arXiv:2601.14095v1 [math.CO] 20 Jan 2026

基数与路径宽度

Babak Miraftab[♀]、*Pat Morin*[♀] 和 *Yelena Yuditsky*[♂]

2026年1月21日

摘要。我们证明了两个关于图 G 的基数与G的路径分解之间关系的结果。第一个结果表明，图的基数至多为其路径宽度的四倍。第二个结果表明，若图G 存在一个路径分解，其粘合的大小至多为k ，且每个袋诱导出的图的基数至多为b，则G 的基数至多为$b + O(k\log^2 k)$。结合 Geniet 和 Giocanti 的近期研究，第一个结果表明，图的基数受其树宽的某个多项式函数所界。第二个结果（同样结合 Geniet 和 Giocanti 的研究）表明，每个不含K_t-小图的图，其基数均受t的某个多项式函数所界。

1 引言

对于两个图[1] G_1 和 G_2，对称差 $G_1 \oplus G_2$ 表示这样一个图，其顶点集为 $V(G_1 \oplus G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$，并且包含每条边 $e \in E(G_1) \cup E(G_2)$，当且仅当 e 恰好出现在 G_1 或 G_2中的一个图中。设 G 为一个图，$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 为 G 的子图集合。若对于每个 $C \in \mathcal{C}$，都存在 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$，使得 $C = \bigoplus_{B \in \mathcal{B}'} B$，则称 $\mathcal{B}$ 生成 $\mathcal{C}$。在这种情况下，称 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{C}$ 的生成集。G 的环空间记作 $\mathcal{C}(G)$，是由 G 的所有环生成的集合。若 H 的每个顶点的度均为偶数，则称图 H 为欧拉图。Veblen定理 [9] 指出，欧拉图 H 的边可以由两两边不相交的圈覆盖。由此，图 G 的环空间 $\mathcal{C}(G)$ 由 G 的所有欧拉子图组成。环空间的一个基由一个最小的欧拉子图集构成，利用该集合可以生成 $\mathcal{C}(G)$。

设 G 为一个图，$\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{C}(G)$ 的生成集。对于 G 的边 e，e 在 $\mathcal{B}$ 中的重数[2]，$\mathrm{ply}(e,\mathcal{B}) := |\{B \in \mathcal{B} : e \in E(B)\}|$ 是 $\mathcal{B}$ 中包含 e 的元素个数。$\mathcal{B}$ 的重数 $\mathrm{ply}(\mathcal{B}) := \max\{\mathrm{ply}(e,\mathcal{B}) : e \in E(G)\}$，是 G 的任意边在 $\mathcal{B}$ 中的最大重数。设 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{C}(G)$ 的生成集（或基）。若对每个 $e \in E(G)$，都有 $\mathrm{ply}(e,\mathcal{B}) \le k$，则称 $\mathcal{B}$ 为 k-生成集（k-基）。G 的基数 $\mathrm{bn}(G) := \min\{\mathrm{ply}(\mathcal{B}) : \mathcal{B}$ 是 G 的环基$\}$，是 G 的任意环基的最小重数。

它是 a w线性代数中的一个众所周知的事实是，每个向量空间的生成集

[♀]卡尔顿大学计算机科学学院。[♂]布鲁塞尔自由大学计算机科学系，以及利兹大学计算机科学学院。[1]我们所考虑的任意图 G 都是有限、简单且无向的，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。[2]不同研究对我们所称的重数有不同称呼，包括重数、电荷、拥塞、参与度和负载。我们所称的k-基也称为k-重环基。

都包含一个基。因此，本文关注的是k-生成集，而不是k-基。

图的基数是衡量其复杂度的指标。图 G 是森林[3] 当且仅当 $\mathrm{bn}(G) = 0$。图 G 是仙人掌图[4] 当且仅当 $\mathrm{bn}(G) \leq 1$。这类结果中最著名的是 *Mac Lane* 平面性判据 [6]，它指出，图 G是平面图当且仅当 $\mathrm{bn}(G) \leq 2$。

基数大于 2 的图，其相关结果通常不如平面情形下的结果精确。在这方面，Lehner 和 Miraftab [5] 研究了可嵌入曲面的图。他们证明，每个可嵌入到欧拉示性数为 0 的曲面（即环面或克莱因瓶）上的非平面图，其基数均为 3。更一般地，若图 G 可嵌入亏格为 $g \geq 2$的曲面，则 $\mathrm{bn}(G) \in O(\log^2 g)$[5]。完全图满足 $\mathrm{bn}(K_n) \leq 3$ (见 [8])，而 1-平面图[5] (见 [1])的基数无界。受量子计算中纠错码应用的启发，Freedman 和 Hastings [2] 确立了以下无条件结果：

定理 1（Freedman 和 Hastings [2]）。对于每个 n阶图 G，$\mathrm{bn}(G) \in O(\log^2 n)$。

本文将图的基数与其路径宽度联系起来。路径宽度是一种图参数，本质上独立于图在曲面上的可嵌入性。[6] 图 G 的一个路径分解是 V (G) 的子集序列 $B_0, \ldots, B_n$，满足：(i) 对于 G 的每个顶点 v，以及每个 $0 \leq i < k \leq n$，若 $v \in B_i \cap B_k$，则对于每个 $i \leq j \leq k$，都有 $v \in B^j$；(ii) 对于 G 的每条边 vw，都存在某个 $i \in \{0, \ldots, n\}$，使得 $\{v,w\} \subseteq B_i$。路径分解 $B_0, \ldots, B_n$的宽度为 $\max\{|B_i| : i \in \{0, \ldots, n\}\} - 1$。图 G 的路径宽度 pw(G) 是 G 的路径分解的最小宽度。我们的主要结果是路径宽度与基数之间的以下关系，我们将在第 2.1 节证明该结果：

