arXiv:2601.14097v1 [math.OA] 20 Jan 2026

阿贝尔群交叉积的简单子商与扭曲群代数

SIEGFRIED ECHTERHOFF

摘要。受 Poguntke 工作的启发，我们研究这样一个问题：在什么条件下，由阿贝尔群的（扭曲）作用得到的交叉积的简单子商同构于阿贝尔群的简单扭曲群代数。由此，我们重新得到 Poguntke 的一个定理：连通群的群代数的简单子商要么与 $\mathbb{C}$ 稳定同构，要么与简单非交换环面稳定同构。

1. 引言

研究单 C^*-代数 A 结构的一个重要动机，来自这样一个事实：它们通常被视为一般C^*-代数的基本构件。事实上，在原始理想空间 $\mathrm{Prim}(A)$ 中的点均为局部闭这一温和条件下，每个本原理想 $P \subseteq A$ 都确定一个唯一的简单子商 $A_P := \ker\{P\}/P$，它属于 A；其中对于 $E \subseteq \mathrm{Prim}(A)$，我们记 $\ker E := \cap_{Q\in E} Q$。于是，$A$ 可以理解为原始理想空间 $\mathrm{Prim}(A)$ 上一个（通常非常复杂的）C^*-代数场的截面代数，其纤维为 A_P。当然，一般而言，即便在 $\mathrm{Prim}(A)$ 为豪斯多夫空间的情形下，我们也远未能全面理解这种丛结构；在这种情形下，我们总能得到一个连续的 C^*-代数丛。尽管如此，给定一个 C^*-代数 A，作为第一步，理解纤维 A_P的结构至关重要，之后我们才能着手考察该丛的整体结构。

当 A 是 I 型 C^*-代数时，情况最为良好；这意味着 A 的所有纤维 A_P 都是某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的紧算子代数$\mathcal{K}(\mathcal{H})$。除此之外，单非交换环面 A_Θ 是研究最为深入的单 C^*-代数类别之一。回顾一下，给定一个斜对称矩阵 $\Theta \in M_n(\mathbb{R})$，$n$ 维非交换环面 A_Θ 定义为由酉元 $u_1, \dots, u_n$ 生成的普适 C^*-代数，并满足以下关系

$$u_i u_j = \exp(2\pi i \theta_{ij}) u_j u_i.$$

这些代数也可以通过某个群 2-余循环 $\omega \in Z^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{T})$ 实现为扭曲群代数 $A_\omega = C^*(\mathbb{Z}^n, \omega)$。由于 $C^*(\mathbb{Z}^n, \omega)$ 的同构类仅取决于上同调类 $[\omega] \in H^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{T})$，且每个余循环 $\omega \in Z^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{T})$ 都与形如 $\omega_\Theta(k,l) = \exp(2\pi i \Theta k, l) \quad k, l \in \mathbb{Z}^n$ 的余循环上同调等价，其中 Θ 如上所述，因此这给出了相同的 C^*-代数类。非交换环面A_ω 是单的，当且仅当 ω 是全斜的，也就是说，其对称群

$$S_\omega := \{k \in \mathbb{Z}^n : \omega(k,l) = \omega(l,k)\ \forall l \in \mathbb{Z}^n\}$$

2020 数学主题分类。46L55, 46L45, 22D25。关键词与短语。单 C^*-代数、扭曲 C^*-群代数、扭曲交叉积、Mackey-Rieffel-Green机器、连通群。本文由德国研究基金会（DFG）在德国卓越战略 EXC 2044/2 –390685587 资助，项目为明斯特数学：动力学–几何–结构。

是平凡的。我们有 Poguntke 的以下重要定理 [30,定理1 & 定理 2], ，该定理依赖于 Dixmier 和 Pukanszky 关于实代数群及连通群表示论的一些深刻结果：

定理 1.1 (Poguntke)。设 G 是一个局部紧群。如果 G 是连通群或紧生成二步幂零群，那么每个单点集 $\{P\} \in$原始理想空间$(C^*(G))$ 都是局部闭的（在幂零情形下甚至是闭的），并且 $C^*(G)$的简单子商 $C^*(G)_P$ 要么与 $\mathbb{C}$ *Morita* 等价，要么是一个简单非交换环面 A_Θ。

本工作的主要动机是试图更好地理解 Poguntke 的论证，并将其置于一个稍宽泛的视角下。首先，假设 G 是一个连通单连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。应用阿多定理，我们可以将 $\mathfrak{g}$ 嵌入为某个实代数李代数 $\mathfrak{l}$ 的理想，使得 $\mathfrak{n} := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\mathfrak{l},\mathfrak{l}]$（参见 [31, §1]中的讨论）。令 $N = \exp(\mathfrak{n})$ 和 $L = \exp(\mathfrak{l})$ 分别表示与 $\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{l}$对应的单连通李群和连通李群。于是 $N \subseteq G \subseteq L$ 和 $N = [G,G] = [L,L]$。由于 N 和 L局部同构于实代数群，根据 Dixmier 的 [7,§2.1，第 425] 页上的命题可知，$C^*(N)$ 和 $C^*(L)$ 都是 I 型。此外，Pukanszky 的[31, 引理 1.1.3] 表明，共轭作用下的轨道空间 N/L 是可数分离的。根据 Glimm 的 [17, 定理]，这等价于说，$\widehat{\ }$ 作用 $L \curvearrowright N \cong$ 原始理想空间$(C^*(N))$在下文定义 1.3 的意义下是光滑的。

利用 Green 的扭曲作用与扭曲交叉积理论，存在一个扭曲作用 $(\beta,\tau) : (L,N) \curvearrowright C^*(N)$，使得 C^*-群代数 $C^*(L)$ 和 $C^*(G)$ 可以写成一个扭曲交叉积

$$C^*(L) \cong C^*(N) \rtimes_{(\beta,\tau)} L/N \quad \text{and} \quad C^*(G) \cong C^*(N) \rtimes_{(\alpha,\tau)} G/N,$$

其中 α 表示将 β 限制到 G。基本上以此为出发点，Poguntke 对 [30, 定理 2] 的证明由一系列相当技术性且非平凡的约化步骤组成，旨在证明每个本原理想 $P \in \mathrm{Prim}(C^*(G))$ 都“位于” $C^*(G)$ 的一个子商$B = J/I$ 上；该子商与某个紧生成局部紧阿贝尔群 H 以及某个博雷尔 2-余循环 $\omega \in Z^2(H,\mathbb{T})$ 所对应的扭曲群代数 $C^*(H,\omega)$ Morita 等价。关于 $C^*(G)$ 的简单子商的结论，随后由 [30, 定理 1], 推出；该定理涵盖了定理 1.1 的幂零情形，并蕴含 $C^*(H,\omega)$ 的简单商要么是初等的（即某个希尔伯特空间上的紧算子），要么与非交换环面 Morita 等价。

本文希望通过研究由局部紧阿贝尔群的作用 $\alpha : G \curvearrowright A$ G 于 C^*-代数 A 的交叉积的一般情形，来处理上述论证；其中 $A \rtimes_\alpha G$ （在某种意义上）分解为一族子商，且这些子商与阿贝尔群的扭曲群代数 Morita 等价。回顾 [8,第 3 节2] ，我们可以将 C^*-代数 A 中理想 I 的本原理想空间自然地识别为 $\mathrm{Prim}(A)$ 的开子集 $U_I := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : I \not\subseteq P\}$，并将商的本原理想空间 $\mathrm{Prim}(A/I)$ 识别为闭子集 $A_I := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : I \subseteq P\}$。因此，若 $J \subseteq I \subseteq A$ 是两个理想，则 $\mathrm{Prim}(I/J)$ 可以识别为局部闭集[1]

$$Y_{I/J} := \{P \in \mathrm{Prim}(A) : I \not\subseteq P \text{ and } J \subseteq P\} \subseteq \mathrm{Prim}(A).$$

据此，我们在此使用的“分解”概念如下：

定义 1.2. 设 A 是一个 C^*-代数。对于指标集 Λ，令 $(A_\lambda = I_\lambda/J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为 A 的子商族。我们称 A 分解为子商族$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，如果

$$\mathrm{Prim}(A) = \dot{\bigcup_\lambda} \mathrm{Prim}(A_\lambda)$$

[1]也就是说， $Y_{I/J}$ 它在其闭包中是相对开集

是 Prim(A) 的局部闭子集 Prim(A_λ) 的不交并。

我们还回顾一下光滑作用的概念。回忆一下，若 $\alpha: L \curvearrowright A$ 是一个作用，则 L 通过 $(g, P) \mapsto \alpha_g(P)$ 在 Prim(A) 上作用。

定义 1.3. 设 α：$L \curvearrowright A$ 是局部紧群 L 在 C^* 代数 A 上的一个作用。若满足以下条件，我们称该作用是光滑的：

(1) 轨道空间 Prim(A)/L 几乎豪斯多夫[2]，或者 A 可分且 L 第二可数；并且

(2) 对所有 $P \in$ Prim(A)，轨道 $L(P) = \{\alpha_g(L): g \in L\}$ 在 Prim(A) 中是局部闭的，且映射

$$L/L_P \to L(P);\ gL_P \mapsto \alpha_g(P)$$

是一个同胚，其中 $L_P = \{g \in L: \alpha_g(P) = P\}$ 表示 P 的稳定子群。

$\widehat{\ }$回忆一下，根据 [8, 第 4] 章，对于每个 I 型 C^*代数 A，$A \cong$ Prim(A) 总是几乎豪斯多夫的。根据 [17, 定理]，我们知道，若 A 可分且$\widehat{\ }$为 I 型，并且 L 第二可数，则 α：$L \curvearrowright A$ 是光滑的，当且仅当 $A/L\widehat{\ }$是一个 T_0空间；若 A/L 几乎豪斯多夫，这一条件总是成立。此外，由 [35, 定理 27] 可知，紧群在具有几乎豪斯多夫本原理想空间的 C^*代数上的作用，特别是在 I 型 C^*代数上的作用，总是光滑的。

我们的主要结果受 Poguntke 在阿贝尔群 L 的对偶群 $\widehat{L}$ 上的对偶群作用。

定理 1.4。设 β： $L \curvearrowright A$ 是阿贝尔群 L 在一个C^*-代数 A上的作用，并满足以下假设

(i) $A \rtimes_\beta L$ *is type I, and*

(ii) the dual action $\widehat{\beta}: \widehat{L} \curvearrowright A \rtimes_\beta L$ *is smooth.*

进一步设阿贝尔群 G 通过作用 $\alpha = \beta \circ \varphi$： $G \curvearrowright A$作用于 A，其中存在某个连续同态 φ： $G \to L$。那么，存在一个由子商 $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 构成的 $A \rtimes_\alpha G$ 的分解，其指标集为 $\Lambda =$ 原始理想空间$(A)/L$，使得每个B_λ 都与某个阿贝尔局部紧群 H_λ 及某个 2-余循环 $\omega_\lambda \in Z^2(H_\lambda, \mathbb{T})$的扭曲群代数 $C^*(H_\lambda, \omega_\lambda)$ *Morita* 等价。

根据 Baggett 和 Kleppner 关于阿贝尔群扭曲群代数的结构理论（[1]），可知原始理想空间 Prim($C^*(H_\lambda, \omega_\lambda)$) 总是豪斯多夫的，并且 $C^*(H_\lambda, \omega_\lambda)$ 的每个单商本身都同构于某个商群 H_λ/S_λ of H_λ 的扭曲群代数 $C^*(H_\lambda/S_\lambda, \tilde{\omega}_\lambda)$。如果 H_λ/S_λ 是紧生成的，那么 Poguntke 的 [30, 定理 1]（或下文第6节中的结果）表明，$C^*(H_\lambda/S_\lambda, \tilde{\omega}_\lambda)$ 要么与 $\mathbb{C}$ Morita 等价，要么是一个简单非交换环面。

推论 1.5. 设 β： $L \curvearrowright A$ 和 $\alpha = \beta \circ \varphi$： $G \curvearrowright A$ 如定理 *1.4* 中所述。那么每个本原理想 $P \in \mathrm{Prim}(A \rtimes_\alpha G)$ 都是局部闭的，且相应的子商 B_P *of* $A \rtimes_\alpha G$ 与某个阿贝尔群 H_P的简单扭曲群代数 $C^*(H_P, \omega_P)$ *Morita* 等价。此外，若进一步假设 G 是紧生成的且 L 是李群，则 B_P 要么与 $\mathbb{C}$ *Morita* 等价，要么与某个维数为 $l \geq 2$ 的非交换环面 $C^*(\mathbb{Z}^l, \omega_\Theta)$ *Morita* 等价。

我们将看到，如果 A 和$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }A \rtimes_\beta L$ 均为 I 型，且 β：$L \curvearrowright A$ 或对偶作用 β：$L \curvearrowright A \rtimes_\beta L$ 是光滑的，那么定理 1.4 的条件 (i) 和 (ii) 总是成立。

[2]回顾一下，如果每个闭子集 $Z \subseteq Y$ 都包含一个稠密相对开豪斯多夫子集 $U \subseteq Z$，则称拓扑空间 Y 为几乎豪斯多夫。

在扭曲作用的情形下，对于上述讨论中的扭曲作用 $(\beta,\ \tau)\colon\ L/N \curvearrowright C^*(N)$，看来事实恰恰如此。利用每个扭曲作用都 Morita 等价于一个普通作用这一事实，以及定理 1.4 陈述中的所有内容在转到 Morita 等价的（扭曲）作用时都保持不变这一事实，我们可以看出，定理 1.1 可作为定理 1.4 的推论得到，至少当 G 是一个连通单连通李群时如此。

由于紧群 L 在 I 型 C^*-代数上的作用 $\beta\colon L \curvearrowright A$ 总是光滑的，且交叉积 $A \rtimes_\beta L$ 此时也属于 I 型，因此定理 1.4 的另一个推论如下

推论 1.6. 设 $\beta\colon L \curvearrowright A$ 是紧阿贝尔群 L 在 *I* 型 C^*-代数 A 上的作用，并设 $\varphi\colon G \curvearrowright L$ 是从阿贝尔局部紧群 G 到 L 的连续同态。令 $\alpha = \beta \circ \varphi\colon G \curvearrowright A$ 为 β 经由 φ 的拉回。则定理 *1.4* 的结论对 $A \rtimes_\alpha G$ 成立。

请注意，上述推论中的作用 $\alpha\colon\ G \curvearrowright A$ 本身可能远非光滑。事实上，该推论的有趣例子来自无限可数群的包含 $\varphi\colon\ G\,, \to L$；在这种情况下，作用 $\alpha = \beta \circ \varphi$ 永远不会是光滑的!

我们的定理 1.4 证明当然受到 Poguntke 在其论文 [30]中所阐述思想的启发。不过，我们尝试（并希望也成功地）运用 Mackey-Rieffel-Green 机制中的一些一般性概念，避免原证明中一些繁琐且技术性很强的论证；其中部分概念是在 Puguntke 的论文 [30]发表之后才发展起来的。因此，我们希望本文的阐述能有助于更好地理解这一基本结果。

本文的安排如下：第 2 节简要介绍扭曲交叉积以及 Green 不可约性定理的一些有用应用。第 3 节研究如上所述由子商得到的交叉积分解。第 4 节说明如何构造由博雷尔余循环 $\omega \in Z^2(G,\mathbb{T})$ 确定的扭曲群代数 $C^*(G,\omega)$，并解释扭曲群代数与由作用 $\alpha\colon\ G \curvearrowright \mathcal{K}(\mathcal{H})$ 在紧算子代数 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 上得到的交叉积之间的关系。第 5 节给出上文所述定理 1.4 和推论 1.6 的证明。

在第6节中，我们研究 $C^*(G,\ \omega)$ 在 G 为阿贝尔群时的结构。基于 Baggett 和 Kleppner 的工作，我们给出一个证明，说明（众所周知的）结果：$C^*(G,\ \omega)$ 是定义在对称群 S_ω 的$\widehat{\ }$庞加莱对偶 S_ω 上的 C^*-代数连续场，其纤维同构于简单扭曲群代数 $C^*(G/S_\omega,\ \tilde{\omega})$；这里的全斜余循环 $\tilde{\omega} \in Z^2(G/S_\omega,\ \mathbb{T})$ 膨胀为 G 上的 ω。随后，我们给出若干关于由全斜余循环扭曲的群代数 G 结构的化简步骤，并在稳定同构意义下进行研究。特别地，我们证明，紧生成阿贝尔群的简单扭曲群代数要么是初等的，要么与一个非交换环面 Morita 等价。这个结果等价于 Poguntke 的 [30, 定理 1]，我们并不声称这里采用的方法有任何原创性。

在第7节中，我们结合定理 5.4 和第6节的结果得出推论 1.5。随后，我们利用该推论证明，连通群的群代数的简单子商不是紧算子，就是 Morita 等价于维数为 ≥ 2 的简单非交换环面。结合第6节的结果，这便证明了定理 1.1。在最后的第8节中，我们简要研究几乎连通群 G 的情形，即具有余紧连通分支 G_0 的群。我们将看到，其本原理想仍然全都是局部闭的，并且 $C^*(G)$ 的每个非初等简单子商都 Morita 等价于某个交叉积的商 $(C^*(\mathbb{Z}^m,\ \omega) \otimes \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))) \rtimes_\gamma F$，其中 $C^*(\mathbb{Z}^m,\ \omega)$ 是一个简单非交换环面，且 F 有限。此类交叉积的一般结构

