 S^{z_ν} 上，定义特征叶状结构的向量场沿连接分离曲线是 ∂_x 的正倍数，因此 β_{z_ν} 是 dy 的正倍数（若将 $\Omega = dx \wedge dy$ 取为面积形式）。由极限过程可知，$\beta_z|_{z=0}$ 沿着从 $(-1,\ 0,\ 0)$ 到 $(1,\ 0,\ 0)$ 的分离曲线 γ_0 是 dy 的倍数，因此那里有 $(\beta_z \wedge \beta_z)|_{z=0} = 0$。

此外，γ_0 上必定存在一点，使得 $w_0 = 0$ 和 $dw(\partial_x) \geq 0$，因为 γ_0 从一个负点（此处 $w_0 < 0$）移动到一个正点（此处 $w_0 > 0$）。但接触条件 (1) 将不成立，因为

$$w_0\, d\beta_0 + \beta_0 \wedge (dw_0 - \dot{\beta}_0)(\partial_y, \partial_x) = (\beta_0 \wedge dw_0)(\partial_x, \partial_y) \leq 0\,,$$

而 $\Omega(\partial_x,\ \partial_y) > 0$。 □

命题 4.14。 对断层成像进行进一步的小幅等变扰动（等价地，对接触结构进行扰动）后，我们可以假设：

> *1)* 每个 S^z_ξ 只包含有限多个奇点，并且在有限多个 z–层上至多有两个退化奇点；*2)* 在 S^z_ξ 中，不存在从负奇点到正奇点的轨线，除有限多个层 $z_1, \dots, z_k$ 外；在这些层上，所有临界点均为非退化，且恰有两条逆行双曲型–双曲型连接；*3)* 在这些层上，双曲点之间不存在其他连接。

证明。 我们的思路是重新调整 [Sot74, 命题 II.2.1], 中的概念，并保留一个重要性质：不存在闭轨道，也不存在作为 ω-或 α-极限的多边环。根据庞加莱–本迪克森定理，奇点之外不会出现其他 α-或 ω-极限 [Gei08, 定理 4.7.8]。

我们的条件是开条件，接下来要证明它们是稠密的。考虑这个一参数向量场族

$$X\colon S^2 \times [0,1] \to TS^2\,,$$

它定义了特征叶状结构的族。根据假设，它是一个 G-映射，其中 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 左侧的作用为

$$g \cdot (p, v) = (g \cdot p, -d_p g[v])\,.$$

根据命题 3.2，我们知道可以找到一个新映射 X'，它与 X 的距离小于 C^∞, 并且 X 与零截面 s_0 横截。按照引理 3.3 中相同的推理，如果我们用 $Z := X' \circ h^{-1}$ 替换 X'，那么 Z 就是一族与 X 接近且与 s_0 横截的一参数向量场。

接下来注意， Z 的零点集 S 在某个 $(x_0,\ t_0)$ 处与 $S \times \{t_0\}$ 横截，当且仅当 x_0 是 $Z(\cdot,\ t_0)$ 的一个非退化奇点。因此，我们要做的是研究这一条件，以便找到对 Z 进行适当扰动的方法，使其具有所需性质。

首先回顾一下我们所处的情形，也就是我们这种情形所特有的情况。

> 1）由于 S 是球面且 ξ 是紧的， S^z_ξ 不能有闭轨道。2）由于 S 是球面且 ξ 是紧的， S^z_ξ 不能以 α-极限和 ω-极限的形式出现多边环。事实上，这种多边环由同号奇点构成，因此与紧性相矛盾 [Gei08，命题 6.4.33]。3）由于 S^z_ξ 是来自特征叶状结构的向量场，因此每个奇点处的散度都必须非零。

有鉴于此，我们只需注意到，所需的扰动包含在 [Sot74，命题 II.2.1]中。应用我们以正确的重新表述再次提出的横截性推理后，剩余的扰动都局限于奇点附近。此外，所引证明所做的远超我们的需要。事实上，Sotomayor 称为 $\eta^{(1)}$ 的扰动先验地可能在某些层面上具有非退化非一般奇点。回想一下：这些是横截于零截面的无迹奇点。然而，该向量