定理 2. 对于任意图 G，$\mathrm{bn}(G) \leq 4\mathrm{pw}(G)$。

与当前研究并行，Geniet 和 Giocanti [3] 研究了K_t-无小图的图的基数，并证明存在一个函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得每个K_t-无小图G 都满足 $\mathrm{bn}(G) \leq f(t)$。函数 f 未具体说明，但其增长速度至少是双指数级的。

图子式结构定理 [7] 通过树分解刻画了K_t-子式自由图。[7] 因此，一个自然的起点是研究树宽有界的图的基数。Geniet 和 Giocanti [3]正是这样做的，并证明每个树宽至多为k的图G 都满足 $\mathrm{bn}(G) \leq k^{2^{O(k^2)}}$。他们的证明将有界

[3]森林是不含环的图。[4]仙人掌图是指环两两边不相交的图。[5]如果一个图可以嵌入 $\mathbb{R}^2$，且每条边最多被交叉一次，则称该图为 1-平面图。[6]存在路径宽度为 4（包含许多两两顶点不相交的 K_5 副本）的图，它们无法嵌入任何亏格有界的曲面。也存在路径宽度无界的平面图（网格图）。[7]图 G 的树分解是一个集合 $(B_x : x \in V(T))$，其中每个 B_x 都是 V (G) 的子集，并由树 T 的元素作为索引，满足：(i) 对于 G 的每个顶点 v，$T[x \in V(T) : v \in B_x]$构成 T 的一个非空连通子树；(ii) 对于 G 的每条边 vw，都存在某个 $x \in V(T)$，使得 $\{v,w\} \subseteq B_x$。树分解 $(B_x : x \in V(T))$ 的宽度为 $\max\{|B_x| : x \in V(T)\} - 1$。树分解 $(B_x : x \in V(T))$ 的粘合是集合 $\{B_x \cap B_y : xy \in E(T)\}$。

树宽情形归约为有界路径宽度情形，然后证明了一个定理 2 的变体，但其对 pw(G) 的依赖要大得多。使用定理 2 则可证明，每个树宽为k 的图G 都满足 bn(G) $\in O(k^5)$。

图子式结构定理中出现的树分解，其宽度并无界，但其粘合的大小有界。因此，Geniet 和 Giocanti 关于不含K_t-子式的图的结果，依赖于将定理 2 推广到粘合大小有界的路径分解。由此引出了我们的第二个结果，我们将在第 2.2 节中证明该结果。[8]

定理 3. 设 $k \geq 2$，G 为一个图，$B_0, \ldots, B_n$ 是 G 的一个路径分解，设 $H_0 := G[B_0]$，并且，对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，设 $H_i = G[B_i] - E(G[B_{i-1} \cap B_i])$。如果

(a) $|B_{i-1} \cap B_i| \leq k$ 对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$均成立，且 *(b)* bn(H_i) $\leq b$ 对每个 $i \in \{0, \ldots, n\}$均成立，那么 bn(G) $\leq b + O(k \log^2 k)$。

Geniet 和 Giocanti 使用一个对K_t-子式自由图的定理 3 变体证明了他们的结果，该变体对b 和k的依赖大得多。在他们的论证中使用定理 3 和近期建立的多项式图子式结构定理 [4] 表明函数f是多项式的：存在一个常数c，使得每个K_t-子式自由图G 都满足 bn(G) $\in O(t^c)$。

2 证明

在本文余下部分，我们有时会将图G中的边集视为G的子图。例如，对于子图$H \subseteq G$ 和集合$S \subseteq E(G)$，$H \cup S$ 表示顶点集为$V(H \cup S) := V(H) \cup \bigcup_{vw \in S} \{v, w\}$、边集为$E(H \cup S) := E(H) \cup S$的图。

图 G 的生成森林 F 是具有如下性质的森林：G 中的两个顶点 $v, w \in V(G)$ 属于 G 的同一连通分量，当且仅当它们属于 F的同一连通分量。

引理 4。设 G_1 和 G_2 是两个图，并且对每个 $i \in \{1,2\}$，令 F_i 为 G_i 的一个生成森林。对于每一对顶点 $v, w \in V(G_1 \cup G_2)$，v 和 w 在 $G := G_1 \cup G_2$ 的同一个连通分量中，当且仅当 v 和 w 在 $F := F_1 \cup F_2$ 的同一个连通分量中。

证明。任取 G 中的两个顶点 v 和 w。若 v 和 w 位于 G 的不同连通分量中，则由于 E(F) ⊆E(G)，它们也位于 F 的不同连通分量中。若 v 和 w 位于 G 的同一个连通分量中，则 G 中存在一条从 v 到 w 的路径 P $= v_0, \ldots, v_\ell$。对于每个 j $\in \{1, \ldots, l\}$，$v_{j-1}v_j$ 至少是某个 G_i 中的一条边，其中 i $\in \{1, 2\}$。因此，至少存在某个 i $\in \{1,2\}$，使得 F_i 中有一条从 v_{j-1} 到 v_j 的路径 P_j。因此，将路径 $P_1, \ldots, P_\ell$ 连接起来，就得到 F 中一条从 v 到 w 的游走，所以 v 和 w 位于 F 的同一个连通分量中。□

图中的一条边 e 若满足以下条件，则称其为H 中的环边：H 中的至少一个环包含e。若e 是图H中的环边，则对于任意两个顶点$v, w \in V(H)$，v 和w 属于同一个连通分量

[8]对于图 G 及其顶点子集 X，记号 G[X] 表示 G 中顶点集为 V (G[X]) := X、边集为 E(G[X]) := {vw ∈ E(G) : {v,w} ⊆ X} 的诱导子图。对于图 G 及其边集 S，记号 G − S 表示顶点集为 V (G − S) := V (G)、边集为 E(G − S) := E(G) ∖ S 的图。