仍是个谜，但至少对于作用 $\gamma\colon F \curvearrowright C^*(\mathbb{Z}^m,\ \omega)$，文献中已经取得了一些部分结果（例如，参见 [4, 14, 21, 22]）。

致谢。 本工作的最初动机源于 Caleb Eckhard 关于几乎幂零群的 C^*群代数的简单商的可分类性所作的一场讲座（见 [16]）。鉴于 Poguntke 的研究成果，假定 Caleb 所介绍的某些方法也可能有助于更好地理解几乎连通群的 C^*群代数的简单子商，似乎是很自然的。作为这项研究的起点，我们认为有必要更深入地理解 Poguntke 的研究成果及其证明。对于 Caleb Eckhard 和 Ilan Hirshberg 就这一主题与我们进行的诸多富有启发性且卓有成效的讨论，我们深表感谢。

2. 扭曲交叉积与 Morita 等价

本节将回顾关于局部紧群 G 在 C^*代数 A上的作用 $\alpha\colon\ G \curvearrowright A$ 所产生的交叉积的 Mackey-Rieffel-Green 机制的一些基础知识。关于更完整的论述，请参阅 Phil Green 的原始论文[19], 、Dana Williams 关于交叉积的著作 [36], ，或[5, 第 2]章中的综述。最后一篇参考文献或许最符合本文所采用的方法。

我们先简要回顾 Green [19] 意义下扭曲交叉积的构造。为此，设 G 是一个局部紧群， $N \subseteq G$ 是一个闭正规子群。C*-代数 A 上的一对 $(G,\ N)$ 的（Green-）扭曲作用 $(\alpha,\ \tau)$ 由一个（连续）作用 $\alpha\colon G \curvearrowright A$ 到 $*$-自同构的映射，以及一个严格连续同态 $\tau\colon N \to U\mathcal{M}(A)$ 构成，使得

$$\alpha_g(\tau_n) = \tau_{gng^{-1}} \quad \text{and} \quad \alpha_n(a) = \tau_n a \tau_{n^{-1}} \tag{2.1}$$

对所有 $g \in G,\ n \in N$ 和 $a \in A$，均有。

若 $(\alpha,\ \tau)$ 是上述扭曲作用，且 $(\pi,\ U)$ 是底层系统 $(A,\ G,\ \alpha)$ 在希尔伯特空间（或希尔伯特模）$\mathcal{H}$ 上的非退化协变表示[3]，或者例如取值于某个 C^*-代数 C 的乘子代数 $\mathcal{M}(C)$ 中，那么若对所有 $n \in N$ 均有：我们称 $(\pi,\ U)$ 保持扭曲 τ

$$\pi(\tau_n) = U_n. \tag{2.2}$$

于是我们称 (π, U) 是扭曲系统 (A, G, N, α, τ) 的 协变表示。注意，由于我们要求 π 是非退化的，它可以唯一地扩张到 $U\mathcal{M}(A)$，因此该等式是有意义的。

于是，(Green-) 扭曲交叉积 $A \rtimes_{(\alpha,\tau)} G/N$ 可以定义为普通交叉积 $A \rtimes_\alpha G$ 关于扭曲理想的商

$$I_\tau = \cap\{\ker(\pi \rtimes U) : (\pi, U) \text{ preserves } \tau\},$$

其中 $\pi \rtimes U$ 表示 (π, U) 的通常积分形式。

构造扭曲交叉积的另一种可能方法是考虑空间

$$C_c(G, A, \tau) := \left\{ f : G \to A : \begin{array}{c} f \text{ cont., } f(ng) = f(g)\tau_{n^{-1}}\ \forall n \in N, g \in G, \\ \text{and } (gN \mapsto \|f(g)\|) \in C_c(G/N) \end{array} \right\} \tag{2.3}$$

配备了卷积和对合，其定义如下

$$f_1 * f_2(g) = \int_{G/N} f_1(h)\alpha_h(f_2(h^{-1}g))\, d(hN) \quad \text{and} \quad f^*(g) = \Delta_{G/N}(g^{-1})\alpha_g(f(g^{-1})^*), \tag{2.4}$$

[3]因此，对所有 $g \in G, a \in A$，它满足等式 $\pi(\alpha_g) = U_g \pi(a) U_g^*$。

对于 f, f_1, $f_2 \in C_c(G, A, \tau)$ 以及 $g \in G$。若 (π, U) 是 (A, G, N, α, τ) 的协变表示，我们考虑其积分形式

$$\pi \rtimes U(f) := \int_{G/N} \pi(f(g))U_g \, dgN, \quad f \in C_c(G, A, \tau)$$

(π, U) 的，并且 $A \rtimes_{(\alpha,\tau)} G/N$ 也可以视为 $C_c(G, A, \tau)$ 关于.....的完备化

$$\|f\| := \sup\{\|\pi \rtimes U(f)\| : (\pi, U) \text{ a covariant rep of } (A, G, N, \alpha, \tau)\}.$$

对 (G, N) 的扭曲作用应被视为商群 G/N 的普通作用的推广，这也解释了我们对交叉积的记号。为了对此有所了解，我们先来看 $N = G$ 的情形。若 (α, τ) : $(N, N) \curvearrowright A$ 是一个扭曲作用，则我们通过以下方式得到 $A \rtimes_{(\alpha,\tau)} N/N \cong A$:

$$A \to A \rtimes_{(\alpha,\tau)} N/N; a \mapsto (n \mapsto a\tau_{n^{-1}}) \in C_c(N, A, \tau).$$

因此，群对 (N, N) 的扭曲作用表现得如同平凡群 $\{e\}$ 的作用。反过来，下面的例子表明，每个 G/N 的作用都可以按一种典范方式视为 (G, N) 的扭曲作用:

例 2.5. [(参见 [11, 第 176] 页)] 设 $\alpha : G/N \curvearrowright A$ 是商群 G/N 在 A 上的普通作用。令 $\tilde{\alpha} : G \curvearrowright A$ 表示由 $\tilde{\alpha} := \alpha \circ q$ 定义的 α 的膨胀，其中 q : $G \to G/N$ 表示商映射。此外，令 1_N: $N \to U\mathbf{M}(A)$; $n \mapsto 1_{\mathcal{M}(A)}$ 表示平凡同态。则 $(\tilde{\alpha}, 1_N)$ 是 (G, N) 在 A 上的扭曲作用，并且 $A \rtimes_{(\tilde{\alpha},1_N)} G/N \cong A \rtimes_\alpha G/N$。事实上，直接可验证 $C_c(G, A, 1_N) \cong C_c(G/N, A)$，因为 (2.4) 中关于 $\tau = 1_N$ 的条件 $f \in C_c(G, A, \tau)$ 蕴含 f 在 N-陪集上为常值。此外，(π, U) 是 $(A, G, \tilde{\alpha})$ 的协变表示，若且唯若它如 (2.2) 中那样保持 1_N，即 U 可分解为 G/N 的一个表示 U ，因此对应于 $(A, G/N, \alpha)$ 的协变表示 (π, U)（反之亦然）。结论由这些构造立即得出。

不过，Green（[19]）提出以下构造，正是引入上述扭曲作用和交叉积的动因:

例 2.6。 [（参见 [19, 命题 1]）] 设 $\beta : G \curvearrowright B$ 是 G 在 C^*-代数 B 上的任意普通作用，并令 N 为 G的闭正规子群。我们希望将交叉积 $B \rtimes_\beta G$写成迭代交叉积（$B \rtimes_\beta N$）$\rtimes_{\tilde{\beta}} G/N$。若 $G = N \rtimes H$是半直积（因此 $H \cong G/N$），这完全可行。但对于非分裂扩张，在普通作用和交叉积的框架内无法做到这一点，因为一般而言，商群 G/N在 $B \rtimes_\beta N$上不存在定义良好的作用。不过，我们确实有一个定义良好的扭曲作用（β, σ），即对 (G, N) 在 $B \rtimes_\beta N$ 上的作用；在稠密子代数C_c（N, B）上，其定义如下:

$$(2.7) \quad \big(\tilde{\beta}_g(f)\big)(n) = \frac{\Delta_G(g)}{\Delta_{G/N}(g)}\beta_g(f(g^{-1}ng)) \quad \text{and} \quad \big(\sigma_m f\big)(n) = \beta_m(f(m^{-1}n)).$$

对于 $f \in C_c(N, B)$ 和 $m, n \in N$。映射

$$\Phi : C_c(G, B) \mapsto C_c(G, C_c(N, B), \sigma), \quad \Phi(f)(g)(n) = \frac{\Delta_G(g)}{\Delta_{G/N}(g)} f(ng)$$

然后扩展为一个同构

$$B \rtimes_\beta G \cong (B \rtimes_\beta N) \rtimes_{(\tilde{\beta},\sigma)} G/N.$$

类似地，若我们从一个扭曲作用 $(\beta,\tau):(G,M)\curvearrowright B$开始，并且 N是 G 的正规子群，使得 $M\subset N$，那么我们得到一个~$(\beta,\sigma):\ G/N\curvearrowright B\rtimes_{(\beta,\tau)}N/M$ 的扭曲作用，使得

$$B\rtimes_{(\beta,\tau)}G/M\cong\left(B\rtimes_{(\beta,\tau)}N/M\right)\rtimes_{(\tilde{\beta},\sigma)}G/N,$$

在上述对分解作用的描述中，我们可以将 $C_c(N,\ B)$ 替换为 $C_c(N,\ B,\ \tau)$。

下面讨论诱导 C^*-代数和 Green 不可约性定理。设 H 是局部紧群 G 的闭子群，且 $\beta\colon H\curvearrowright B$ 是 H 在 C*-代数 B 上通过 $*$-自同构给出的作用。那么，诱导的 G-C*-代数 $\mathrm{Ind}_H^G(B,\ \beta)$（或者在 β 已知的情况下，简记为 $\mathrm{Ind}_H^G B$）定义为由 B-值函数构成的集合

(2.8)
$$\mathrm{Ind}_H^G(B,\beta)=\left\{f:G\to B:\begin{array}{c}f\text{ continuous, }f(gh)=\beta_{h^{-1}}(f(g))\ \forall g\in G,h\in H,\\ \text{and }(gH\mapsto\|f(g)\|)\text{ vanishes at }\infty\text{ on }G/H.\end{array}\right\}$$

赋予逐点乘法、对合以及上确界范数。 G 在 $\mathrm{Ind}_H^G B$ 上的诱导作用 定义为

$$(\mathrm{Ind}\,\beta_g(f)(l)=f(g^{-1}l)\quad\forall g,l\in G. \tag{2.9}$$

更一般地，若 $N\subseteq G$ 是包含于 H 中的闭正规子群，且 $\sigma\colon N\to U\mathcal{M}(B)$ 是 β 的一个扭曲，则令 $(\mathrm{Ind}\ \sigma(n)f)(g)=f(n^{-1}g)\ (=\sigma_{g^{-1}ng}f(g))$，从而得到一个扭曲 $\mathrm{Ind}\ \sigma\colon N\to U\mathcal{M}(\mathrm{Ind}_H^G B)$，它对应于 $\mathrm{Ind}\ \beta$。[4]由此得到诱导扭曲作用 $(\mathrm{Ind}\ \beta,\ \mathrm{Ind}\ \sigma):(G,\ N)\curvearrowright\mathrm{Ind}_H^G B$。

~注记 2.10. 若 $\beta\colon H\curvearrowright B$ 可扩展为作用 $\beta\colon G\curvearrowright B$，则诱导系统 $(\mathrm{Ind}_H^G B,G,\mathrm{Ind}\ \beta)$ 同构于系统 $(C_0(G/H)\otimes B,G,\mathrm{lt}\otimes\tilde{\beta})$，其中 $\mathrm{lt}:\ G\curvearrowright C_0(G/H)$ 是由左平移给出的作用。该同构由下式给出

$$\Phi:C_0(G/H,B)\to\mathrm{Ind}_H^G B;\quad\Phi(f)(g)=\tilde{\beta}_{g^{-1}}(f(gH)).$$

若 $\sigma\colon N\to U\mathcal{M}(B)$ 是 β 的扭曲，则在 $C_0(G/H,B)=C_0(G/H)\otimes B$ 上实现的诱导扭曲简单地由 $1\otimes\sigma$ 给出。

注意，本原理想空间 $\mathrm{Prim}(\mathrm{Ind}_H^G B)$ 可识别为集合

$$G\times_H\mathrm{Prim}(B):=(G\times\mathrm{Prim}(B))/H$$

其在 $\mathrm{Prim}(B)$ 上的作用 $H\curvearrowright G\times$ 由 $h\cdot(g,P)=(gh^{-1},\beta_h(B))$ 给出。与等价类 $[g,P]$ 对应的 $\mathrm{Ind}_H^G B$ 的本原理想 P_g 为

$$P_g:=\{f\in\mathrm{Ind}_H^G B:f(g)\in P\}.$$

注意到 φ：原始理想空间$(\mathrm{Ind}_H^G B)\to G/H;\varphi(P_g)=gH$ 是一个连续的 G-等变映射。这个观察引出了诱导代数的以下一般刻画：

定理 2.11 ([9, 定理])。设 $\alpha:\ G\curvearrowright A$ 是局部紧群 G 在 C*-代数 A 上的作用，且 H 是 G 的闭子群。那么系统(A,G,α) 等变同构于某个作用 $\beta:\ H\curvearrowright B$ 的诱导系统 $(\mathrm{Ind}_H^G B,G,\mathrm{Ind}\ \beta)$，当且仅当存在一个 G-等变连续映射 $\varphi:\mathrm{Prim}(A)\to G/H$。

[4]注意到 $\mathrm{Ind}\,\sigma_n:g\mapsto\sigma_{g^{-1}ng}$ 是一个函数 $G\to U\mathcal{M}(B)$，满足条件 $\mathrm{Ind}\ \sigma_n(gh)=\beta_{h^{-1}}(\mathrm{Ind}\ \sigma(g))$，对所有 $g\in G,h\in H$ 均成立，因此通过逐点乘法定义了$U\mathcal{M}(\mathrm{Ind}_H^G B))$ 中的一个元素。

此外，若 $\tau\colon N \to UM(A)$ 是 α 的一个扭曲，且满足 $N \subseteq H$，则存在一个扭曲 $\sigma\colon N \to UM(B)$，使得 (A, G, N, α, τ) 同构于诱导扭曲系统 $(\operatorname{Ind}_H^G B, G, \operatorname{Ind}\beta, \operatorname{Ind}\sigma)$。

事实上，若 $\varphi\colon \operatorname{Prim}(A) \to G/H$ 如定理所述，我们可以选取 $B := A/I$，使得 $I := \cap\{P \in \operatorname{Prim}(A) : \varphi(P) = eH\}$。这是 A 的一个 H-不变商，因此将 α 限制到 H 上，会导出一个良定义的作用 $\beta\colon H \curvearrowright B$。同构 $\Phi\colon A \to \operatorname{Ind}_H^G B$ 则通过将元素 $a \in A$ 映射到函数 $f_a \in \operatorname{Ind}_H^G B$ 给出，其中该函数定义为

$$f_a(g) = (\alpha_{g^{-1}}(a) + I) \in B.$$

定理 [9, 表明，对于未扭曲系统，这是一个同构。现在，若将 τ_n 在商映射 $A \to A/I = B$ 延拓到 $\mathcal{M}(A)$ 后的像定义为 σ_n，则对所有 $a \in A$，我们得到

$$\Phi(f_{\tau_n a})(g) = (\alpha_{g^{-1}}(\tau_n a) + I) = \big(\big(\tau_{g^{-1}ng}\alpha_{g^{-1}}(a)\big) + I\big) = \big(\operatorname{Ind}\sigma_n \Phi(f)\big)(g),$$

因此我们看到，Φ 也保持扭曲不变。

采用这些记号，Green 不可约性定理（见定理 [19, 17 和定理 18]）可表述如下：

定理 2.12 (Green)。设 H 是 G 的闭子群，并设 $\beta\colon H \curvearrowright B$ 是一个作用。则 $B \rtimes_\beta H$ 与 $\operatorname{Ind}_H^G B \rtimes_{\operatorname{Ind}\beta} G$ *Morita* 等价。对于诱导扭曲作用 $(\operatorname{Ind}\beta, \operatorname{Ind}\sigma)$：$(G, N) \curvearrowright \operatorname{Ind}_H^G B$，也有类似结果。

