arXiv:2601.14058v1 [math.DG] 20 Jan 2026

非正曲率洛伦兹空间的分裂定理

JOE BARTON [A]、TOBIAS BERAN [A]、MAURICIO CHE [A]、SEBASTIAN GIEGER [A]、JONA R ¨OHRIG [A] 和 FELIX ROTT [B]

Abstract.我们证明了具有全局非正类时曲率的洛伦兹预长度空间的一个分裂定理。此外，我们将第一变分公式推广到具有任意非零类时曲率界（无论是上界还是下界）的空间。

Keywords: 度量几何、洛伦兹几何、洛伦兹长度空间、分裂定理、第一变分公式、曲率界

MSC2020: 53C23 ，51K10 ，53C50 ，53B30

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. 第一变分公式 7 4. 上曲率界的刚性 18 5. 平行直线与射线 25 6. 分裂定理 32 参考文献 40

1. Introduction

分裂定理是关于满足极值几何条件的空间的刚性结果的典型范例。在曲率界的综合方法中，这类结果的存在通常被视为结构理论稳健的标志，其精神更接近经典的黎曼和洛伦兹情形。黎曼几何中的经典分裂定理由托波诺戈夫于 [30, 31] 提出，其核心论证及其许多后续结果的思路如下：非负

[A]Department of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien, Austria [B]SISSA, Via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy
E-mail addresses: joe.barton@univie.ac.at, tobias.beran@univie.ac.at, mauricio.adrian.che.moguel@univie.ac.at, sebastian.gieger@univie.ac.at, jona.roehrig@univie.ac.at, frott@sissa.it。*Date*：2026年1月21日。

曲率下界通常会导致共轭点；越过这些点后，测地线便不再实现距离。因此，在非正曲率空间中定义于 $\mathbb{R}$ 上的测地线十分特殊，只有在极为严格的条件下才会出现。

更准确地说，通常会证明，与一条直线相关的布塞曼函数是仿射的；事实证明，这一性质完全刻画了完备黎曼流形何时分裂，即使不对曲率作任何假设也如此 [22]。在正定号情形下，黎曼流形（先是在截面曲率界下，后来是在 Ricci 曲率界下）、亚历山德罗夫空间乃至 RCD空间中都存在分裂定理[15, 19, 26]。在洛伦兹号情形下，除 RCD空间外，目前这些情形都存在相应的类比结果 [5, 6, 10, 17, 18, 27]。

上述所有结果有一个共同的关键点：都要求存在下曲率界。相比之下，对于具有曲率上界的空间，分裂结果似乎较少，至少部分原因是“经典分裂定理”在这种情形下并不成立：双曲空间和德西特空间都不同构于另一个空间与实直线的乘积（不过，它们确实可以分裂为扭曲积）。事实上，在具有曲率上界的空间中，测地线上没有共轭点已不再是什么值得注意的性质，因此上文提到的直观论证不再适用。因此，这种情形下的分裂结果通常需要额外假设（例如拓扑或群论方面的假设 [14, 20, 22, 25, 29]）。或者，这类空间也可能分裂为锥；锥是一种特殊的扭曲积 [1]。

本文的主要目标是建立洛伦兹类比，对应于一项针对 CAT(0)空间的分裂定理；该定理在 [14], 中得到证明，并假设该空间是若干直线的并。我们的主定理（以及为证明它而准备的结果）所处的框架是洛伦兹预长度空间，这是研究非光滑洛伦兹几何的一种新方法。该领域由 [24],在 Alexander–Bishop [2] 和 Harris [21], 的早期工作基础上创立，过去数年间发展显著，如今已成为度量几何、洛伦兹几何、数学广义相对论与最优传输交汇处的成熟领域。我们的主要结果的一个简化版本可以表述如下。

定理 1.1。 设 X 是一个类时曲率全局有上界 0 的洛伦兹预长度空间。设 γ 是一条完备类时直线，并定义

$$S = \{\alpha : \alpha \text{ is a complete timelike line parallel to } \gamma\}.$$

那么， S 可赋予一个度量，使其成为一个$\mathrm{CAT}(0)$ 空间，且集合$\bigcup_{\alpha\in S}\alpha(\mathbb{R})$ 与洛伦兹乘积 $^{-}\mathbb{R}\times S$等距。特别地，若$X=\bigcup_{\alpha\in S}\alpha(\mathbb{R})$，则分裂是整体的。

关于精确表述，参见定理 6.6。关于证明思路，它与下曲率对应情形有一些相似之处，但也采用了几种不同的技术，更贴合具有

曲率上界的空间的性质。至于从正定号到洛伦兹号的转换，我们能够改编 [14], 的大部分证明，同时一如既往地注意确保因果性不受破坏。具体而言，一项重要的预备结果涉及比较构型的刚性行为：当曲率上界定义中的不等式取等时（命题 4.1）。我们还用到了第一变分公式（定理 3.6）；迄今为止，在合成洛伦兹背景下，该公式仅针对非负曲率下界引入过 [4]。此外，我们注意到，具有曲率上界的空间可能无法分裂，主要原因在于（未来和过去）射线无法拼接成一条直线（推论 5.11）。更确切地说，对于不在给定直线 p 上的任意一点 γ，我们可以构造两条与 γ 相关且平行、始于 p 的射线。在洛伦兹号下，它们可自然地描述为未来射线与过去射线；在正定号下也有类似的构造，分别通过取直线两个不同“端点”的极限过程得到。然而，这两条射线之间的角度通常不为 0（例如德西特空间中的情形），因此它们不能构成一条直线。事实上，这正是它们无法首尾相接形成直线的唯一障碍。

致谢。 我们感谢 Michael Kunzinger 和 Roland Steinbauer 在本项目初期阶段给予的宝贵讨论。

JB、TB、MC、SG 和 JR 获得了奥地利科学基金（FWF）的资助 [Grant DOI: 10.55776/EFP6、10.55776/STA32]。

FR 感谢欧盟下一代欧盟计划的支持，该支持来自 PRIN 项目“几何与引力的当代视角”（代码 2022JJ8KER – CUP G53D23001810006）。文中所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟的观点和意见；欧盟也不对这些观点和意见承担责任。

为实现开放获取，作者已对因本次投稿产生的任何作者接收稿版本申请知识共享署名许可公共版权许可。

2. Preliminaries

本节总结本文所需的洛伦兹预长度空间的记号、定义和一般性结果。关于洛伦兹预长度空间的一般理论，请参阅 [24] 。

在全文中，我们将洛伦兹预长度空间（X，d，$\leq$，$\ll$，τ）记作 X。 X 中的因果曲线（分别为类时曲线）是关于 $\leq$ （分别为 $\ll$）的单调曲线。 X 中的未来指向测地线 是因果曲线 $\gamma\colon\ I \to X$，定义在某个区间 $I \subseteq \mathbb{R}$上，并满足

$$\tau(\gamma(s), \gamma(t)) = L_\tau(\gamma|_{[s,t]})$$

对所有 $s \leq t$, s，$t \in I$，其中 L_τ 是 τ-长度泛函。过去指向的测地线的定义类似。此外，任意类时测地线都存在

等速参数化，即可以假设存在某个 $C > 0$,

$$\tau(\gamma(s), \gamma(t)) = C(t - s)$$

对所有 $s \leq t$ 均成立。特别地，当 $C = 1$ 时，我们称 γ 以参数化τ弧长。我们将局部实现 τ-距离的曲线称为局部测地线。

此外，每当 $x,\ y \in X$ 按时间顺序相关时，我们用$[x, y]$ 表示从 x 出发并以 y为终点的测地线，前提是它存在且唯一，或已固定选择，或该选择无关紧要。我们用 $\mathbb{L}^2(K)$ 表示曲率为 K 的洛伦兹模型空间，并用 D_K 表示其（有限）直径，参见 [24, 定义 4。5] 和 [9, 定义 2。6]。最后，回顾一下，X 称为正则，如果任意连接类时相关点的测地线都是类时的，即不包含零段。

定义 2.1（类时三角形）。设 X 是一个洛伦兹预长度空间。无序类时三角形 $\triangle(x, y, z)$ 是一组两两类时相关的点 x, y, z（顺序不一定是 $x \ll y \ll z$），以及连接这些点的测地线 $[x, y], [x, z], [y, z]$。对于 $\triangle(x, y, z)$，其在 $\mathbb{L}^2(K)$ 中的比较三角形是 $\mathbb{L}^2(K)$ 中与 $\triangle(x, y, z)$ 具有相同边长的类时三角形 $\triangle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$。若一个类时三角形存在比较三角形，则称其满足大小界；此比较三角形在等距映射意义下唯一。当且仅当最长边小于 D_K 时，情况如此，参见 [24, 引理 4.6]。

定义 2.2（类时曲率界）。设 X 是一个洛伦兹预长度空间。若开子集 U 满足以下条件，则称其为一个 $(\geq K)$-（或 $(\leq K)$-）比较邻域（按照三角形比较的意义）：

(i) τ在 $(U \times U) \cap \tau^{-1}([0, D_K)$ 上连续，且该集合是开集。(ii) 对于所有满足 $\tau(x, y) < D_K$的 $x \ll y$，它们之间存在一条包含于 U 中的测地线。(iii) 设 $\triangle(x, y, z)$ 是 U中的一个类时三角形，p, q是其边 $\triangle(x, y, z)$ 上的两点。设 $\triangle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 是 $\mathbb{L}^2(K)$ 中对应于 $\triangle(x, y, z)$ 的一个比较三角形，而 $\bar{p}, \bar{q}$分别是对应于 p和 q的比较点。那么

$$\tau(p, q) \leq \tau(\bar{p}, \bar{q}) \quad (\text{resp. } \tau(p, q) \geq \tau(\bar{p}, \bar{q}))\,. \tag{1}$$

如果 X 可由 $(\geq K)$-（分别为 $(\leq K)$-）比较邻域覆盖，我们就称其类时曲率下界（分别为上界）为。如果 X 本身就是一个 $(\geq K)$-（分别为 $(\leq K)$-）比较邻域，我们就称 X的类时曲率全局下界（分别为上界）为 K。

注意，在一个 $(\geq K)$ 比较邻域内，$p \ll q$ 蕴含$\bar{p} \ll \bar{q}$；而在一个 $(\leq K)$ 比较邻域内，$\bar{p} \ll \bar{q}$ 蕴含$p \ll q$。此外，回顾一下，在一个 $(\leq K)$ 比较邻域内，测地线是唯一的，参见 [9, 定理 4。7]。关于 [8] 的等价表述，参见定义 2.2。

在 [12], 中引入了具有共同端点的测地线之间的角度概念。具体而言，对于任意类时测地线 $\alpha\colon [0, a) \to X$, $\beta\colon [0, b) \to$

X 使得 $\alpha(0) = \beta(0) = p$,

$$\measuredangle_p(\alpha,\beta) = \limsup_{s,t\to 0} \widetilde{\measuredangle}_p^K(\alpha(s),\beta(t))\,, \tag{2}$$

其中，$\widetilde{\measuredangle}_p^K(\alpha(s)\ \beta(t))$表示比较三角形中与 p对应的顶点处的角度，该比较三角形对应于 $\mathbb{L}^2(K)$中的 $\triangle(p,\alpha(s)\ \beta(t))$；上极限仅对 s、t 取值，其中 $\widetilde{\measuredangle}_p^K(\alpha(s)\ \beta(t))$有定义。角度的这一界定与 K无关，参见 [12, 命题 2.14]。若 $K = 0$，则可省略比较角前的 $\widetilde{K}$，直接写作 $\measuredangle$。

若 X 的曲率有上下界之一，则式（2）中的上极限实际上是极限，参见 [12,引理 4.10 和定理 4。13]此外，若 X 的类时曲率上界为 K，则任意具有相同时间定向的测地线之间的角度有限；若 X 的类时曲率下界为 K，则任意具有不同时间定向的测地线之间的角度有限。

我们还定义有向角：

$$\measuredangle_p^S(\alpha,\beta) = \begin{cases} -\measuredangle_p(\alpha,\beta) & \text{if } \alpha \text{ and } \beta \text{ have the same time orientation,} \\ \measuredangle_p(\alpha,\beta) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

此外，由 [12, 推论 4.11], 可知，若 X 的类时曲率上界为 K，则

$$\widetilde{\measuredangle}_p^{K,S}(\alpha(s),\beta(t)) \le \measuredangle_p^S(\alpha,\beta)\,, \tag{4}$$

只要两个角度都有定义即可。若对于 $y,z \in I^{\pm}(x)$，测地线 $[x,y],[x,z]$ 的选取无关紧要，我们可以使用简写记号$\measuredangle_x(y,z) = \measuredangle_x([x,y],[x,z])$。

回顾一下，测地线之间的角度满足如下意义下的角度三角不等式（参见 [12, 定理 3.1 和 4.5] 以及 [8, 引理 4.14]）。

命题 2.3 (角度三角不等式)。设 X 是一个强因果洛伦兹预长度空间，其中 τ 局部取有限值且局部连续；设 $\alpha,\beta,\gamma\colon [0,\varepsilon) \to X$ 是从 $x := \alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0)$出发的类时曲线。

(i) 若 α、β、γ 均为未来指向或均为过去指向，则

$$\measuredangle_x(\alpha,\gamma) \le \measuredangle_x(\alpha,\beta) + \measuredangle_x(\beta,\gamma)\,.$$

(ii) 假设 X 是强因果的，且 τ 局部有限并局部连续。若 α、β 均为未来指向，γ 为过去指向，且存在 $\measuredangle_x(\alpha,\gamma)$，则

$$\measuredangle_x(\alpha,\gamma) \le \measuredangle_x(\alpha,\beta) + \measuredangle_x(\beta,\gamma)\,.$$

α、β 均为过去指向而 γ 为未来指向的情况也类似。

(iii) 若 X 的类时曲率上界为 K，其中 $K \in \mathbb{R}$，α、β 均为未来指向，γ 为过去指向，且 $\gamma\cdot\beta$ 的连接构成一条测地线，则

$$\measuredangle_x(\alpha,\gamma) \le \measuredangle_x(\alpha,\beta)\,.$$

若 α、β 均为过去指向，而 γ 为未来指向，且 $\beta\cdot\gamma$ 构成一条测地线，则存在类似的不等式。

闵可夫斯基空间中类时三角形的以下角度和公式，可视为欧几里得三角形的三个内角之和等于 π 这一事实的类比。为完整起见，我们给出证明。

引理 2.4（闵可夫斯基空间中三角形的角度和）。设 $a \ll b \ll c$是闵可夫斯基空间中的点。那么

$$\measuredangle_a(b,c) + \measuredangle_c(a,b) = \measuredangle_b(a,c)$$

或者等价地，用有向角表示，

$$\measuredangle_a^S(b,c) + \measuredangle_b^S(a,c) + \measuredangle_c^S(a,b) = 0\,.$$

证明。假设向量 $c-a$ 是竖直的。将 $\triangle(a,b,c)$ 的副本沿竖直方向向上平移 $\tau(a,c)$，便得到一个新的三角形 $\triangle(a_2,b_2,c_2)$，且 $a_2 = c$。注意，$\tau(b,b_2) = \tau(a,c)$，因此 $\triangle(b,c,b_2)$ 也是 $\triangle(a,b,c)$ 的时间反向副本。由平面上的角度可加性可得$\measuredangle_b(a,c) = \measuredangle_c(b,b_2) = \measuredangle_c(a,b)+\measuredangle_c(b_2,c_2) = \measuredangle_c(a,b)+\measuredangle_a(b,c)$，证毕。□

现在，我们定义洛伦兹预长度空间之间的同构概念。

定义 2.5（结构保持映射）。给定两个洛伦兹预长度空间 X 和 Y，若映射 $f\colon X\to Y$ 满足：$f(x)\le_Y f(y)$ 当且仅当 $x\le_X y$，则称其为因果性保持 映射。另一方面，若对于任意 $x,y\in X$，f满足 $\tau_Y(f(x)\ f(y)) = \tau_X(x,y)$，则称 f为 τ-保持 映射。

此外，两个洛伦兹预长度空间之间的等距映射 是双射 $f\colon X\to Y$，满足 f，因此 f^{-1}也具有 τ-保持性和因果性保持性。

备注 2.6（等距映射、拓扑与因果性）。请注意，τ-保持映射不一定是因果性保持映射，参见 [11, 备注 3.2。6]（尽管该参考文献中的术语略有不同，但此处的备注仍然适用。）

进一步注意，如果 X 和 Y都是强因果洛伦兹预长度空间，那么任意一个 $f\colon X\to Y$按定义 2.5 意义下的等距映射都会自动成为同胚。这是因为，在强因果洛伦兹预长度空间中，度量拓扑与亚历山德罗夫拓扑一致，而按定义 2.5 意义下的等距映射会保持由时序菱形构成的亚历山德罗夫拓扑子基。

以下洛伦兹乘积的概念见于 [10, 定义 3.1]。若基底度量空间是测地空间，那么此意义下的洛伦兹乘积是更早引入的广义锥 的特例，方法是令翘曲函数为 $f\equiv 1$，参见 [7, 命题 3.6]。

定义 2.7（洛伦兹乘积）。设 (X, d) 是一个度量空间。洛伦兹乘积 $Y = \mathbb{R} \times X$ 由以下乘积度量给出

$$D\colon Y \times Y \to \mathbb{R},\ D((s,x),(t,y)) := \sqrt{|t-s|^2 + d(x,y)^2}\,;$$