当且仅当它们在H中删除e–后仍属于同一个连通分量。因此，重复删除任意环边，即可得到H的一片森林。

引理 5. 设 G 是一个图，v 是 G 的一个顶点，F^- 是 $G-v$ 的一个生成森林，$\mathcal{B}^-$ 是 $G-v$ 的一个环基，Δ 是 F^+ 的一个环基：$=F^- \cup \{vw : w \in N_G(v)\}$。那么$\mathcal{B} := \mathcal{B}^- \cup \Delta$ 是$\mathcal{C}(G)$的一个生成集。

证明引理 5 之前，我们注意到，引理 5 陈述中的图F^+由一个森林F^-（一个外平面图）以及一个额外顶点v组成，且该顶点与F^-中的某些顶点相邻，因此F^+是一个平面图，这意味着 $\mathrm{bn}(F^+) \leq 2$。应用引理 5 时，这使我们可以选择 Δ，使得 $\mathrm{ply}(\Delta) \leq 2$，因此 $\mathrm{ply}(B) \leq \mathrm{ply}(B^-) + 2$。

引理 5 的证明。设 C 是 G 中的一个环。我们必须证明 B 生成 C。若 $C \subseteq G - v$，则 $B^- \subseteq$ B 生成 C。否则，C 包含一个三顶点路径 P_{uvw} :=uvw，其中 u、w $\in N_G(v)$。由于 $C - v \subseteq G - v$ 是一条从 u 到 w 的路径，u 和 w 属于 G–v 的同一个连通分量，因此也属于 F^-的同一个连通分量。设 P 是 F^- 中从 u 到 w 的唯一的路径，并设 $C' := P \cup P_{uvw}$ 是 F^+ 中包含 P_{uvw}的唯一的环。根据定义，Δ 生成 C′。最后注意到，$C \oplus C' \subseteq G - v$ 是 $G-v$ 的一个欧拉子图，因此 B^-生成 $C \oplus C'$。所以 $B = B^- \cup \Delta$ 生成 $C' \oplus (C \oplus C') = C$。 □

设 F 为森林，且 $S \subseteq V(F)$。我们将 FS 记为 F 的顶点极小子图，它满足以下性质：对于每个 v,w $\in$ S，v 和 w 在 F 中属于同一连通分量，当且仅当它们在 FS 中属于同一连通分量。根据定义可知，V (FS) ∖ S 中的每个顶点的度至少为 2。我们将 F{S} 记为通过抑制 FS 中每个满足 $\deg^{F\langle S\rangle}(v) = 2$.[9] 的顶点 $v \in V(FS) \setminus S$ 所得到的 F 的标记拓扑 minor。

引理 6. 对于每个森林 F 以及每个满足 $|S| \geq 2$ 的 $S \subseteq V(F)$，$F\{S\}$ 至多有 $2|S| - 2$ 个顶点。

证明。设 T 是通过添加一个极小边集使 F{S} 连通而得到的超图。于是 T 是一棵树。设 l 为 T 的叶节点数。根据 F{S} 的定义，对于每个顶点 $v \in V(T) \setminus S$，都有 $\deg_T(v) \geq \deg^{F\{S\}}(v) \geq 3$。关于树的一个众所周知的事实是：一棵含有 t 个度至少为三的顶点的树，其叶节点数至少为 t + 2。因此，$|S| \geq l \geq |V(T)| - |S| + 2$。改写后得到 $|V(F\{S\})| = |V(T)| \leq 2|S| - 2$。 □

对于森林 F 中属于同一连通分量的两个顶点 v 和 w，令 P_F(v,w) 表示 F 中从 v 到 w 的唯一的路径。对于图 G、G 的生成集 B、G 的一片生成森林 F，以及 G 中属于同一连通分量的一对顶点 v 和 w，定义 $\mathrm{ply}_F(v, w, B) = \max\{\mathrm{ply}(e, B) : e \in E(P_F(v,w))\}$。当 $vw = e$ 是某个辅助图（例如某个 $S \subseteq V(F)$ 对应的 F{S}）中的一条边时，我们使用简写 $P_F(e) := P_F(v,w)$ 和 $\mathrm{ply}_F(e, B) = \mathrm{ply}_F(v, w, B)$。

[9]为了　压缩度为 2 的顶点 v 的邻点u 和w，我们移除v 并用边uw .

2.1 定理 2 的证明

令 G为一个 n 个顶点的图，其路径宽度至多为 t。若路径分解 $B_0,\ldots,B_n$属于 G，则称其为正规的，当且仅当

$$|B_i| = \begin{cases} i & \text{for } i \le t \\ t+1 & \text{for } i \in \{t+1,\ldots,n\} \end{cases}$$

以及 $|B_i \setminus B_{i-1}| = 1$，对于每个$i \in \{1,\ldots,n\}$。众所周知，任意路径宽度至多为$t$ 的图都有宽度至多为t的正规路径分解。

定理 *2* 的证明。 路径宽度至多为 1 的图都是森林，因此其基数为零。于是，当 $\mathrm{pw}(G) \le 1$ 时，$\mathrm{bn}(G) = 0 \le 4\mathrm{pw}(G)$。现在，设 G 是路径宽度至多为 $t \ge 2$ 的图，且 $B_0,\ldots,B_{\{v21>}$是G的正规路径分解。我们将证明存在G 的生成集 B，使得 $\mathrm{ply}(B) \le 4t$。我们将证明以下技术性命题，该命题适用于用归纳法证明，并且可直接推出定理 2。

断言 7。 存在 G 的一个生成森林 F 和$4t$-生成集$\mathcal{B}$，它属于$\mathcal{C}(G)$，使得对于每个 $c \in \{0,\ldots,2t-1\}$，满足 $\mathrm{ply}_F(e,\mathcal{B}) \ge 2c+1$ 的 $F\{B_n\}$ 中的边 e 的数量至多为 $2t-c-1$。