尽管上述定理已由（事实上也等价于）[19,定理 18], 涵盖，但对我们而言，有必要回顾一下在上述定理情形下更直接的 $\operatorname{Ind}_H^G B \rtimes_{\operatorname{Ind}\beta} G - B \rtimes_\beta H$ 等价双模构造，正如 [36, 推论 4.17] 中所给出的那样。在那里，它被实现为 $C_c(G, \operatorname{Ind}_H^G B) - C_c(H, B)$ 双模 $\mathcal{X}_0 := C_c(G, B)$ 的完备化 $\mathcal{X}_H^G(B)$，其内积和作用由以下公式给出

$$\begin{aligned}
f \cdot \xi(g) &= \int_G f(s,g)\xi(s^{-1}g)\Delta_G(s)^{1/2}\, ds \\
\xi \cdot \varphi(g) &= \int_H \beta_{h^{-1}}\big(\xi(gh^{-1})\varphi(h)\big)\Delta_H(h)^{-1/2}\, dh \\
{}_{C_0(G,\operatorname{Ind}_H^G B)}\langle \xi, \eta\rangle(g,s) &= \Delta_G(g)^{-1/2}\int_H \beta_h\big(\xi(sh)\eta(g^{-1}sh)^*\big)\, dh \\
\langle \xi, \eta\rangle_{C_c(H,B)}(h) &= \Delta_H(h)^{-1/2}\int_G \xi(g^{-1})^*\beta_h(\eta(g^{-1}h))\, dg
\end{aligned} \tag{2.13}$$

对于 $f \in C_c(G, \operatorname{Ind}_H^G B)$ $\varphi \in C_c(H, B)$，以及 $\xi, \eta \in \mathcal{X}_0$。这就为未扭曲情形提供了所需的 Morita 等价。在扭曲情形，只需验证：$B \rtimes_\beta H$ 的协变表示 $\rho \times V$ 保持扭曲 σ，当且仅当 $\operatorname{Ind}_{\mathcal{X}_H^G(B)}(\rho \times V)$ 对 $\operatorname{Ind}_H^G B \rtimes_{\operatorname{Ind}\beta} G$ 的诱导表示保持扭曲 $\operatorname{Ind}\sigma$。我们把验证留给有兴趣的读者作为练习。

注 2.14。请注意，Green 最初的印模定理（[19,定理 17]）针对的是特殊情形：$\beta\colon H \curvearrowright B$ 是作用β：$G \curvearrowright B$的限制；也就是说，$(\operatorname{Ind}_H^G B, \operatorname{Ind}\beta)$ 与 $(C_0(G/H) \otimes B, \operatorname{lt} \otimes \beta)$ 等变同构（见上文注 2.10）。由此得到的 $C_0(G/H, B) \rtimes_{\operatorname{lt}\otimes\beta} G - B \rtimes_\beta H$等价双模 $\mathcal{X}_H^G(B)$ 为定义从 H 到 G的协变表示诱导提供了一种方便的方法：给定 $B \rtimes_\beta H$的一个非退化表示 $\rho \rtimes V$，我们可以先通过等价

双模 $\mathcal{X}_H^G(B)$（Rieffel 在 [33]中引入），然后将其与
$*$-同态

$$\iota_B \rtimes G : B \rtimes_\beta G \to \mathcal{M}((C_0(G/H, B) \rtimes_{\mathrm{lt}\otimes\beta} G),$$

其中，$\iota_B : B \to \mathcal{M}(C_0(G/H, B))$ 表示由常值函数给出的典范嵌入。简言之，诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G(\rho \rtimes V)$ 定义为

$$\mathrm{Ind}_H^G(\rho \rtimes V) := \left(\mathrm{Ind}^{\mathcal{X}_H^G(B)}(\rho \times V)\right) \circ (\iota_B \rtimes G).$$

扭曲情形下也完全相同。[10] 证明了，这一定义与 Takesaki 借助 Mackey 和 Blattner 的构造给出的较经典定义一致。从 Green 的描述不难推出，表示的诱导是连续的，也就是说，它保留 Fell 意义下表示的弱包含。

对于普通作用及其交叉积，几乎所有可以证明的结果，同样也可以对扭曲作用及其交叉积加以证明。然而，由于需要始终处理扭曲，许多表述和证明会变得稍显繁琐。Packer-Raeburn 稳定化定理 [28, 定理 3.4] 提供了一种巧妙的解决方法：当 G 第二可数且 A 可分时，该定理给出一个普通作用 $\beta : G/N \curvearrowright A \otimes \mathcal{K}$，$\mathcal{K} = \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$，使得

$$(A \otimes \mathcal{K}) \rtimes_\beta G \cong \left(A \rtimes_{(\alpha,\tau)} G/N\right) \otimes \mathcal{K}.$$

略作修改后的版本见 [11]，无需任何可分离性假设即可成立，并且具有更优的函子性条件。我们需要

定义 2.15 ([11])**：** 我们称两个扭曲作用 (α, τ)：$G/N \curvearrowright A$ 和 (β, σ)：$G/N \curvearrowright B$) 为 *Morita* 等价，如果存在一个 $A-B$ 等价双模$\mathcal{X}$ 以及一个作用 γ：$G \curvearrowright \mathcal{X}$，使得

(1) $(\mathcal{X}\ \gamma)$ 在以下意义下诱导出 $(A, \alpha) - (B, \beta)$ Morita 等价：

$$ {}_A\langle \gamma_g(x), \gamma_g(y)\rangle = \alpha_g({}_A\langle x, y\rangle), \quad \langle \gamma_g(x), \gamma_g(y)\rangle_B = \beta_g(\langle x, y\rangle_B)$$
$$\text{and } \gamma_g(ax) = \alpha_g(a)\gamma_g(x), \quad \gamma_g(xb) = \gamma_g(x)\beta_g(b)$$

对于所有 $x, y \in \mathcal{X}$ $a \in A$，$b \in B$ 以及 $g \in G$。

(2) $\tau_n x = \gamma_n(x)\sigma_n$ 对于所有 $n \in N$，$x \in \mathcal{X}$。

˜如果 (α, τ)：$(G, N) \curvearrowright A$与一个由普通作用 β：$G/N \curvearrowright B$膨胀而来的扭曲作用 (β，1_N)：$(G, N) \curvearrowright B$Morita 等价，我们将称 (α, τ) 与普通作用 β Morita 等价。

注2.16. (1) 若 ($\gamma\mathcal{X}$) 是扭曲作用 $(\alpha, \tau) : (G, N) \curvearrowright A$和 $(\beta, \sigma) : (G, N) \curvearrowright B$的 Morita 等价，则我们可在连接代数上得到一个扭曲作用

$$(\eta, \mu) := \left(\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma^* & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}\right) : (G, N) \curvearrowright L(\mathcal{X})$$

于 $L(\mathcal{X}) := \begin{pmatrix} A & \mathcal{X} \\ \mathcal{X}^* & B \end{pmatrix}$。反之，任何符合上述矩阵形式、从而在 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 上给出 (G, N) 的扭曲作用的作用 γ：$G \curvearrowright \mathcal{X}$，都会导出一个 $(\alpha, \tau) - (\beta, \sigma)$ Morita 等价。交叉积 $L(\mathcal{X}) \rtimes_{(\eta,\mu)} G/N$随之自然分解为一个连接代数

$$L(\mathcal{X}) \rtimes_{(\eta,\mu)} G/N =: \begin{pmatrix} A \rtimes_{(\alpha,\tau)} G/N & \mathcal{X} \rtimes_\gamma G/N \\ \mathcal{X}^* \rtimes_{\gamma^*} G/N & B \rtimes_{(\beta,\sigma)} G/N \end{pmatrix}$$

对应于一个 $A \rtimes_{(\alpha,\tau)} G/N - B \rtimes_{(\beta,\sigma)} G/N$等价双模 $\mathcal{X} \rtimes_\gamma G/N$。因此，Morita 等价的扭曲作用具有 Morita 等价的扭曲交叉积。

(2) 回顾 [33]，通过 $\mathcal{X}$ 诱导，任意 $A - B$ Morita 等价$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\mathcal{X}$ 都会在对偶空间之间诱导一个同胚 $A \cong B$，并在本原理想空间 $\mathrm{Prim}(A) \cong \mathrm{Prim}(B)$ 之间诱导一个同胚；这些空间赋有 Jacobson

拓扑。若 $(\mathcal{X}\ \gamma)$ 是扭曲作用 $(\alpha,\tau):(G,N)\curvearrowright A$ 与 $(\beta,\sigma):(G,N)\curvearrowright B$ 之间的等变 Morita 等价，那么这些同胚是 G-等变的。

(3) 若 G/N 是阿贝尔群，则对偶作用 $(\alpha,\ \tau):$ $G/N\curvearrowright A\rtimes_{(\alpha,\tau)}G/N$ 定义为

$$\widehat{(\alpha,\tau)}_\chi(f)=\bar{\chi}\cdot f \tag{2.17}$$

对于 $\chi\in G/N$ 和 $f\in C_c(G,\ A,\ \tau)$。现在，若 $(\alpha,\ \tau)$ 通过 $(\mathcal{X}\ \gamma)$ 与 $(\beta,\ \sigma)$ Morita 等价，则 G/N 在

$$L(\mathcal{X})\rtimes_{(\eta,\mu)}G/N=:\begin{pmatrix}A\rtimes_{(\alpha,\tau)}G/N & \mathcal{X}\rtimes_\gamma G/N\\ \mathcal{X}^*\rtimes_{\gamma^*}G/N & B\rtimes_{(\beta,\sigma)}G/N\end{pmatrix}$$

限制为对偶作用 $\widehat{\gamma}:G/N\curvearrowright\mathcal{X}\rtimes_\gamma G/N$，实现了 对偶作用 $(\alpha,\ \tau)$ 与 $(\beta,\ \sigma)$ 之间的 Morita 等价。

上述观察表明，知道每个扭曲作用 $(\alpha,\ \tau):(G,\ N)\curvearrowright A$ 都与某个普通作用 β: $G/N\curvearrowright B$ Morita 等价，这一点非常有帮助。这样一来，在所需结果仅取决于 Morita 等价类的所有情形下（例如本文要讨论的大多数结果），我们便可以转而使用普通作用和交叉积。

定理 2.18 ([11])。 设 $(\alpha,\tau):G/N\curvearrowright A$ 是 (G,N) 在 A 上的扭曲作用。考虑扭曲交叉积

$$B:=(C_0(G/N)\otimes A)\rtimes_{(\mathrm{lt}\otimes\alpha,1\otimes\tau)}G/N,$$

其中 $\mathrm{lt}:\ G\curvearrowright C_0(G/N)$ 表示左平移作用。接着，右平移作用 $\mathrm{rt}:\ G/N\curvearrowright C_0(G/N)$ 与 $(\mathrm{lt}\otimes\alpha\otimes\mathrm{lt}\ 1\otimes\tau)$ 可交换，因此诱导出作用 $\beta:\ G/N\curvearrowright B$。于是 (α,τ) 与 β ***Morita*** 等价。

回顾一下，上述代数 B 是从 $A\rtimes_{(\alpha,\tau)}N/N\cong A$ 到 $A\rtimes_{(\alpha,\tau)}G/N$ 诱导所对应的 Green 的 imprimitivity 代数。于是，Green 的 imprimitivity 定理给出一个 $B-A$ 等价双模 $\mathcal{X}_N^G(A)$，而上述定理中的 Morita 等价由一个适当的作用 γ: $G\curvearrowright\mathcal{X}_N^G(A)$ 给出。详情请参见[11,定理 1] 。

例 2.19。 若 G/N 是阿贝尔的，我们可以考虑对偶作用 $(\alpha,\ \tau)$: $G/N\curvearrowright A\rtimes_{(\alpha,\tau)}G/N$，如上面的注 2.16 所述。再次取对偶后，我们可以考虑双重对偶作用

$$\widehat{\widehat{(\alpha,\tau)}}:G/N\curvearrowright A\rtimes_{(\alpha,\tau)}G/N\rtimes_{\widehat{(\alpha,\tau)}}\widehat{G/N}.$$

[12] 中证明了该作用确实同构于定理 2.18 中的作用 $\beta:G/N\curvearrowright B$，因此我们看到 $(\alpha,\ \tau)$ 与其双重对偶作用 Morita 等价。注意，对于阿贝尔群 G 的普通作用 $\alpha:$ $G\curvearrowright A$，$\widehat{\ }$Morita 等价 $\alpha\sim_M\widehat{\alpha}$ 是 Takesaki-Takai 对偶定理的直接推论；该定理将 $A\rtimes_\alpha G\rtimes_{\widehat{\alpha}}\widehat{G}$ 与 $A\otimes\mathcal{K}(L^2(G))$ 识别，并将 $\widehat{\widehat{\alpha}}$ 与 $\alpha\otimes\mathrm{Ad}\rho$ 识别，其中 $\rho:$ $G\to\mathcal{U}(L^2(G))$ 表示右正则表示。

例 2.20。 设 H 是阿贝尔局部紧群 G 的闭子群，并设 $\alpha:\ H\curvearrowright A$ 是 H 在 C^*-代数 A 上的作用。则对偶作用 $\widehat{\alpha}:\ H\curvearrowright A\rtimes_\alpha H$ 的膨胀 $\widehat{\ }\mathrm{Inf}\ \widehat{\alpha}:$ $G\curvearrowright A\rtimes_\alpha H$ （由 $\mathrm{Inf}\ \widehat{\alpha}_\chi=\widehat{\alpha}_{\chi|_H}$ 给出）与对偶作用 $\widehat{\ }\mathrm{Ind}\ \alpha:\ \widehat{G}\curvearrowright\mathrm{Ind}_H^G A\rtimes_{\mathrm{Ind}\,\alpha}G$ Morita 等价。事实上，由（2.13）中的公式很容易推出，作用 $\gamma:\ \widehat{G}\curvearrowright\mathcal{X}_H^G(A)$

$\widehat{G}$在 Green 的 $\mathrm{Ind}_H^G A \rtimes_{\mathrm{Ind}\,\alpha} G - A \rtimes_\alpha H$等价双模 $\mathcal{X}_H^G(A)$ 上的作用，在稠密子模$\mathcal{X}_0$ 上由下式给出：

$$\gamma_\chi(\xi)(g) = \overline{\chi(g)}\xi(g), \quad \xi \in \mathcal{X}_0 \tag{2.21}$$

实现了所需的作用等价。

3. 子商分解

回顾引言中的内容：子集 Y属于 C^*-代数 A 的本原理想空间 $\mathrm{Prim}(A)$，当且仅当存在 A的闭理想 $J \subseteq I \subseteq A$ ，使得 $Y \cong \mathrm{Prim}(I/J)$。理想 I 和 J 由 Y 唯一确定，具体如下：

$$J = \ker(Y) \quad \text{and} \quad I = \ker(\overline{Y} \setminus Y),$$

于是我们记作 $A_Y := I/J$。不可约 $*$-表示 A 的等价类空间 A 中的局部$\widehat{\ }$闭子集与 A的子商之间也存在类似的对应关系。为后文所用，我们需要以下命题，这对专家而言当然是众所周知的。我们将简单的证明留作读者练习。

命题 3.1. 设 X 为一个拓扑空间，且设 $Z \subseteq Y \subseteq X$。若 Z 在 X中局部闭，则它在 Y 中局部闭。反之，若 Y 在 X 中局部闭，且 Z在 Y中局部闭，则 Z 在 X中局部闭。

此外，若 $Z \subseteq Y$是某个 C^*-代数A 的 $X = \mathrm{Prim}(A)$ 中的局部闭子集，且 I_Z, J_Z 和 I_Y, J_Y 是 A 中的闭理想，使得

$$Z \cong \mathrm{Prim}(I_Z/J_Z) \quad \textit{and} \quad Y \cong \mathrm{Prim}(I_Y/J_Y),$$

并且 I_Z^B, J_Z^B 是 $B := I_Y/J_Y$ 中对应于 $Z \subseteq Y = \mathrm{Prim}(B)$ 的理想，那么 $I_Z^B/J_Z^B \cong I_Z/J_Z$。

接下来，我们要研究由代数 A 的 G-不变分解所产生的交叉积 $A \rtimes_\alpha G$ 的子商分解。我们将注意力限制在非扭曲交叉积的情形，并指出，借助定理 2.18，扭曲情形可以很容易地从非扭曲情形得到。

若 $\alpha\colon G \curvearrowright A$ 是 C^*-代数 A 上 G 的一个作用，且 $Y \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ 是局部闭且 G-等变的，那么理想 $J = \ker Y$ 和 $I = \ker(Y \setminus Y)$ 也都是 G-不变的。因此，作用 α 通过限制诱导出作用 $\alpha^J\colon G \curvearrowright J$ 和 $\alpha^I\colon G \curvearrowright I$，进而在商 $A_Y = I/J$ 上诱导出作用 $\alpha^Y\colon G \curvearrowright A_Y$（若不致混淆，我们通常简写为 $\alpha\colon G \curvearrowright A_Y$）。由于取全交叉积会将 G-代数的短正合列映为 C^*-代数的短正合列，我们可知

$$A_Y \rtimes_{\alpha^Y} G \cong \big(I \rtimes_{\alpha^I} G\big)/\big(J \rtimes_{\alpha^J} G\big)$$

是 $A \rtimes_\alpha G$ 的子商，因此我们可以得出结论：$\mathrm{Prim}\left(A_Y \rtimes_{\alpha^Y} G\right)$ 是 $\mathrm{Prim}(A \rtimes_\alpha G)$ 的局部闭子集。以下命题的证明仿照 [19, 推论 19]。由定理 2.18 可轻易得知，类似的结果对扭曲交叉积同样成立。