时序关系

$$(s,x) \ll (t,y) \quad \text{if and only if} \quad t - s > d(x,y)\,;$$

因果关系

$$(s,x) \leq (t,y) \quad \text{if and only if} \quad t - s \geq d(x,y)\,;$$

以及时间分离 τ：由 $Y \times Y \to \mathbb{R}$ 给出

$$\tau((s,x),(t,y)) := \sqrt{(t-s)^2 - d(x,y)^2}$$

若 $(s,\ x) \leq (t,\ y)$，否则为 0。

当所指的洛伦兹乘积明确时，我们简单地用 $^{-}\mathbb{R} \times X$ 表示它。

以下命题是[3]中的结果和论证的推论。为求完整起见，我们给出证明。

命题 2.8（洛伦兹乘积的性质）。设 X 为长度空间，则洛伦兹乘积 $Y = {}^{-}\mathbb{R} \times X$ 是洛伦兹预长度空间。此外，若 X 是测地的，且 Y 的类时曲率（全局）上界为0，则 X 在三角形比较意义下具有非正曲率（全局而言，即 X 是一个$\mathrm{CAT}(0)$ 空间）。

证明。 Y 是洛伦兹预长度空间这一事实由 [10,命题 3.2]得出。若 Y的类时曲率上界为 0，则 X 具有非正曲率这一事实由 [3,定理 5.7]得出。

此外，仔细检查 [3, 引理 5.6], 的证明可知，当 Y 的类时曲率全局上界为 0 时，该引理给出的（≤ 0）比较邻域Y 所对应的常数 $C > 0$ 为 $C = \infty$。这意味着在 [3,定理 5.7] 的证明中，可以取 $U = X$，从而得到 X 在度量意义下是一个（≤ 0）比较邻域，即 X 是一个 CAT(0)空间。□

3. First variation formula

本节中，我们将证明一个适用于类时曲率有上界或下界的洛伦兹预长度空间的第一变分公式，该公式类似于正号差情形的公式（见 [14,定理 4.5.6] 和 [28,定理 3.5]）。据我们所知，综合洛伦兹几何中此前唯一的第一变分公式版本是 [4, 定理 19 和 20], ，适用于具有类时非负曲率的洛伦兹预长度空间。

在本节中，我们将 $\tau_s(p,\ q) := \max\{\tau(p,\ q)\ \tau(q,\ p)\}$ 记作与顺序无关的时间分离函数。我们首先考察模型空间。

命题 *3.1*（模型空间中的第一变分公式）。设 $K \in \mathbb{R}$和 $a, b \in \mathbb{L}^2(K)$ 类时相关。设 β 为连接这两点的一条测地线，且 $\gamma\colon [0,\delta] \to X$ 是一条从 $\gamma(0) = a$出发、以弧长为参数的未来指向类时测地线。假设 $c := \gamma(\delta)$ 也与 b 类时相关，并且三角形 $\triangle(b,a,c)$ 满足大小界。对于 $t \in [0,\delta]$，我们将边长称为 $y := \tau_s(b,a)$、 $t = \tau(a,\gamma(t))$ 和 $z(t) := \tau_s(b,\gamma(t))$。那么

$$\sigma \cosh(\measuredangle_a^S(\gamma,\beta)) = \lim_{t\to 0} \frac{z(t)-y}{t}\,, \tag{5}$$

其中

$$\sigma := \begin{cases} +1 & if \;\; b \ll a\,, \\ -1 & if \;\; b \gg a\,. \end{cases}$$

证明。 首先注意，根据比较角的定义，我们有$\measuredangle_a^S(\gamma,\ \alpha) = \widetilde{\measuredangle}^{K,\ S}_{a}(b,\ c) =:\ \theta$。回顾常截面曲率为 $K \in \mathbb{R}$ 的空间中三角形的洛伦兹余弦定律：

$$\begin{cases} y^2 + t^2 = z^2 - 2\sigma y t \cosh(\theta) \\ \cos(\sqrt{|K|}z) = \cos(\sqrt{|K|}y)\cos(\sqrt{|K|}t) - \sigma\cosh(\theta)\sin(\sqrt{|K|}y)\sin(\sqrt{|K|}t) \\ \cosh(\sqrt{K}z) = \cosh(\sqrt{K}y)\cosh(\sqrt{K}t) + \sigma\cosh(\theta)\sinh(\sqrt{K}y)\sinh(\sqrt{K}t) \end{cases}$$

第一个等式用于 $K = 0$，第二个等式用于 $K < 0$，最后一个等式用于 $K > 0$。证明现在只需进行简单计算。我们仅在 $K = 0$的情况下证明（5），其他两种情况通过应用洛伦兹余弦定律的相应形式可以类似地处理。

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{z(t)-y}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+y^2+2\sigma t y\cosh\theta}-y}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t+\sigma y\cosh\theta}{\sqrt{t^2+y^2+2\sigma t y\cosh\theta}} \\ &= \frac{\sigma y\cosh\theta}{\sqrt{y^2}} \\ &= \sigma\cosh\theta\,, \end{aligned}$$

其中第二个等式由洛必达法则得出。

□

现在我们将这一结果推广到一般的洛伦兹预长度空间。这将分两部分进行。

命题 *3.2*（第一变分公式，第一不等式）。设 X 为洛伦兹预长度空间。设 $U \subseteq X$ 为一个（$\leq K$）或（$\geq K$）曲率比较邻域，$\gamma\colon [0,\delta] \to U$ 为按弧长参数化的未来指向类时测地线，且 p 与 $a := \gamma(0)$ 类时相关。进一步假设，对于所有 $t \in [0,\delta)$，存在一条从 p 到 $\gamma(t)$ 的测地线 β_t。定义$l(t) = \tau_s(p,\gamma(t))$。若有向角 $\theta := \measuredangle_a^S(\gamma,\beta_0)$ 存在且有限，则

$$\liminf_{t\searrow 0}\frac{l(t)-l(0)}{t} \geq \sigma\cosh(\measuredangle_a(\gamma,\beta_0))\,,$$

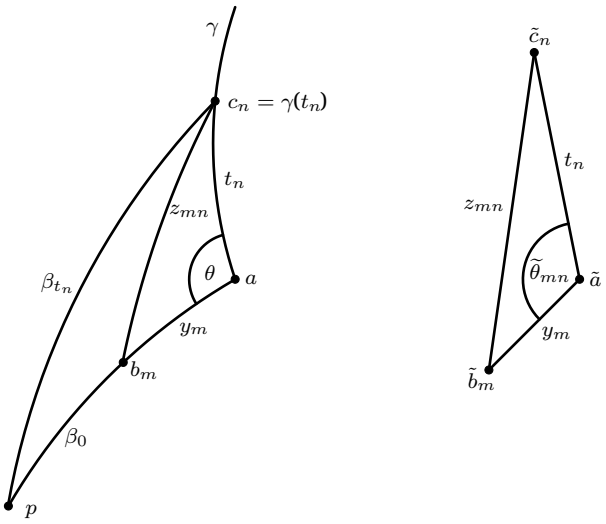


FIGURE 1. 为 $\sigma = 1$ 的第一变分公式作准备。

其中

$$\sigma := \begin{cases} +1 & p \ll a\,, \\ -1 & p \gg a\,. \end{cases}$$

证明。我们已经在比较空间中建立了该公式（等号成立），参见~命题 3.1。事实上，取满足大小界的类时三角形 $\triangle(b,\ \tilde{a},\ \tilde{c})$，其中位于 $\mathbb{L}^2(K)$ 中，边长为 $t := \tau(\tilde{a},\ \tilde{c})$、$y := \tau_s(\tilde{b},\ \tilde{a})$，角度为 $\widetilde{\theta} = \widetilde{\measuredangle}^{K,\ S}_{\tilde{a}}(\tilde{b},\ \tilde{c})$。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及任意 $\widetilde{\theta} \in \mathbb{R}$，都存在一个 $T_{\varepsilon,\ \tilde{\theta}} > 0$，使得对所有 $t \in (0,\ T_{\varepsilon,\ \tilde{\theta}})$，都有

$$\left| \sigma \cosh \widetilde{\theta} - \frac{z(t) - y}{t} \right| < \varepsilon\,, \tag{6}$$

其中，$z(t)$ 是三角形剩余边的长度，由另外三个参数 t, y 和 θ 唯一确定。

我们首先考虑这样的情形：$\sigma = 1$ 且 U 是一个（$\leq K$）曲率比较~邻域。若我们只考虑紧区间~$[0, \theta]$内的所有角度 θ，甚至可以找到一个与 θ 无关的 T_ε，使得（6）对~所有 $t \in (0, T_\varepsilon)$都成立。这是因为映射$\theta \mapsto T_{\varepsilon,\tilde{\theta}}$ 可以选为连续映射。因此，若取任意正序列（t_n）$_{n\in\mathbb{N}}$，满足~$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$，以及满足~$0 \leq \theta_n \leq \theta \in \mathbb{R}$的任意单调递增序列（$\theta_n$）$_{n\in\mathbb{N}}$，则存在一个 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$，使得当 $n \geq N_\varepsilon$ 时，我们有

$t_n \le T_\varepsilon$ 因此

$$\left| \cosh \widetilde{\theta}_n - \frac{z(t_n, \widetilde{\theta}_n) - y}{t_n} \right| < \varepsilon \,.$$

˜特别地，存在一个 $\theta_\infty \in \mathbb{R}$ 使得

$$\cosh \widetilde{\theta}_\infty = \lim_{n\to\infty} \cosh \widetilde{\theta}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{z(t_n, \widetilde{\theta}_n) - y}{t_n} \,.$$

˜这里， $z(t_n,\ \theta_n)$ 是具有边长t_n 和 y 、且在 $\mathbb{L}^2(K)$中夹角为 $\widetilde{\theta}_n$ 的三角形的第三条边的长度。

到目前为止，所有讨论都只在比较空间中进行。现在我们回到洛伦兹预长度空间 X。取任意一个收敛到 a 的序列$b_m \in \beta_0$ ，并且不失一般性地假设所有 b_m都位于比较邻域 U中。定义 $c_n := \gamma(t_n)$，并考虑三角形 $\triangle(b_m, a, c_n)$，其比较角为 $\widetilde{\theta}_{mn} = \widetilde{\measuredangle}^K{}_a{}^S(b_m, c_n)$，且边长为 y_m、 t_n 和 z_{mn}，见图1。根据曲率界， θ_{mn} 关于 n单调递增，因此由上述论证，对于任意固定的$m \in \mathbb{N}$，可得

$$\lim_{n\to\infty} \cosh \widetilde{\theta}_{mn} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_{mn} - y_m}{t_n} \,.$$

由反三角不等式，我们现在可以估计

$$z_{mn} - y_m = \tau(p, b_m) + z_{mn} - (\tau(p, b_m) + y_m) \le l(t_n) - l(0) \,.$$

注意，此估计与 m无关。因此综上，我们有

$$\cosh \theta = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \cosh \widetilde{\theta}_{mn} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{z_{mn} - y_m}{t_n} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{l(t_n) - l(0)}{t_n} \,.$$

若 $\sigma = -1$，这一论证会稍微微妙一些。选取一个收敛到 a的序列（b_m）$_{m\in\mathbb{N}}$ 后，比较角 $\widetilde{\theta}_{mn} = \widetilde{\measuredangle}^K{}_a{}^S(b_m,\ c_n)$ 将再次单调递增，且以上界 θ为界。˜然而，这意味着 θ_{mn} 会落在非紧区间（$-\infty,\ \theta$]。˜因此，不存在一个与 $\theta \in (-\infty,\ \theta]$ 无关的 $T_\varepsilon > 0$ ，使得（6）成立。不过，只需考虑紧区间 $[\theta_0, \theta]$内的角度，其中 $\theta_0 := \widetilde{\measuredangle}^K{}_a{}^S(b_0,\ \gamma(\delta))$ ，因为根据曲率界，$\sim\theta_{nm} \ge \theta_0$ 对所有 $n,\ m \in \mathbb{N}$均成立。 T_ε 此时也会依赖于 b_0，但这与证明的其余部分无关，因为其论证与 $\sigma = 1$的情形完全类似。事实上，最终我们得到

$$-\cosh \theta \le \liminf_{n\to\infty} \frac{l(t_n) - l(0)}{t_n} \,.$$

最后，设 U 是一个 $(\ge K)$ 曲率比较邻域。此时，˜比较角 θ_{mn} 不再单调递增且以上界 θ 为界，而是单调递减且以下界

为 θ。由于我们只利用曲率界推导出该序列的单调性及其随后收敛，因此，$\geq K$ 的证明几乎完全类似，只需做一些小的技术调整。□

为完成第一变分公式的证明，也就是说，为了证明一般空间中的式（5）成立等式，我们需要证明反向不等式：

$$\limsup_{t\searrow 0}\frac{l(t)-l(0)}{t}\leq \sigma\cosh(\measuredangle_a(\gamma,\beta_0))\,.$$

为此，我们先在比较空间 $\mathbb{L}^2(K)$ 中证明下面这个技术引理。

引理 *3.3*（第一变分公式，模型空间中的第二个不等式）。设 $K\in\mathbb{R}$ 和 $\triangle(a,b,c)$ 是 $\mathbb{L}^2(K)$ 中满足大小界的一个类时三角形，且满足 $b\ll a\ll c$ 或 $a\ll c\ll b$。此外，设 $\theta:=\measuredangle_a^S(b,c)$。记该三角形的边长为 $t:=\tau_s(a,c)$、$z:=\tau_s(b,c)$ 和 $y:=\tau_s(b,a)$，则有

$$\sigma\cosh(\theta)\geq\frac{z-y}{t}\,,$$

其中

$$\sigma:=\begin{cases}+1 & b\ll a\ll c,\\ -1 & a\ll c\ll b.\end{cases}$$

证明。我们先对 $K=0$ 给出证明，再推广到一般的 $K\in\mathbb{R}$。由洛伦兹余弦定律可得

$$\begin{aligned}\sigma\cosh(\theta)&=\frac{z^2-y^2-t^2}{2yt}\\&=\frac{z-y}{t}\frac{z+y}{2y}-\frac{t}{2y}-\frac{z-y}{t}+\frac{z-y}{t}\\&=\underbrace{\sigma\frac{z-y}{t}}_{\geq 1}\underbrace{\sigma\left(\frac{z+y}{2y}-1\right)}_{=\sigma\frac{z-y}{2y}\geq\frac{t}{2y}}-\frac{t}{2y}+\frac{z-y}{t}\\&\geq\frac{t}{2y}-\frac{t}{2y}+\frac{z-y}{t}=\frac{z-y}{t}\,,\end{aligned}$$

其中我们多次利用了根据反三角不等式，$\sigma(z-y)\geq t$。

对于 $K=1$ 和 $\sigma=+1$，我们必须证明

$$\frac{z-y}{t}\leq\sigma\cosh(\theta)=\frac{\cosh(z)-\cosh(t)\cosh(y)}{\sinh(t)\sinh(y)}=\frac{\cosh(z)-\cosh(t+y)}{\sinh(t)\sinh(y)}+1\,,$$

这里我们用到了双曲余弦的加法定理 $\cosh(t+y)$。根据反三角不等式，$z-(t+y)\geq 0$，因此，上式等价于

$$\frac{\cosh(z)-\cosh(t+y)}{z-(t+y)}\geq\frac{\sinh(t)\sinh(y)}{t}\,.\tag{7}$$

我们注意到，左边是双曲余弦的差商。根据中值定理，存在一个 $\lambda \in [t+y, z]$，使得

$$\sinh(\lambda) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=\lambda} \cosh(s) = \frac{\cosh(z) - \cosh(t+y)}{z-(t+y)}.$$

由于双曲正弦在 $\mathbb{R}$ 和 $\lambda \geq t+y$上单调递增，为了证明（7），只需证明

$$\sinh(t+y) \geq \frac{\sinh(t)\sinh(y)}{t}. \tag{8}$$

根据双曲正弦的加法定理$(t+y)$以及对于 $t>0$ 双曲正弦(t) t $\leq$双曲余弦(t)这一事实，我们得到

$$\sinh(t+y) = \sinh(t)\cosh(y) + \cosh(t)\sinh(y) \geq \frac{\sinh(t)\sinh(y)}{t}$$

证明（8），进而证明（7）。

事实上，通过分别用 $\sqrt{K}t$、$\sqrt{K}y$ 和 $\sqrt{K}z$ 替换 t、y 和 z，等式对任意 $K>0$ 都成立：

$$\sigma\cosh(\theta) = \frac{\cosh(\sqrt{K}z) - \cosh(\sqrt{K}t)\cosh(\sqrt{K}y)}{\sinh(\sqrt{K}t)\sinh(\sqrt{K}y)} \geq \frac{\sqrt{K}z - \sqrt{K}y}{\sqrt{K}t} = \frac{z-y}{t}.$$

另外三种情况（$K=\pm 1$，$\sigma=\pm 1$）通过使用不同的不等式可以类似地处理。我们不再重复计算，只说明与前一种情况的差异。

对于 $K=1$，$\sigma=-1$，我们首先对双曲余弦$(y-t)$使用加法定理，而不是对双曲余弦$(y+t)$使用加法定理，并应用反三角不等式 $y \geq t+z$。最后，我们不使用双曲正弦(t) t $\leq$ 双曲余弦(t)，而改用双曲正弦(t) t ≥ 1，由此得到相同的结果。在 $K=-1$ 的情形下，我们需要证明的不等式为

$$\frac{\cos(t)\cos(y) - \cos(z)}{\sin(t)\sin(y)} \geq \frac{z-y}{t}.$$

我们再次区分 $\sigma=\pm 1$ 的情形。首先，若 $\sigma=+1$，我们对余弦$(t+y)$应用加法定理；若 $\sigma=-1$，则对余弦$(y-t)$应用加法定理。最后，若 $\sigma=+1$，我们利用正弦(t) t ≤ 1；若 $\sigma=-1$，则对 $t\in[0,\pi]$，我们利用正弦(t) t $\geq$ 余弦(t)。