现在我们通过对 n 进行归纳法来证明断言 7。基础情形 $n \in \{0,1,2\}$ 显然成立：在这些情形下，G 至多有两个顶点且没有环，因此令 $B := \emptyset$，并令 F 为 G 的任意生成森林，即可满足要求，其中 $t \ge 1$。

现在假设 $n \ge 3$。令 v为 $B_n \setminus B_{n-1}$ 中的唯一顶点。于是，$B_0,\ldots,B_{n-1}$ 是 $G-v$ 的正规路径分解。根据归纳假设，$G-v$ 具有一个生成森林 F^- 和一个生成集 B^-，其重数为 $\mathrm{ply}(B^-) \le 4t$，使得对于每个 $c' \in \{0,\ldots,2t-1\}$，我们有

$$\left|\{e \in F^-\{B_{n-1}\} : \mathrm{ply}_{F^-}(e,\mathcal{B}^-) \ge 2c'+1\}\right| \le 2t-c'-1. \qquad (1)$$

令 $F_n := G[B_n] - E(G[B_{n-1} \cap B_n])$，并注意到 $V(F_n) = B_n$，且 $E(F_n) = \{vw : w \in N^{B_{n-1}}(v)\}$。由于 $F^+ := F^- \cup F_n$ 是一个平面图，因此它具有一个环基 Δ，其重数为 $\mathrm{ply}(\Delta) \le 2$。根据引理 5，$B := B^- \cup \Delta$ 是 $C(G)$ 的生成集。

剩下的工作是定义 G 的生成森林 F，使其满足断言 7 的条件。根据引理 4，G 中两个顶点属于同一连通分量，当且仅当它们在 F^+ 中属于同一连通分量。为得到 F，我们找到一列边 $\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_r$，使得 $\hat{e}_i$ 是 $F^+ - \{\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_{i-1}\}$ 中使 $\mathrm{ply}(\hat{e}_i,B)$ 最大化的环边。此过程在 $F^+ - \{\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_r\}$ 成为森林时结束，此时令 $F := F^+ - \{\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_r\}$。由于此过程只移除环边，所得图 F 是 F^+ 的生成森林，因此也是 G 的生成森林。

现在我们证明 B 和 F 满足断言 7 的要求。首先证明 $\mathrm{ply}(B) \le 4t$。设 $\hat{e}$ 是 G 的一条边。如果 Δ 中没有环包含 $\hat{e}$，那么根据归纳假设，$\mathrm{ply}(\hat{e},B) = \mathrm{ply}(\hat{e},B^-) \le \mathrm{ply}(B^-) \le 4t$。现在假设至少有一个 Δ 中的环 C 包含 $\hat{e}$。由于 $F^- = F^+ - v$ 是森林，C 包含 v。如果 $\hat{e}$ 与 v 关联，那么 $\mathrm{ply}(\hat{e},B) = \mathrm{ply}(\hat{e},\Delta) \le 2 \le 4t$。现在假设 $\hat{e}$ 是 $C-v$ 的一条边。那么 $C - v = P_{F^-}(u,w)$，其中 u、w 是 $\in N_G(v) \subseteq B_{n-1}$ 中的两个顶点。由于 $\{u,w\} \subseteq B_{n-1}$，$P_{F^-}(u,w) \subseteq F^- B_{n-1}$。因此，

存在一条边 e，属于 $F^{-}\{B_{n-1}\}$，使得 $\hat{e} \in E(P_{F^{-}}(e))$。注意，$P_{F^{-}}(e) \subseteq P_{F^{-}}(u, w)$。方程（1）在 $c' = 2t - 1$ 时表明，$F^{-}\{B_{n-1}\}$ 中满足 $ply_{F^{-}}(e', B^{-}) \geq 2c' + 1 = 4t - 1$ 的边 e' 至多有 $2t - c' - 1 = 2t - (2t - 1) - 1 = 0$ 条。因此，$ply_{F^{-}}(e, B^{-}) \leq 4t - 2$。根据定义，$ply_F(v, w, B) = \max\{ply(e) : e \in E(P_F(v, w))\}$。由于 $\hat{e}$ 是该路径上的一条边，我们推知 $ply(\hat{e}, B^{-}) \leq ply_{F^{-}}(e, B^{-})$。因此我们有

$$\begin{aligned} ply(\hat{e}, \mathcal{B}) &= ply(\hat{e}, \mathcal{B}^{-}) + ply(\hat{e}, \Delta) \\ &\leq ply_{F^{-}}(e, \mathcal{B}^{-}) + 2 \\ &\leq 4t - 2 + 2 = 4t \end{aligned}$$

因此，对于图 G 的每条边 e,，都有 $ply(e,B) \leq 4t$，所以 $ply(B) \leq 4t$。

现在我们来到了证明的关键部分：证明对于所有 $c \in \{0,\ldots,2t-1\}$，F 都满足断言 7 的要求。对于 $c = 0$，这可直接由引理 6 得出。事实上，$|B_n| \leq t + 1$，因此根据引理 6，$F\{B_n\}$ 至多有 $2|B_n| - 3 \leq 2(t + 1) - 3 = 2t - 1$ 条边。

接下来考虑 $c \in \{1,\ldots,2t-1\}$ 的情形。令

$$S := \{e \in E(F\{B_n\}) : ply_F(e, \mathcal{B}) \geq 2c + 1\}$$

并令 $m := |S|$。

$$S^{-} := \{e \in E(F^{-}\{B_{n-1}\}) : ply_{F^{-}}(e, \mathcal{B}^{-}) \geq 2(c-1) + 1\}$$