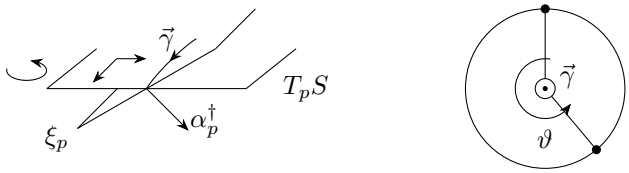


图1. 定向平面 T_pS 与 ξ_p之间的角度

场起初并没有这类奇点，因此它们不可能通过小扰动产生。

此外，由于 $\eta^{(1)}$ 是通过在奇点周围进行扰动得到的，我们可以通过等变地实施这些扰动来重新调整它们。因此，我们满足了陈述中的条件 1)。

最后，由于逆行连接在 z-参数意义下构成离散集，我们知道它们出现的层级必定有限。因此，我们可以进行类似于 Peixoto 所用的小扰动，使得在这些层级上只出现两个双曲—双曲连接，即逆行连接，并且不出现退化奇点。□

接下来的引理中，请回忆一下，消去对 是由一个双曲点和一个椭圆点构成的构型，这两个点符号相同，并由前者的一条分离曲线连接。

引理4.15。 设 S 是一个 u定向曲面，其特征叶状结构为莫尔斯–斯梅尔型，并嵌入于一个不变紧接触结构中，且设 S内部有一个消去对。那么，我们可以进行等变的 C^∞-扰动S ，使该消去对消失。

证明。 作用 $u|_S$ 必然会将分离曲线（x_e、 γ、 x_h）映到另一个同类型但符号相反的分离曲线上。因此，它必然会映到另一个三元组，且该三元组与起始三元组不同。

由于经典构造 [Gei08, 引理 4.6。26] 在 γ附近是局部的，我们只需在（x_e、 γ、 x_h）和（$u(x_e)$ $u(\gamma)$ $u(x_h)$）上以等变方式应用它。□

引理 4.16。 设 S 是嵌入于某个不变紧接触结构中的一个 u-定向 *2*-球面，且 S_ξ 有有限个退化奇点，并且不存在逆行双曲—双曲连接。那么，在 S 中，图 G 以正奇点为顶点，以正双曲点的稳定分离曲线为边，是一棵连通树[3]。此外， S 是凸的，且其分界集由 G的圆盘状邻域的边界给出。

证明。 由于不存在逆行的鞍点—鞍点连接，且退化奇点是孤立的，因此命题 3.16 的证明仍然适用，我们知道 S 是凸的，其分界集由加厚后的 G的边界给出。特别地，分界集由负部分与正部分之间环带的神经给出。

根据命题 3.13，图 G 必定是一个连通树。□

[3]使用负奇点和不稳定分离曲线时，同一引理仍然成立。

引理 4.17。 设 K 是紧接触流形(M,ξ)中的一个拓扑平凡勒让德结。设 Σ 为一个塞弗特圆盘。那么，其边界 $\partial\Sigma$ 不可能由一系列逆向双曲—双曲连接组成。

证明。 我们想要证明，某个条件意味着接触框架相对于曲面框架正向旋转。这将与贝内坎不等式 $\mathrm{tb}(K) \leq -1$ [Gei08, Thm. 4.6.36] 矛盾。

考虑一条逆行分离曲线 γ。由于瑟斯顿–贝内坎数与定向无关，我们可以假设圆盘的定向与 S_ξ给出的 γ 定向一致。在任意一点 $p \in \gamma$，都存在一个定义良好的角度 $\vartheta \in S^1$，它位于 T_pS 和 ξ_p之间，定义为将前一个平面旋转至与后一个平面对齐所需的角度。见图1，其中展示了这些定向平面，包括对偶向量 $\alpha_p^\dagger$。旋转相对于 $\dot\gamma$按正向计算。在 $\gamma(0)$处，该角度为 π；在 $\gamma(1)$处，该角度为 $0 = 2\pi$。

此外，在每个这样的点 $p \in \gamma$（端点除外），我们都可以考虑任意一个向量 v_p，使得 $\Omega(X_p,\ v_p) > 0$，其中 X 定义了特征叶状结构。根据 X 的定义，我们知道 $\alpha(v_p) > 0$。因此，v 必定属于由 ξ_p上的定向确定的 $T_pM \setminus \xi_p$ 的正分支 。于是， p 处的角度属于 $(\pi,\ 2\pi)$。