最后，对于任意 $K\in\mathbb{R}$，注意到在 $K>0$ 和 $\sigma=+1$ 的情形下，将所有边长乘以 $\sqrt{|K|}$ 后，不等式不变，由此完成证明。□

在继续推导第一变分公式之前，我们先陈述一个引理，该引理将在其证明中用到。

引理 3.4（类时三角形的高斯–博内公式）。设(M,g) 是一个单连通二维洛伦兹 C^2 流形，其截面曲率由连续函数 $K: M\to\mathbb{R}$ 表示（按照约定，在德西特空间上有 $K\equiv+1$）。给定一条测地线

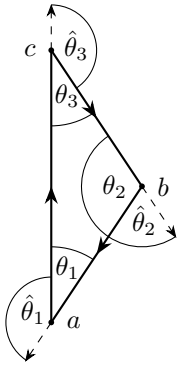


FIGURE 2. 将三角形视为闭合回路，以及外角。

类时三角形 $\triangle(a,b,c)$、 $a \ll b \ll c$，其角度为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$，内部为$D \subseteq M$，高斯–博内公式的以下特殊情形成立：

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \int_D K \,\mathrm{dA}\,. \tag{9}$$

证明。洛伦兹高斯–博内定理的证明与黎曼版本完全类似。这里我们不提供详细证明，而是采用 [23] 中的结果，并将其转化到我们的情形中。 [23] 中出现的对象将用带帽符号表示。

上述论文中的普适高斯–博内公式为

$$\int_D K \,\mathrm{d}\hat{\mathrm{A}} + \int_{\partial D} k_g \,\mathrm{d}l + \sum_j \hat{\theta}_j = 2\pi\,.$$

这里， k_g 表示边界的测地曲率；对我们而言，它为零，因为三角形的所有边都是测地线。

体积元的坐标定义与黎曼情形完全相同，即 $\mathrm{d\hat{}A} = \sqrt{\det\, g}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$。由于 g是洛伦兹的，$\det\, g < 0$，因此实值体积元为 $\mathrm{dA} = i\mathrm{dA}$。

这些量 θ_j 是 D的角点处的外角，参见图2。这些并非我们使用的双曲角，而是黎曼角向复平面的解析延拓。两个向量之间的角度定义为

$$\hat{\theta}(v_1, v_2) = \arccos\left(\frac{g(v_1,v_2)}{|v_1|_g\,|v_2|_g}\right), \qquad |v|_g = \sqrt{g(v,v)}\,.$$

对于类时向量， $|v|_g$ 是纯虚数， $|v_1|_g|v_2|_g$ 是实数且为负，并且

$$\left|\frac{g(v_1,v_2)}{|v_1|_g|v_2|_g}\right| > 1\,,$$

因此，反余弦函数取虚数值。

如果两个类时向量指向相同的时间方向（例如外角 $\hat{}\,\theta_2$ at b），那么 $^{g}_{(v_1,v_2)}{}_{|v_1|_g|v_2|_g} > 1$，并且要求角度位于 $i\mathbb{R}_{<0}$ 中（以确定反余弦函数的分支）。将此与我们对 b 处双曲角的定义相比较，可得

$$\theta_2 = \operatorname{arcosh}\left(\frac{g(-v_1, v_2)}{|-v_1|_g\,|v_2|_g}\right) = -i\,\hat{\theta}_2\,. \tag{10}$$

对于未来和过去顶点 a 和 c 处的角度 θ_1 和 θ_3，速度向量 v_1 和 v_2 均为类时，但时间定向相反。按照 [23], 的记号

$$\frac{g(v_1, v_2)}{|v_1|_g|v_2|_g} < -1\,,$$

$\hat{}$，角 θ_j 属于 $\pi + i\mathbb{R}_{>0}$。按照我们的双曲约定，可得

$$\theta_j = -\operatorname{arcosh}\left(-\frac{g(-v_1, v_2)}{|-v_1|_g\,|v_2|_g}\right) = i\pi - i\,\hat{\theta}_j\,. \tag{11}$$

将（10）与（11）相加，得到

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2i\pi - i\sum_j \hat{\theta}_j = i\int_D K\,\mathrm{d}\hat{\mathrm{A}} = \int_D K\,\mathrm{dA}\,,$$

如所述。 □

注 3.5（角度的半连续性及沿测地线的角度相等性）。在下面第一变分公式的证明中，我们将用到曲率比较邻域中角度的两个事实：

(i) 设 X 为正则，且 U 为 $(\geq K)$-（分别为 $(\leq K)$-）比较邻域。设 γ_n, β_n 为 U 中的类时测地线序列，它们共享一个端点 x_n，并逐点收敛到 U 中的类时测地线 γ, β。那么

$$\limsup_{n\to\infty} \measuredangle^S_{x_n}(\gamma_n, \beta_n) \leq \measuredangle^S_x(\gamma, \beta)$$
$$(\text{resp. } \liminf_{n\to\infty} \measuredangle^S_{x_n}(\gamma_n, \beta_n) \geq \measuredangle^S_x(\gamma, \beta)\ )$$

（见 [12, 命题 4.14]）。请注意，参考文献中仅证明了端点 x 固定的测地线 γ_n, β_n 的情形，而没有证明我们所需的端点 x_n 变化的情形。不过，证明很容易推广到 x_n 不固定的情形。另外请注意，参考文献假设空间是局部严格类时测地线连通的；这一点可由 X 为正则以及整个设置都处于一个比较邻域内推出。

(ii) 设 X 为局部因果闭，且 U 为一个（$\geq K$）比较邻域。设 $\gamma : [0,1] \to U$ 是一条未来指向类时测地线，设 $\beta : [0,1] \to U$ 是一条类时测地线，使得对于某个 $\lambda \in$，$\beta(0) = \gamma(\lambda),1)$。那么

$$\measuredangle_{\beta(0)}(\beta, \gamma|_{[0,\lambda]}) = \measuredangle_{\beta(0)}(\beta, \gamma|_{[\lambda,1]})$$

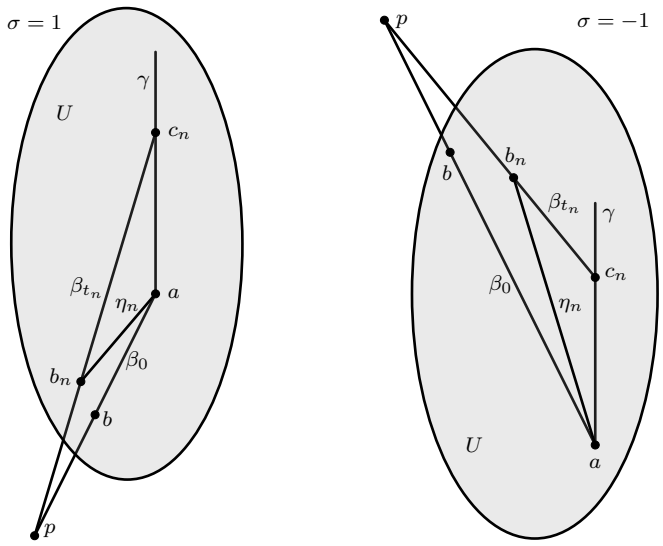


FIGURE 3. 关于 σ 的证明思路。

(见 [12, 推论 4。7]).

定理 *3.6*（第一变分公式）。设 X 是一个强因果、局部因果闭且正则的洛伦兹预长度空间。设 $U \subseteq X$ 是一个 $(\leq K)$ 曲率比较邻域或 $(\geq K)$ 曲率比较邻域，设 $\gamma : [0, \delta] \to U$ 是一条按弧长参数化的未来指向类时测地线，并且 $p \in X$ 与 $a := \gamma(0)$ 类时相关。设 $t_n \to 0$ 如 $n \to \infty, t_n \geq 0$，使得从 p 到 $\gamma(t_n)$ 的一列类时测地线 β_{t_n} 一致收敛到某个 β_0。定义 $l(t) = \tau_s(p, \gamma(t))$。若有向角 $\measuredangle_a^S(\gamma, \beta_0)$ 存在且有限，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(t_n) - l(0)}{t_n} = \sigma \cosh(\measuredangle_a(\gamma, \beta_0)),$$

其中

$$\sigma := \begin{cases} +1 & p \ll a, \\ -1 & p \gg a. \end{cases}$$

证明。 根据 命题 3.2仍需证明

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{l(t_n) - l(0)}{t} \leq \sigma \cosh(\measuredangle_a(\gamma, \beta_0)).$$

假设所有曲线 β_{t_n} 以及 β_0 都定义在 $[0, 1]$ 上，并选取 $\varepsilon > 0$，使得 $b := \beta_0(1 - \varepsilon)$ 位于 U 中。取 β_{t_n} 上的点 b_n，使它们收敛到 b，并且对于所有 n，b_n 都位于 U 中。我们声称，特别地，可以选择序列 b_n，使得若 $\sigma = 1$，则 $b \ll b_n$ 且 $b_n \ll a$；若对所有足够大的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\sigma = -1$，则 $b_n \ll b$ 且 $a \ll b_n$。

为此，定义集合 $U_{s,i} := I(\beta_0(s-1/i)\ \beta_0(s+1/i))$。由强因果性可知，对于足够大的 i （取决于 s），这些集合构成每个满足 $s \in (0,1)$ 的 $\beta_0(s)$ 的邻域基。对于每个 n，令 $i(n)$ 为满足以下条件的最大自然数 i：对所有 $s \in [1/i, 1-1/i]$，$\beta_{t_n}(s) \in U_{s,i}$。注意，由一致收敛可知，当 $n \to \infty$ 时，$i(n) \to \infty$。定义 $b_n := \beta_{t_n}(1-\varepsilon+\sigma/i(n))$。显然，$b_n \to b = \beta_0(1-\varepsilon)$。此外，对于足够大的 n，并假设 $\sigma = 1$，

$$b_n = \beta_{t_n}(1-\varepsilon+1/i(n)) \in U_{1-\varepsilon+1/i(n),i(n)} \subseteq I^+(\beta_0(1-\varepsilon)) = I^+(b)\,,$$

因此，$b_n \gg b$ 正如所需。最终 $b_n \ll a$ 这一事实，现在只是由 $b \ll a$ 和 $\ll$ 构成开关系这一事实得出的结果。类似地，在 $\sigma = -1$的情形下，我们证明 $b_n \ll b$ 和 $a \ll b_n$。这就证明了该断言。

令 $c_n := \gamma(t_n)$，由反三角不等式可得

$$l(0) \geq \tau_s(p,b_n) + \tau_s(b_n,a) \geq \tau_s(p,b_n) + \tau_s(b_n,c_n) - \sigma t_n \cosh(\widetilde{\measuredangle}_a^{S,K}(b_n,c_n)),$$

其中，第二个不等式用到了引理 3.3。由于 $\tau_s(p,b_n) + \tau_s(b_n,c_n) = \tau_s(p,c_n) = l(t_n)$，我们得到

$$\frac{l(t_n)-l(0)}{t_n} \leq \sigma \cosh(\widetilde{\measuredangle}_a^{S,K}(b_n,c_n))\,. \tag{12}$$

现在假设 U 是一个$(\leq K)$-曲率比较邻域。首先，回顾一下，根据角度三角不等式，我们有

$$\measuredangle_a(\gamma,\beta_0) \geq \measuredangle_a(\gamma,\eta_n) - \measuredangle_a(\eta_n,\beta_0)\,,$$

and

$$\measuredangle_a(\gamma,\beta_0) \leq \measuredangle_a(\gamma,\eta_n) + \measuredangle_a(\eta_n,\beta_0)\,,$$

其中，η_n 是从 b_n 到 a的唯一类时测地线，参见图3。将此应用于有向角，其中第一个不等式用于 $\sigma = 1$，第二个不等式用于 $\sigma = -1$，可得

$$\sigma \cosh(\measuredangle_a^S(\gamma,\beta_0)) \geq \sigma \cosh(\measuredangle_a^S(\gamma,\eta_n) + \measuredangle_a^S(\eta_n,\beta_0))\,.$$

接下来我们断言，测地线 η_n 逐点收敛到 $\beta_0|_{[1-\varepsilon,1]^\circ}$。为此，首先重新参数化所有这些曲线，使其定义在$[0,1]$ 上，并且为清晰起见，用$\hat{}$ β_0 代替 $\beta_0|_{[1-\varepsilon,1]^\circ}$ 取 $s \in (0,1)$，那么只需证明：对于任意 $\delta > 0$，当 $n \in \mathbb{N}$ 足够大时，有$\hat{}$ $\hat{}$$\eta_n(s) \in I(\beta_0(s-\delta)\ \beta_0(s+\delta))$。根据证明的第一部分，我们可以考虑 $\tilde{}$ $\tilde{}$中的类时三角形 $\triangle(a,\ b_n,\ b)$及其比较三角形 $\triangle(\tilde{a},\ b_n,\ b)$。由于 $b_n \to b$ 当 $n \to \infty$ 时，并且 U 上的时间分离函数是连续的，我们有

$$\tau_s(b,b_n) + \tau_s(b_n,a) \to \tau_s(b,a) \qquad (n \to \infty)$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$因此，边 $[b_n,\tilde{a}]$ 收敛到比较空间中的边 $[b,\tilde{a}]$。特别是，对于足够大的 n，比较点 $[b_n,\tilde{a}](s)$ 与 $[b,\tilde{a}](s-\delta)$ 和 $[b,\tilde{a}](s+\delta)$ 都存在类时关系。根据曲率上界，

ˆ ˆ 我们现在也必须有 $\eta_n(s) \in I(\beta_0(s-\delta)\ \beta_0(s+\delta))$，如所需。因此，我们可以利用角度的半连续性得到

$$0 = \measuredangle_a^S(\beta_0,\beta_0) \le \liminf_{n\to\infty} \measuredangle_a^S(\eta_n,\beta_0) \le 0\,.$$

因此，所有不等式实际上都是等式，特别是 $\measuredangle_a^S(\eta_n,\ \beta_0) \to 0$，当 $n\to\infty$ 时。综上，我们得到

$$\begin{aligned}\sigma\cosh(\measuredangle_a^S(\gamma,\beta_0)) &\ge \limsup_{n\to\infty} \sigma\cosh(\measuredangle_a^S(\gamma,\eta_n)+\measuredangle_a^S(\eta_n,\beta_0))\\ &= \limsup_{n\to\infty} \sigma\cosh(\measuredangle_a^S(\gamma,\eta_n))\\ &\ge \limsup_{n\to\infty} \sigma\cosh(\widetilde{\measuredangle}_a^{S,K}(b_n,c_n))\,,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 $\le K$-曲率比较邻域中的角度单调性推出。结合（12），本部分证明即告完成。

最后，设 U 是一个（$\ge K$）-比较邻域。考虑三角形 $\triangle(a,\ b_n,\ c_n)$。我们知道 $\tau_s(a,\ c_n) \to 0$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \tau_s(b_n,a) = \lim_{n\to\infty} \tau_s(b_n,c_n) = \tau_s(b,a)\,,$$

因此，由洛伦兹余弦定律可知 $\widetilde{\measuredangle}^{S,\ K}_{b_n}(a,\ c_n) \to 0$，因为 $n\to\infty$。现在注意，比较三角形 $\triangle(\tilde a,\ \tilde b_n,\ \tilde c_n)$ 在 $\mathbb{L}^2(K)$ 中的面积也趋于零，因此，针对类时三角形的 Gauss–Bonnet 公式引理 3.4 给出

$$\limsup_{n\to\infty} \widetilde{\measuredangle}_a^{S,K}(b_n,c_n) = -\liminf_{n\to\infty} \widetilde{\measuredangle}_{c_n}^{S,K}(a,b_n)\,.$$

利用这一事实以及角度单调性，可得

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sigma\cosh(\widetilde{\measuredangle}_a^{S,K}(b_n,c_n)) &= \limsup_{n\to\infty} \sigma\cosh(\widetilde{\measuredangle}_{c_n}^{S,K}(a,b_n))\\ &\le \limsup_{n\to\infty} \sigma\cosh(\measuredangle_{c_n}^{S}(a,b_n))\\ &= \limsup_{n\to\infty} \sigma\cosh(\measuredangle_{c_n}^{S}(b_n,\gamma(\delta)))\\ &= \sigma\cosh\left(\limsup_{n\to\infty} \measuredangle_{c_n}^{S}(b_n,\gamma(\delta))\right)\\ &\le \sigma\cosh(\measuredangle_a^S(b,\gamma(\delta))) = \sigma\cosh(\measuredangle_a(\beta_0,\gamma))\,,\end{aligned}$$

其中 注 3.5(ii) 用于从第二行 переход到第三行，而角度的半连续性用于从第四行 переход到第五行。将这一系列不等式与（12）结合起来，即完成证明。□

注记 3.7（关于第一变分公式的假设）。 前述定理仅适用于强因果、局部因果闭且正则的洛伦兹预长度空间。对于曲率上界为 K 的情形，可以去掉这些假设，改为假设 $U = X$，即整个空间都是一个（$\le K$）曲率比较邻域。在这种情况下，我们

可以直接将 引理 3.3 应用于三角形$\triangle(p, a, c_n$（及其比较三角形）。由此得到

$$\sigma\cosh(\measuredangle_a^S(\gamma,\beta_0)) \geq \sigma\cosh(\widetilde{\measuredangle}_a^{S,K}(p,c_n)) \geq \frac{l(t_n)-l(0)}{t_n}\,.$$

请注意，这一论证适用于任意选择的 t_n ，且无需假设曲线一致收敛 β_{t_n}。特别地，结合 命题 3.2，第一变分公式可写为

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{l(t)-l(0)}{t} = \sigma\cosh(\measuredangle_a(\gamma,\beta_0))\,.$$