命题 *3.2*。设 $\alpha : G \curvearrowright A$ 是局部紧群 G 在 C^*-代数 A 上的作用，且 ϕ*: Prim(A)* $\to X$ 是映到几乎豪斯多夫拓扑空间 X 上的 G- 不变连续开映射。那么，对于所有 $x \in X$， $\phi^{-1}(x)$ 是 *Prim(A)* 中的局部闭集；如果 $A_x := A_{\phi^{-1}(x)}$ 是与 $\phi^{-1}(x)$ 对应的 A 的子商，那么 G 在 A 上的作用实现了作用 $\alpha_x : G \curvearrowright A_x$ ，使得 $(A_x)_{x\in X}$ 是 A 的分解，而 $(A_x \rtimes_{\alpha_x} G)_{x\in X}$ 是由子商构成的 $A \rtimes_\alpha G$ 的分解。

证明。由于 Prim(A) 是局部闭集 $\phi^{-1}(x)$（$x \in X$）的不交并，关于 $(A_x)_{x\in X}$ 的断言是显然的。为证明 $(A_x \rtimes_{\alpha_x} G)_{x\in X}$ 是 $A \rtimes_\alpha G$ 的分解，我们需要证明，对于每个原始理想 $Q \in \mathrm{Prim}(A \rtimes_\alpha G)$，存在唯一的 $x \in X$，使得 Q 属于 $\mathrm{Prim}(A_x \rtimes_{\alpha_x} G)$。

因此，固定 $Q \in \mathrm{Prim}(A \rtimes_\alpha G)$，并令 $\pi \rtimes U$ 为 $A \rtimes_\alpha G$ 的一个不可约表示，使得 $Q = \ker(\pi \rtimes U)$。对于每个 $x \in X$，令 $J_x \subseteq I_x \subseteq A$ 为满足 $A_x = I_x/J_x$的闭理想。由于核 $\ker\pi \subseteq A$ 仅取决于 Q，而不取决于所选表示 $\pi \rtimes U$（例如，参见 [5, 命题 2.7.4]），只需证明存在唯一的 $x \in X$，使得 $\pi(J_x) = \{0\}$，但$\pi(I_x) \neq \{0\}$。

首先，我们希望从 A 转到 A/J，其中 $J := \ker\pi$，以便在不失一般性的前提下假设 $\pi : A \to \mathrm{B}(\mathrm{H}_\pi)$ 在 A上是忠实的。事实上，由于 Prim(A/J) 是 Prim(A) 中一个闭的 G-不变子集，并且 $\phi : \mathrm{Prim}(A) \to X$是 G-不变、开且连续的，容易验证 $Y := \phi(\mathrm{Prim}(A/J))$ 在 X 中是闭的，而且限制 $\phi : \mathrm{Prim}(A/J) \to Y$ 满足该定理的所有假设。于是我们有 $Q \in \mathrm{Prim}(A/J \rtimes_\alpha G)$，并且对所有$x \in X$，$(A/J)_x = (I_x + J)/(J_x + J)$。由于 $\pi(J_x) = \{0\}$ 当且仅当 $\pi(J_x + J) = \{0\}$，且 $\pi(I_x) \neq \{0\}$ 当且仅当 $\pi(I_x + J) \neq \{0\}$，因此可知，所需结论可从 A/J 传递到 A。

因此，现在假设 π 是忠实的。那么，对于每个 G-不变的非零理想$I \subseteq A$，$\pi \rtimes U$ 在 $A \rtimes_\alpha G$的理想 $I \rtimes_\alpha G$ 上的限制是不可约（因而非退化）的表示。因此，π 在 I 上的限制也非退化。

接下来我们证明，存在一个元素 $x \in X$，使得$\{x\}$ 在 X中是开且稠密的。事实上，由于 X 几乎豪斯多夫，它包含一个稠密的豪斯多夫开子集 $U \subseteq X$。如果 U 包含两个不同的点 $x_1 \neq x_2$，那么还存在 X中的两个非空不相交开子集 U_1, U_2。令 I_{U_1} 和 I_{U_2} 分别表示 A 中对应于Prim(A)里的不相交开集 $\phi^{-1}(U_1)$和 $\phi^{-1}(U_2)$的理想。于是可得 $I_{U_1} \cdot I_{U_2} = \{0\}$。但是，由于 I_{U_1} 和 I_{U_2} 都是非零的 G-不变理想，因此可得

$$\{0\} = \pi(I_{U_1} \cdot I_{U_2})\mathcal{H}_\pi = \pi(I_{U_1})\big(\pi(I_{U_2})\mathcal{H}_\pi\big) = \pi(I_{U_1})\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\pi,$$

一个矛盾。

因此，设 $x \in X$ 如上所述。那么，$\phi^{-1}(x)$ 在 Prim(A) 中也稠密，因此$\{P : \phi(P) = x\}$ 必为$\{0\}$。另一方面，若 $x \neq y \in X$，则开集 $\phi^{-1}(x)$ 包含于 $\phi^{-1}(y)$ 的补集中，因此 $\phi^{-1}(y)$ 在 Prim(A) 中不稠密。于是 $I_y = \ker\big(\phi^{-1}(y)\big) \neq \{0\}$。由此可见，$x \in X$ 是满足$\{0\} = I_x$的唯一元素。由于 π 是忠实的，且 J_x 严格大于 $I_x = \{0\}$，还可得出 $\pi(J_x) \neq 0$。□

如果 A 可分且 G 第二可数，则以下更强的结果成立：

命题 3.3。设 $\alpha : G \curvearrowright A$ 是一个作用，且 G 第二可数、A 可分。进一步设$(A_i)_{i\in I}$ 是由 G-不变子商构成的 A 的分解。那么$(A_i \rtimes_{\alpha_i} G)_{i\in I}$ 是由子商构成的 $A \rtimes_\alpha G$ 的分解。

证明。再次，设 $Q = \ker(\pi \rtimes U)$，其中 $\pi \rtimes U$是 $A \rtimes_\alpha G$的某个不可约表示。根据 [19, 推论 19]，存在某个 $P \in \mathrm{Prim}(A)$，使得 $\ker\pi = \mathrm{Res}_A(Q) = \ker G(P)$。由假设，存在唯一的 $i \in I$，使得 $P \in \mathrm{Prim}(A_i)$，于是 $G(P) = \{\alpha_g(P) : g \in G\} \subseteq \mathrm{Prim}(A_i)$ 也成立。令 $A_i = I_i/J_i$。由此可得，$J_i \subseteq \ker G(P) = \ker\pi$，但 $\pi(I_i) \neq \{0\}$，因为 I_i严格大于J_i。因此，$\pi \rtimes U$ 是 $A_i \rtimes_{\alpha_i} G$的一个不可约表示。□

我们还要提及命题 3.2 和 3.3 的以下（众所周知的）推论

推论 3.4. 设 $\alpha : G \curvearrowright A$ 是 G 在 C^*-代数 A上的作用，并且每个轨道 $G(P) = \{\alpha_g(P) : g \in G\}$ 在 原始理想空间(A) 中都是局部闭的。进一步假设以下条件之一成立

(1) A 是可分的且 G 是第二可数的，或者 *(2)* 原始理想空间$(A)/G$ 是几乎豪斯多夫的。

那么$(A_{G(P)} \rtimes_\alpha G)_{G(P)\in \mathrm{Prim}(A)/G}$ 是 $A \rtimes_\alpha G$ 按子商作出的一个分解。

我们回到光滑作用 $\alpha : G \curvearrowright A$ 的情形，其中光滑作用的含义见定义 1.3。由推论 3.4可知， $A \rtimes_\alpha G$ 可按子商作分解

$$(A_{G(P)} \rtimes_\alpha G)_{G(P)\in \mathrm{Prim}(A)/G}$$

在轨道空间原始理想空间$(A)/G$上。由于我们有 G-等变同胚原始理想空间$(A_{G(P)}) \cong G(P) \cong G/G_P$，且 $G(P) \subseteq$原始理想空间(A)是局部闭的，因此特别可知$\{P\}$在 $G(P)$中是闭的，进而在原始理想空间(A)中也是局部闭的。令$A_P := A_{\{P\}}$表示 A对应的简单子商。由于 P和 $\ker(\{P\})$在 α 限制到 P的稳定子群 G_P之后均为不变的，因此我们得到一个典范作用 $\alpha^P : G_P \curvearrowright A_P$。由定理 2.11可知， $\alpha : G \curvearrowright A_{G(P)}$ 同构于 $\mathrm{Ind}\ \alpha^P : G \curvearrowright \mathrm{Ind}_{G_P}^G A_P$。由 Green 不可约性定理（定理 2.12）可知， $A_{G(P)} \rtimes_\alpha G$ 与 $A_P \rtimes_{\alpha^P} G_P$Morita 等价。此外，如果 G 是阿贝尔的，那么由例 2.20可知，相对于对偶作用 $\widehat{\alpha} : G \curvearrowright A_{G(P)} \rtimes_\alpha G$ 以及 $\widehat{\alpha^P} : \widehat{G_P} = \widehat{G}/G_P^\perp \curvearrowright A_P \rtimes_{\alpha^P} G_P$的对偶作用膨胀到 $\widehat{G}$ 所得的作用，这个 Morita 等价是$\widehat{\ }$等变的。

4. Twisted group algebras and actions on $\mathcal{K}(\mathcal{H})$

在本节中，我们想研究 I 型 C^*-代数上的光滑作用。回忆$\widehat{\ }$若 A 是 I 型的，则 $A \cong \mathrm{Prim}(A)$ 通过 $[\rho] \mapsto \ker\rho$，于是简单子商 $A_\rho := A_{\ker\rho}$ 同构于紧算子代数 $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\rho)$。因此，根据上一节末尾的讨论，我们想要理解交叉积 $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\rho) \rtimes_{\alpha^\rho} G_\rho$，其中 $G_\rho := G_{\ker\rho}$，以及 $\alpha^\rho : G_\rho \curvearrowright \mathcal{K}(\mathcal{H}_\rho)$ 上的相应作用。

回忆，对于任意希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，射影酉群 $P\mathcal{U}(\mathcal{H}) := \mathcal{U}(\mathcal{H})/\mathbb{T}1_\mathcal{H}$ 通过 $[V] \mapsto \mathrm{Ad}V$ 同构于 $\mathrm{Aut}(\mathcal{K}(\mathcal{H}))$。因此，若 $\beta : G \curvearrowright \mathcal{K}(\mathcal{H})$ 是一个作用，我们可以构造群

$$G_\beta := \{(g, V) \in G \times \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \beta_g = \mathrm{Ad}V\}. \tag{4.1}$$

于是 G_β 构成一个中心扩张

$$1 \to \mathbb{T} \to G_\beta \to G \to 1$$

其中包含映射为 $z \mapsto (e, z1_\mathcal{H})$，商映射为 $(g, V) \mapsto g$。随后选取一个博雷尔截面 $c : G \to G_\beta$，并记 $c(g) := (g, V_g^\beta)$，我们得到一个博雷尔映射$V^\beta : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ 以及一个博雷尔映射 $\omega_\beta : G \times G \to \mathbb{T}$，其定义为

$$\omega_\beta(g, h)1_\mathcal{H} = V_g^\beta V_h^\beta (V_{gh}^\beta)^*. \tag{4.2}$$

于是很容易验证， ω_β 是 G上的博雷尔 2-余循环，即它满足余循环条件

$$\omega_\beta(g, h)\omega_\beta(gh, l) = \omega_\beta(g, hl)\omega_\beta(h, l) \quad \forall g, h, l \in G. \tag{4.3}$$

此外，群扩张 $1 \to \mathbb{T} \to G_\beta \to G \to 1$ 的同构类 $[G_\beta]$ 和上同调类 $[\omega_\beta] \in H^2(G, \mathbb{T})$[5] 仅取决于 Morita 等价

[5]回忆一下，两个余循环 $\omega, \omega' \in Z^2(G, \mathbb{T})$ 等价（或上同调等价），当且仅当存在一个博雷尔映射 $f : G \to \mathbb{T}$，使得 $\omega(g, h) = \partial f(g, h)\omega'(g, h) = f(g)f(h)f(gh)^{-1}\omega'(g, h)$ 对所有 $g, h \in G$ 都成立。

作用 β 的等价类： $G \curvearrowright \mathcal{K}(\mathcal{H})$（例如，关于非可分情形的详细说明，请参见 [3, 第 4] 节）。

反之，若 $\omega \in Z^2(G, \mathbb{T})$ 是一个博雷尔余循环，则 ω 确定了一个由 $\mathbb{T}$ 扩张 G 的中心扩张 $1 \to \mathbb{T} \to G_\omega \to G \to 1$，其中 $G_\omega := G \times \mathbb{T}$（作为博雷尔空间），其群运算定义如下：

$$(g_1, z_1)(g_2, z_2) = (g_1 g_2, \omega(g_1, g_2) z_1 z_2) \quad \text{and} \quad (g, z)^{-1} = (g^{-1}, \overline{\omega(g, g^{-1})}\bar{z}). \tag{4.4}$$

Mackey（对于第二可数 G）和 Kleppner [25]（在一般情形下）已证明， G_ω 上存在唯一的局部紧群拓扑，该拓扑诱导乘积博雷尔结构[6]。若 ω_β 如上所述，则 $[G_{\omega_\beta}] = [G_\beta]$ 作为群扩张等价。

G_ω 中的求逆公式在 ω 为归一化余循环时会更简单，即

$$\omega(g, g^{-1}) = 1 \tag{4.5}$$

对所有 $g \in G$ 均成立。于是它还满足方程

$$\omega(g, h) = \overline{\omega(h^{-1}, g^{-1})} \tag{4.6}$$

对所有 $g,\ h \in G$ 均成立（参见 [25, 第 216] 页）。 [25, 第 215] 页证明了每个余循环都等价于一个归一化余循环，因此若觉得方便，总可以转而使用归一化余循环。

在复数域 $\mathbb{C}$ 上，数对 $(G_\omega, \mathbb{T})$ 存在一个典范的 Green 扭曲作用 $(\mathrm{id}\ \iota^\omega)$，其中 $\mathrm{id} : G_\omega \curvearrowright \mathbb{C}$ 是平凡作用，而 $\iota^\omega : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ 是包含映射。因此，扭曲群代数 $C^*(G, \omega)$ 可定义为扭曲交叉积 $\mathbb{C} \rtimes_{(\mathrm{id}, \iota^\omega)} G_\omega/\mathbb{T}$。如 (2.3) 所示，稠密子代数 $C_c(G_\omega, \mathbb{C}, \iota^\omega)$ 由所有满足 $f(g, z) = \bar{z} f(g, 1)$（对所有 $(g, z) \in G_\omega$）的紧支撑函数 $f : G_\omega \to \mathbb{C}$ 构成，其卷积和对合由 $C_c(G_\omega) \subseteq C^*(G_\omega)$ 上通常卷积和对合的限制给出。容易验证， $C^*(G, \omega)$ 在同构意义下仅取决于 ω 的上同调类。此外，扭曲作用 $(\mathrm{id}\ \iota^\omega) : (G_\omega, \mathbb{T}) \curvearrowright \mathbb{C}$ 的协变表示与 ω-表示 $V\colon G \to \mathrm{U(H)}$（即满足以下条件的博雷尔映射 $V\colon G \to \mathrm{U(H)}$）之间存在一一对应关系

$$V_g V_h = \omega(g, h) V_{gh} \quad \forall g, h \in G. \tag{4.7}$$

事实上，给定这样的 ω-表示，我们通过令 $V'_{(g,z)} := z V_g$ 得到一个酉表示 $V' : G_\omega \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$，显然该表示保持扭曲 ι，如（2.2）所示。 [7]

注 4.8。 由上述构造可知，扭曲群代数 $C^*(G, \omega)$ 是代数 $\mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{id}} G_\omega = C^*(G_\omega)$ 的一个直和项。特别地，紧群的扭曲群代数的不可约表示都是有限维的。

现在，若 $V\colon G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ 是一个 ω-表示，且若 $\beta = \mathrm{Ad}V\colon G \curvearrowright \mathcal{K}(\mathcal{H})$ 是相应的作用于 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 上的作用，则我们得到一个同构 $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes C^*(G, \bar{\omega}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H}) \rtimes_\beta G$，它由映射的延拓给出

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) \odot C_c(G_{\bar{\omega}}, \mathbb{C}, \iota) \to C_c(G, \mathcal{K}(H)); k \otimes f \mapsto [g \mapsto f(g, e) k V_g^*]. \tag{4.9}$$

这里 $\bar{\omega}(g,\ h) := \overline{\omega(g,\ h)}$ 表示 ω 的复共轭。这是 [19, 定理 18] 的一个简单版本。注意，上面的等式 (4.2) 表明 $V_\beta : G \curvearrowright \mathcal{U}(\mathcal{H})$ 是一个 ω_β-表示，因此，对于任意给定的作用 $\beta\colon G \curvearrowright \mathcal{K}(\mathcal{H})$，我们得到同构 $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \rtimes_\beta G \cong \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes C^*(G,\ \bar{\omega}_\beta)$。

---

[6] 这一般不必是乘积拓扑[7]或者， $C^*(G, \omega)$ 也可以定义为扭卷积代数 $L^1(G, \omega)$ 的包络 C^*-代数，即 $L^1(G)$ 配备对合和卷积，并以某种方式通过 ω 进行扭曲，例如参见 [2]。