并令 $m^{-} := |S^{-}|$。根据归纳假设，$m^{-} \leq 2t - (c-1) - 1$。现在我们将证明 $m^{-} \geq m + 1$，从而 $m + 1 \leq m^{-} \leq 2t - (c-1) - 1$，将这个不等式改写后得到 $m \leq 2t - c - 1$。我们先描述一个单射 $\varphi : S \to S^{-}$。φ 的存在立即意味着 $m = |S| \leq |S^{-}| = m^{-}$。为了证明 $m \leq m^{-} - 1$，接下来我们将证明 S^{-} 中至少有一个元素在 φ中没有原像。

设 e 是 $F\{B_n\}$ 中属于 S 的一条边。由于 $ply_F(e,B) = \max\{ply(f, B) : f \in E(P_F(e))\}$，因此存在一条边 $\hat{e} \in E(P_F(e))$，使得 $ply(\hat{e},B) = ply_F(e,B) \geq 2c + 1$。由于 $2c + 1 \geq 3$，边 $\hat{e}$ 不与 v 关联。因此，$\hat{e}$ 是 F^{-} 中的一条边。注意，$ply(\hat{e}, B) = ply(\hat{e}, B^{-}) + ply(\hat{e}, \Delta)$。由于至多有两个环在 Δ中使用边 $\hat{e}$，所以 $ply(\hat{e}, B^{-}) \geq ply(\hat{e}, B) - 2 \geq 2(c-1) + 1$。

由于 e 是 $F\{B_n\}$ 中的一条边，$P_F(e)$ 是 FB_n 中的一条路径。根据 FB_n 的极小性，存在两个顶点 $u, w \in B_n$，使得 FB_n 中从 u 到 w 的路径包含 $P_F(e)$。由于 $\hat{e}$ 不与 v 关联，且 $N_G(v) \subseteq B_n \setminus \{v\}$，不妨设 $v \notin \{u, w\}$。[10] 因此，$P_F(u, w)$ 是 F 中避开 v 的一条路径，这意味着 $P_F(u, w)$ 是 F^{-} 中的一条路径。因此，$P_F(u, w) = P_{F^{-}}(u, w)$。由于 $B_n \setminus B_{n-1} = \{v\}$，$u, w \in B_{n-1}$。因此，$P_{F^{-}}(u, w)$ 是 $F^{-}B_{n-1}$ 中的一条路径。因此，$F^{-}\{B_{n-1}\}$ 包含一条边 e'，使得 $P_{F^{-}}(e')$ 包含边 $\hat{e}$，所以 $ply_{F^{-}}(e', B^{-}) \geq ply(\hat{e}, B^{-}) \geq 2(c-1) + 1$。因此 $e' \in S^{-}$，并令 $\varphi(e) := e'$。注意，$P_F(e) = P_{F^{-}}(e)$ 包含 $P_F(e') = P_{F^{-}}(e')$ 作为子路径。事实表明，$P_{F^{-}}(e') \subseteq P_{F^{-}}(e)$，这意味着 φ 是从 S 到 S^{-} 的单射。φ 的存在性已经意味着 $m^{-} \geq m$。

为证明 $m^{-} \geq m+1$，我们将证明存在一条边$e_1 \in S^{-}$，它在 φ 中没有原像。根据归纳假设，边$F^{-}\{B_{n-1}\}$ 中满足 $ply(e,B^{-}) \geq 2c + 1$ 的边e 的数量$m^{\star}$ 满足 $m^{\star} \leq 2t - c - 1$。若 $m \leq m^{\star}$，则无需再证明，因此我们可以

[10]例如，如果 $v = u$，那么 $P_F(v,w) - v$ 是图 F 中从 w 到 u，的一条路径，其中 $u,w \in B_n \setminus \{v\}$，且包含边 $\hat{e}$。

假设 $m \geq m^\star + 1$。因此，存在一条边 e，属于 $F\{B_n\}$，且 $\mathrm{ply}_{F^-}(e, B) \geq 2c + 1$，而 $\mathrm{ply}_{F^-}(e, B^-) < 2c + 1$。因此，$P_{F^-}(e)$ 包含一条边 $\hat{e}$，满足 $\mathrm{ply}(\hat{e}, B) \geq 2c + 1$，且 $\mathrm{ply}(\hat{e}, B^-) < 2c + 1$。因此，$\Delta$ 中至少有一个环包含 $\hat{e}$。因此，Δ 至少包含一个环，所以 F^+ 至少包含一个环。因此，F^+ 中至少有一条边 $\hat{e}_1$ 不属于 F。之所以从 F^+ 中移除边 $\hat{e}_1$，是因为 $\hat{e}_1$ 是 F^+ 的一条环边，且其 $\mathrm{ply}(\hat{e}_1, B)$ 最大。由于 e 是 F^+ 的一条环边，$\mathrm{ply}(\hat{e}_1, B) \geq \mathrm{ply}(\hat{e}, B) \geq 2c + 1$。

因此，$\mathrm{ply}(\hat{e}_1, B^-) \geq \mathrm{ply}(\hat{e}_1, B) - 2 \geq 2(c - 1) + 1$。那么，$C - v$ 是 F^- 中一条以 u、$w \in B_n \setminus \{v\} \subseteq B_{n-1}$ 为端点的路径。因此，$C - v = P_{F^-}(u, w)$ 是 $F^- B_{n-1}$ 中的一条路径。因此，$F^-\{B_{n-1}\}$ 包含一条边 e_1，使得 $P_{F^-}(e_1)$ 包含边 $\hat{e}_1$。因此，$\mathrm{ply}_{F^-}(e_1, B^-) \geq \mathrm{ply}(\hat{e}_1, B^-) \geq 2(c - 1) + 1$。然而，由于 $\hat{e}_1$ 不在 F 中，$F\{B_n\}$ 中不存在边 $e^\star$，使得 $P_F(e^\star)$ 包含 $\hat{e}_1$。因此，$F\{B_n\}$ 中不存在边 $e^\star$，使得 $\varphi(e^\star) = e_1$。因此，φ 的像在 S^- 中至少包含 m 条边，并且 S^- 中至少有一条边 $e^\star \in$ 不在 φ 的像中。因此，$m^- = |S^-| \geq |S| + 1 = m + 1$，证毕。 □