4. Rigidity for upper curvature bounds

本节将证明，对于类时曲率有上界的空间，在三角形比较与角度比较条件取等号时的刚性结果，这与 [14, 命题 9.1 类似。19]。特别地，我们得到一个判据，用于检测类时曲率上界为 0 的洛伦兹预长度空间中的平坦区域（命题 4.2），这与[14, 引理 9.2 类似。30]。这一判据将成为证明定理 1.1的关键，因为它使我们能够证明，在曲率假设下，弱平行直线实际上是同步平行直线。

对于以下结果，回顾一下，对于任意 $S \subseteq \mathbb{R}^n$， S的凸包是集合

$$\operatorname{conv}(S) := \left\{ \sum_{i=0}^{N} a_i x_i : N \in \mathbb{N},\ x_i \in S,\ a_i \geq 0 \text{ with } \sum_{i=0}^{N} a_i = 1 \right\}.$$

命题 4.1（曲率上界的刚性）。 设 X 是一个洛伦兹预长度空间。设 $\triangle$（a， b， c）是一个类时三角形，其顶点具有特定顺序，且位于因果闭的（$\leq K$）曲率比较邻域$U \subseteq X$中。设 $\triangle$（$\bar{a}$， $\bar{b}$， $\bar{c}$）是 $\mathbb{L}^2$（K）中的一个比较三角形。则以下命题等价：

(i) a 和 $\bar{a}$ 处的角度相等，即 $\measuredangle_a(b,c) = \widetilde{\measuredangle}_a^K(b,c)$。 *(ii)* $\triangle(a,b,c)$的所有角度都等于$\triangle(\bar{a},b,\bar{c})$中对应的角度。 *(iii)* 对于所有点 $x \in [a,c]$，$x \neq a, c$，其比较点 $\bar{x}$ 满足$\tau_s(b,x) = \tau_s(b,\bar{x})$。 *(iv)* 存在一点 $x \in [a,c]$，$x \neq a, c$，其比较点$\bar{x}$ 满足 $\tau_s(b,x) = \tau_s(b,\bar{x}) > 0$。 *(v)* 存在一个等距映射 f，将‘填充三角形’$\operatorname{conv}(\triangle(\bar{a},b,\bar{c}))$映入 U，并将 $\triangle(\bar{a},b,\bar{c})$的边映到$\triangle(a,b,c)$中对应的边上（‘存在一个 $\triangle(a,b,c)$的填充部分，且它是模型空间的一部分’）。 f 的像是测地凸的，即对于像中的任意 $x \leq y$，都存在一条连接它们且始终位于像内的测地线。

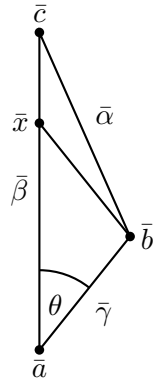


FIGURE 4. 比较构型的标记。

证明。 我们证明$(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$，从而证明它们等价。最后，我们证明$(iv) \Leftrightarrow (iii)$以及$(i) + (ii) + (iii) + (iv) \Leftrightarrow (v)$。

$(i) \Rightarrow (iii)$ 令 $\alpha = [b, c]$、$\beta = [a, c]$ 和 $\gamma = [a, b]$，并令 $\bar{\alpha} = [b, \bar{c}]$、$\bar{\beta} = [\bar{a}, \bar{c}]$ 和 $\bar{\gamma} = [\bar{a}, \bar{b}]$ 在模型空间 $\mathbb{L}^2(K)$ 中以相同方式定义。此外，所有这些曲线都以恒定速度参数化，并定义在 $[0, 1]$ 上。

令$\angle_b^K(\beta(s), \gamma(t))$。由于 X 的类时曲率有上界， $\theta(s, t)$ 单调递减，参见 [8, 定义 3.8]。若 (i) 成立，则有 $\theta(1, 1) = \lim_{s,t\to 0} \theta(s, t)$，因此 $\theta(s, t)$ 在其定义域内必为常数。根据洛伦兹余弦定律，等式$\theta(s, t) = \theta(1, 1)$ 意味着：在 $\triangle(a, \beta(s)\ \gamma(t))$与 $\triangle(\bar{a}, \beta(s)\ \bar{\gamma}(t))$ 之间，两条边长相等，且 a 处的比较角等于模型空间中三角形在 $\bar{a}$处的角度，因此第三条边长也相等。也就是说，只要其为正数，就有 $\tau_s(\beta(s)\ \gamma(t)) = \tau_s(\beta(s)\ \bar{\gamma}(t))$。若$\tau_s(\beta(s)\ \gamma(t)) = 0$，则根据标准三角形比较，这个等式显然成立。现在我们指定 $t = 1$ 使得 $\gamma(1) = b$，从而得到 (iii)。注意，我们可以不取 $t = 1$ 而取 $s = 1$，这样便得到 (iii)，其中 b 和 c互换。

$(iii) \Rightarrow (ii)$ 假设 (iii)，也就是说，对于所有满足 $t \in (0, 1)$ 的点 $\beta(t)$，其比较点 $\bar{\beta}(t)$ 满足：对于所有 $t \in (0, 1)$，均有 $\tau_s(b, \beta(t)) = \bar{\tau}_s(b, \bar{\beta}(t))$。令 $l(t) = \tau_s(b, \beta(t))$，且 $\bar{l}(t) = \bar{\tau}_s(b, \bar{\beta}(t))$。显然 $l(t) = \bar{l}(t)$；分别对 $t \to 0$ 和 $t \to 1$两次应用第一变分公式（定理 3.6），可得 $\angle_a(b, c) = \widetilde{\angle}_a^K(b, c)$，以及 $\angle_c(a, b) = \widetilde{\angle}_c^K(a, b)$。接下来只需证明 $\angle_b(a, c) = \widetilde{\angle}_b^K(a, c)$。为此，我们只需将 $(i) \Rightarrow (iii)$ 应用于角度 $\angle_a(b, c)$。这表明条件 (iii) 对边 α 成立；现在应用上述论证即可得到最终的角度。

$(ii) \Rightarrow (i)$ 无需证明，因为（i）是一个较弱的陈述。（iii）$\Rightarrow (iv)$ 无需证明，因为（iv）是一个较弱的陈述。

$(iv)\Rightarrow(iii)$ 如果（iv）在 $x\in\beta$ 处成立，根据时间对称性，不失一般性，我们可以假设 $a\ll x\ll c$ 以及 $x\ll b$，见图4。（iv）意味着¯对于 x，比较点 $\bar{x}$ 构成了有效的比较三角形 $\triangle(\bar{a},b,\bar{x})^{-}$，对应于 $\triangle(a,b,x)$，以及对应于 $\triangle(b,x,c)$ 的 $\triangle(b,\bar{x},\bar{c})$。根据平面中的角度可加性，我们有

$$\widetilde{\measuredangle}_x^K(a,b)=\measuredangle_{\bar{x}}(\bar{a},\bar{b})=\measuredangle_{\bar{x}}(\bar{b},\bar{c})=\widetilde{\measuredangle}_x^K(b,c)$$

并且由类时曲率上界可得

$$\measuredangle_x(a,b)\geq\widetilde{\measuredangle}_x^K(a,b)=\widetilde{\measuredangle}_x^K(b,c)\geq\measuredangle_x(b,c)\,.$$

由命题 2.3 (ii)，可得

$$\measuredangle_x(a,b)\leq\measuredangle_x(a,c)+\measuredangle_x(c,b)=\measuredangle_x(c,b)\,,$$

因此它们相等，所以对于 x 处的 $\triangle(a,b,x)$ 和 $\triangle(b,x,c)$，(i) 成立。我们在这两个三角形上使用 $(i)\Rightarrow(iii)$，得到原三角形的 (iii)。具体而言，设 $y\in\beta$，那么它要么在 $[a,x]$，要么在 $[x,c]$，不妨设在 $[a,x]$。由于 $\triangle(\bar{a},b,\bar{x})$ 是 $\triangle(a,b,x)$ 的比较三角形，并且 y的比较点也是 $\triangle(\bar{a},b,\bar{c})$ 中 y的比较点，因此有 $\tau(b,x)=\tau(b,\bar{x})^{-}$，且 $\tau(x,b)=\tau(\bar{x},b)$。

$(v)\Rightarrow(i)$—(iv) 由等距映射的定义可知这一点显然。(i)—$(iv)\Rightarrow(v)$ 假设 $a\ll b\ll c$。注意，¯凸包 $(\triangle(\bar{a},b,\bar{c}))$ 中的所有点都可表示为 $[\bar{a},[b,\bar{c}](s)](t)$，其中 $s,t\in[0,1]$，并且除非 $t=0$，(s,t) 是唯一的。定义一个映射

$$\begin{aligned}f\colon\operatorname{conv}(\triangle(\bar{a},\bar{b},\bar{c}))&\longrightarrow X\,,\\ [\bar{a},[\bar{b},\bar{c}](s)](t)&\longmapsto[a,[b,c](s)](t)\,.\end{aligned}$$

这是良定义的，因为对于 $t=0$，结果总是 a；并且由 [9, 定理 4.7] 可知，比较邻域中的测地线是唯一的。我们断言，若 $x=[b,c](s_1)\ll y=[b,c](s_2)$，则 (i) 在 a in $\triangle(a,x,y)$ 处也成立。¯我们知道 $\bar{x}=[b,\bar{c}](s_1)$ $\bar{y}=[b,\bar{c}](s_2)$。由命题 2.3 (i)，可得

$$\begin{aligned}\widetilde{\measuredangle}_a^K(b,c)&=\widetilde{\measuredangle}_a^K(b,x)+\widetilde{\measuredangle}_a^K(x,y)+\widetilde{\measuredangle}_a^K(y,c)\\&\geq\measuredangle_a(b,x)+\measuredangle_a(x,y)+\measuredangle_a(y,c)\geq\measuredangle_a(b,c)=\widetilde{\measuredangle}_a^K(b,c)\,.\end{aligned}$$

因此，所有这些不等式都取等号。进一步考察可得 $\widetilde{\measuredangle}_a^K(x,y)=\measuredangle_a(x,y)$，也就是说，$(i)$ 对于 $\triangle(a,x,y)$ 成立，而子三角形$\triangle(\bar{a},\bar{x},\bar{y})$ 是其比较三角形。现在，对于两个点 $w=[a,x](t_1)$ $z=[a,y](t_2)$，我们知道比较点为 $\bar{w}=[\bar{a},\bar{x}](t_1)$ $\bar{z}=[\bar{a},\bar{y}](t_2)$ 和 $f(\bar{w})=w$以及 $f(\bar{z})=z$。通过类似于 $(i)\Rightarrow(iii)$ 的论证，可以证明 $\tau(w,z)=\tau(\bar{w},\bar{z})$。改变 s_1,t_1和 s_2,t_2即可得到所有比较点，由此可知 f 是 τ-保持的。

要证明 f 保持 $\leq$，注意到蕴含关系 $f(z)\leq f(w)\Rightarrow z\leq w$ 可通过以类时方式逼近 z 或 w 轻易得出：假设我们找到满足 $z_n\ll z$的 $z_n\to z$，那么 $f(z_n)\ll f(z)\leq f(w)$，因此 $z_n\ll w$。在

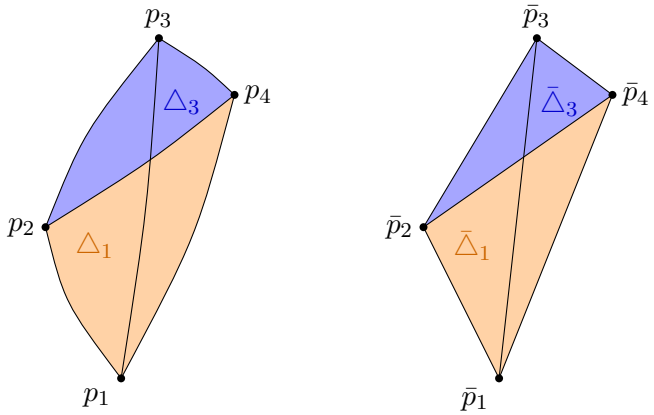


FIGURE 5. 四边形的构造，第一种情况。

取极限后，我们仍有 $z \leq w$。利用 U 是因果闭的，同理可得蕴含关系 $z \leq w \Rightarrow f(z) \leq f(w)$。□

命题 4.2 (有符号角和为零的四边形)。设 X 是一个全局因果闭的洛伦兹预长度空间，其类时曲率全局上界为 $K = 0$。将四个点 $p_1 \ll p_2 \ll p_4 \ll p_3$ 视为一个四边形（具有类时对角线） $Q = (p_1, p_2, p_3, p_4)$。若此四边形的角满足

$$\measuredangle_{p_1}(p_2, p_4) + \measuredangle_{p_3}(p_2, p_4) \geq \measuredangle_{p_2}(p_1, p_3) + \measuredangle_{p_4}(p_1, p_3)\,, \tag{13}$$

那么这里必为等号，且 Q 界定一个凸平坦区域。更确切地说，在闵可夫斯基空间中存在一个填充四边形 $\bar{Q} = \text{凸包}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4) \subseteq \mathbb{R}^{1,1}$ 以及一个等距映射 $f\colon Q \to X$，对所有 i，都将 $\bar{p}_i$ 映射到 p_i。

证明。回顾一下，由于我们讨论的是 $K = 0$，比较角中的 K可以省略。取三角形 $\triangle_1 := \triangle(p_1, p_2, p_4)$ $\triangle_3 := \triangle(p_2, p_3, p_4)$，并考虑比较构型 Q，它由 $\triangle_1, \triangle_3$ 的比较三角形 $\bar{\triangle}_1, \bar{\triangle}_3$ 组成，这两个三角形有一条公共边 $[\bar{p}_2, \bar{p}_4]$，且 $\bar{p}_1, \bar{p}_3$ 位于延长边 $[\bar{p}_2, \bar{p}_4]$ 所在直线的两侧，见图 5。

由于我们是在闵可夫斯基平面中进行比较，根据（4），三角形 $\bar{\triangle}_1$ 和 $\bar{\triangle}_3$ 中的角满足以下不等式：

$$\begin{aligned}
&\measuredangle_{p_1}(p_2, p_4) \leq \widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_2, p_4)\,, \qquad &&\measuredangle_{p_2}(p_3, p_4) \leq \widetilde{\measuredangle}_{p_2}(p_3, p_4)\,,\\
&\measuredangle_{p_2}(p_1, p_4) \geq \widetilde{\measuredangle}_{p_2}(p_1, p_4)\,, \qquad &&\measuredangle_{p_3}(p_2, p_4) \leq \widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_2, p_4)\,,\\
&\measuredangle_{p_4}(p_1, p_2) \leq \widetilde{\measuredangle}_{p_4}(p_1, p_2)\,, \qquad &&\measuredangle_{p_4}(p_2, p_3) \geq \widetilde{\measuredangle}_{p_4}(p_2, p_3)\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

根据引理 2.4，我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_2, p_4) + \widetilde{\measuredangle}_{p_4}(p_1, p_2) &= \widetilde{\measuredangle}_{p_2}(p_1, p_4)\,,\\
\widetilde{\measuredangle}_{p_2}(p_3, p_4) + \widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_2, p_4) &= \widetilde{\measuredangle}_{p_4}(p_2, p_3)\,,
\end{aligned}$$

特别是

$$\begin{aligned} \measuredangle_{p_1}(p_2,p_4)+\measuredangle_{p_4}(p_1,p_2) &\le \measuredangle_{p_2}(p_1,p_4)\,, \\ \measuredangle_{p_2}(p_3,p_4)+\measuredangle_{p_3}(p_2,p_4) &\le \measuredangle_{p_4}(p_2,p_3)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

根据命题 2.3 (ii) 在 p_2 和 p_4处，我们有：

$$\begin{aligned} \measuredangle_{p_2}(p_1,p_4) &\le \measuredangle_{p_2}(p_3,p_4)+\measuredangle_{p_2}(p_1,p_3)\,, \\ \measuredangle_{p_4}(p_2,p_3) &\le \measuredangle_{p_4}(p_2,p_1)+\measuredangle_{p_4}(p_1,p_3)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

注意，除最后一项外，其余各项都出现在（15）的求和中，因此我们可以得出

$$\begin{aligned} \measuredangle_{p_1}(p_2,p_4)+\measuredangle_{p_3}(p_2,p_4) &\le \measuredangle_{p_2}(p_1,p_4)-\measuredangle_{p_2}(p_3,p_4)+\measuredangle_{p_4}(p_2,p_3)-\measuredangle_{p_4}(p_1,p_2) \\ &\le \measuredangle_{p_2}(p_1,p_3)+\measuredangle_{p_4}(p_1,p_3)\,, \end{aligned}$$

这就是假设的反向不等式。因此，我们所有的不等式事实上都是等式。特别地， $\triangle_1$ 和 $\triangle_3$ 中的所有角都等于相应的比较角。

¯我们断言 Q 是凸的。事实上，这归结为 $\bar{p}_2$ 和 $\bar{p}_4$ 位于线段 $[\bar{p}_1,\bar{p}_3]$ 的两侧。由（13）以及曲率假设给出的角度比较条件，我们有

$$\widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_2,p_4)+\widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_2,p_4) \ge \widetilde{\measuredangle}_{p_2}(p_1,p_3)+\widetilde{\measuredangle}_{p_4}(p_1,p_3)\,. \tag{17}$$

然而，若 $\bar{p}_2$ 和 $\bar{p}_4$ 位于延长 $\bar{p}_1\bar{p}_3$所得直线的同一侧，那么根据我们的初始假设，即 $\bar{p}_1$ 和 $\bar{p}_3$ 位于延长线段 $[\bar{p}_2,\bar{p}_4]$所得直线的两侧，可知 $\bar{p}_2$ 位于$\triangle(\bar{p}_1,\ \bar{p}_3,\ \bar{p}_4)$的内部，或者 $\bar{p}_4$ 位于 $\triangle(\bar{p}_1,\ \bar{p}_2,\ \bar{p}_3)$ 的内部。不失一般性，我们假设后一种情况成立。