注记 4.10。 如果 G 是阿贝尔群，且 $\omega \in Z^2(G, \mathbb{T})$ 是博雷尔余循环，那么我们有一个对偶群 $\widehat{G}$ 作用，记作 $\widehat{\omega} := (\mathrm{id} \iota^\omega) : G \curvearrowright C^*(G, \omega)$，其定义为

$$\big(\widehat{\omega}_\chi(f)\big)(g,z) = \overline{\chi(g)} f(g,z) \quad \forall \chi \in \widehat{G},\ (g,z) \in G_\omega.$$

这当然是注 2.16 第 (3) 项中的对偶作用的一个特例。然后很容易验证，(4.9) 中的同构是 $\mathrm{id}_{\mathcal{K}} \otimes \widehat{\widehat{\omega}} - \widehat{\beta}$ 等变的。特别地，对于阿贝尔群 G 的任意作用 $\beta : G \curvearrowright \mathcal{K}(\mathcal{H})$，我们都得到一个 $\widehat{\beta} - \widehat{\omega_\beta}$ 等变的 $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \rtimes_\beta G - C^*(G, \bar{\omega}_\beta)$ Morita 等价。

结合上述讨论与推论 3.4，我们得到

定理 4.11. 设 $\alpha : G \curvearrowright A$ 是 G 在 I 型 C^*-代数 A上的光滑作用。那么 $A \rtimes_\alpha G$ 存在一个分解 $(A_{G(\rho)} \rtimes_\alpha G)^{G(\rho) \in \widehat{A}/G}$，使得每个子商 $A_{G(\rho)} \rtimes_\alpha G$ 都与扭曲群代数 $C^*(G_\rho, \omega_\rho)$ *Morita* 等价。此外，若 G 是阿贝尔的，则对偶作用 $\widehat{\alpha} : G \curvearrowright A_{G(\rho)} \rtimes_\alpha G$ 与对偶作用 $\widehat{\omega_\rho} : G_\rho \curvearrowright C^*(G_\rho, \omega_\rho)$ 膨胀到 G 后的作用 *Morita* 等价。

应用定理 2.18，可得到关于光滑扭曲作用 $(\alpha, \tau) : (G, N) \curvearrowright A$ 在 I 型 C^*-代数 A上的类似结果。为便于后文使用，我们以如下众所周知的结果结束本节：

定理 4.12. 设 $\alpha : G \curvearrowright A$ 是紧群 G 在 I 型 C^*-代数 A上的作用。那么 $A \rtimes_\alpha G$ 也是 I 型的。

证明. 由 [35, 定理 27] 可知，$\alpha : G \curvearrowright A$ 是光滑的。于是由定理 4.11 以及如下事实即可得到结论：对于作用 $G \curvearrowright A$，所有紧稳定子群 G_ρ 对应的扭曲群代数 $C^*(G_\rho, \omega_\rho)\widehat{\ }$ 都是 I 型的（见注 4.8）。□

5. 主要结果

现在我们将证明主要结果，这些结果将说明，阿贝尔群作用下某些交叉积的简单子商与阿贝尔群的扭曲群代数 Morita 等价。我们先给出如下观察：

命题 5.1. 设 $\alpha : G \curvearrowright A$ 是阿贝尔局部紧群 G 在 I 型 C^*-代数 A上的光滑作用。那么轨道空间 $\mathrm{Prim}(A \rtimes_\alpha G)/\widehat{G}$ 与 $\mathrm{Prim}(A)/G \cong A/G$ 同胚，且对偶作用 $\widehat{\alpha} : G \curvearrowright A \rtimes_\alpha G$ 也是光滑的。

证明。 我们需要证明诱导作用 $G \curvearrowright \mathrm{Prim}(A \rtimes_\alpha G)$ 满足定义 1.3 的要求。事实上，由定理 4.11 可知，$A \rtimes_\alpha G$存在一个子商分解 $(A_{G(\rho)} \rtimes_\alpha G)^{G(\rho) \in \widehat{A}/G}$，使得每个纤维 $A_{G(\rho)} \rtimes_\alpha G$ 等变 Morita 等价于某个扭曲群代数 $C^*(G_\rho, \omega_\rho)$，其中稳定子群 G_ρ 是 ρ 的稳定子群，余循环为 $\omega_\rho \in Z^2(G_\rho, \mathbb{T})$，并且 G 在 $C^*(G_\rho, \omega_\rho)$ 上的作用是对偶作用 $\widehat{\omega_\rho} : G_\rho \curvearrowright C^*(G_\rho, \omega_\rho)$ 的膨胀。于是由注 6.9 可知，作用 $G \curvearrowright \mathrm{Prim}(C^*(G_\rho, \omega_\rho)) \cong S_{\omega_\rho}$ 是传递的，且公共稳定子群为 $\widehat{G}_P = S^\perp_{\omega_\rho} \subseteq \widehat{G}$。因此我们看到，$\mathrm{Prim}(A \rtimes_\alpha G)$ 中的 $\widehat{G}$-轨道 $\widehat{G}(P)$，恰好是与 $\widehat{S_{\omega_\rho}} \cong \widehat{G}/S^\perp_{\omega_\rho} \cong \widehat{G}/\widehat{G}_P$ 等变同胚的局部闭子集 $\mathrm{Prim}(A_{G(\rho)} \rtimes_\alpha G)$。

特别地，由上文可得一个双射 $A/G \longleftrightarrow \mathrm{Prim}(A \rtimes_\alpha G)/\widehat{G}$，它将轨道 $G(\rho) \in A/G$ 映到轨道 $\mathrm{Prim}(A_{G(\rho)} \rtimes_\alpha G) \in \mathrm{Prim}(A \rtimes_\alpha G)/G$。利用表示的诱导与限制的连续性（例如参见 [5,命题 2.7.4]），甚至可以验证这个双射及其逆映射都是连续的（在可分情形下，这可由 [18]推出）。证明完毕。□

注 5.2。利用注 2.16 的第 (3) 项，我们可以轻松地交换上述命题中 α 和$\widehat{\alpha}$的角色：因此，若 $A \rtimes_\alpha G$ 是 I 型且 $\widehat{\alpha}\colon G \curvearrowright A \rtimes_\alpha G$ 是光滑的，那么 $\alpha : G \curvearrowright A$ 也是光滑的，并且相应的轨道空间同胚。

在陈述主要定理之前，我们还需要注意以下事实

引理 5.3. 设 ω 是阿贝尔群 L 上的一个归一化博雷尔 2-余循环，且令$\curvearrowright\varphi\colon \ G \to L$ 为一个连续群同态。令 $\beta\colon = \widehat{\omega} \circ \ \varphi\colon \ G \curvearrowright C^*(L,\omega)$ 为$\widehat{\ }$对偶作用 $\widehat{\omega}\colon \ L \curvearrowright C^*(L,\omega)$ 与 φ的复合。则

$$C^*(L,\omega) \rtimes_\beta G \cong C^*(G \times L, \eta)$$

对于由下式给出的归一化余循环 $\eta \in Z^2(G \times L, \mathbb{T})$

$$\eta\big((g,l),(g',l')\big) = \varphi(g)(l')\omega(l,l') \quad \forall (g,l),(g',l') \in G \times L.$$

证明。容易验证，η是 $G \times L$ 上的博雷尔 2-余循环，并且

$$\Phi : C_c(G, C_c(L_\omega, \mathbb{C}, \iota^\omega)) \to C_c((G \times L)_\eta, \mathbb{C}, \iota^\eta) \quad \Phi(f)\big(((g,l),z)\big) = f(g)(l,z)$$

延拓为所需的同构。 □

我们的核心结果如下:

定理 5.4。设 $\gamma\colon \ L \curvearrowright A$ 是阿贝尔局部紧群 L 在 C^*-代数 A 上的作用，且 $A \rtimes_\gamma L$ 是 *I* 型的，对偶作用$\curvearrowright\widehat{\gamma}\colon \ L \curvearrowright A \rtimes_\gamma L$ 是光滑的。设 $\psi\colon \ G \to L$ 是从局部紧群 G 到 L的连续同态，并令 $\alpha = \gamma \circ \psi\colon \ G \curvearrowright A$。

那么，存在 $A \rtimes_\alpha G$ 的子商分解 $(A_{L(P)} \rtimes_\alpha G)_{L(P) \in \mathrm{Prim}(A)/L}$，使得每个纤维 $(A \rtimes_\alpha G)_{L(P)}$ 都与某个扭曲群$\widehat{\ }$代数 $C^*(G \times H_\rho, \eta_\rho)$ ***Morita*** 等价，其中 $H_\rho \subseteq L$ 是对偶作用 β下某个 $\rho \in (A_{L(P)} \rtimes_\beta L)\widehat{\ }\widehat{\ }$的稳定子群。

证明。由注 5.2 可知，作用 $L \curvearrowright \mathrm{Prim}(A)$ 是光滑的，因此$X := \mathrm{Prim}(A)/L$ 是几乎豪斯多夫的，并且轨道 $L(P)$ 在 Prim(A) 中是局部闭的。此外，由 $\alpha = \gamma \circ \psi$ 的构造可知，子商 $A_{L(P)}$是 G-不变的。因此，根据命题 3.2，$A \rtimes_\alpha G$ 在轨道空间 Prim(A)/L上具有一个子商分解 $(A_{L(P)} \rtimes_\alpha G)_{L(P)}$。所以我们只需证明，每个子商 $A_{L(P)} \rtimes_\alpha G$ 都与某个扭曲群代数 $C^*(G \times H_\rho, \omega_\rho)$ Morita 等价，如定理中所述。

由于定理的陈述在传递到 Morita 等价的$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$作用下保持不变，我们可以将 γ（分别将 $\alpha = \gamma \circ \psi$）转化为 $\widehat{\gamma}$（分别为 $\alpha' := \widehat{\gamma} \circ \psi$）。特别地，我们得到一个 Morita 等价

$$A_{L(P)} \rtimes_\alpha G \sim_M \big((A_{L(P)} \rtimes_\gamma L) \rtimes_{\widehat{\gamma}} \widehat{L}\big) \rtimes_{\alpha'} G.$$

根据我们的假设以及命题 5.1 和注 5.2，我们知道$A_{L(P)} \rtimes_\gamma L$是 I 型，并且 $(A_{L(P)} \rtimes_\gamma L)\widehat{\ }$与一个齐性 L-空间 L/H_ρ规范同胚$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，其中 $H_\rho \subseteq L$ 表示某个$\curvearrowright\rho \in (A_{L(P)} \rtimes_\gamma L)\widehat{\ }$的稳定子群。由定理 4.11 可知，$(A_{L(P)} \rtimes_\gamma L) \rtimes_{\widehat{\gamma}} L$与一个扭曲群代数 $C^*(H_\rho, \omega_\rho)$ 等变 Morita 等价，其中 L在$C^*(\widehat{L}_\rho, \omega_\rho)$上的作用是通过对偶作用 $\widehat{\omega_\rho}\colon \widehat{H_\rho} \cong L/H_\rho^\perp \curvearrowright C^*(\widehat{L}_\rho, \omega_\rho)$ 到 L的膨胀给出的。因此可得，$\alpha\colon \ G \curvearrowright A_{L(P)}$ 与由复合 $\beta = \widehat{\omega_\rho} \circ \ \varphi$给出的作用$\curvearrowright\beta\colon G \curvearrowright C^*(H_\rho, \omega_\rho)$ Morita 等价，其中 $\varphi\colon G \to H_\rho$ 是群同态的复合

$$G \xrightarrow{\psi} L \xrightarrow{q} L/H_\rho^\perp \cong \widehat{H_\rho}.$$

于是由引理 5.3 可知， $A_{L(P)} \rtimes_\alpha G$ 与 $C^*(H_\rho, \omega_\rho) \rtimes_\beta G \cong C^*(G \times H_\rho, \eta_\rho)$ Morita 等价，其中 η_ρ 由下式给出

$$\eta_\rho((g,\chi),(g,\chi')) = \chi'(\varphi(g))\omega_\rho(\chi,\chi')$$

对所有 $(g, \chi), (g', \chi') \in G \times H_\rho$。 □

利用 γ 与双重对偶作用 $\widehat{\gamma}$ 之间的 Morita 等价，我们还可以表述定理 5.4 的以下对偶版本。

定理 5.5. 设 $\gamma: L \curvearrowright A$ 是阿贝尔局部紧群 L 在 I 型 C^*-代数 A 上的光滑作用，且设 $\psi: G \to L$ 是从局部紧群 G 到 L 的连续同态。令

$$\beta := \widehat{\gamma} \circ \psi : G \curvearrowright B := A \rtimes_\beta L.$$

则 $B \rtimes_\beta G$ 有子商分解 $(B_{\widehat{L(P)}} \rtimes_\beta G)^{\widehat{L}(P)\in \mathrm{Prim}(B)/\widehat{L}}$，使得对每个纤维 $B_{\widehat{L(P)}} \rtimes_\beta G$，以下结论成立：

(1) 存在唯一的 L-轨道 $L(\rho)$ 属于 A，使得 $B_{\widehat{L(P)}} \cong A_{L(\rho)} \rtimes_\gamma L$；且

(2) $B_{\widehat{L(P)}} \rtimes_\beta G$ 与某个扭曲群代数 $C^*(G \times L_\rho, \omega_\rho)\widehat{\ }$ *Morita* 等价，其中 L_ρ 表示 ρ 在作用 $L \curvearrowright A$ 下的稳定子群。

注记 5.6。由命题 5.1 可直接推出：如果 $\gamma: L \curvearrowright A$ 是阿贝尔局部紧群 L 在 C^*-代数 A 上的作用，且 A 和 $A \rtimes_\gamma L\widehat{\ }$均为 I 型，那么 $\gamma: L \curvearrowright A$ 是光滑的，当且仅当 $\widehat{\gamma}: L \curvearrowright A \rtimes_\gamma L$ 是光滑的。因此在这种情况下，两个版本，即定理 5.4 和定理 5.5，均适用。

作为定理 5.4 的第一个应用，我们现在考察引言中讨论的连通单连通李群情形：

推论 5.7。 设 G 是一个连通单连通李群。则 $C^*(G)$ 具有一个分解 $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，其子商为 B_λ，使得每个纤维 B_λ 都与某个扭曲群代数 $C^*(G_\lambda, \omega_\lambda)$ *Morita* 等价，其中每个 G_λ 都是紧生成阿贝尔群。

证明。按照引言中的讨论，我们得到一个包含关系 $G \hookrightarrow L$，其中 L 是某个单连通李群，满足 $N := [G,G] = [L,L]$，$C^*(N)$ 和 $C^*(L)$ 均为 I 型，且共轭作用 $\beta: L \curvearrowright N \cong C^*(N)$ 是光滑的。于是，若 $(\gamma,\tau): (L,N) \curvearrowright C^*(N)$ 表示共轭作用，而 $(\alpha,\tau): (G,N) \curvearrowright C^*(N)$ 表示其在 (G,N) 上的限制，则我们得到

$$C^*(L) \cong C^*(N) \rtimes_{(\gamma,\tau)} L/N \quad \text{and} \quad C^*(G) \cong C^*(N) \rtimes_{(\alpha,\tau)} G/N.$$

现在，利用定理 2.18，我们可以转而考虑 Morita 等价作用 $\tilde{\gamma}: L/N \curvearrowright A$ 及其限制 $\tilde{\alpha}: G/N \curvearrowright A$（这只是复合 $\gamma \circ \varphi$ 与包含映射 $\varphi: G/N \to L/N$）。于是 $A \sim_M C^*(N)$ 和 $A \rtimes_{\tilde{\gamma}} L/N \sim_M C^*(L)$ 是 I 型，并且 $\tilde{\gamma}: L/N \curvearrowright A$ 是光滑的（因为 $L/N \curvearrowright A$ 与 $L/N \curvearrowright N$ 等变同胚）。由注 5.6 可知，定理 5.4 适用于 $A \rtimes_{\tilde{\alpha}} G/N$。因此，$A \rtimes_{\tilde{\alpha}} G/N$ 有一个子商分解 $(B_\lambda)^{\lambda\in\widehat{A}/L}$，使得每个 B_λ 都与扭曲群代数 $C^*(G/N \times H_\rho, \omega_\rho)$ Morita 等价，其中 $H_\rho \subseteq L/N$ 是对偶作用下某个 $\rho \in (A \rtimes_{\tilde{\gamma}} L/N)\widehat{\ }$ 的稳定子群。由于 G/N 和 L/N 是连通阿贝尔李群，因此 $G_\lambda := G/N \times H_\rho$ 是紧生成的。由于 $C^*(G)$ 与 $A \rtimes_{\tilde{\alpha}} G/N$ Morita 等价，结论得证。□

注 5.6 与定理 4.12 还有一个很好的推论，如下所示

推论 5.8. 设 $\gamma\colon\ K \curvearrowright A$ 是紧群 K 在 I 型 C^*-代数 A 上的作用。进一步设 G 是阿贝尔局部紧群，且 $\psi\colon\ G \curvearrowright K$ 是连续群同态。那么定理 *5.4* 适用于关于 $\alpha = \gamma \circ \psi$ 的交叉积 $A \rtimes_\alpha G$ 。