2.2 定理 3 的证明

我们对定理 3 的证明用到了引理 5 的以下推广：[11]

引理 8. 设 H_1 和 H_2 是两个图；对于每个 $i \in \{1,2\}$，设 F_i 是 H_i 的生成森林，$\mathcal{B}_i$ 是 H_i 的一个环基，且 Δ 是 $F_1 \cup F_2$ 的一个环基。那么 $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \Delta$ 是 $\mathcal{C}(H)$ 的一个生成集，其中 $H := H_1 \cup H_2$。

证明。设 $A := V(H_1) \cap V(H_2)$。设 C 是 H 中的一个环。我们必须证明 B 生成 C。C 的一个 A-段是 C 中一条两端点均在 A 中且没有内部顶点属于 A 的路径。注意，C 的每个 A-段 P 都满足 $E(P) \subseteq E(H_1)$ 或 $E(P) \subseteq E(H_2)$。若 C 的一个 A-段 P 满足 $E(P) \subseteq E(F_1 \cup F_2)$，则称其为干净的，否则称为脏的。证明采用归纳法，归纳对象是 C 中脏 A-段的数量 d。若 $d = 0$，则 $E(C) \subseteq E(F_1 \cup F_2)$，因此 $\Delta \subseteq B$ 生成 C。

现在假设 $d \geq 1$，令 P 为 C 中端点为 v、$w \in A$ 的一个含污 A-段。不失一般性，我们可以假设 $E(P) \subseteq E(H_1)$。由于 $P \subseteq H_1$，v 和 w 位于 H_1 的同一个连通分量中。因此，v 和 w 位于 F_1 的同一个连通分量中，故存在路径 $P_1 := P_{F_1}(v, w)$。令 $C' := P_1 \oplus C \oplus P$，并注意到 C' 是欧拉图。令 C'_1 为 C' 中包含 $E(P_1)$ 的一个环。令 $C'_2, \ldots, C'_k$ 为 $C' \oplus C'_1 = C' - E(C'_1)$ 的边集的一种划分，使其由两两边不相交的环组成。（根据 Veblen 定理，这样的环 $C'_2, \ldots, C'_k$ 存在。）除包含在 P_1 中的 A-段外，对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，C'_i 的每个 A-段也是 C 的 A-段。由于 P 是含污的，且包含在 P_1 中的每个 A-段都是干净的，因此对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，C'_i 中含污 A-段的数量 d_i 小于 d。（事实上 $\sum_{i=1}^{k} d_i < d$。）根据归纳假设，对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，B 生成 C'_i。因此 B 生成 $C' = \bigoplus_{i=1}^{k} C'_i$。最后，注意 $P_1 \oplus P$ 是 H_1 的一个欧拉子图，因此 B_1 生成 $P_1 \oplus P$。因此，B 生成 $C' \oplus P_1 \oplus P = (P_1 \oplus C \oplus P) \oplus P_1 \oplus P = C$。

□

我们还会用到以下结果，该结果可由定理 1 迅速推出：

引理 9. 设 T_1 和 T_2 是两棵树，且 $|V(T_1) \cap V(T_2)| \leq k$。则 $\mathrm{bn}(T_1 \cup T_2) \in O(\log^2 k)$.

[11] 引理 5 是以下特殊情形：$H1 := G - v$，$F := F1$ 且 $H2 := F2 := \{vw : w \in N_G(v)\}$。

证明。令 A := V (T1) ∩ V (T2)。注意，$T_1 \cup T_2$ 中的任意环 C 都是 H := T1A ∪ T2A中的一个环，因此只需证明 bn(H) ∈ O(log²k)。考虑图 ˜H := T1{A} ∪ T2{A}。由 [1, 引理 3.6] 可知，bn(H) = bn(˜H)。根据引理 6， ˜H 至多有 4k 个 − 4顶点。根据定理 1，bn(˜H) ∈ O(log²k)。因此 bn(H) = bn(˜H) ∈ O(log²k)。 □

定理 3 的证明。设 G 为一个图，且 $B_0, \ldots, B_n$ 是 G 的一个路径分解，满足定理 3 的条件 (a) 和 (b)。我们对 n 使用归纳法，但采用更强的归纳假设，并用到以下定义。对每个 i ∈{−1, 0, . . . , n}，定义 $G_i := G[\bigcup_{j=0}^{i} B_j]$。对每个 i ∈{0, . . . , n − 1}，令 $A_i := B_i \cap B_{i+1}$。对于 G 的任意生成森林 F 和任意 i ∈{0, . . . , n}，如果 F{A_i} 中的边 e 满足 $P_F(e) \subseteq G_i$，则称 e 是 i-旧边。

我们先处理 k ≤ 1 的情形。在这些情形下，对于每个 i ∈{0, . . . , n − 1}，A_i 是一个大小至多为 1 的割集，它将 $\bigcup_{j=0}^{i} B_j$ 与 $\bigcup_{j=i+1}^{n} B_j$ 分隔开。因此，G 的任意环都包含在某个 G_i 中，其中 i ∈{0, . . . , n}。对每个 i ∈{0, . . . , n}，令 Λ_i 为 G_i 的一个环基，且 ply(Λ_i) ≤ b。于是 B := $\bigcup_{i=0}^{n} \Lambda_i$ 是 C(G) 的生成集，且 ply(B) ≤ b，因此 bn(G) ≤ b ≤ b + O(k log² k)。现在假设 k ≥ 2。由于任何满足定理 3 条件且 k = 2 的图，也满足 k = 3时的这些条件，因此我们现在假设 k ≥ 3。