在此假设下，显然有

$$\widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_2,p_4) \le \widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_2,p_3) \quad \text{and} \quad \widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_2,p_4) \le \widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_2,p_1)$$

这意味着

$$\widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_2,p_4)+\widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_2,p_4) \le \widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_2,p_3)+\widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_2,p_1) = \widetilde{\measuredangle}_{p_2}(p_1,p_3)$$

˜这一点与（17）结合，得到 $\measuredangle_{p_4}(p_1,\ p_3)=0$，这与 $\bar{p}_4$ 位于 $\triangle(\bar{p}_1,\ \bar{p}_2,\ \bar{p}_3)$ 的内部相矛盾。

令 $\bar{q}$ 为对角线 $[\bar{p}_1,\bar{p}_3]\cap[\bar{p}_2,\bar{p}_4]$ 和 $q=$[p_2,p_4]的交点（$\tau(\bar{p}_2,\ \bar{q})$）（即 $\bar{q}$是其比较点，对 $\triangle_1$和 $\triangle_3$而言均如此）。根据 Q的凸性，¯存在。现在我们有以下等式链：

$$\begin{aligned} \measuredangle_{p_2}(p_1,p_3) &= \measuredangle_{p_2}(p_1,p_4)-\measuredangle_{p_2}(p_3,p_4) \\ &= \widetilde{\measuredangle}_{p_2}(p_1,p_4)-\widetilde{\measuredangle}_{p_2}(p_3,p_4) \\ &= \measuredangle_{\bar{p}_2}(\bar{p}_1,\bar{p}_3) \end{aligned}$$

这由式（16）中的等号、式（14）中的等号以及平面中的角度可加性得出。因此， $\bar{p}_1$、$\bar{p}_2$、$\bar{p}_3$构成了 $[p_2,p_1]$、$[p_2,p_3]$的有效比较铰链。根据

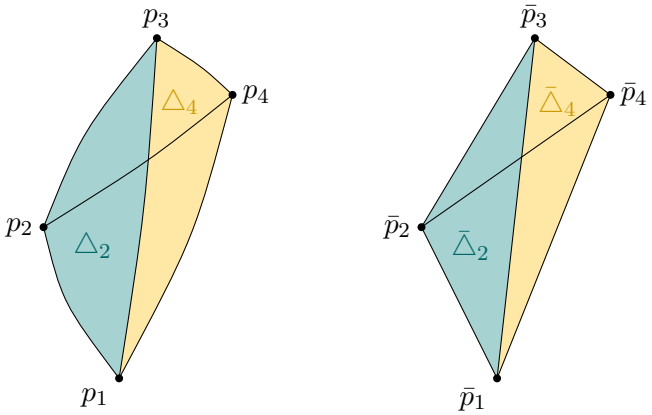


FIGURE 6. 四边形的构造，第二种情形。

铰链比较和反三角不等式，可得

$$\tau(p_1,p_3) \le \tau(\bar{p}_1,\bar{p}_3) = \tau(\bar{p}_1,\bar{q}) + \tau(\bar{q},\bar{p}_3) \le \tau(p_1,p_3)\,.$$

因此，$\triangle_2 = \triangle(\bar{p}_1,\ \bar{p}_2,\ \bar{p}_3)$ 和 $\triangle_4 = \triangle(\bar{p}_1,\ \bar{p}_3,\ \bar{p}_4)$ 是 $\triangle_2 : = \triangle(p_1,\ p_2,\ p_3)$ 的比较三角形，$\triangle_4 : = \triangle(p_1,\ p_3,\ p_4)$，见 图6。

可以针对三角形$\triangle_2$，$\triangle_4$：提出与上述类似的论证。由于我们是在与一个 $K = 0$ 比较空间进行比较，根据（4），我们有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\measuredangle}_{p_2}(p_1,p_3) + \widetilde{\measuredangle}_{p_4}(p_1,p_3)\\
&\le \measuredangle_{p_2}(p_1,p_3) + \measuredangle_{p_4}(p_1,p_3)\\
&\le \measuredangle_{p_1}(p_2,p_4) + \measuredangle_{p_3}(p_2,p_4)\\
&\le \measuredangle_{p_1}(p_2,p_3) + \measuredangle_{p_1}(p_3,p_4) + \measuredangle_{p_3}(p_2,p_1) + \measuredangle_{p_3}(p_1,p_4)\\
&\le \widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_2,p_3) + \widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_3,p_4) + \widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_2,p_1) + \widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_1,p_4)\,,
\end{aligned} \tag{18}$$

其中我们随后应用了该假设；命题 2.3 (i)；并再次应用了（4）。此外，根据引理 2.4 我们知道

$$\begin{aligned}
\widetilde{\measuredangle}_{p_2}(p_1,p_3) &= \widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_2,p_3) + \widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_1,p_2)\,,\\
\widetilde{\measuredangle}_{p_4}(p_1,p_3) &= \widetilde{\measuredangle}_{p_1}(p_3,p_4) + \widetilde{\measuredangle}_{p_3}(p_1,p_4)\,.
\end{aligned}$$

因此，（18）的起始项和末尾项相等，特别是，$\triangle_2$和 $\triangle_4$ 中的所有角度都分别等于相应的比较角。

因此，我们知道命题 4.1(i) 对所有 $\triangle_i$ 均成立，因此命题 4.1(v) 也成立。也就是说，我们得到等距映射 f_i，它们将填充三角形 $\triangle_i$ 映入 $\triangle_i$，从而填充 $\triangle_i$。由于 $\triangle_1$，$\triangle_3$ 仅在边$[\bar{p}_2,\bar{p}_4]$ 上重叠，而在该边上 f_1 与 f_3 一致，因此这些等距映射可拼合为一个连续映射 f_{13}，将填充四边形 Q 映至 X。对 f_2 和f_4同样可行，从而得到连续映射 f_{24}。

这两个映射都将四边形 $[\bar{p}_i, \bar{p}_{i+1}]$ 的边映到 $[p_i, p_{i+1}]$（指标按模 4 计算），f_{13} 将对角线 $[\bar{p}_2, \bar{p}_4]$ 映到 $[p_2, p_4]$，而 f_{24}将对角线 $[\bar{p}_1, \bar{p}_3]$ 映到 $[p_1, p_3]$，因为这些边和对角线都位于该映射的某个等距区域内。

对于其他对角线，我们已经知道

$$\tau(p_1, p_3) = \tau(\bar{b}_1, \bar{q}) + \tau(\bar{q}, \bar{p}_3) = L(f_{13}([\bar{p}_1, \bar{p}_3]))\,,$$

使 $f_{13}([\bar{p}_1, \bar{p}_3])$ 等于 $[p_1, p_3]$。对于 $f_{24}([\bar{p}_2, \bar{p}_4])$，可以类似地进行：令 $q' = f_{24}(\bar{q})$，证明 $\tau(p_2, p_4) = \tau(p_2, q') + \tau(q', p_4)$，并使用铰链比较，使 $f_{24}([\bar{p}_2, \bar{p}_4]) = [p_2, p_4]$。现在注意到，$q, q'$ 都是 $[p_1, p_3]$ 和 $[p_2, p_4]$ 的交点，因此相同（如果交点不只是一个点，注意 $\tau(p_1, q) = \tau(p_1, q')$）。

现在我们定义四个子三角形 $\triangle_{12} = \triangle(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q})$、$\triangle_{23} = \triangle(\bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{q})$、$\triangle_{34} = \triangle(\bar{p}_3, \bar{p}_4, \bar{q})$、$\triangle_{41} = \triangle(\bar{p}_4, \bar{p}_1, \bar{q})$（其中填充三角形 $\triangle_{ij}$ 是填充三角形 $\triangle_i$ 与 $\triangle_j$的交点），见图 7。我们断言$f_{13} = f_{24}$。事实上，我们已经知道所有 $[\bar{p}_i, \bar{q}]$ 都等距映射到 $[p_i, q]$，即 f_{13}、f_{24} 在对角线上一致。现在注意，填充四边形 Q 中的任意点 $\bar{x}$ 都位于填充三角形 $\triangle_{ij}$中的一个。令 $\bar{a} \ll b \ll \bar{c}$ 为 $\triangle_{ij}$ 的顶点，按时间顺序排列，则 $\bar{x}$ 可表示为 $\bar{x} = [\bar{a}, [b, \bar{c}](s)](t)$，其中 s、t为某些值。由于 f_{13}和 f_{24}都是等距映射，$f_{13}([\bar{a}, [b, \bar{c}](s)])$ 和 $f_{24}([\bar{a}, [b, \bar{c}](s)])$ 都是连接 $f_{13}(\bar{a}) = f_{24}(\bar{a})$ 与 $f_{13}([b, \bar{c}](s)) = f_{24}([b, \bar{c}](s))$ 的测地线，因此根据比较邻域中测地线的唯一性，它们必然相同。特别地，$f_{13}(\bar{x}) = f_{24}(\bar{x})$。

最后，我们断言 $f := f_{13} = f_{24}$ 是一个等距映射。为证明这一点，设 $\bar{x}, \bar{y}$ 属于填充四边形 Q。它们分别位于某些子三角形 $\triangle_{ij}$和 $\triangle_{kl}$中。我们分四种情况讨论。

情况 1：如果这些子三角形相邻或相同（即 $j = k$ 或 $l = i$ 等），那么它们都包含在某个 $\triangle_m$中，而我们已经知道 $\tau(\bar{x}, \bar{y}) = \tau(f(\bar{x}) f(\bar{y}))$，并且 $\bar{x} \le \bar{y} \Leftrightarrow f(\bar{x}) \le f(\bar{y})$，因为 f_{13}或 f_{24}在 $\triangle_m$上的限制都是等距映射。

情况 2：现在，假设 $\bar{x} \le \bar{y}$ 和 $[\bar{x}, \bar{y}]$ 不包含 $\bar{q}$。那么 $[\bar{x}, \bar{y}]$会两次更换子三角形，每次转入与前一个子三角形相邻的子三角形，转换发生在互异的点 $\bar{z} \le \bar{w}$处。将情况 1 应用于 $\bar{x} \le \bar{w}$和 $\bar{z} \le \bar{y}$，可得 f 将两个重叠线段 $[\bar{x}, \bar{w}]$ 和 $[\bar{z}, \bar{y}]$等距映射；特别地，f保持长度不变，且 $f([\bar{x}, \bar{y}])$是一条局部测地线。根据 [16, 注 2.6]，$[f(\bar{x}) f(\bar{y})]$实际上是一条（全局）测地线，因此 $\tau(\bar{x}, \bar{y}) = \tau(f(\bar{x}) f(\bar{y}))$，且 $f(\bar{x}) \le f(\bar{y})$，如所需。

情形 3：设我们处于这样的情形：$\bar{x} \le \bar{y}$ 但 $[\bar{x}, \bar{y}]$ 确实包含 $\bar{q}$。那么我们可以找到 $\bar{x}_n \to \bar{x}$，使得 $\bar{x}_n \le \bar{y}$ 且 $[\bar{x}_n, \bar{y}]$ 不包含 $\bar{q}$。因此，根据前述情形，$\tau(\bar{x}_n, \bar{y}) = \tau(f(\bar{x}_n) f(\bar{y}))$，且 $f(\bar{x}_n) \le f(\bar{y})$。由 τ的连续性和 $\le$ 的闭性，我们也得到 $\tau(\bar{x}, \bar{y}) = \tau(f(\bar{x}) f(\bar{y}))$，且 $f(\bar{x}) \le f(\bar{y})$，如所需。

情形4：最后，我们必须排除 $f(\bar{x}) \le f(\bar{y})$ 但 $\bar{x} \not\le \bar{y}$ 的情形。因此，设 $\bar{\alpha}$ 是一条从 $\bar{y}$ 到 $\bar{p}_3$ 的未来指向类时曲线。注意，我们确实知道 $\bar{x} \le \bar{\alpha}(1)$，并且 $\tau(f(\bar{x}) f(\bar{\alpha}(t))) \ge \tau(f(\bar{x}) f(\bar{y})) + \tau(f(\bar{y}) f(\bar{\alpha}(t))) > 0$。令 $t > 0$ 满足 $\bar{x} \le \bar{\alpha}(t)$ 零相关，即 $\tau(\bar{x}, \bar{\alpha}(t)) = 0$。由

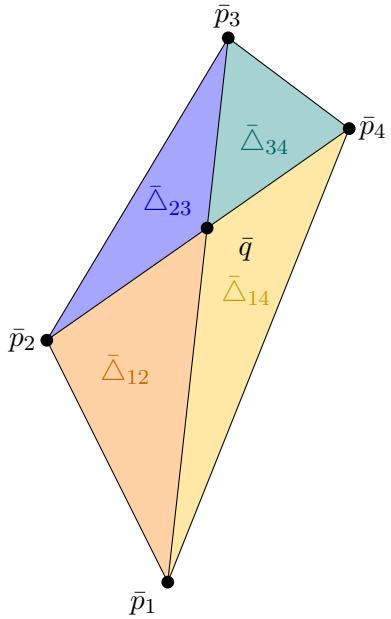


FIGURE 7. 闵可夫斯基平面中的四个子三角形。

上述情形可知，$\tau(f(\bar{x})\ f(\bar{\alpha}(t))) = 0$ 也成立，这与我们先前关于这是 > 0 的结论相矛盾，因此该情形不可能发生。□

5. PARALLEL LINES AND RAYS

让我们回顾一下完备类时直线的以下定义（参见 [10,定义 4。1]）。

定义 5.1（完备类时直线）。设 X 为一个洛伦兹预长度空间。X 中的一条完备类时直线 是一个以 τ-弧长参数化（因而为类时）的曲线 $\alpha\colon\ \mathbb{R} \to X$，并且该曲线的任意两点之间都是一条测地线。$X$ 中的一条类时射线 的定义类似，只是将 $\mathbb{R}$ 替换为 $[0, \infty)$，或（$-\infty,\ 0]$ 作为此类曲线的定义域。

我们提出如下平行完备类时直线的定义，类似于 [14, 定义 10.5.3]。

定义 5.2（同步平行直线）。设 X 为一个洛伦兹预长度空间。若存在一个 $c \geq 0$，使得对所有 $s < t$，则称两条完备类时直线 $\alpha,\ \beta\colon\ \mathbb{R} \to X$ 是同步平行 的。

$$\alpha(s) \leq \beta(t) \Leftrightarrow t - s \geq c$$

并且，如果情况确实如此，我们有

$$\tau(\alpha(s), \beta(t)) = \sqrt{(t-s)^2 - c^2}\,,$$

类似地，交换 α、β 后也成立。常数 c 称为类空距离，即 α与 β之间的距离，参见 [10]。

下述命题显然成立，并确立了 定义 5.2 与 [10, 定义 4。16]之间的等价关系。

命题 *5.3*（同步平行直线的刻画）。设 X 是一个洛伦兹预长度空间，其连续时间分离为 τ，且满足$\tau(x,x) = 0$对所有 $x \in X$均成立。设 $\alpha,\beta: \mathbb{R} \to X$是两条完备类时直线。那么， α 与 β 同步平行，当且仅当存在一个 τ且保持因果性的映射 $f: (\alpha(\mathbb{R})\cup\beta(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}^1$，其形式为 $f(\alpha(t)) = (t, 0)$且 $f(\beta(t)) = (t, c)$，其中 $c \geq 0$。

我们还可以按照[14,第 9.2 节4]和 [13, 第二章8]的思路，定义平行类时直线和射线。

定义 5.4（弱平行直线与射线）。设 X 为一个洛伦兹预长度空间。设 α 和 β 分别为两条未来指向直线或射线（参数定义在 $\mathbb{R}$ 或 $[0,\infty$上）。若存在一个 $s \geq 0$，使得对于 α和 β定义域中的所有 t，都有 $\alpha(t) \leq \beta(t+s)$，则称 α 因果先于β，记作 $\alpha \leq \beta$。若 $\alpha \leq \beta \leq \alpha$，则称 α和 β弱平行 。

备注 5.5（要求类时关系而非因果关系）。在前一定义中，我们也可以等价地要求存在一个 $s \geq 0$，使得$\alpha(t) \ll \beta(t+s)$且 $\beta(t) \ll \alpha(t+s)$，因为 α和 β是类时的，而洛伦兹预长度空间满足推升性质 [24,引理 2.10]。

另请注意，定义 5.4 可以仿照度量情形重新表述：它等价于存在 $s \geq 0$, $\lambda > 0$ 使得对于任意 $t \in [0,\infty)$， $\tau(\alpha(t) \beta(t+s)) > \lambda$。

引理 5.6 (弱平行是一种关系)。弱平行在 X 中未来指向的完备类时直线集合上定义了一种等价关系。

证明。对称性由定义可知。自反性和传递性则由因果关系的自反性和传递性，以及相应参数的相加得出。□

引理 5.7 (在 d-弧长参数下收敛蕴含在 τ-弧长参数下收敛)。设 X 是一个具有连续 τ的洛伦兹预长度空间。假设X 是 d-相容的或非全局禁闭的。设 $\gamma_n : [0,c_n] \to X$ 是一列以 τ-弧长参数化的类时测地线。假设将其重新参数化为 d-弧长参数后，局部一致收敛到一条类时曲线 γ （因此它也是一条测地线）。那么，原曲线也逐点收敛到目标曲线定义域上的 τ-弧长参数化的 γ。