6. 阿贝尔群的扭曲群代数

本节旨在回顾阿贝尔局部紧群的扭曲群代数 G 的结构。我们首先介绍关于与闭子群相关的余循环等价性的一个有用（当然也是众所周知的）事实。在下文中，如果 $\omega \in Z^2(G,\ \mathbb{T})$，且 H 是 G 的闭子群，那么我们将 ω 在 $H \times H$ 上的限制 $\omega|_{H\times H}$ 记为 ω_H 。我们称其为 ω 在 H 上的限制。

命题 6.1。设 ω 是局部紧群 G 上的 *Borel* 2-余循环，且 H 是 G 的闭子群。假设 ω_H 与余循环 $\eta \in Z^2(H,\mathbb{T})$ 等价。那么存在一个余循环 $\tilde{\omega} \in Z^2(G,\mathbb{T})$，它与 ω 等价，并满足 $\tilde{\omega}_H = \eta$。如果 ω 和 η 已归一化，则 $\tilde{\omega}$ 也可以选为归一化的。

证明。设 $f\colon\ H \to \mathbb{T}$ 是一个博雷尔映射，使得 $\partial f \cdot \omega_H = \eta$。设 $f\colon\ G \to \mathbb{T}$ 由 $f|_H = f$定义，且 $f(g) = 1$对 $g \notin H$成立。那么 $\tilde{\omega} := \partial f \cdot \omega$满足 $\tilde{\omega}_H = \eta$。对于最后一个结论，只需注意，如果 ω 和 η 满足 (4.5)，那么 $\tilde{\omega}$也满足 (4.5)。□

我们接下来回顾一些由 Kleppner[24] 以及 Baggett 和 Kleppner [1]关于阿贝尔群余循环的结果。为此，设 $\omega \in Z^2(G,\mathbb{T})$，其中 G 为阿贝尔群。余循环恒等式 (4.3) 随即推出，ω 诱导出一个同态

$$h_\omega : G \to \widehat{G};\ h_\omega(g)(h) := \omega(g,h)\overline{\omega(h,g)} \tag{6.2}$$

Kleppner 在 [24, 第 7] 节中对其进行了研究。若余循环 ω 的群核 $S_\omega := \ker h_\omega$ 是平凡的，则称其为全斜（或非退化）。注意，

$$S_\omega = \{s \in G : \omega(s,g) = \omega(g,s)\ \forall g \in G\}$$

称为 ω的对称群 。若 $\omega_1 \sim \omega_2$，则 $h_{\omega_1} = h_{\omega_2}$，因此 $S_{\omega_1} = S_{\omega_2}$。以下结果归功于 Baggett 和 Kleppner

定理 6.3 ([1,定理 3.1])**.** 设 G 是一个阿贝尔局部紧群，且令 $\omega \in Z^2(G,\mathbb{T})$。则存在一个归一化的全斜博雷尔余循环 $\tilde{\omega} \in Z^2(G/S_\omega,\mathbb{T})$，使得 ω 等价于膨胀余循环 $\tilde{\omega} \circ (q \times q) \in Z^2(G,\mathbb{T})$，其中 $q\colon\ G \to G/S_\omega$ 表示商映射。

特别地，我们可以不失一般性地假设（必要时通过取一个等价余循环），

$$\omega(g,s) = 1 = \omega(s,g) \quad \forall g \in G, s \in S_\omega. \tag{6.4}$$

现在我们要考虑对偶作用 $\widehat{\omega}\colon\ G \curvearrowright C^*(G,\omega)$，其定义为 $\widehat{\omega}_\chi(f) = \bar{\chi}\cdot f$，其中 $f \in C_c(G_\omega,\mathbb{C},\iota^\omega)$。根据上述定理，我们可以假设 ω是由上述归一化余循环 $\tilde{\omega} \in Z^2(G/S_\omega,\mathbb{T})$ 膨胀而来。我们要证明

定理 6.5. 设 $\omega \in Z^2(G,\mathbb{T})$ 如上所述。设 $S := S_\omega$。那么存在一个动力系统同构

$$(C^*(G,\omega),\widehat{G},\widehat{\omega}) \cong \left(\mathrm{Ind}_{G/S}^{\widehat{G}} C^*(G/S,\tilde{\omega}),\widehat{G},\mathrm{Ind}\,\widehat{\tilde{\omega}}\right).$$

证明. 设 $S^\perp := \{\chi \in \widehat{G}\colon\ \chi|_S \equiv 1\}$。我们希望应用上述定理 2.11。为此，我们首先构造一个 G-等变连续映射

$$\varphi : C^*(G,\omega)\widehat{\ } \to \widehat{S} = \widehat{G}/S^\perp. \tag{6.6}$$

回顾一下，$C^*(G,\ \omega)$的不可约表示恰好是不可约 ω-表示 V 的积分形式：$G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_V)$。我们断言，对所有这样的

$\frown V$都存在唯一的特征 $\chi_V \in S$，使得 $V|_S = \chi_V \cdot 1_{\mathcal{H}_V}$。事实上，这由舒尔引理可得，因为对所有 $s \in S,\ g \in G$，我们有

$$V_s V_g = \omega(s,g) V_{sg} \overset{(6.4)}{=} V_{sg} = V_{gs} \overset{(6.4)}{=} \omega(g,s) V_{gs} = V_g V_s,$$

因此，舒尔引理蕴含 $V_s = \chi_V(s) 1_{\mathcal{H}_V}$，其中某个元素为 $\chi_V(s) \in \mathbb{T}$.$\widehat{}$由于 $V|_S$ 是一个（Borel）同态（利用 $\omega|_{S\times S} \equiv 1$），可得 $\chi_V \in S$。由于表示的限制是连续的，因此 $\varphi\colon\ V \mapsto \chi_V$ 是连续的。

要证明它是 $\widehat{G}$-等变的，首先注意到作用 $G \curvearrowright C^*(G,\ \omega)\widehat{}$ 由 $\widehat{\omega}\colon\ G \curvearrowright C^*(G,\ \omega)$ 诱导，其形式为 $(\nu,\ V) \mapsto \nu \cdot V$（逐点乘法），因为对所有 $f \in C_c(G_\omega,\ \mathbb{C},\ \iota^\omega)$，我们有

$$V(\widehat{\omega}_{\nu^{-1}}(f)) = \int_G \widehat{\omega}_{\nu^{-1}}(f)(g) V_g \, dg = \int_G \nu(g) f(g) V_g \, dg = (\nu \cdot V)(f).$$

$\widehat{}$因此我们得到 $\varphi(\nu V) = \chi_{(\nu V)} = \nu\chi_V = \nu\varphi(V)$，其中 $\nu \in G, V \in C^*(G,\ \omega)\widehat{}$。

我们现在考察那些 $V \in C^*(G,\omega)\widehat{}$ 映到 1_S 的元素。于是 $V|_S$ 是平凡的，并且 V $\widetilde{}$ $\widetilde{}$是从一个 $\tilde{\omega}$-表示 $V\colon\ G/S \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_V)$ 膨胀而来，该表示由 $V_{gS} := V_g$ 定义。注意，V 定义良好，因为对所有 $g \in G$ 和 $s \in S$，我们都有

$$V_{gs} = \bar{\omega}(g,s) V_g V_s = \bar{\omega}(g,s) V_g \overset{(6.4)}{=} V_g.$$

由此可知，理想

$$I = \cap\{\ker V : \varphi(V) = 1_S\}$$

是商映射 $Q\colon\ C^*(G,\omega) \to C^*(G/S,\tilde{\omega})$ 的核。该映射在函数层面上定义为将 $f \in C_c(G_\omega, \mathbb{C}, \iota^\omega)$ 映为 $Q(f) \in C_c((G/S)_{\tilde{\omega}}, \mathbb{C}, \iota^{\tilde{\omega}})$，其中 $Q(f)(gS,z) = \int_S f(gs,z)\, ds$。理想 I 在 $\widehat{\omega}$ 对 $\frown S^\perp = G/S$ 的限制下是不变的，而由 Q 诱导的同构 $C^*(G,\omega)/I \cong C^*(G/S,\tilde{\omega})$ 将 $\widehat{\omega}|_{\widehat{G/S}}$ 与 $\widehat{\tilde{\omega}}$ 对应起来。结论由定理 2.11 得出。□

备注 6.7。由上述定理可知，对于任意阿贝尔局部紧群 G，扭曲群代数$C^*(G,\omega)$关于 S（其中 $S := S_\omega$）是一个 C^*-代数的连续场$\widehat{}$，其纤维同构于扭曲群代数 $C^*(G/S,\tilde{\omega})$；这里取一个固定的全斜余循环 $\tilde{\omega} \in Z^2(G/S,\mathbb{T})$，它膨胀为一个与 ω 相似的余循环，定义在 G上。

以下结果基本上是 Kaniuth 的 [23, 引理 2]的推论。结合上面的定理 6.5，它蕴含了一个众所周知的事实：对于局部紧阿贝尔群 G 上的任意余循环$\omega \in Z^2(G,\mathbb{T})$，$\mathrm{Prim}(C^*(G,\omega)) \cong \widehat{S_\omega}$是豪斯多夫的。

定理 6.8 (Kaniuth)。设 ω 是局部紧阿贝尔群 G上的全反对称博雷尔 2-余循环。那么 $C^*(G,\omega)$ 是单的。

证明。根据 $C^*(G,\omega) = \mathbb{C} \rtimes_{(\mathrm{id},\iota^\omega)} G_\omega/\mathbb{T}$ 的构造，我们可以将 $C^*(G,\omega)$ 实现为 $C^*(G_\omega) = \mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{id}} G_\omega$ 对理想的商

$$I_\omega := \cap\{\ker V : V \text{ a unitary rep. of } G_\omega, V|_{\mathbb{T}} = \mathrm{id}_{\mathbb{T}}\}.$$

由于 ω 是全斜的，G_ω 的中心 $Z(G_\omega)$ 等于 $\mathbb{T}$；若对特征 $\lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{T}}$ 应用 [23, 引理$\frown$2]，我们便得出，对于所有满足 $V|_{\mathbb{T}} = \mathrm{id}_{\mathbb{T}} \cdot 1$ 的 $V \in G_\omega$，都有 $\ker V = \ker(\mathrm{Ind}_{\mathbb{T}}^{G_\omega} \lambda)$。因此，商 $C^*(G,\omega)$ 只有一个本原理想，所以它必定是单的。□

$\widehat{}$注记 6.9。在定理 6.5 的证明中，我们观察到，与对偶作用 $\widehat{\omega}$ 对应的作用 $\widehat{\omega}\colon G \curvearrowright C^*(G,\omega)\widehat{}$ 由 $(\chi, V) \mapsto \chi \cdot V$ 给出（逐点乘法）。定理 6.8 现在推出，限制映射 $\varphi\colon\ C^*(G,\omega)$ $\widehat{}\to$

$\widehat{\ }$ $\curvearrowright S_\omega$ 由 (6.6) 诱导出一个同胚 $\tilde\varphi$: 原始理想空间$(C^*(G,\omega)) \to S_\omega$。因此，通过这个$\widehat{\ }$同构，我们可以将由对偶$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$作用诱导的作用 $G \curvearrowright$ 原始理想空间$(C^*(G,\omega))$ 识别为作用 $G \curvearrowright S_\omega$,$(\chi,\mu) \mapsto \chi|_{S_\omega}\cdot\mu$。这一观察将在后文发挥重要作用。

接下来，我们想更深入地研究全斜余循环 $\omega \in Z^2(G,\mathbb{T})$ 所对应的 $C^*(G,\omega)$ 的结构。特别地，我们将给出 Poguntke 定理 [30, Theorem 1] 的一个证明。该定理等价于如下结果：对于紧生成的 G，由全斜余循环扭曲得到的扭曲群代数 $C^*(G,\omega)$，要么 Morita 等价于 $\mathbb{C}$，要么 Morita 等价于某个维数为 $l \geq 2$ 的简单非交换环面 $C^*(\mathbb{Z}^l,\omega'_\omega)$。事实上，我们将看到，在后一种情况下，$G$ 中存在一个有限生成自由阿贝尔群 Z 的副本，使得 $C^*(G,\omega)$ 同构于 $C^*(Z,\omega_Z)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})$，其中 $\mathcal{H}$ 是某个可分希尔伯特空间。尽管大多数核心思想取自 Poguntke 的原始证明，我们希望本文的表述能使部分论证更加简洁。

我们从以下观察开始：设 ω 是阿贝尔局部紧群 G 上的博雷尔 2-余循环，且 $H \subseteq G$ 是 G 的闭子群。那么，利用扭曲交叉积的 Green 分解（见例 2.6），我们可以将 $C^*(G,\omega)$ 写成一个迭代交叉积

$$\begin{aligned} C^*(G,\omega) &\cong \mathbb{C} \rtimes_{(\mathrm{id},\iota^\omega)} G_\omega/\mathbb{T} \cong \big(\mathbb{C} \rtimes_{(\mathrm{id},\iota^\omega)} H_\omega/\mathbb{T}\big) \rtimes_{(\alpha,\tau)} G_\omega/H_\omega \\ &\cong C^*(H,\omega_H) \rtimes_{(\alpha,\tau)} G_\omega/H_\omega, \end{aligned}$$

其中 $H_\omega \subseteq G_\omega$ 表示与 ω 相关联的中心扩张。为了后续使用，我们需要理解扭曲作用 $(\alpha,\ \tau)$: $(G_\omega,\ H_\omega) \curvearrowright C^*(H,\ \omega_H)$。以下引理可视为 [30, 引理 1] 的类似结果。

引理 *6.10*。在上述情形中，若 ω 归一化，则分解作用 $\alpha:\ G_\omega \curvearrowright C^*(H)$ 由公式 $\alpha := \widehat{\omega_H} \circ Res^G_H \circ h_\omega^{-1}$ 给出，其中 $\widehat{\omega_H}:\widehat{H} \curvearrowright C^*(H,\omega_H)$ 表示对偶作用，$Res^G_H:\ \widehat{G} \to \widehat{H}$ 表示限制同态，$h_\omega: G_\omega \to G$ （滥用记号）是将 $h_\omega: \curvearrowright G \to G$ 膨胀至 G_ω。扭曲 $\tau:\ H_\omega \to UM(C^*(H,\omega_H))$ 对于 $f \in C_c(H_\omega,\mathbb{C},\tau)$ 由下式给出

$$\big(\tau_{(h,z)}(f)\big)(l,v) = f(h^{-1}l,\bar z v) \quad \forall (h,z),(l,v) \in H_\omega.$$

证明。由例 2.6 可知，$\alpha: G_\omega \curvearrowright \mathbb{C} \rtimes_{(\mathrm{id},\iota^\omega)} H_\omega/\mathbb{T}$ 由公式给出，其中参数为 $(g,z) \in G_\omega$ 和 $f \in C_c(H_\omega,\mathbb{C},\iota^\omega)$

$$\big(\alpha_{(g,z)}(f)\big)(h,v) = f((g,z)^{-1}(h,v)(g,z)), \quad \forall (h,v) \in H_\omega.$$

利用 (4.5)、(4.6) 以及 G 是阿贝尔群这一事实，我们计算得

$$\begin{aligned} (g,z)^{-1}(h,v)(g,z)(h,v)^{-1} &= (g^{-1},\bar z)(h,v)(g,z)(h^{-1},\bar v) \\ &= \big(g^{-1}h,\omega(g^{-1},h)\bar z v\big)\big(gh^{-1},\omega(g,h^{-1})z\bar v\big) \\ &= \big(g^{-1}hgh^{-1},\omega(g^{-1}h,gh^{-1})\omega(g^{-1},h)\omega(g,h^{-1})\big) \\ &= \big(e,\omega(g^{-1},h)\overline{\omega(h,g^{-1})}\big) \\ &= \big(e,h_\omega(g^{-1})(h)\big) \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \big(\alpha_{(g,z)}(f)\big)(h,v) &= f((g,z)^{-1}(h,v)(g,z)) = f(h,[h_\omega(g^{-1})(h)]v) \\ &= \big[h_\omega(g)(h)\big]f(h,v) = \big(\widehat{\omega_H}_{h_\omega^{-1}(g)}f\big)(h,v). \end{aligned}$$

这就给出了所需的作用描述。扭曲的公式可由例 2.6 中给出的一般公式轻易推出。□

注 6.11. 如果上述引理中的余循环 ω_H 等于平凡余循环 $\curvearrowright 1_{H\times H}$，则 $C^*(H,\omega_H)\cong C_0(H)$，其中该同构扩展了傅里叶$*$-同态

$$\Phi : C_c(H_\omega, \mathbb{C}, \iota^\omega) \to C_0(\widehat{H}); \Phi(f)(\chi) = \int_H f(h,1)\chi(h)\,dh.$$

容易验证，引理 6.10 的分解作用在此同构下变为$\widehat{\ }(\alpha,\tau) : (G_\omega, H_\omega) \curvearrowright C_0(H)$，其中 α 由通过同态 $\mathrm{Res}^G_H \circ h_\omega : G_\omega \to \widehat{H}$ 给出的作用$G_\omega \curvearrowright \widehat{H}$ 诱导，且

$$\big(\tau_{(h,z)} f\big)(\chi) = \big(z\chi(h)\big) f(\chi), \quad f \in C_0(\widehat{H}).$$