断言 10。 存在常数 $c > 0$，使得对于任意大小至多为 k 的 $A_n \subseteq B_n$，存在 $C(G)$ 的生成集 $\mathcal{B}$，满足重数($\mathcal{B}$) $\leq b + (2k-2)c\log^2 k$，并且存在 G 的生成森林 F，使得对于每个 $i \in \{0, \ldots, n\}$，$F\{A_i\}$ 至多有

$$2k - 2 - \frac{\max\{\mathrm{ply}(\hat{e}, \mathcal{B}) : \hat{e} \in E(G_i) \setminus E(G_{i-1})\} - b}{c\log^2 k} \tag{2}$$

条 i-旧边。

本证明的其余部分致力于证明断言 10，由此定理 3 可立即推出。证明对n采用归纳法。令

$$z_i := \frac{\max\{\mathrm{ply}(\hat{e}, \mathcal{B}) : \hat{e} \in E(G_i) \setminus E(G_{i-1})\} - b}{c\log^2 k},$$

从而，断言 10 的第二部分等价于说明至多有

$$2k - 2 - z_i$$

条 $F\{A_i\}$ 中的边对于每个 $i \in \{0, \ldots, n\}$ 都是 i-旧的。证明其余部分的指导性直觉是，将 z_i 增加 1 会至少消除一条 i-旧边。

基础情形 $n = 0$ 是直接的：根据假设，$G_0 = G[B_0]$ 的基数为 bn(G_0) ≤ b。令 B 为 G_0 的任意一个基，且其重数至多为 b，并令 F 为G_0 的任意生成森林。那么，对于 G_0，的每条边 $\hat{e}$，重数$_F$($\hat{e}$,B) ≤ b，因此 $z_0 = 0$。根据引理 6，$F\{A_0\}$ 至多有 $2k-2$ 个顶点和 $2k-3$ 条边（因此至多有 $2k-3 < 2k-2-z_0$ 条 0-旧边），正如断言 10 所要求的那样。

现在假设 $n \geq 1$。对图 G_{n-1} 及其路径分解 $B_0, \ldots, B_{n-1}$，对 $A_{n-1} := B_{n-1} \cap B_n$ 归纳应用断言 10，从而得到一个环基 B⁻ 以及一个

生成森林 F^-，其属于 G_{n-1}。设 Λ 是 $G[B_n] - E(G[A_{n-1}])$ 的一个环基，且其重数$(\Lambda) \le b$；再设 F_n 是 $G[B_n]$ 的任意生成森林。根据引理 9，$F^+ := F^- \cup F_n$ 有一个环基 Δ，其重数$(\Delta) \le c \log^2 k$。定义 $B := B^- \cup \Lambda \cup \Delta$。根据引理 8，B 是 $C(G_n) = C(G)$ 的生成集。

剩下要做的就是定义一个满足断言 10 条件的森林 F。为了得到 F，我们找到一列边 $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_r$，使得 $\hat{e}_i$ 是 $F^+ - \{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_{i-1}\}$ 中出生时间最早的环边。当 $F^+ - \{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_r\}$ 成为森林时，这个过程就结束，此时我们令 $F := F^+ - \{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_r\}$。剩下要做的就是证明 B 和 F 满足断言 10 的要求。

我们首先证明 $\text{ply}(B) \le b + (2k-2)c \log^2 k$，假设森林 F 满足断言 10 的条件。对于 G 的每条边 $\hat{e}$，将 $\hat{e}$ 的出生时间定义为 $\min\{i : \hat{e} \in E(G_i)\}$。注意，对于每个 $i \in \{0, \ldots, n\}$，出生时间为 i 的边恰好是 $E(G_i) \setminus E(G_{i-1})$ 中决定 z_i 值的那些边。令 $\hat{e}$ 为使 $\text{ply}(\hat{e}, B)$ 最大的 G 中一条边，并令 i 为 $\hat{e}$ 的出生时间。反设 $\text{ply}(\hat{e}, B) > b + (2k-2) \cdot c \log^2 k$。由于 $\hat{e}$ 的出生时间为 i，因此 $z_i > 2k - 2$。于是 $F\{A_i\}$ 中至多有 $2k - 2 - z_i < 0$ 条 i-旧边。这显然矛盾，因为 $F\{A_i\}$ 中 i-旧边的数量不可能小于零。

现在我们证明 B 和 F s 满足断言 10 的其余条件。固定 $i \in \{0, \ldots, n\}$，并令 $\hat{e}$ 为 G 中出生时间为 i 且使 $\text{ply}(e, B)$ 最大的一条边，因此 $\hat{e}$ 决定了 z_i 的值。令 m_i 为 $F\{A_i\}$ 中 i-旧的边数。我们必须证明 $m_i \le 2k - 2 - z_i$。

我们先考虑 $i = n$ 的情形。在这种情况下，$\hat{e} \notin E(G_{n-1})$，所以 $\text{ply}(\hat{e}, B) = \text{ply}(\hat{e}, \Lambda) + \text{ply}(\hat{e}, \Delta) \le b + c \log^2 k$。在这种情况下，$z_i \le 1$。根据引理 6，$F\{A_n\}$ 至多有 $2k - 3 \le 2k - 2 - z_i$ 条边，因此 $m \le 2k - 2 - z_i$，如所需。