证明。由于 L_τ 是上半连续的，而 τ 是下半连续的（根据曲率界甚至是连续的），我们推得 γ 是一条测地线。

现在，我们将 γ 记作按 τ-弧长参数化的版本。令 $p_n = \gamma_n(0), p = \gamma(0)$。令 f_n 表示重新参数化为 d-弧长的映射，并令 f 表示重新参数化为极限中给出的参数化的映射——它们连续、单调且单射。我们还有，f_n 是满射到 γ_n的定义域上的：若 X 是 d-相容的，取定义域中的 t γ_n，则可用有限多个 d-相容邻域覆盖 $\gamma_n|_{[0,t]}$ 的像，从而说明 $\gamma_n|_{[0,t]}$ 的 d-长度有限。若 X 不完全禁闭，则 $\gamma_n([0,t])$ 是紧致的，因此 $\gamma_n|_{[0,t]}$ 的 d-长度有限。[1] 于是，我们有 $\gamma_n \circ f_n \to \gamma \circ f$ 局部一致，并希望证明，对于 s 属于 γ定义域的内部时，$\gamma_n(s) \to \gamma(s)$。我们有$\tau(p, \gamma(f(t))) = \lim_{n\to\infty} \tau(p_n, \gamma_n(f_n(t)))$，因此 $L_\tau(\gamma) \leq \liminf_{n\to\infty} L_\tau(\gamma_n)$，也就是说，在 γ 定义域内部的任意参数处，除有限多个外，所有 γ_n 都有定义。令 s 为γ定义域内部的任意元素，则存在 t 和 t_n，使得 $s = f(t) = f_n(t_n)$。我们断言$t_n \to t$。事实上，任取 $\varepsilon > 0$。由按 d-弧长收敛可得，$\gamma_n(f_n(t-\varepsilon)) \to \gamma(f(t-\varepsilon))$；再由 τ的连续性，

$$f_n(t-\varepsilon) = \tau(p_n, \gamma_n(f_n(t-\varepsilon))) \to \tau(p, \gamma(f(t-\varepsilon))) = f(t-\varepsilon)$$

因此，对于足够大的 n，$t - \varepsilon < f_n^{-1}(s) = t_n$。类似地，对于足够大的 n，$f_n^{-1}(s) < t + \varepsilon$，从而得到 $\lim_n t_n = \lim_n f_n^{-1}(s) = t$。

显然，我们有

$$d(\gamma_n(s), \gamma(s)) \leq d(\gamma_n(s), \gamma(f(f_n^{-1}(s)))) + d(\gamma(f(f_n^{-1}(s))), \gamma(s)) .$$

关于第一项，我们有

$$d(\gamma_n(s), \gamma(f(f_n^{-1}(s)))) = d(\gamma_n(f_n(t_n)), \gamma(f(t_n))) \to 0$$

由于 $\gamma_n \circ f_n \to \gamma \circ f$局部一致且当 $t_n \to t$ 时 t_n 有界。关于第二项，我们利用 $f(f_n^{-1}(s)) \to s$，而这又可由 f的连续性以及 $f_n^{-1}(s) \to f^{-1}(s)$推出，也就是说，由 $t_n \to t$推出。□

引理 5.8 (类时渐近线是射线)。设 X 是一个整体双曲、局部因果闭的洛伦兹预长度空间，其类时曲率整体有上界0，且 d适当。设 γ 是一条未来指向类时射线，$x \in I^-(\gamma)$，且 η 是序列 $[x, \gamma(t_n)]$, 的 d-弧长参数化极限曲线，其中 $[x, \gamma$以 d-弧长参数化，且 $t_n \to \infty$满足某个条件。那么 $L_\tau(\eta)$ 要么为0 （即 η 为零），要么为无限（即 η 是一条射线）。

证明。不失一般性，假设 $x \ll \gamma(0)$。令 $t_n \to \infty$ 和$\beta_n = [x, \gamma(t_n)]$。为导出矛盾，假设 $0 < L_\tau(\eta) = t_0 < \infty$。根据引理 5.7，$\beta_n(s) \to \eta(s)$ 对任意 $s \in [0, t_0)$ 都成立。此外，根据 $\triangle(x, \gamma(0)\ \gamma(t_n))$ 上的三角形比较，

$$\tau(\beta_n(s), \gamma(s)) \geq \tau_{\mathbb{R}^{1,1}}\left(\overline{\beta_n(s)}, \overline{\gamma(s)}\right)$$

其中，$\overline{\beta_n(s)}$ 和 $\overline{\gamma(s)}$是比较三角形中对应于 $\beta_n(s)$ $\gamma(s)$ 的比较点，该比较三角形对应于 $\triangle(\{\mathrm{v10},\ \gamma(0)\ \gamma(t_n))$，位于 $\{\mathrm{v16},\ 1$，当 n 足够大且满足 $s < t_n$ 时。

[1]对于 f，满射性根据定义成立。

然而，由反三角不等式， $\tau(\{v2,\ \gamma(t_n)) \geq \tau(\gamma(0)\ \gamma(t_n)) = t_n$，因此令 $s' := st_n/\tau(\{v14,\ \gamma(t_n))$，可得 $s' \leq s$。因此，

$$\tau_{\mathbb{R}^{1,1}}\left(\overline{\beta_n(s)}, \overline{\gamma(s)}\right) \geq \tau_{\mathbb{R}^{1,1}}\left(\overline{\beta_n(s)}, \overline{\gamma(s')}\right)$$

根据截比定理，

$$\tau_{\mathbb{R}^{1,1}}\left(\overline{\beta_n(s)}, \overline{\gamma(s')}\right) = \left(1 - \frac{s}{t_n}\right)\tau(x, \gamma(0))\,.$$

Thus

$$\tau(\beta_n(s), \gamma(s)) \geq \left(1 - \frac{s}{t_n}\right)\tau(x, \gamma(0))\,.$$

令 $n \to \infty$，得到

$$\tau(\eta(s), \gamma(s)) \geq \tau(x, \gamma(0)) > 0$$

这意味着 $\eta(s) \ll \gamma(s)$。由于对所有 $s \in [0, t_0,\ \gamma(s) \ll \gamma(t_0)$，因此 $\eta(s) \ll \gamma(t_0)$。由此可知 $\eta([0, t_0)) \subseteq J(x, \gamma(t_0))$，而根据整体双曲性， η的 d-长度必定有限。

现在，若 $L_d(\beta_n) \to \infty$ 那么，根据 [24, 定理 3。14], 可知 η 不可延拓，这与 η 具有有限的 d-弧长相矛盾。

另一方面，若 $L_d(\beta_n) \not\to \infty$ ，则在取一个子序列后，我们可以假设 $L_d(\beta_n)$ 有界。根据 [24, 定理 3.7] 以及 L_τ 的上半连续性（将 β_n 和 η 重新参数化为共同的紧致定义域上的 1-Lipschitz 曲线后应用），可得 $L_\tau(\eta) \geq \lim_{n\to\infty} L_\tau(\beta_n) = \infty$，这与 $\eta \in J(x, \gamma(t_0))$ 矛盾。□

命题 5.9（弱平行射线的存在性与唯一性）。设 X 是一个局部因果闭、正则的洛伦兹预长度空间，其类时曲率全局有上界 0。假设 X 要么是 d-相容的，要么是非全局禁闭的。设度量 d 是适当的。令 α 为一条未来指向射线，且 $p \in I^-(\alpha)$。那么存在唯一一条（未来指向）射线 β，它与 α 弱平行且始于 p。

证明。证明思路如下。首先证明唯一性。然后构造一条候选类时射线，使其与 α 弱平行且始于 p。这是通过应用极限曲线定理和引理 5.7 完成的。关键在于，正则性假设保证了所得射线 β 的因果性质。接着，我们证明 β 与 α 弱平行。从直观上说，这是因为形如 $\triangle(p, \alpha(0)\ \alpha(t))$ 的比较三角形可以安排在闵可夫斯基平面中的一条带状区域内；该区域由两条平行的未来指向射线和一条双曲线围成。最终，这将引出一个适当常数 d 的定义，使得 $\alpha(s) \ll \beta(s+d)$ 且 $\beta(s) \ll \alpha(s+d)$。

关于唯一性，假设有两条射线 β_1 和 β_2 在 p处与 α 弱平行。由引理 5.6 可知， β_1 和 β_2 也彼此弱平行。令 $\theta(s,t) = \measuredangle_p(\beta_1(s)\ \beta_2(t))$，并取 $c > 0$ 使得对于所有 $s > 0$，均有 $\beta_1(s) \ll \beta_2(s+c)$。注意到，由于

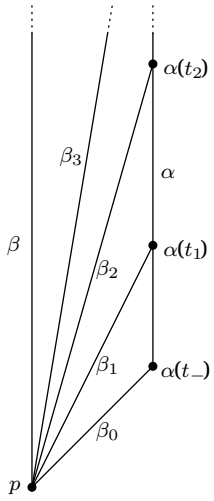


FIGURE 8. 弱平行射线 β 的构造。

单调性比较， $\Longleftrightarrow$是非递减的。考虑闵可夫斯基空间中对应三角形 $\triangle(p, \beta_1(s)$ $\beta_2(s+c))$ 的一个比较三角形。于是 $0 < \tau(\beta_1(s)\ \beta_2(s+c)) = \tau(\beta_1(s)\ \beta_2(s+c))$。将极坐标下闵可夫斯基平面中两点之间的类时关系表示出来，可得 $\beta(s) \ll \beta(s+c) \Longleftrightarrow \frac{s+c}{s} > \exp(\theta(s, s+c))$。然而， $\frac{s+c}{s} \to 1$ 如同 $s \to \infty$，因此 $\theta(s, s+c) \to 0$。于是， θ 的非递减性迫使 $\overline{\theta} \equiv 0$ 成立。换言之，所有比较三角形都是退化的。因此，利用强因果性，可以如下得出这些射线相等。事实上，任取 $t < s$ 和 $\varepsilon > 0$，由对应于 $\triangle(p, \beta_1(s)\ \beta_2(s+c))$ 的比较三角形退化可知，显然有 $\beta_2(s-\varepsilon) \ll \beta_1(s) \ll \beta_2(s+\varepsilon)$。根据三角形比较，我们推得 $\beta_2(s-\varepsilon) \ll \beta_1(s) \ll \beta_2(s+\varepsilon)$。由此可知， $\{I(\beta_2(t-\varepsilon)\ \beta_2(t+\varepsilon)) \mid$是 $\beta_1(t)$ 的邻域基，因此 $\beta_2(t) = \beta_1(t)$。

现在证明其存在性。由于 $p \in I^-(\alpha)$，存在 t_- ，使得$p \ll \alpha(t)$ 对所有 $t \geq t_-$ 都成立。由全局曲率界可知，我们可以从 p 到任意这样的 $\alpha(t)$ 取测地线。由于 X 要么是 d-相容的，要么是非全局禁闭的，我们可以对定义在紧区间上的测地线重新参数化，使其关于 d-弧长参数化，并应用极限曲线定理 [24, 定理 3.14] ，从而得到一个序列 $t_n \to \infty$ ，使得 $\beta_n := [p, \alpha(t_n)]$ 的 d-弧长参数化局部一致收敛到一条从 p 出发的因果曲线 β ，见图 8。由于 L_τ 上半连续且 τ 下半连续，我们推断 β 是一条测地线，尽管它先验上可能是零测地线。

我们首先证明 β 是类时的。不失一般性，设 $t_- = 0$。令 $z = \alpha(0)$，且对 $n \geq 1$ 有 $z_n = \alpha(t_n)$。由引理 2.4，得到 $\sphericalangle_p(z, z_n) + \sphericalangle_{z_n}(p, z) = \sphericalangle_z(p, z_n)$。由于根据类时曲率上界的单调性表述， $\sphericalangle_z(p, z_n)$ 关于 n 单调递减， 我们推得 $\sphericalangle_p(z, z_n)$ 有界。取一个序列 $y_n \in [p, z_n]$，使其收敛到 β 上的某一点 $y \neq p$ （例如，选择 $y_n = \beta_n \circ f_n(\varepsilon$

采用引理 5.7 中的记号）。再次由单调性比较，我们~ ~得到 $\measuredangle_p(z, z_n) \geq \measuredangle_p(z, y_n)$，因此这个角度也有界。将洛伦兹余弦定律应用于 $\triangle(p, y_n, z_n)$ 的比较三角形，可得 $\tau(p, y_n)$ 要么始终与零保持正距离，要么$\tau(y_n, z_n) \to \tau(p, z_n)$。在后一种情形下，我们会有 $p \leq y \ll z$, $p \neq y$ 且 $\tau(p, z) = \tau(y, z)$，这与 X 的正则性矛盾。因此， $\tau(p, y_n)$ 与零保持正距离；由 τ 的连续性可知， β 起初为类时，并由正则性可知其在整个定义域上均为类时。应用引理 5.8 可知， β 是一条类时射线。

现在我们证明 β 与 α 弱平行。设 $a = \tau(p, z)$ $b_n =_\sim$ $_\sim\tau(z, z_n)$ $c_n = \tau(p, z_n)$ $\theta_n = \measuredangle_{z_n}(p, z)$，且 $\omega_n = \measuredangle_z(p, z_n)$。于是 b_n， $c_n \to \infty$，且 ω_n 单调递减。我们可以在 $\triangle(\bar{p}_n, \bar{z}, \bar{z}_n)$ 中重新表述洛伦兹余弦定律，得到

$$\frac{a^2 + 2ab_n \cosh(\omega_n)}{c_n + b_n} = c_n - b_n \,,$$

由此可知 $c_n - b_n$ 有界。在同一个三角形中应用洛伦兹余弦定律，但改用角度 θ_n，我们注意到

$$\cosh(\theta_n) = \frac{b_n^2 + c_n^2 - a^2}{2b_n c_n} \to 1$$

由于 $c_n - b_n$ 有界，因此 $\theta_n \to 0$，这就表明。

现在我们可以继续在模型空间中进行明确计算。记 $\bar{p}_n$ 为比较三角形中 p 的比较点，其中比较三角形对应于 $\triangle(p, z, z_n)$，并在所有比较三角形中保持 $\bar{z}$ 的位置固定。此外，将所有比较三角形对齐，使 $[\bar{z}, \bar{z}_n]$ 处于竖直方向。我们的思路是找到有界的 d_n ，使得

$$[\bar{p}_n, \bar{z}_n](s) \ll [\bar{z}, \bar{z}_n](s + d_n) \text{ and } [\bar{z}, \bar{z}_n](s) \ll [\bar{p}, \bar{z}_n](s + d_n)$$

对所有满足两边都有定义的 s 均如此。接下来我们证明，这一性质会由极限构型 X继承。单个值 d_n 的存在并非问题，但它们可能无界。注意， $\bar{p}_n$ 被限制在一个竖直条带与穿过 $\bar{z}$ 和 $\bar{p}_0$的边界直线的交集内，同时也受中心为 $\bar{z}$、半径为 τ的双曲线（p， z）限制。取 $\bar{z} = (0, 0)$，那么 $[\bar{z}, \bar{z}_n]$： $s \mapsto (s, 0)$ 和 $[\bar{p}_n, \bar{z}_n]$： $s \mapsto \bar{p}_n + (\text{双曲余弦}(\theta_n)s, \text{双曲正弦}(\theta_n)s)$ 就是这些线段的显式描述。从视觉上看，这意味着我们选择了位于线段 $[\bar{z}, \bar{z}_n]$左侧的 $\bar{p}_n$，见图 9。

首先注意，对于任意$n \geq 0$ 和 $d \geq 0$，关系 $[\bar{p}_n, \bar{z}_n](s) \ll [\bar{z}, \bar{z}_n](s + d)$ 都成立。事实上，平坦几何中的截比定理以及关系 $\bar{p}_n \ll \bar{z}$ 推出 $[\bar{p}_n, \bar{z}_n](\tilde{s}) \ll [\bar{z}, \bar{z}_n](s)$，其中 $\tilde{s}$ 的选取满足 $\tilde{s}/L_\tau([\bar{p}_n, \bar{z}_n]) = s/L_\tau([\bar{z}, \bar{z}_n])$。根据反三角不等式，曲线 $[\bar{p}_n, \bar{z}_n]$ 的τ-弧长更长，因此 $s < \tilde{s}$ ，结论得证。

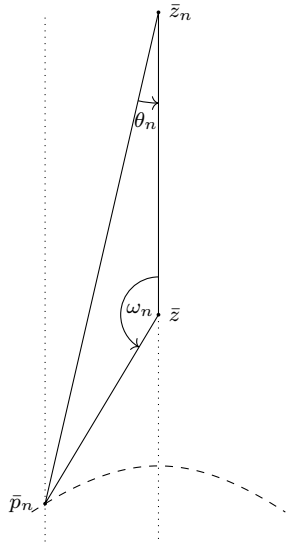


FIGURE 9. 第 n 步比较三角形。

反过来，所需的关系$(s,\ 0) \ll \bar{p}_n+$(双曲余弦$(\theta_n)(s+d_n)$，双曲正弦$(\theta_n)(s+d_n)$)成立，当且仅当

$$\cosh(\theta_n)(s+d_n)+t(\bar{p}_n)-s>-x(\bar{p}_n)-\sinh(\theta_n)(s+d_n)\ [>0] \qquad (\iff)$$
$$\exp(\theta_n)(s+d_n)+t(\bar{p}_n)-s>-x(\bar{p}_n) \qquad (\iff)$$
$$\exp(\theta_n)d_n>-x(\bar{p}_n)-t(\bar{p}_n)-s(\exp(\theta_n)-1)\,.$$