对于下一个引理，我们需要先对膨胀余循环的扭曲群代数作一些准备。假设 H 是阿贝尔群 G 的闭子群，并且$\omega \in Z^2(G,\mathbb{T})$ 等于某个归一化余循环 $\omega' \in Z^2(G/H,\mathbb{T})$ 的膨胀。我们断言，在这种情况下可以得到一个同构

$$C^*(G/H,\omega') = \mathbb{C} \rtimes_{(\mathrm{id},\iota^{\omega'})} (G/H)_{\omega'}/\mathbb{T} \cong \mathbb{C} \rtimes_{(\mathrm{id},\sigma)} G_\omega/H_\omega,$$

其中 $\sigma : H_\omega \to \mathbb{T} = U(\mathbb{C})$ 由 $\sigma_{(h,z)} = z$给出。第一个等式仅仅依据定义。为了解释第二个同构，我们先注意到 $H_\omega = H \times \mathbb{T}$是一个群，因为 $\omega_H = 1_{H\times H}$ 是平凡的。将 H 与 $H\times\{1\} \subseteq G_\omega$等同后，可得到同构 $\psi : G_\omega/H \to (G/H)_{\omega'}$; $\psi((g,z)H) = (gH,z)$，这里用到了ω 是从 ω'膨胀而来的。最后，由于 σ 在 H上是平凡的，因此，对 (G_ω, H_ω) 这一对的扭曲作用 (id σ) 是从对 $((G/H)_{\omega'}, \mathbb{T})$ 这一对的扭曲作用 (id $\iota^{\omega'}$) 膨胀而来。第二个同构由例 2.5 的一个直接推广即可得到。

引理 6.12. 设 ω 是阿贝尔局部紧群 G 上的归一化 *Borel* 2-余循环，且 $H \subseteq G$ 是一个闭子群，使得 ω 在 H 上的限制ω_H 是平凡的。进一步假设 $\mathrm{Res}^G_H \circ h_\omega : G \to \widehat{H}$ 是满射，并令 $G_H := \ker(\mathrm{Res}^G_H \circ h_\omega) \subseteq G$ 和 $G' = G_H/H$。那么，ω 在 G_H上的限制等价于某个余循环 $\omega' \in Z^2(G',\mathbb{T})$ 的膨胀，且 $C^*(G,\omega)$ 与 $C^*(G',\omega')$*Morita* 等价。

此外，若存在一个可测截面 $G/G_H \to G$ （特别是当 G 是第二可数时），则 $C^*(G,\omega)$ 同构于 $C^*(G',\omega') \otimes \boldsymbol{K}(L^2(\widehat{H}))$。

证明。若 $G_H \subseteq G$ 如引理所述，记 $\tilde{\omega} = \omega_{G_H}$，并令 $h_{\tilde{\omega}} : G_H \to \widehat{G_H}$为相应的同态。注意，对所有 $g \in G_H$，我们都有 $h_{\tilde{\omega}}(g) = h_\omega(g)|_{G_H}$。因此，根据 G_H的定义可得 $H \subseteq S_{\tilde{\omega}} \subseteq G_H$。由此，定理 6.3 表明，存在定义在 $G' = G_H/H$ 上的归一化余循环 ω'，使得 $\tilde{\omega}$ 等价于将 ω' 膨胀到 G_H所得的膨胀，记为 $\inf \omega'$。根据命题 6.1，我们不妨通过将 ω 替换为一个等价余循环，假设 $\tilde{\omega} = \inf \omega'$。现在我们将 $C^*(G,\omega)$ 写成迭代扭曲交叉积 $C_0(H) \rtimes_{(\alpha,\tau)} G_\omega/H_\omega$，其扭曲作用 (α,τ) 如注 6.11 所述。由于 $G_\omega/(G_H)_\omega$与 $\widehat{\ }\curvearrowright H$等变同胚，根据定理 2.11，扭曲作用 $(\alpha,\tau) : (G_\omega, H_\omega) \curvearrowright C_0(H)$ 是由扭曲作用 (id σ) : $((G_H)_\omega, H_\omega) \curvearrowright \mathbb{C}$诱导的，其中 $\sigma : H_\omega \to \mathbb{T} \cong U(\mathbb{C})$ 由在平凡特征 $1_H \in H$处对 τ 求值给出，即有 $\sigma_{(h,z)} = z$。特别地，σ 在 $H \cong H\times\{1\} \subseteq (G_H)_\omega$上是平凡的。根据定理 2.12，可得 $C^*(G,\omega) \cong C_0(H) \rtimes_{(\alpha,\tau)} G_\omega/H_\omega$与 $\mathbb{C} \rtimes_{(\mathrm{id},\sigma)} (G_H)_\omega/H_\omega$ $(*)$ $\cong C^*(G_H/H,\omega') = C^*(G',\omega')$ Morita 等价，其中同构 $(*)$ 由本引理前面的讨论得出。最后的断言由同构 $G_\omega/(G_H)_\omega \cong G/G_H \cong H$ 以及定理 2.13(i)即可得出。□

注意，根据局部紧阿贝尔群的结构理论，每个这样的群都同构于某个直积 $V \times H$，其中 V 是维数为 $n \geq 0$ 的向量群，而 H 是含有紧开子群 K 的局部紧阿贝尔群（例如，参见定理 4.2.1]）。此外，若 G 是紧生成的，则 H 同构于直积 $Z \times K$，其中 Z 是秩为 $l \geq 0$ 的有限生成自由阿贝尔群，且 K 是紧的。下面我们将证明，在扭曲群代数的 Morita 等价意义下，可以不失一般性地假设紧部分 K 是平凡的。下面的引理类似于定理 1] 证明的第一步（参见 [30, 第 156]页）。

引理 6.13. 设 $\omega \in Z^2(G, \mathbb{T})$ 是上述局部紧阿贝尔群上的全斜 2-余循环。则存在一个离散阿贝尔群 Z' 及其上的全斜 2-余循环 ω'，使得 $C^*(G, \omega)$ 与 $C^*(G', \omega') \otimes \mathcal{K}(H)$ 同构，其中 H 是某个希尔伯特空间。

此外，若 $G = V \times Z \times K$ 是紧生成的，则 $K \cong T \times F$是一个维数为$\dim(T) \leq \operatorname{rank}(Z)$ 的环面群，且 F 有限；此时 Z' 可取为秩满足$\operatorname{rank}(Z') = \operatorname{rank}(Z) - \dim(T) \geq 0$ 的自由阿贝尔群，并且存在 Z' 在 G 中的一个副本，使得 $V \cap Z' = \{0\}$ 和 $\omega' = \omega_{V \times Z'}$。

证明。我们可以假设 ω 是归一化的。令 $K \subseteq H$ 为一个紧开子群，并令 S 表示 ω_K的对称子。由注 6.7 可知，$\curlywedge C^*(K, \omega_K)$是 S 上的连续场，其纤维 $C^*(K/S, \omega''_{K/S})$为单纤维。由于 $C^*(K/S, \omega''_{K/S})$的所有不可约表示都是有限维的，因此$C^*(K/S, \omega''_{K/S})$本身也是有限维的。于是 K/S 是有限的，而 S 在 H中也是开集。

由引理 6.12，我们可以假设 $\tilde{\omega} := \omega_{G_S}$ 是由归一化余循环 $\omega' \in Z^2(G', \mathbb{T})$膨胀得到的，其中 $G' := G_S/S$。特别地，$\omega_S = 1_{S \times S}$ 是平凡的。与引理 6.12 中一样，我们可以写成

$$C^*(G, \omega) \cong C_0(\widehat{S}) \rtimes_{(\alpha,\tau)} G_\omega/S_\omega.$$

$\widehat{\ }$，并且由于 $C^*(G, \omega)$是单的，且 S 是离散的（因为 S 是紧的），因此由 $\operatorname{Res}^G_S \circ h_\omega : G_\omega \to \widehat{S}$ 诱导的作用 $G_\omega \curvearrowright \widehat{S}$ 是传递的。于是由引理 6.12 可知，$C^*(G, \omega)$与 $C^*(G', \omega')$ Morita 等价。此外，由于$\curlywedge G/G_S$ 同构于 S，故其是离散的，显然存在一个可测截面 $G/G_S \to G$。因此，我们甚至有 $C^*(G, \omega) \cong C^*(G', \omega') \otimes \mathcal{K}(\ell^2(\widehat{S}))$。注意，由于 S是离散的，G_S必然包含 V和 $G_S/S \cong V \times H_S/S$，其中 $H_S = G_S \cap H$。因此，取 $Z' := H_S/S$即可得到结论。

现在假设 $G = V \times Z \times K$ 是紧生成的。我们将上述推理应用于 K。令 S 表示 ω_K的对称群。由于 K 和 V 在 $C^*(K, \omega_K)\tilde{\ } \cong \widehat{S}$上平凡作用，因此可知 $\operatorname{Res}^G_S \circ h_\omega : G \to \widehat{S}$可通过一个满同态 $\psi : Z \to S$分解。由此可知，S 同构于 Z 对其子群 $Z' = \ker \psi \subseteq Z$取商所得的商群$\tilde{\ }\ \tilde{\ }$。该商群同构于 $Z \times F$，其中$\tilde{\ }\ \tilde{\ }$是某个有限生成自由阿贝尔群 Z，其秩满足 $\operatorname{rank}(Z) \leq \operatorname{rank}(Z)$，另有某个有限群 $F\tilde{\ }\ \widehat{\ }\ \tilde{\ }\ \tilde{\ }\ \tilde{\ }$。于是，由 $S \cong Z \times F$可知，$S \cong T \times F$是环面$\curlywedge\ \tilde{\ }\ \tilde{\ }\ \tilde{\ }\ \widehat{\ }$群 $T := Z$与有限群 $F \cong F$的乘积，其中 $\dim(T) = \operatorname{rank}(Z) \leq \operatorname{rank}(Z)$。如上所述，商群 K/S 也必定是有限的。综上可知，K 存在一个分裂 $K = T \times F$，其中某个有限群 F 包含 F（一个同构的副本）以及 $K/S \cong F/F$。

由第一部分可知，$C^*(G, \omega)$ 与 $C^*(G', \omega') \otimes \mathcal{K}(\ell^2(\widehat{S}))$ 同构，其中有 $G' = G_S/S \cong V \times Z' \times F_1$，且 $F_1 := F/\tilde{F}$，并且 ω' 对 $F_1 \cong K/S$ 的限制是全斜的。由 [15, 引理 1]可知，分裂 $G' \cong V \times Z' \times F_1$ 可以选择为使得 ω' 等价

于乘积余循环$\omega'_{V\times Z'}\otimes\omega'_{F_1}$，从而

$$C^*(G',\omega')\cong C^*(V\times Z',\omega'_{V\times Z'})\otimes C^*(F_1,\omega'_{F_1})\cong C^*(V\times Z',\omega_{V\times Z'})\otimes M_n(\mathbb{C})$$

对某个整数 $n\geq 0$[8]。群 $V\times Z'\subseteq G'$ 甚至可以提升为 G 的一个子群，使得 $\omega'_{V\times Z'}=\omega_{V\times Z'}$。事实上，若 $H'\subseteq G_S$ 表示 $V\times Z'\subseteq G_S/K$ 在商映射下的逆像，则将 $V\times Z'$ 替换为连续分裂同态 $\mathfrak{s}:V\times Z'\to H'\subseteq G$的任意像。用 $V\times Z'$ 替换 G'，并用 $\omega_{V\times Z'}$ 替换 ω'，即可完成证明。□

如果上述引理中的群 Z' 是自由阿贝尔群（有限秩或无限秩），那么我们可以进一步降低复杂度。我们需要以下观察。

引理 6.14. 设 $G=V\times Z$，其中 V是向量群，Z是自由阿贝尔群。

(a) 如果 $\varphi:G\to\mathbb{R}$ 是满连续同态，那么 $H:=\ker\varphi$有一个分裂 $H\cong V'\times Z'$，其中 $V'\subseteq V$是余维一的某个向量群，且满足 $Z'\cong Z$。*(b)* 如果 $\psi:G\to\mathbb{T}$ 是满连续同态，那么 $H=\ker\psi$有一个分裂 $H\cong V'\times\mathbb{Z}v\times Z'$，其中 $0\neq v\in V$，$V'\subseteq V$是余维一的某个向量群，且满足 $Z'\cong Z$。

证明。为证明 (a)，令$\{e_i:i\in I\}$ 表示 Z 的一组生成元。由于$\varphi|_V:V\to\mathbb{R}$ 是满射，我们可以为所有 $i\in I$ 选取一个元素 $v_i\in V$，使得$\varphi(v_i)=-\varphi(e_i)$。于是我们得到一个新的分裂 $G\cong V\times Z'$，其生成集为$\{(v_i,e_i):i\in I\}$，且满足 $Z'\subseteq H=\ker\varphi$。因此我们得到 $H=V'\times Z'$，其中 $V'=\ker\varphi\cap V$ 是 V 上余维一的向量群。

现在，若 $\psi:G\to\mathbb{T}$ 如 (b) 中所述，则完全仿照上述方法，我们可找到一个新的分裂 $G\cong V\times Z'$，满足 $Z'\subseteq H$。由此可知，存在一个分裂 $V=V'\times\mathbb{R}v$，对某个$0\neq v\in V$，使得 $V\cap\ker\psi=V'\times\mathbb{Z}v$，因而 $H=V'\times\mathbb{Z}v\times Z'$。□

与 Poguntke 的 [30, 定理 1] 的证明（见 [30, 第 58–160]页）一样，下面引理的证明对向量群 V的维数作归纳。与 Poguntke 的结果不同，我们的结果还涵盖秩可能为无穷的自由阿贝尔群（另见下文例 6.16），但基本思路相同。

引理 6.15. 设 ω 是群 $G=V\times Z$上的一个全斜 *Borel* 2 余循环，其中 V 是非平凡向量群，且 Z 是自由阿贝尔群。那么存在一个自由阿贝尔子群 $Z'\subseteq G$，使得 $Z'\cong Z$ 满足 $\omega_{Z'}$ 是全斜的，并且 $C^*(V\times Z,\omega)\cong C^*(G,\omega)\cong C^*(Z',\omega')\otimes\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$。

证明。设 $\dim(V)=n>0$。我们断言，存在一个与 $V'\otimes Z'$ 同构的子群 $G'\subseteq G$，其中 Z' 与 Z 同构，且 $\dim(V')<\dim(V)$，使得 $C^*(G,\omega)\cong C^*(G',\omega_{G'})\otimes\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$。若此断言成立，则由对 $\dim(V)$ 作归纳即可得出结论。

首先，假设存在 $v,w\in V$，使得 $h_\omega(v)(w)\neq 1$。令$R=\mathbb{R}w$。由于 $H^2(\mathbb{R},\mathbb{T})=\{0\}$，我们可以假设 $\omega_R=1_{R\times R}$是平凡的。由于向量群 V上的每个双特征都具有如下形式：对某个双线性映射$\eta:V\times V\to\mathbb{R}$，有 $e^{2\pi i\eta}$，由 $h_\omega(v)(w)\neq 1$可知，$\mathrm{Res}^G_R\circ h_\omega:G\to\widehat{R}$是满射。将引理 6.14 应用于 $\varphi:=\mathrm{Res}^G_R\circ h_\omega$，可得 G 有一个分裂 $G=V\times\tilde{Z}$，其中 $Z'\cong Z$满足 $G_R=\ker\varphi=(V\cap\ker\varphi)\times Z'$。令 $V:=V\cap\ker\varphi\supseteq R$。由于存在连续分裂 $G/G_R\to G$，引理 6.12 表明，存在定义在 $G'=G_R/R$ 上的全斜余循环 ω'，它膨胀为 ω_{G_R}，并满足$C^*(G,\omega)\cong C^*(G',\omega')\otimes\mathcal{K}(L^2(\widehat{R}))$。接着，若我们选取一个分裂 $\tilde{V}:=V'\times R$，便得到

[8]事实上，可以证明 $n=\frac{|F_1|}{2}$。

$G' \cong V' \times Z' \subseteq G$，且 ω' 与限制 $\omega_{G'}$ 相对应。由于 $\dim(V') = n-2$，结论成立。

因此现在假设，对于所有 $v,\ w \in V$，$h_\omega(v)(w) = 1$。这意味着 ω 在 V 上的限制 ω_V 是平凡的，并且 V 在同态下的像

$$h_\omega : G \to \widehat{G} \cong \widehat{V} \times \widehat{Z}$$

$\widehat{\ }$ 映射到 $\{0\} \in V \cong V$。由于 h_ω 是单射（因为 ω 是全斜的），我们可以找到 $\widehat{\ }$ 一个分裂 $Z = \mathbb{Z}z \times Z'$，使得 $h_\omega(V)$ 在 $\mathbb{Z}z \cong \mathbb{T}$ 上的投影非平凡，因而是满射。将引理 6.12 应用于 $H = \mathbb{Z}z$，并将引理 6.14 的 (b) 项应用于 $\psi := \mathrm{Res}^G_{\mathbb{Z}z} \circ h_\omega : G \to \widehat{\mathbb{Z}z} \cong \mathbb{T}$，可知存在某个 $v \in V$ 的 $G' = G_{\mathbb{Z}z}/\mathbb{Z}z \cong V' \times \mathbb{Z}v \times Z'$ 上的全斜余循环，以及一个余维一的向量子群 $V' \subseteq V$。由于 $\mathbb{Z}z \times Z' \cong Z$，如上文第一种情形所用的类似论证表明，存在一个子群 $G' \subseteq G$，满足 $G' \cong V' \times Z$，使得 $\omega' = \omega_{G'}$ 是全斜的，且 $C^*(G,\omega) \cong C^*(G',\omega') \otimes \mathrm{K}(L^2(\mathbb{T}))$。由于 $\dim(V') = \dim(V) - 1$，这就证明了该断言。□