因此，当我们沿着 γ前进时， T_pS 与 ξ_p 之间的角度属于 $(\pi,\ 2\pi)$。但这意味着，该角度与从 π 到 2π的线性旋转在相对边界意义下同伦。然而，相对于 T_pS，这是一个正半扭转。

因此，沿着整个边界 $\partial\Sigma$移动时，接触框架会围绕曲面框架发生正向扭转。□

命题 4.18。 设 ξ 是等变断层成像 $S \times [-1,1]$, $S = S^2$上的一个不变紧接触结构，并且 S^z 在 $z = 0$的1 层附近是莫尔斯–斯梅尔的，因而是凸的。那么， ξ 与一个接触结构等变同伦且相对边界同痕；对于该接触结构，每个 S^z, $z \in [-1,1]$ 都是凸曲面。

证明。 根据上述讨论，只需找到一种同伦，帮助我们消除所有逆行鞍点—鞍点连接。首先，我们可以作出截至命题 4.14（包括命题 4.14）所讨论的所有一般性假设。然后，根据引理 4.16，曲面 S^z 将是凸的，但有限多个层面 $z_1, \dots, z_k \in (-1,1)$处除外；在这些层面上，我们有两组相互耦合的逆行双曲—双曲连接。为简化记号，我们假设 $z = 0$ 是这样一个例外层面。我们用 $x_h^\pm$ 表示该层面上由逆行连接相连的双曲点。

考虑 x_h^+ 的稳定分离曲线 γ，它并非来自 x_h^-。它的 α-极限必定是一个奇点。

如果该奇点是一个双曲点，那么根据我们的一般位置假设，这种连接必定是逆行连接，并且与 γ 相耦合。因此，我们处于这样一种情形：两个符号不同的双曲点通过两条逆行连接相连。然而，引理 4.17 排除了这种情形。

因此， γ 必须从一个正椭圆点 x_e^+发出。按照 [Gei08，第 4.9 命题7], 中的相同步骤，我们观察到可以消去

对（x_e^+，x_h^+），且不会引入新的双曲—双曲连接。此外，这一操作局限于连通对上；由于符号的原因，该连通对必须在作用下被送到“远处”。因此，我们可以假设在等变情形下进行讨论。□

此证明表明，通过边界相对同伦，我们可以假设在每个切片 S^z 上都处于引理 4.16 所述的情形。定理 5 证明中的最后一步是以下引理。

引理 4.19. 设 ξ 是等变层析 $S \times [-1,1]$，$S = S^2$ 上的一个不变紧接触结构，并具有上述性质。那么，我们可以为 S_ξ^z 选取一个分界集 Γ_z（由一个圆组成），使其随 z 平滑变化。

证明。 分界集 Γ_z 可以定义为引理 4.16 中所定义的树 $G_z^\pm$ 的类圆盘邻域的边界。这些树分别由正奇点或负奇点及其稳定流形或不稳定流形构成，即由流线组成的集合，其中相应的奇点分别是其 ω 极限集或 α 极限集。

随着我们改变 z，并经过包含退化奇点的一个层级，树 $G_z^\pm$ 的几何形态可能发生变化，出现新的边和顶点。请记住，$u(G_+^z) = G_-^z$。

回顾命题 3.16：分界集 Γ_z 是通过选取环带的一个神经来定义的，该环带位于分别围绕 $G_z^\pm$ 的负部分和正部分之间。因此，如果 $G_z^\pm$的几何形态在某个层级z_k发生变化，我们只需定义 Γ_z，使得一旦达到层级 z_k，神经就足够居中，从而避免这种变化。这样一来，Γ_{z_k} 仍然是一个潜入圆。□

现在所有要素都已齐备，我们可以证明定理 5，下面重述该定理。

定理 5. 设 $S^2 \times [-1,1]$ 是一个等变层析。在 $S^2 \times [-1,1]$ 上具有固定边界特征叶状结构的不变紧接触结构，模去相对边界的等变同伦后构成一个 $\mathbb{Z}$-挠子。

证明。 我们重新陈述一下各个步骤。设 ξ_1 和 ξ_2 是如上所述的两个不变接触结构，使得对于某条不动点直线 F，$d_F(\xi_1, \xi_2) = 0$。