接下来考虑 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ 的情形。在这种情况下，$F^-\{A_i\}$ 包含一条 i-旧边 e，使得 $P_{F^-}(e)$ 包含边 $\hat{e}$。由于 $i < n$，$\hat{e} \in E(G_{n-1})$。因此，Λ 中没有环包含 $\hat{e}$，所以 $\text{ply}(\hat{e}, B) = \text{ply}(\hat{e}, B^-) + \text{ply}(\hat{e}, \Delta) \le \text{ply}(\hat{e}, B^-) + c \log^2 k$。令 S_i 为 $F\{A_i\}$ 中 i-旧边的集合，S_i^- 为 $F^-\{A_i\}$ 中 i-旧边的集合。令 $m_i = |S_i|$，$m_i^- := |S_i^-|$。对每条边 $f \in S_i$，至少存在一条边 $f^- \in S_i^-$，使得 $P_{F^-}(f^-) \subseteq P_F(f)$。因此，存在一个单射 $\varphi : S \to S^-$。这立即推出 $m_i \le m_i^-$。令 z_i^- 满足 $\text{ply}(\hat{e}, B^-) = b + z_i^- \cdot c \log^2 k$。归纳假设推出 $m_i^- \le 2k - 2 - z_i^-$。由于 $B \supseteq B^-$，$\text{ply}(\hat{e}, B) \ge \text{ply}(\hat{e}, B^-)$，且 $z_i \ge z_i^-$。若 $z_i = z_i^-$，则 $m_i^- \le 2k - 2 - z_i^- = 2k - 2 - z_i$，因此 $m_i \le m_i^- \le 2k - 2 - z_i$，如所需。

最后，我们考虑 $z_i > z_i^-$ 的情形，并证明这意味着 S^- 包含一条边 e_1^-，其在 φ 中没有原像。由于 $z_i > z_i^-$，$\text{ply}(\hat{e}, B) > \text{ply}(\hat{e}, B^-)$。由于 $\text{ply}(\hat{e}, B) = \text{ply}(\hat{e}, B^-) + \text{ply}(\hat{e}, \Delta)$，$\Delta$ 中的某个环包含 $\hat{e}$。因此，F^+ 包含一个包含 $\hat{e}$ 的环。因此，F^+ 包含一个环，该环包含一条出生时间至多为 i 的边。由于在 F^+ 中参与环的所有边中，$\hat{e}_1$ 具有最小出生时间，因此 $\hat{e}_1$ 的出生时间至多为 i。于是，$F^-\{A_i\}$ 包含一条边 e_1^-，使得 $\hat{e}_1$ 包含于 $P_{F^-}(e_1^-)$ 中。因此，e_1^- 是 $F^-\{A_i\}$ 的一条 i-旧边，所以 $e_1^- \in S^-$。由于 $\hat{e}_1$ 不在 F 中，$F\{A_i\}$ 中不存在任何边 e_1，使得 $P_F(e_1)$ 包含 $\hat{e}_1$。因此，$e_1^- \in S^-$ 在 φ 中没有原像。因此，$m_i = |S| < |S^-| = m_i^-$。由于 m_i 和 m_i^- 是整数，$m_i \le m_i^- - 1 \le 2k - 2 - z_i^- - 1 \le 2k - 2 - z_i$。证明完毕。 □

3 结论

定理 2 和定理 3 的证明非常相似，主要区别在于如何选择边 $\hat{}e_1, \ldots, \hat{}e_r$。事实上，也可以使用第二种论证来证明定理 2：路径宽度为t的图的正规路径分解（$B_0, \ldots, B_n$）的粘合大小至多为t；环基 Λ 可以为空，因为$G_n - E(G_{n-1})$是一个星图，并且环基 Δ 可以选择为使 $\mathrm{ply}(\Delta) \leq 2$ （而不是 $c\log^2 k$），因为 $F^- \cup G_i - E(G_{i-1})$ 是平面的。

我们同时给出这两种证明的原因是，在尝试证明以下结果时，我们都曾尝试过这两种思路（但迄今未能成功）：

猜想 11. 每个树宽至多为 k 的图 G 都有 $\mathrm{bn}(G) \in O(k)$。

同时给出这两种证明的第二个原因是，Freedman 和 Hastings 对定理 1 给出的优雅证明 [2] 是一种概率论证：它反复添加一个（最短）环 C 以扩充生成集，然后从C 中选择一条随机边并将其从G中移除。在一项实验研究中，Wang 和 Irani [10] 表明，选择一条（确定性地或概率性地）使重数最大的边（如定理 2 的证明中所做的那样），在实践中能得到更好的环基。我们希望，从定理 2 的证明中获得的见解有助于证明以下猜想：

猜想 12. [1] 每个有 n 个顶点的图 G 都有 $\mathrm{bn}(G) \in O(\log n)$。

参考文献

[1] Saman Bazargani、Therese Biedl、Prosenjit Bose、Anil Maheshwari 和 Babak Miraftab。1-平面图的基数。 组合数学年刊，2026。[2] Michael Freedman 和 Matthew B. Hastings。由量子码构造流形。 *CoRR*，abs/2012.02249，2012。 doi:10.48550/ARXIV.2012.02249。 2012.02249。[3] Colin Geniet 和 Ugo Giocanti。排除图子式的图的基数。准备中的草稿，2025。[4] Maximilian Gorsky、Michał T. Seweryn 和 Sebastian Wiederrecht。图子式结构定理的多项式界。 *CoRR*，abs/2504.02532，2025。 doi:10.48550/ARXIV.2504.02532。 2504.02532。[5] Florian Lehner 和 Babak Miraftab。有界亏格图的基数。 *CoRR*，abs/2410.10566，2024。 doi:10.48550/ARXIV.2410.10566。 2410.10566。[6] Saunders Mac Lane。平面图的一个组合条件。 *Fundamenta Mathematicae*，28(1):22–32，1937。[7] Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。图子式。XVI. 排除一个非平面图。 组合理论杂志*B*辑，89(1):43–76，2003。 doi:10.1016/S0095-8956(03)00042-X。

[8] Edward F. Schmeichel。图的基数。 组合理论杂志*B*辑，30(2):123–129，1981年。 doi:10.1016/0095-8956(81)90057-5。[9] Oswald Veblen。模方程在位置分析中的一个应用。 数学年刊，14(1/4):86–94，1912年。[10] Fan Wang 和 Sandy Irani。用于降低最大边参与度的环基算法。2025。2511.10961。