我们注意到 $-x(\bar{p}_n)-t(\bar{p}_n)$ 在 n 中有界，并且对于每个 n，“最坏情况”出现在 $s=0$。这使我们可以选择

$$d:=\sup_n\{(-x(x_n)-t(x_n))\exp(-\theta_n))\}\,,$$

这在闵可夫斯基平面中对所有足够大的 n 都成立。由曲率上界可知，对于足够大的 n，d 的这一选择在 X 中也适用，即对所有这些量有定义的 s，$\beta_n(s) \ll \alpha|_{[0,t_n]}(s+d)$，且 $\alpha|_{[0,t_n]}(s) \ll \beta_n(s+d)$。现在令 $n\to\infty$，即可得证。□

在下一节中，我们将证明，被弱平行线覆盖的非正曲率空间可分解为一个乘积。下面的引理和推论给出了这一假设的等价表述：如果在 命题 5.9 中构造的平行射线的角度为零，那么过某一点就存在一条平行直线。换言之，这些平行射线之间的角度为正，是空间无法分解的唯一障碍。例如，德西特空间就是这种情形。

引理 5.10 (零角度测地线的拼接)。设 X 是一个洛伦兹预长度空间，其类时曲率全局有上界 K，且 $\alpha:\ [a,b]\to X$、$\beta:\ [b,c]\to X$ 是两条类时测地线，并且

$x = \alpha(b) = \beta(b)$, $\measuredangle_x(\alpha, \beta) = 0$和 $\tau(\alpha(a)\ \alpha(b)) + \tau(\beta(b)\ \beta(c)) \le D_K$。那么， α 与 β 的拼接是一条测地线。

˜证明。设 $p_- = \alpha(a)$ 和 $p_+ = \beta(c)$。为˜(α, β)构造一个比较铰链 $(\tilde{\alpha}, \beta)$：由于 $\measuredangle_x(\alpha, \beta) = 0$, $\tilde{\alpha}, \beta$连接成一条测地线。根据铰链 (α, β) 的铰链比较，我们得到 $\tau(p_-, p_+) \le \tau(\tilde{p}_-, \tilde{p}_+) = \tau(\alpha(a)\ \alpha(b))\ + \tau(\beta(b)\ \beta(c))$；反过来则直接由反三角不等式得出，因此拼接后是一条测地线。□

推论 5.11 (零角度的平行射线拼接成一条直线)。 设X 是一个全局双曲正则洛伦兹预长度空间，其类时曲率整体有上界0。设 α 是一条完备类时直线，$p \in I^-(\alpha) \cap I^+(\alpha)$，且 β^+和 β^-分别是从 p 出发、与半直线 $\alpha^+ = \alpha|_{[0,\infty)}$ 和 $\alpha^- = \alpha|_{(-\infty,0]}$弱平行的唯一未来射线与过去射线。那么， β^+ 和 β^- 的拼接是一条直线，当且仅当 $\measuredangle_p(\beta^-, \beta^+) = 0$；在这种情况下，它是经过 p且与 α 弱平行的唯一直线。

证明。 注意，由 命题 5.9，我们得到 $\beta^{\pm}$。如果它们可以拼接成一条直线，那么显然 $\measuredangle_p(\beta^-, \beta^+) = 0$。反过来，如果 $\measuredangle_p(\beta^-, \beta^+) = 0$，引理 5.10表明它们可以拼接成一条类时直线。

关于弱平行性，我们已经知道，对于适当选择的 $s > 0$，有 $\alpha^+(t) \le \beta^+(t+s) \le \alpha^+(t+2s)$，且 $\alpha^-(t) \ge \beta^-(t+s) \ge \alpha^-(t+2s)$。然后，在弱平行直线的定义中选择 $2s$ ，就无需处理 $\alpha^{\mp}$ 和 $\beta^{\pm}$之间的关系：例如， $\alpha^-(t) \le \alpha^+(0) \le \beta^+(t+2s)$，如果$-s < t < 0$。

最后，唯一性也可由 命题 5.9得出。 □

6. Splitting theorem

最后，我们将证明主要定理，即关于类时曲率上界为 0 的洛伦兹预长度空间的分裂定理。该结果可视为某些非正曲率度量空间经典分裂定理的洛伦兹版本（参见例如 [14, 定理 9.2.31.]）。请注意，度量定理针对 Hadamard 空间陈述，也就是说，这类空间是完备、单连通且具有（局部）曲率上界 0 的空间。可以证明（参见 [14, 定理 9.2.9]），在此类空间中，曲率界实际上是全局成立的；换言之，整个空间 X 都是曲率比较邻域，而分裂定理的证明大量运用了这一事实。还可以证明，在完备的非正曲率度量空间类中，曲率界全局成立等价于空间是单连通的（参见 [14, 注 9.2.11.]）。因此，假设空间是 Hadamard 空间与假设曲率界全局成立，本质上是相同的。

洛伦兹情形中的情况非常相似。目前尚无公认的洛伦兹 Hadamard 空间概念，但此类定义至少很可能会假设空间具有类时曲率

上界为 0，且未来单连通。后者意味着，对于任意两条具有相同端点的未来指向类时曲线 γ_0，γ_1 都存在一个端点保持同伦 γ_t，使得 γ_t 仍然是未来指向类时曲线。事实上，可以证明，若假设这两项性质成立，并且洛伦兹预长度空间还满足额外的正则性条件（例如，整体双曲且正则的洛伦兹长度空间就足够），那么同样可以推出全局曲率界（见 [16,定理 4。8]）。事实上，类似于度量情形，可以证明，在类时曲率上界为 0 的整体双曲正则洛伦兹长度空间类中，全局成立的曲率界等价于空间未来单连通。

命题 6.1 (非正曲率与未来单连通性)。 设X 是一个整体双曲且正则的洛伦兹长度空间，其类时曲率整体有上界0。则 X 是未来单连通的。

证明。 设 γ_0，γ_1：$[0,1] \to X$是两条未来指向类时曲线，满足 $p := \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$，且 $q := \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$。如果我们能找到 γ_0 与 γ_1 之间的端点保持类时同伦，就证明了 X 是未来单连通的。根据 [16, 命题 4.6]，存在从 p 到 q 的未来指向类时测地线 α_1，α_2，使得 γ_i 可通过端点保持同伦与α_i 类时同伦。此外，根据 [16, 命题 2.3]，，在（≤ 0）比较邻域（例如 X）中，任意两个类时相关点 p，q 之间存在唯一的类时测地线（相差重新参数化）。这意味着 $\alpha_0 = \alpha_1$，尤其是，γ_0 与 γ_1之间存在端点保持类时同伦。□

尽管上述命题证明，对于一大类空间，假设局部曲率界加上未来单连通，还是假设全局曲率界，并无区别，但这种等价性仅在对空间附加额外假设时才成立。因此，为了减弱假设，以下我们只假设 X 是一个洛伦兹预长度空间，且其类时曲率全局上界为 0。

引理 6.2 (弱平行直线具有常数 τ-距离)。 设 α_1、α_2是 X 中的两条未来指向、弱平行的完备类时直线，且令$c \in \mathbb{R}$。那么 $t \mapsto \tau(\alpha_1(t)\ \alpha_2(t+c))$ 为常数。

证明。 由于 X 的类时曲率全局上界为 0，[8, 命题 6.1] 的证明表明，映射 $t \mapsto \tau(\alpha_1(t)\ \alpha_2(t+c))$在取正值处是凹的。取 $c > 0$ 使得对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t+c)$，则 $t \mapsto \tau(\alpha_1(t)\ \alpha_2(t+c))$是 $\mathbb{R}$ 上的凹正函数，因而为常数。若取 c 使得对所有$t \in \mathbb{R}$，都有 $\alpha_1(t) \not\ll \alpha_2(t+c)$，则该映射恒为 0。剩下要证明的是，所有 $c \in \mathbb{R}$ 都属于上述两种情形之一。

反设存在参数 t_0，$c_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\tau(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0 + c_0)) = \varepsilon > 0$$

但对所有 $t \in \mathbb{R}$, $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t + c_0)$ 均不成立。我们将所有满足 $\tau(\alpha_1(t)\ \alpha_2(t + c)) =: F(c)$ 为正常数的 c 组成的集合记为 $\mathcal{C}$。注意，这意味着对所有 $c \in \mathcal{C}$ 都有 $c_0 < c$ 。此外，映射 $\mathcal{C} \ni c \mapsto F(c)$ 是连续的，并且根据时间分离函数的连续性可变得任意小。特别地，存在一个 $c \in \mathcal{C}$ 使得 $F(c) < \varepsilon$。但是，

$$\begin{aligned}\tau(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0 + c_0)) &> \tau(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0 + c)) \\ &\geq \tau(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0 + c_0)) + \tau(\alpha_2(t_0 + c_0), \alpha_2(t_0 + c))\,,\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。 □

注记 6.3（关于凹性）。 注意， [8, 命题 6.1] 的证明在前一个引理的设定下仍然成立，无须假设严格因果三角形比较条件。这是因为，将证明调整到我们的设定后，只有在验证以下事实时才用到严格因果三角形比较条件：给定一条类时测地线 $\gamma\colon [0, 1] \to X$连接 $\alpha_1(t_1)$ 与 $\alpha_2(t_2 + c)$，且 $t_1 < t_2$，因果关系

$$\alpha_1(st_2 + (1 - s)t_1) \leq \gamma(s) \leq \alpha_2(st_2 + (1 - s)t_1 + c)$$

成立。不过，在同一证明的前一步中，已经证明

$$\tau(\alpha_1(st_2 + (1 - s)t_1), \gamma(s)) \geq s\tau(\alpha_1(t_2), \alpha_2(t_2 + c))$$

and

$$\tau(\gamma(s), \alpha_2(st_2 + (1 - s)t_1 + c)) \geq (1 - s)\tau(\alpha_1(t_1), \alpha_2(t_1 + c))\,,$$

并且由于对任意 $t \in \mathbb{R}$, $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t + c)$，所需的因果关系（实际上是时序关系）成立。

与引理 6.2的证明中一样，对任意满足 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t + c)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$成立的 $F(c$，今后我们将以 $t \mapsto \tau(\alpha_1(t)\ \alpha_2(t + c))$ 表示映射的常值。

引理 6.4 (弱平行直线具有恒定角度)**.** 在与 引理 *6.2* 相同的假设下，设 $d \neq 0$ 和 $c \in \mathbb{R}$ 满足 $\alpha_1(t - c)$ 且 $\alpha_2(t)$对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都类时相关。那么映射

$$t \mapsto \measuredangle_{\alpha_2(t)}(\alpha_1(t - c), \alpha_2(t + d))$$

是常数。

证明。 首先注意，对任意 $t \in \mathbb{R}$，角度 $\measuredangle_{\alpha_2(t)}(\alpha_1(t - c)\ \alpha_2(t + d))$ 都是有限的。事实上，如果角度的符号为 $\sigma = -1$，这可由角度比较得出。在 $\sigma = 1$ 的情形下，这可由 $\sigma = -1$ 的情形结合下列不等式得出

$$\measuredangle_{\alpha_2(t)}(\alpha_1(t - c), \alpha_2(t + d)) \leq \measuredangle_{\alpha_2(t)}(\alpha_1(t - c), \alpha_2(t - d))$$

由命题 2.3 (iii)得到。证明的其余部分，我们只讨论情形 $d > 0$ 且 $\alpha_1(t - c) \ll \alpha_2(t)$，其余情形的论证类似。

我们的曲率假设使我们能够定理 3.6，而无需额外假设（见注 3.7）。因此，

$$\cosh(\measuredangle_{\alpha_2(t)}(\alpha_1(t-c),\alpha_2(t+d))) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0^+} \tau(\alpha_1(t-c),\alpha_2(t+s))\,. \quad (19)$$

由于对于任意 $s>0$，$\alpha_1(t-c) \ll \alpha_2(t) \ll \alpha_2(t+s)$，我们有

$$\tau(\alpha_1(t-c),\alpha_2(t+s)) = F(c+s)\,.$$

特别地，方程（19）的右端等于

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0^+} F(c+s) =: F'(c^+)\,,$$

它不依赖于 t，结论由此得证。 □

引理 6.5（弱平行线界定平坦条带）。假设与引理 6.2 相同的条件成立，并且进一步假设 X 是全局因果闭的。那么，要么 $\alpha_1(\mathbb{R}) = \alpha_2(\mathbb{R})$，要么它们张成一个类时凸平坦条带；也就是说，存在平行直线 $\widetilde{\alpha}_1$，$\widetilde{\alpha}_2$，它们位于 $\mathbb{R}^{1,1}$ 中，且存在等距映射 $f\colon$ 凸包$(\widetilde{\alpha}_1(\mathbb{R})\cup\widetilde{\alpha}_2(\mathbb{R})) \to X$，使得 $f\circ\widetilde{\alpha}_i = \alpha_i$，$i=1,2$。特别地，经过平移重参数化后，$\alpha_1,\alpha_2$ 是同步平行的。

证明。固定 $c\in\mathbb{R}$，使得对任意$t\in\mathbb{R}$，$\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t+c)$ 且 $\alpha_2(t) \ll \alpha_1(t+c)$。此外，由于 α_1 和 α_2 均为未来指向的，我们可以假设 $c\geq 0$。令 $d\geq 0$，并且对任意 $t\in\mathbb{R}$，令

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \alpha_1(t)\,,\\ p_2(t) &= \alpha_2(t+c)\,,\\ p_3(t) &= \alpha_2(t+3c+d)\,,\\ p_4(t) &= \alpha_1(t+2c+d)\,. \end{aligned}$$

于是，根据构造，$p_1(t) \ll p_2(t) \ll p_4(t) \ll p_3(t)$，并由引理 6.4和命题 2.3 (iii)，可得

$$\measuredangle_{p_1(t)}(p_2(t),p_4(t)) \geq \measuredangle_{p_4(t)}(p_1(t),p_3(t)) \quad (20)$$

and

$$\measuredangle_{p_3(t)}(p_4(t),p_2(t)) \geq \measuredangle_{p_2(t)}(p_1(t),p_3(t))\,. \quad (21)$$

这意味着

$$\begin{aligned} \measuredangle_{p_1(t)}(p_2(t),p_4(t)) + \measuredangle_{p_3(t)}(p_4(t),p_2(t)) \geq \\ \measuredangle_{p_2(t)}(p_1(t),p_3(t)) + \measuredangle_{p_4(t)}(p_1(t),p_3(t))\,. \end{aligned} \quad (22)$$

由命题 4.2，四边形 $Q_d(t) = (p_1(t)\ p_2(t)\ p_3(t)\ p_4(t))$围成一个凸平坦区域，见图 10，即存在一个四边形

$$\overline{Q}_d(t) = \operatorname{conv}(\overline{p_1(t)},\overline{p_2(t)},\overline{p_3(t)},\overline{p_4(t)}) \subseteq \mathbb{R}^{1,1}$$

以及一个 τ且因果性保持的映射 $f_d^t\colon Q_d(t)\overline{\ }\to X$使得

$$f_d^t(\overline{p_i(t)}) = p_i(t)\,, \quad i=1,2,3,4.$$

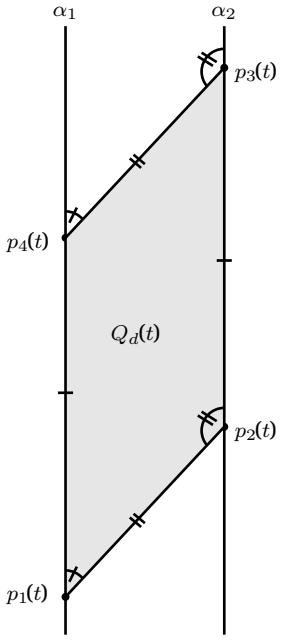


FIGURE 10. 四边形$Q_d(t)$围成一个凸区域。

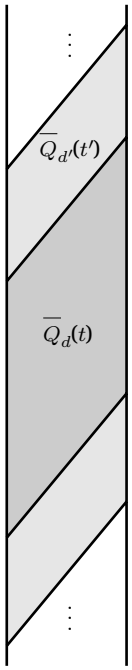


FIGURE 11. $\overline{Q_d(t)} \subseteq \overline{Q_{d'}(t')}$，对于 $0 < t - t' < d' - d$。

此外，不等式（22）实际上是等式，这进而意味着不等式（20）和（21）也都是等式。由于

$$\widetilde{\measuredangle}_{p_1(t)}(p_2(t), p_4(t)) = \measuredangle_{p_1(t)}(p_2(t), p_4(t)) = \cosh^{-1}(F'(c^+))$$

and

$$\tau_{\mathbb{R}^{1,1}}(\overline{p_1(t)}, \overline{p_2(t)}) = \tau(p_1(t), p_2(t)) = F(c)$$

与 t 和 d无关，那么，经过闵可夫斯基平面的一个等距映射后，我们可以假设 $\overline{Q_d(t)} \subseteq \mathbb{R}^{1,1}$ 是一个平行四边形，其顶点形式为

$$\begin{aligned}
\overline{p_1(t)} &= (t, 0)\,, \\
\overline{p_2(t)} &= (t + F(c)F'(c^+), F(c)\sqrt{F'(c^+)^2 - 1})\,, \\
\overline{p_3(t)} &= (t + 2c + d + F(c)F'(c^+), F(c)\sqrt{F'(c^+)^2 - 1})\,, \\
\overline{p_4(t)} &= (t + 2c + d, 0)\,.
\end{aligned}$$

因此，每当 $d' - d > t - t' > 0$ 时，我们有

$$\overline{Q}_d(t) \subseteq \overline{Q}_{d'}(t')\,,$$

见图11。此外，根据命题 4.2 的证明，若 $(x, y) \in Q_d(t)$，则对于唯一的 $s \in [t, t + 2c + d]$ 和 $\lambda \in [0, F(c)]$，有 $f_d^t(x, y) = [\alpha_1(s)\ \alpha_2(s + c)](\lambda)$，其中 $[\alpha_1(s)\ \alpha_2(s + c)]$ 是连接 $\alpha_1(s)$ 与