1) 根据命题 2.4，我们可以假设经过一个固定边界的等变同伦后，两个接触结构在边界附近重合。2) 推论 3.17 使我们能够在两个接触结构重合的邻域内，局部找到与 $S^2 \times \{\pm 1\}$ 同伦的凸 2-球面 $S_\pm^2$。若将这些新球面选得足够靠近原来的球面，则它们之间的区域仍是一个符合我们对群作用约定的等变层析。因此，我们可以假设 $S^2 \times \{\pm 1\}$ 已经是凸的。3) 根据命题 4.14，经过（不同的）相对边界等变同伦后，我们可以假设这两个层析已被标准化。4) 根据命题 4.18，我们可以使用（不同的）相对边界等变同伦，使这些层析由凸层构成。

5) 根据引理 4.19，我们可以假设已经选取了两个分界曲线的光滑族 Γ^1_z、Γ^2_z。因此可以应用命题 4.12：整数 $d_F(\xi_1, \xi_2)$ 与 F 无关，并且等于凸扭转差 $[\Gamma^1_z] - [\Gamma^2_z]$。6) 由于 $[\Gamma_1] - [\Gamma_2]$ 消失，存在一个 $S^2 \times [-1, 1]$ 的保层等变同伦，使得 $\Phi(\Gamma^1_z)$ 与 Γ^2_z 重合。此外，由于 ξ_0 和 ξ_1 在边界附近重合，我们可以假设这样的 Φ 在这些区域内是恒等映射。7) 接触结构 $\Phi^*\xi_1$、ξ_0 满足应用引理 4.5 的条件。因此，存在另一个相对边界等变同伦 Θ，使得 $\Theta^*\Phi^*\xi_1$ 与 ξ_0 重合。

证明至此结束。 □

5. 定理 1 和定理 2 的证明

本节旨在证明定理 1 和定理 2。先从第一个定理开始，重述如下。

定理 1。 $\mathbb{R}^3$ 上的紧接触结构在 $\mathbb{R}^3$ 上经等变同伦分类只有一种。

思路是，由于 $\mathbb{R}^3$ 没有边界，我们在上一节定义的扭转差在此处便失去了意义。令 ξ 为 $\mathbb{R}^3$上的一个不变紧接触结构。

命题 5.1. 假设 u 与标准旋转重合，并固定 x 轴上的一点 x_0。存在 $\mathbb{R}^3$ 的一个等变同伦 ϕ_t，使得 $T\phi_1(\xi)$ 在 x 轴的部分 $[x_0, +\infty)$ 上为常数。

证明。 考虑角度

$$\vartheta(t) \colon [x_0, +\infty) \to S^1$$

在点 p 处，从 xy-平面到接触平面所张成的角度，按绕 x 轴的正方向计算~。将其提升为映射 ϑ，从 $[x_0, +\infty)$ 到万有覆盖 $\mathbb{R}$。

将 $\mathbb{R}^3$ 中的点记为 $\rho\hat{v}$，其中 ρ 为范数，且 $\hat{v} \in S^3$，则所需的同伦 ϕ_t 定义如下：

$$\phi_t(\rho\,\hat{v}) = \rho\, A_{-t\vartheta(\rho)}\hat{v} \quad \rho \in [x_0, +\infty)\,,$$

with

$$A_\nu \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\nu & -\sin\nu \\ 0 & \sin\nu & \cos\nu \end{bmatrix}.$$

按构造，$T\phi_1(\xi)$ 在 x轴的部分 $[x_0, +\infty)$ 上恒等于 $\langle \partial_x, \partial_y \rangle$。□

命题 5.2. 在不变紧接触结构中，任意半径的每个标准二维球面 $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ξ 都可以经过等变扰动，使其仅有两个椭圆点：一个正点和一个负点。

证明。 非等变陈述见于 [Gei08，第 4.6 定理。30],其中证明了以下不等式:

$$|\langle e(\xi), [S]\rangle| \leq \begin{cases} 0 & S = S^2, \\ -\chi(S) & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{6}$$

根据命题 3.7，我们可以对 S 作等变扰动，使其成为 Morse– Smale。

此外，根据 [Gei08，命题 4.6.14] ，我们知道

$$\langle e(\xi), [S]\rangle + \chi(S) = 2(e_+ - h_+)\,,$$

其中， e_+ （分别为 h_+）是正椭圆点（分别为双曲型点）的数量。

由 (6) 可知， $e(\xi)$ 在 $[S]$上消失，因此

$$e_+ - h_+ = 1\,. \tag{7}$$

因此，我们知道必定存在一个正椭圆点 e。此外，根据 [Gei08，定理 4.6.30] 的证明，我们知道只可能发生以下两种情况:

1) e 与一个正双曲点相连，或
2) 吸引域 D of e 的边界定义为

$$D = \overline{\{p \to S \mid p \text{ is connected to } e\}}\,,$$

由单个负椭圆点组成。

在第一种情况下，该连接必须在 u-作用下被映离自身，因此可以将其等变地消去。由于不能没有椭圆点，根据方程 (7)，必然会在某处出现第二种情况，并且吸引域 D 是整个球面。因此，叶状结构已标准化。□

定理 *1* 的证明。 首先，让我们应用 Waldhausen 约化。回顾一下我们对对合 u 所作的假设。由于 Waldhausen [Wal69]，这种 S^3 上的对合必然与 SO_4 中的一个二阶元素共轭，该元素的不动点是一个平凡结。现在这只是线性代数问题：所有这些变换彼此共轭。因此，所有可能的u限制在 $\mathbb{R}^3$ 上时彼此共轭。特别地，我们可以假设 u 是 S^3 的光滑延拓

$$(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)\,.$$

现在考虑陈述中所述的两个接触结构 ξ_1 和 ξ_2 。

根据推论 2.6，我们可以找到 $\mathbb{R}^3$ 的两种不同的等变同痕，使得 ξ_1 和 ξ_2 在原点附近的一个小球 B_ε 内重合。此外，根据命题 5.1，取 $0 < x_0 < \varepsilon$ 后，我们可以使 ξ_1 和 ξ_2 在整个x轴上重合。

由命题 5.2 可知，存在球面半径为 n 的局部等变扰动$\phi^n{}_t{}^i$ ，使得 ($\phi^n{}_1{}^i(S^1_n)$)ξ 为标准形式。因此，我们可以用 $(T\phi^n{}_t{}^i)^{-1}(\xi_i)$ 替换 ξ_i ，使球面 S^1_n 对于 ξ_1 和 ξ_2都具有相同的标准特征叶状结构。

因此，存在一个等变接触态射 ψ ，从 $(\mathcal{N}_1(S^1_n)\ \xi_1)$ 到 $(\mathcal{N}_2(S^1_n)\ \xi_2)$，我们可以将其视为一个同伦 ψ_t ，从恒等映射到 ψ。同样，在沿此同伦拉回接触结构 ξ_2 之后，我们有

到达了这样的情形： ξ_1 与 ξ_2 在球形壳层 I_n的边界上重合。在这些球形壳层中可以进行等变层析，因此我们可以应用第4节的工具。

由于 ξ_1 与 ξ_2 在 x轴上重合（取值相同且为常数），它们在 I_n 上的限制相差 0 F扭转，其中 F 为 x轴。于是，定理 5 告诉我们， $\xi_1|_{I_n}$ 与 $\xi_2|_{I_n}$ 在相对边界意义下等变同伦。□

现在我们来证明定理 2。我们将沿用前一个结果中的相同思路。

定理 2. 若此类作用 u保留标准3-球的补集，则在 $S^3 = \partial B^3_{std}$上诱导固定特征叶状结构的$(B^3_{std})^c$上的不变紧接触结构集合，在等变同伦意义下是平凡的。

证明.根据 Waldhausen 的结果，存在一个三维球面上的保无穷远微分同胚 W，使得 $W \circ u \circ W^{-1}$ 是关于 x轴的标准反射。此外， W 必须将球面 $\partial B_{\mathrm{std}}$ 映射为一个在反射下不变的二维紧曲面，该曲面恰当地包含 x轴的一部分。令 B 为球 $W(B_{\mathrm{std}})$；我们可以假设该球包含原点$\mathbf{0}$。

设 ξ_1 和 ξ_2 是补集 B^c 上的两个不变紧结构，它们在 ∂B 上诱导出相同的特征叶状结构。由命题 2.4，存在一个边界相对同伦，使它们在 B 的一个小外部邻域中重合。此外，固定 x-轴上的一点 x_0，该点不属于 ∂B，但位于这样的邻域内。通过应用一个在局部与命题 5.1 给出的同伦一致的同伦，我们可以假设 ξ_1 和 ξ_2 在 x-轴的部分 $[x_0, +\infty)$ 上重合。