$\alpha_2(s+c)$，以 τ-弧长参数化。因此，$f^{t'}_{d'}|_{Q_d(t)} = f^t_d$只要$0 < t - t' < d' - d$。

因此，我们可以定义这个 τ且保持因果性的映射

$$f\colon \mathbb{R} \times [0, F(c)\sqrt{F'(c^+)^2 - 1}] \to X$$

定义如下：

$$f(x, y) = f^t_d(x, y)$$

对任意 $d > 0$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 满足 $(x,\ y) \in Q_d(t)$。$^{-}$定理的最后一个断言是命题 5.3的直接推论。□

最后，我们现在可以证明本文的主要定理。

定理 6.6 (非正曲率洛伦兹分裂定理)。设X 是一个类时曲率全局有上界 0 的洛伦兹预长度空间。设 γ 是一条完备类时直线，并定义

$$S = \{\alpha : \alpha \text{ is a complete timelike line weakly parallel to } \gamma\}/\sim$$

其中 $\alpha \sim \beta$若存在 $c \in \mathbb{R}$使得 $\alpha(t) = \beta(t+c)$对所有 $t \in \mathbb{R}$均成立。则 S 中的每个元素都有一个与 γ同步平行的代表元，并且这些代表元彼此同步平行。此外，量

$$d_S([\alpha], [\beta]) := \inf\{(t - s)/2 : \beta(s) \le \alpha(0) \le \beta(t)\}$$

与所选代表元无关，并且它就是这些同步平行代表元之间的类空距离。

这在 S 上定义了一个度量，使得 (S, d_S) 是一个 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间，并且映射 $f\colon {}^{-}\mathbb{R} \times S \to X$ 由 $(t, [\alpha]) \mapsto \alpha(t)$ 给出，是一个等距嵌入，其中 α 是 $[\alpha]$ 的唯一一个与 γ 同步平行的代表元。

特别地，如果 $X = \bigcup_{[\alpha]\in S} \alpha(\mathbb{R})$，那么 X 与乘积 ${}^{-}\mathbb{R} \times S$等距，其中 S 是一个 $\mathrm{CAT}(0)$ 空间。

证明。在本证明中，我们使用定义 2.7中关于洛伦兹乘积的记号，并将 $\le_{\mathbb{R}\times S}$ 和 $\tau_{\mathbb{R}\times S}$ 分别记作洛伦兹乘积 ${}^{-}\mathbb{R} \times S$的因果关系和时间分离。类似地，我们将 $\le_X$ 和 τ_X 分别记作对应于 X的因果关系和时间分离。

首先假设我们已经证明，S 中的每个元素都有一个代表元与 γ 同步平行，且这些代表元彼此同步平行。那么，命题 5.3 以及 $\mathbb{R}^1_{,\ 1}$ 中的显式计算表明，陈述中 $d_S([\alpha],\ [\beta])$ 的公式与代表元的选取无关，等于类空距离，并且也可以表示为

$$d_S([\alpha], [\beta]) = \inf\{t - s : \alpha(s) \le_X \beta(t)\} \tag{23}$$

对于任意 $s \in \mathbb{R}$，其中 α 和 β 是同步平行代表元。然后，正如引理 5.2]，的证明中那样，我们得到 d_S 是非负的、对称的且正定的。

为了证明 d_S 满足三角不等式，考虑 $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\eta] \in S$，假设 α, β, η 两两同步平行，并令 $\varepsilon > 0$。由方程（23），

$$\alpha(t) \leq_X \eta(t + d_S([\alpha],[\eta]) + \varepsilon) \leq_X \beta(t + d_S([\alpha],[\eta]) + d_S([\eta],[\beta]) + 2\varepsilon)\,,$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。因此

$$\alpha(t) \leq_X \beta(t + d_S([\alpha],[\eta]) + d_S([\eta],[\beta]) + 2\varepsilon)$$

类似地

$$\beta(t) \leq_X \alpha(t + d_S([\alpha],[\eta]) + d_S([\eta],[\beta]) + 2\varepsilon)$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。再次根据 d_S 的定义，这意味着

$$d_S([\alpha],[\beta]) \leq d_S([\alpha],[\eta]) + d_S([\eta],[\beta]) + 2\varepsilon\,,$$

此外，令 $\varepsilon \to 0$，即可得到三角不等式。

我们还可以得到 (S, d_S) 是一个测地空间。事实上，给定 $[\alpha_0], [\alpha_1] \in S$，根据引理 6.5，存在平行、未来指向的完备类时直线α_0 和 α_1，它们位于 $\mathbb{R}^1$ 中；并且存在一个等距映射 $f\colon \mathrm{conv}(\alpha_0(\mathbb{R}) \cup \alpha_1(\mathbb{R})) \to X$，使得$f \circ \alpha_i = \alpha_i$, $i = 0$。特别地，通过与 $\mathbb{R}^1$ 的一个等距映射复合，我们可以假设 $\alpha_0(t) = (t, 0)$ 且 $\alpha_1(t) = (t, d_S([\alpha_0], [\alpha_1]))$。因此，我们可以定义 $\sigma\colon [0, d_S([\alpha_0], [\alpha_1])] \to S$，令 $\sigma(s) = [f \circ \alpha_s]$，其中 $\alpha_s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^1$由 $\alpha_s(t) = (t, s)$ 给出；而 f 是一个等距映射这一事实表明，σ 是 S 中连接 $[\alpha_0]$ 与 $[\alpha_1]$ 的测地线。

为了得到一个从 $\bar{}\mathbb{R} \times S$ 到 X 的 τ-且保持因果性的映射，注意到对于任意的 $(s, [\alpha])$, $(t, [\beta]) \in \mathbb{R} \times S$，我们有

$$(s, [\alpha]) \leq_{\mathbb{R}\times S} (t, [\beta])$$

当且仅当 $t - s \geq d_S([\alpha], [\beta])$，而这又等价于

$$\alpha(s) \leq_X \beta(t)\,,$$

假设 α 和 β 是同步平行代表元。在这种情况下，

$$\tau_{\mathbb{R}\times S}((s,[\alpha]),(t,[\beta])) = \sqrt{(t-s)^2 - d_S([\alpha],[\beta])^2} = \tau_X(\alpha(s),\beta(t))\,.$$

因此，映射 $(s, [\alpha]) \mapsto \alpha(s)$，其中 α 与 γ同步平行，是一个从 $\bar{}\mathbb{R} \times S$ 到 X的 τ-且保持因果性的映射。此外，由于X 的类时曲率处处被 0 上界，因此 $\bar{}\mathbb{R} \times S$也如此。特别地，$S$ 由 命题 2.8可知是一个 CAT(0)空间。

现在我们来证明，S 的每个元素都有一个与 γ 同步平行的代表元，并且这些代表元彼此同步平行。第一个断言直接由引理 6.5推出。对于第二个断言，我们沿用 [14,定理 9.231]的证明思路。

设 $[\alpha]$, $[\beta] \in S$。由于 α 和 β 都与 γ弱平行，根据 引理 6.5，我们可以假设它们与 γ同步平行。因此，存在 τ-

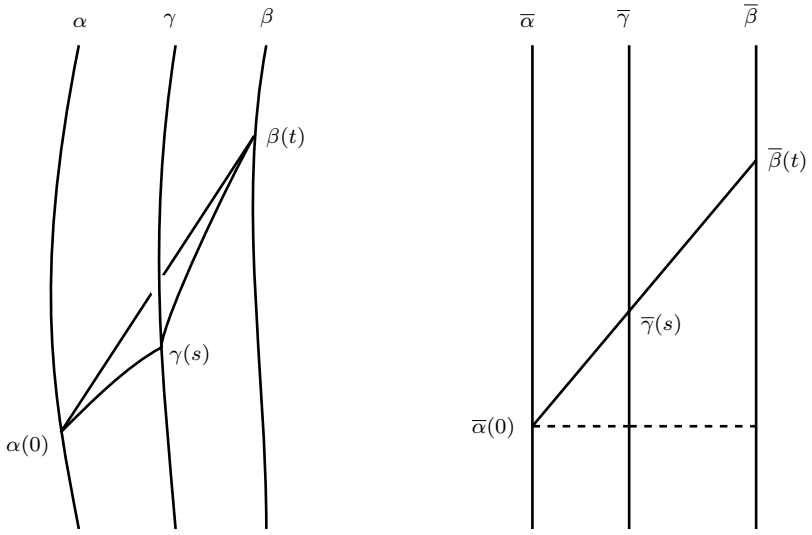


FIGURE 12. 左侧，α 和 β 与γ同步平行。右侧，$\bar{\alpha} = f_{\alpha,\gamma} \circ \alpha$，$\bar{\beta} = f_{\gamma,\beta} \circ \beta$，以及 $\bar{\gamma} = f_{\alpha,\gamma} \circ \gamma = f_{\gamma,\beta} \circ \gamma$，而 $\bar{\gamma}(s)$ 位于 $[\bar{\alpha}(0)\ \bar{\beta}(t)]$上。

以及因果性保持映射 $f_{\alpha,\gamma} : (\alpha(\mathbb{R}) \cup \gamma(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}^{1,1}$ 和 $f_{\gamma,\beta} : (\gamma(\mathbb{R}) \cup \beta(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}^{1,1}$ 使得

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\gamma}(\alpha(t)) &= (t, 0)\,, \\ f_{\gamma,\beta}(\beta(t)) &= (t, d_S([\alpha],[\gamma]) + d_S([\gamma],[\beta]))\,, \\ f_{\alpha,\gamma}(\gamma(t)) &= f_{\gamma,\beta}(\gamma(t)) = (t, d_S([\alpha],[\gamma]))\,. \end{aligned}$$

显然，

$$t - \sqrt{t^2 - (d_S([\alpha],[\gamma]) + d_S([\gamma],[\beta]))^2} \xrightarrow{t\to\infty} 0\,.$$

此外，若 $t > d_S([\alpha], [\gamma]) + d_S([\gamma], [\beta])$，则根据 $\tau_{\mathbb{R}^{1,1}}$ 的定义，鉴于 $f_{\alpha,\gamma}$ 和 $f_{\gamma,\beta}$ 具有 τ-保持因果性的性质，结合截比定理和反三角不等式，

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 - (d_S([\alpha],[\gamma]) + d_S([\gamma],[\beta]))^2} &= \tau_{\mathbb{R}^{1,1}}(f_{\alpha,\gamma}(\alpha(0)), f_{\gamma,\beta}(\beta(t))) \\ &= \tau_X(\alpha(0), \gamma(s)) + \tau_X(\gamma(s), \beta(t)) \\ &\le \tau_X(\alpha(0), \gamma(t))\,, \end{aligned}$$

其中 s 满足 $f_{\alpha,\gamma}(\gamma(s))$ 位于 $[f_{\alpha,\gamma}(\alpha(0))\ f_{\gamma,\beta}(\beta(t))]$（见 图 12）。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，

$$t - \tau_X(\alpha(0), \beta(t)) < \varepsilon \tag{24}$$

当 t充分大时。

另一方面，根据 引理 5.6，α 和 β 弱平行。因此，$\tilde{}$ $\tilde{}$对于某个 $t_0 \in \mathbb{R}$，重新参数化 $\beta : \mathbb{R} \to X$ 由 $\beta(t) = \beta(t + t_0)$ 与 α同步平行，根据 引理 6.5。我们要证明 $t_0 = 0$，因此采用反证法，且不失一般性地假设 $t_0 > 0$。这

~意味着存在一个 τ- 且保持因果性的映射 $f_{\alpha,\ \tilde{\beta}}\colon (\alpha(\mathbb{R}) \cup \beta(\mathbb{R})) \to_{\mathbb{R}^{1,\ 1}}$ 使得

$$f_{\alpha,\tilde{\beta}}(\alpha(t)) = (t, 0)$$
$$f_{\alpha,\tilde{\beta}}(\beta(t + t_0)) = (t, d_S([\alpha], [\beta]))\,,$$

这尤其意味着

$$t - \tau_X(\alpha(0), \beta(t + t_0)) \xrightarrow{t\to\infty} 0\,.$$

因此，当 t 足够大时，反三角不等式意味着

$$t - \tau_X(\alpha(0), \beta(t)) > t_0/2\,.$$

这与不等式（24）矛盾。因此， α 和 β 是同步平行直线，结论由此得出。□

References

[1] S. B. Alexander 和 R. L. Bishop。亚历山德罗夫空间的锥分裂定理。*Pacific J. Math.*, 218(1):1–15，2005年。[2] S. B. Alexander 和 R. L. Bishop。具有亚历山德罗夫曲率界的洛伦兹空间与半黎曼空间。 *Comm. Anal. Geom.*，16(2):251–282，2008年。[3] S. B. Alexander、M. Graf、M. Kunzinger 和 C. S¨amann。作为洛伦兹长度空间的广义锥：因果性、曲率与奇点定理。 *Comm. Anal. Geom.* 31 6 1469 1528, 2023 ( ): – 。[4] W. Barrera、L. Montes de Oca 和 D. A. Solis。具有类时曲率下界的洛伦兹长度空间比较定理。 *Gen. Relativity Gravitation*，54 9 107，32，2022年 ( ):论文编号 .[5] J. K. Beem、P. E. Ehrlich、S. Markvorsen 和 G. J. Galloway。非正曲率洛伦兹流形的分解定理。 *J. Differential Geom.*，22(1):29–42，1985年。[6] J. K. Beem、P. E. Ehrlich、S. Markvorsen 和 G. J. Galloway。洛伦兹流形的托波诺戈夫分裂定理。载于 *Global differential geometry and global analysis 1984 (Berlin, 1984)* 1156 *Lecture Notes in Math.* 1 13 ，第 卷，页码 – 。施普林格出版社，柏林，1985年。[7] T. Beran。整体双曲洛伦兹长度空间的邦内–迈尔斯刚性定理。 *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*，第1–42页，2025年。[8] T. Beran、M. Kunzinger 和 F. Rott。论洛伦兹长度空间中的曲率界。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，110(2):论文编号 e12971，41，2024年。[9] T. Beran、L. Napper 和 F. Rott。亚历山德罗夫拼接法与洛伦兹长度空间的邦内 – 迈尔斯定理。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 378 2743，2025年 4 2713( ): – 。[10] T. Beran、A. Ohanyan、F. Rott 和 D. A. Solis。具有非负类时曲率的整体双曲洛伦兹长度空间的分裂定理。 *Lett. Math. Phys.* 113 2 48, 47, 2023 ( ):论文编号 .[11] T. Beran 和 F. Rott。洛伦兹长度空间的粘合构造。 *Manuscripta Math.* 173 1 2 667 710, 2024 , (-): – 。[12] T. Beran 和 C. S¨amann。洛伦兹长度空间中的双曲角与类时曲率界。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，107(5):1823–1880，2023年。[13] M. R. Bridson 和 A. Haefliger。 *Metric spaces of non-positive curvature*, 319 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 卷。施普林格出版社，柏林， 1999 。

[14] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov。 *A course in metric geometry*, *Graduate Studies in Mathematics*第33卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2001年。[15] J. Cheeger 和 D. Gromoll。非负 Ricci 曲率流形的分裂定理。 *J. Differential Geometry*, 6:119–128，1971/72年。[16] D. Er¨os 和 S. Gieger。综合洛伦兹 Cartan–Hadamard 定理，2025年。预印本：https://arxiv.org/abs/2506.22197。[17] J.-H. Eschenburg。满足强能量条件的时空的分裂定理。*J. Differential Geom.*，27(3):477–491，1988年。[18] G. J. Galloway。无需完备性假设的洛伦兹分裂定理。*J. Differential Geom.*，29(2):373–387，1989年。[19] N. Gigli。非负 Ricci 曲率空间分裂定理证明概述。 *Anal. Geom. Metr. Spaces*，2(1):169–213，2014年。[20] D. Gromoll 和 J. A. Wolf。非正曲率流形中度量结构与基本群代数结构之间的一些关系。*Bull. Amer. Math. Soc.*，77:545–552，1971年。[21] S. G. Harris。洛伦兹流形的三角形比较定理。 *Indiana Univ.*，( ): *Math. J.* 31 3 289 308, 1982 – 。[22] N. Innami。黎曼流形的分裂定理。 *Compositio Math.*，47(3):237–247，1982 年。[23] D. J. Jee。一般洛伦兹曲面的 Gauss–Bonnet 公式。 *Geom. Dedicata*，15 2 215( ): –231，1984年。[24] M. Kunzinger 和 C. S¨amann。洛伦兹长度空间。 *Ann. Global Anal. Geom.*，54 3 399 447，2018年 ( ): – 。[25] H. B. Lawson, Jr. 和 S. T. Yau。非正曲率紧流形。 *J.*，: – 。 *Differential Geometry* 7 211 228, 1972
[26] A. D. Milka。包含直线的某类空间的度量结构。*Ukrain. Geometr. Sb.*，(4):43–48，1967年。[27] R. P. A. C. Newman。S.-T. Yau 分裂猜想的一个证明。 *J. Differential*，( ): – 。 *Geom.* 31 1 163 184, 1990
[28] Y. Otsu 和 T. Shioya。亚历山德罗夫空间的黎曼结构。 *J. Differential*，( ): – 。 *Geom.* 39 3 629 658, 1994
[29] V. Schroeder。非正曲率空间的分裂定理。 *Invent. Math.*，79 2 323 327，1985年 ( ): – 。
[30] V. A. Toponogov。包含直线的黎曼空间。 *Dokl. Akad. Nauk*，: – 。 *SSSR* 127 977 979, 1959
[31] V. A. Toponogov。包含直线的非负曲率黎曼空间的度量结构。 *Sibirsk. Mat. Ž.*，5:1358–1369，1964年。