最后，沿用前面的证明，我们可以固定一列任意大的球面，并使 ξ_1、ξ_2 在这些球面附近重合。最后，这些球面之间的区域与 $S^2 \times [-1, 1]$ 微分同胚，并由此产生一种等变层析。 ∂B 与较小球面之间的区域也同样如此。因此，我们可以应用定理 5。□

6. 定理 3 和 4 的证明

本节旨在证明定理 3 和 4。

定理 3。 如果此作用 u 保持标准三维球不变，那么在 $S^3 = \partial B^3_{std}$ 上诱导出固定特征叶状结构的不变紧接触结构集合，按等变同伦计，为一个 $\mathbb{Z}$-挠子。

证明。 按照定理 2 证明中的相同步骤，我们可以假设 u 为标准反射，但需将 B^3_{std} 替换为任意包含原点 **0** 的三维球 B 。

那么，给定 B 上诱导出相同特征叶状结构的两个接触结构，由于命题 2.4 的证明，它们可以通过边界相对同伦在边界附近变得重合。同样，根据推论 2.6，还可以进一步进行一次同伦，使这两个接触结构在原点 **0** 附近重合，并使以 **0** 为中心的小标准二维球面 S 成为凸的。

S 与 ∂B 之间的区域 A 微分同胚于 $S^2 \times [-1, 1]$；配备 u 后，便得到一个等变层析。现在，对 A 应用定理 5，即可得到结论。□

我们以定理 4 的证明结束本节。

定理 4. 在等变同伦意义下， S^3上的不变紧接触结构构成一个 $\mathbb{Z}$-挠子。

证明. 和之前一样，我们可以假设 u 是标准旋转。

给定 S^3上的任意紧接触结构，我们可以利用推论 2.6 在原点附近、一个小三维球 B_ε内将其标准化。现在，我们可以对 $S^3 \setminus B_\varepsilon$的闭包应用定理 3：根据舍恩弗利斯定理，该闭包可以变为一个标准三维球。□

参考文献

[Arm68] M. A. Armstrong.《不连续群轨道空间的基本群》。载于：剑桥哲学学会会刊 64（1968），第 299–301 页。[Bae28] R. Baer.《可定向闭曲面上曲线的同伦及其与曲面拓扑变形的关系》。载于：《纯粹与应用数学杂志》（ /Crelle 杂志/ 159 ）（1928），第 101–116 页。[Bre72] G. E. Bredon.《紧变换群导论》。纯粹与应用数学丛书第 46 卷。1972。[Dol12] A. Dold.《代数拓扑讲义》。第 2 版。Springer Berlin，2012。[Ehr51] C. Ehresmann.《可微纤维空间中的无穷小联络》。载于：1950 年布鲁塞尔拓扑学（纤维空间）研讨会。Georges Thone，列日，1951，第 29–55 页。[Eil34] S. Eilenberg.《球面上的周期变换》。载于：Fundamenta Mathematicae 22.1（1934），第 28–41 页。[Gei08] H. Geiges.《接触拓扑导论》。剑桥大学出版社，2008。[Mor14] M. Morimoto.《等变横截性定理及其应用》。载于：RIMS Kôkyûroku 1876（2014），第 112–119 页。[Pal60] R. S. Palais.《嵌入限制映射的局部平凡性》。载于：Commentarii Mathematici Helvetici 34（1960），第 305–312 页。[Pei62] M. M. Peixoto.《二维流形上的结构稳定性》。载于：Topology 1.2（1962），第 101–120 页。[Sma59] S. Smale.《2-球面的微分同胚》。载于：美国数学会会刊 10（1959），第 621–626 页。[Sot74] J. Sotomayor.《二维流形上向量场的一般位置单参数族》。载于：I.H.É.S. 数学出版物 43（1974），第 5–46 页。[Wal69] F. Waldhausen.《3-球面上的对合》。载于：Topology，国际数学期刊 8（1969），第 81–91 页。

DIMAI，乔瓦尼·巴蒂斯塔·莫尔加尼大道 67/a，50134，佛罗伦萨，意大利