以下示例的灵感来自与 Christopher Deninger 的一些讨论。

例 6.16。为了了解引理 6.15 在 Z 为无限秩自由阿贝尔群时的一个有趣应用，考虑交叉积 $C_0(\mathbb{R}^+) \rtimes_{\mathrm{tr}} \mathbb{Q}^+$，其中 $\mathbb{R}^+$ 表示正实数的乘法群，子群 $\mathbb{Q}^+$（由有理数构成）在其上按乘法作用。由于 $\mathbb{Q}^+$ 在 $\mathbb{R}^+$ 中稠密，因此 $C_0(\mathbb{R}^+) \rtimes_{\mathrm{tr}} \mathbb{Q}^+$ 是单的。

由于每个 $x \in \mathbb{Q}^+$ 都有唯一的表示形式 $x = \prod_{n\in\mathbb{N}} p_n^{l_n}$，其中 p_n 表示第 n 个素数，且 $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z := \sum_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$，因此自然对数 $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 将作用 $\mathrm{tr} : \mathbb{Q}^+ \curvearrowright \mathbb{R}^+$ 变换为作用

$$\tilde{\mathrm{tr}} : Z \curvearrowright \mathbb{R}; \quad ((l_n)_n, y) \mapsto y + \sum_{n\in\mathbb{N}} \ln(p_n) l_n.$$

现在令 $G = \mathbb{R} \times Z$，并定义 $\omega \in Z^2(G,\ \mathbb{T})$ 如下

$$\omega\big((v,(l_n)_n),(w,(k_n)_n)\big) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \exp\big(2\pi i \ln(p_n) l_n w\big).$$

注意，这是海森堡余循环的限制

$$\eta : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{T}; \eta((x,y),(x',y')) = \exp(2\pi i y x')$$

通过嵌入 $Z \hookrightarrow \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R} \times Z$；$(l_n)_n \mapsto \sum_n \ln(p_n) l_n$。接下来很容易验证

$$C_0(\mathbb{R}^+) \rtimes_{\mathrm{tr}} \mathbb{Q}^+ \cong C_0(\mathbb{R}) \rtimes_{\tilde{\mathrm{tr}}} Z \cong C^*(\mathbb{R}\times Z, \omega).$$

由简单性可知，ω 是全斜的，因此引理 6.15 蕴含存在全反对称 2-余循环 $\omega' \in Z^2(Z,\mathbb{T})$，使得 $C_0(\mathbb{R}^+) \rtimes_{\mathrm{tr}} \mathbb{Q}^+$ 与 $C^*(Z,\omega') \otimes \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ 同构。

Poguntke 的定理 [30, Theorem 1] 的以下版本，现在可由引理 6.13 和引理 6.15 直接组合得到。

定理 *6.17.* 假设 $G \cong V \times Z \times K$ 是一个紧生成局部紧阿贝尔群，并且 $\omega \in Z^2(G, \mathbb{T})$ 是 G 上的全反对称博雷尔 2-余循环。那么 $K \cong T \times F$ 对于某个环面群 T，其维数 $\dim(T) \le$ 秩 Z 且 F 有限；并且存在 Z 的一个副本 $Z' \subseteq G$，使得限制 $\omega' := \omega_{Z'}$ 是全反对称的，并且 $C^*(G,\omega) \cong C^*(Z',\omega') \otimes \mathcal{K}(H)$。此外，当 $V \times T$ 非平凡时，$H \cong \ell^2(\mathbb{N})$。否则，$H$ 是有限维的。

注记 6.18。 在 [30, 定理 1] 中，Poguntke 证明，对于每个紧生成二步幂零群 G，$C^*(G)$ 的每个单商都与某个（可能是零维的）非交换环面 $C^*(\mathbb{Z}^l,\ \omega)$ Morita 等价。通过注意到在这种情况下，$\curvearrowright C^*(G)$ 是 Z上的一个 C^*-代数连续场的截面代数，可以很容易地由上述定理 6.17 推导出这一结果；其中，$\curvearrowright Z$ 表示 G的中心，且在 $\chi \in Z$ 上的纤维同构于扭曲群代数 $C^*(G/Z,\ \omega_\chi)$，其中余循环 $\omega_\chi \in Z^2(G/Z,\ \mathbb{T})$ 取决于 χ。注意，当 G 是紧生成二步幂零群时，G/Z 是紧生成阿贝尔群。

反过来，定理 6.17 显然也可由 Poguntke 的[30, 定理 1]应用于 $C^*(G_\omega)$轻易推出，其中 G_ω 表示与 ω对应的、以 $\mathbb{T}$为核、 G 为商的中心扩张。

注记 6.19. 由引理 6.13 可知，对于阿贝尔 G 和全反对称 2-余循环$\omega \in Z^2(G, \mathbb{T})$，扭曲群代数 $C^*(G, \omega)$总是 Morita 等价于某个向量群 V和某个离散群 D上的扭曲群代数 $C^*(V \times D, \omega')$。有人或许会想，能否采用与引理 6.15 证明中类似的论证，从而将问题归约到离散群的情形。一个很好的检验例子是扭曲群代数 $C^*(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \omega)$，其全斜余循环为 $\omega((x, y),(x', y')) = e^{2\pi i x y'}$；对于这个例子，引理 6.15 证明中的归纳步骤显然无法类推。

7. 结论

我们首先将定理 5.4 与定理 6.17 结合起来，得到

推论 7.1。设 $\gamma\colon\ L \curvearrowright A$ 和 $\alpha = \gamma \circ \varphi\colon\ G \curvearrowright A$ 如定理 *5.4* 中所述，且 G 为阿贝尔群。则以下结论成立：

(1) 所有点集 $\{P\} \subseteq$ 原始理想空间$(A \rtimes_\alpha G)$ 都是局部闭的。*(2)* $B := A \rtimes_\alpha G$ 的每个简单子商 B_P 都与某个阿贝尔局部紧群 Z_P（可以是平凡群）的某个扭曲群代数 $C^*(Z_P, \omega_P)$ *Morita* 等价，其中余循环 ω_P 是 Z_P上的全斜 *Borel* 2-余循环。*(3)* 如果 G 以及定理 *5.4* 中的所有稳定子群 H_ρ 都是紧生成的，则所有 Z_P 都可以选为平凡群或有限生成自由阿贝尔群。因此，$C^*(Z_P, \omega_P)$ 要么是 $\mathbb{C}$，要么是维数为 ≥ 2的简单非交换环面。

以下推论是 Poguntke 关于连通群的结果

推论 7.2. 设 G 是一个连通局部紧群。那么，每个单点集 $\{P\} \subseteq$ 原始理想空间$(C^*(G))$ 都是局部闭的，且相应的简单子商 $C^*(G)_P$ 要么同构于紧算子代数 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{H})$，要么 *Morita* 等价于维数为 ≥ 2 的简单非交换环面。

证明。 当 G 是一个连通单连通李群时，结论由推论 5.7 和定理 6.17 得出。对于一般的连通群，我们遵循 Poguntke 的论证，将问题归约到这一情形。

根据连通群的结构理论（例如，参见 [26]），我们知道存在一个紧正规子群 K of G，使得 $\dot{G} := G/K$ 是李群。于是，我们可以将 $C^*(G)$ 写成扭曲交叉积 $C^*(K) \rtimes_{(\alpha,\tau)} G/K$，进而在 Morita 等价意义下写成普通交叉积 $B \rtimes_\beta \dot{G}$，其中 B 与 $C^*(K)$ Morita 等价。由于 K 是紧的，$C^*(K)$ 是带离散对偶 $B = C^*(K)$ 的 I 型群代数，因此 B 是带离散对偶 B 的 I 型。由于 G 是连通的，$\dot{G}$ 对 B 的作用是平凡的，因此我们得到一个分解

$$B \rtimes_\beta \dot{G} \cong \bigoplus_{\rho \in \widehat{B}} \mathcal{K}(\mathcal{H}_\rho) \rtimes_{\beta^\rho} \dot{G} \cong \bigoplus_{\rho \in \widehat{B}} \mathcal{K}(\mathcal{H}_\rho) \otimes C^*(\dot{G}, \omega_\rho)$$

其中 $\omega_\rho \in Z^2(\dot{G},\mathbb{T})$ 对每个 $\rho \in \widehat{B}$ 都是一个适当的 2-余循环。因此，如果我们能够证明对于所有扭曲群代数 $C^*(\dot{G},\omega)$（其中 $\omega \in Z^2(\dot{G},\mathbb{T})$），结论同样成立，那么定理 1.1 的结论就随之成立。但我们在注 4.8 中观察到，$C^*(G,\omega)$ 是 $C^*(G_\omega)$ 的一个商（事实上是一个直和项），其中 G_ω 是由 ω所对应的 G 对 $\mathbb{T}$ 的中心扩张。由于这是一个连通李群，如果我们能够对连通李群证明定理 1.1 的结论，那么该结论就对所有连通群成立。

接下来，若 G 是一个连通李群，且 G 是 G的万有覆盖群，则 $G = G/Z$ 是 G的某个离散中心子群 Z 的商。由此可得，$C^*(G)$是 $C^*(G)$的一个商。因此，$C^*(G)$的每个单子商也是 $C^*(G)$的一个单子商，结论得证。□

定理 1.4 的证明现在可由推论 7.2 与定理 6.17 结合得出（另见注 6.18）。为说明我们的结果严格超出了仅限于连通群的情形，我们考虑以下

例 7.3。 回想一下，对于任意无理数 θ，*Mautner* 群 $M_\theta := \mathbb{C}^2 \rtimes_\theta \mathbb{R}$ 是加法群 $\mathbb{C}^2$ 与实直线 $\mathbb{R}$ 的半直积，其中实直线通过自同构 $t\cdot(z,w) := (e^{2\pi it}z, e^{2\pi i\theta t}w)$作用于加法群。众所周知，$M_\theta$ 是维数最小的连通李群，使得 $C^*(M_\theta)$不是 I 型。

我们不通过关于连通群的一般结果来考察这个例子，而是改用推论 5.8。由于 $M_\theta = \mathbb{C}^2 \rtimes_\theta \mathbb{R}$，我们有

$$C^*(M_\theta) \cong C^*(\mathbb{C}^2) \rtimes_{\alpha^\theta} \mathbb{R} \cong C_0(\widehat{\mathbb{C}^2}) \rtimes_{\alpha^\theta_*} \mathbb{R},$$

其中，α^θ 表示分解作用，而 α^θ_* 是由$\curlywedge$给出的作用在 $\widehat{\mathbb{C}^2}$ 上的作用，其公式为 $(\alpha^\theta_*)_t(\chi)(z,\ w) = \chi\big((-t)\cdot(z,\ w)\big)$，其中 $\chi \in \mathbb{C}^2$。利用规范的$\curlywedge$ $\curlywedge$识别 $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$，通过简单验证可得

$$C^*(M_\theta) \cong C_0(\widehat{\mathbb{C}^2}) \rtimes_{\alpha^\theta_*} \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{C}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{R}$$

with

$$\alpha_t(f)(z,w) = f(t\cdot(z,w)) = f(e^{2\pi it}z, e^{2\pi i\theta t}w), \quad f \in C_0(\mathbb{C}^2). \tag{7.4}$$

现在考虑由作用 $\mathbb{T}^2 \curvearrowright \mathbb{C}^2$诱导的紧群作用 $\gamma\colon\ \mathbb{T}^2 \curvearrowright C_0(\mathbb{C}^2)$，其定义为 $(u,\ v)\cdot(z,\ w) = (\bar{u}v,\ \bar{z}w)$，其中 $(u,\ v) \in \mathbb{T}^2$，且 $(z,\ w) \in \mathbb{C}^2$。于是 $\alpha = \gamma\circ\varphi$，其中 $\varphi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$，$\varphi(t) = (e^{2\pi it},\ e^{2\pi i\theta t})$。轨道空间 $\mathbb{C}^2/\mathbb{T}^2$ 与 $[0,\infty)^2$ 同胚，其轨道为

$$\mathcal{O}_{x,y} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = x, |w| = y\}, \quad (x,y) \in [0,1)^2. \tag{7.5}$$

若 $x \neq 0 \neq y$，则轨道 $\mathcal{O}_{x,\ y}$ 在上述作用下与 $\mathbb{T}^2$ 同胚。其他轨道同胚于 $\{0\}\times\mathbb{T}$（若 $x = 0 \neq y$），同胚于 $\mathbb{T}\times\{0\}$（若 $x \neq 0 = y$），并且我们有 $\mathcal{O}_{(0,0)} = \{(0,\ 0)\}$。

由定理 5.4 可知，$C^*(M_\theta) \cong C_0(\mathbb{C}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 可分解为子商 $C(\mathrm{O}_{x,y}) \rtimes_\alpha \mathbb{R}$（在 $[0,1$上）^{2},，其中每个子商都同构于扭曲群代数。若 $(x,y) = (0,0)$，则得到 $C^*(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R})$。若 $x = 0 \neq y$且 $x \neq 0 = y$，则得到 $C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R} \sim_M C^*(\mathbb{Z}) \cong C(\mathbb{T})$ 的若干副本。因此，所有这些纤维都是 I 型。接下来研究 $x \neq 0 \neq y$ 的情形，此时我们有 $C(\mathrm{O}_{x,y}) \rtimes_\alpha \mathbb{R} \cong C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{R}$。将 $\mathbb{T}^2$ 与 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\times\mathbb{T}$ 认同后，便有一个 $\mathbb{R}$-等变投影 $p\colon\ \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 到第一个因子。由定理 2.11 和 Green 定理 2.12 可得

$$C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{R} \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{R}} C(\mathbb{T}) \rtimes_{\mathrm{Ind}\,\alpha^\theta} \mathbb{R} \sim_M C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha^\theta} \mathbb{Z}$$

其中 $\alpha^\theta\colon\ \mathbb{Z} \curvearrowright C(\mathbb{T})$ 表示旋转无理角 θ。这是单非交换二维环面 A_θ。

这个例子有许多变体：令 G 为任意阿贝尔局部紧群，并令 χ、$\mu \in G$ 为 G 的任意两个特征。于是我们可以根据作用 $g\cdot(z,w) = (\chi(g)z, \mu(g)w), g \in G, (z,w) \in \mathbb{C}^2$构造半直积 $M_{\chi,\mu} := \mathbb{C}^2 \rtimes_{\chi,\mu} G$。然后应用推论 5.8和定理 5.4，可以得到 $C^*(M_{\chi,\mu})$ 的类似分解，其子商为 $C(\mathbb{O}_{x,y}) \rtimes_\alpha G$，如上所述；而对于$x \neq 0 \neq y$，这些子商最终与余循环为下式的扭曲群代数 $C^*(G \times \mathbb{Z}^2, \omega)$ Morita 等价

$$\omega\big((g_1,n_1,n_2),(g_2,n_2,m_2)\big) = \chi(g_1)^{n_2}\mu(g_1)^{m_2}.$$

如果 G 是紧生成的，那么 $G \times \mathbb{Z}^2$ 也是紧生成的，因此 $C^*(M_{\chi,\ \mu})$ 的所有非初等简单商[9] 都与非交换环面 Morita 等价。我们省略更多细节。注意，$M_{\chi,\ \mu}$ 属于 Poguntke 的定理 [30，2] 当且仅当 G 是连通的。

8. 几乎连通群的情形

回顾一下，如果局部紧群 G 对其连通分支 G_0 取商所得的商群G/G_0 是紧群，就称其为几乎连通。本节旨在研究几乎连通群的简单子商。与连通群的情形一样，众所周知，每个几乎连通群都有一个紧正规子群N，使得 G/N 是一个（几乎连通）李群。完全相同的论证也适用于推论 7.2 的证明，由此可知，要研究几乎连通群的群 C^*-代数的简单子商结构，只需考察李群的情形；特别是，此时商群 G/G_0 是有限的。

于是可将 $C^*(G)$ 写成扭曲交叉积 $C^*(G_0) \rtimes_{(\alpha,\tau)} G/G_0$。再将其转为 Morita 等价的普通作用 $\beta\colon F \curvearrowright B$，对应于商群 $F := G/G_0$，便只需研究（在 Morita 等价意义下）有限群作用下的交叉积$B \rtimes_\beta F$，其中 B 与群代数$C^*(G_0)$ Morita 等价。根据上一节的结果，我们知道

- 所有点 $\{P\} \in$ 原始理想空间 Prim(B) 都是局部闭的，并且
- 与某些 $P \in$原始理想空间 Prim(B) 对应的 B_P B 的简单子商，要么与 $\mathbb{C}$ Morita 等价，要么与某个维数为 $n \geq 2$ 的单非交换 $C^*(Z,\omega)$ Morita 等价。

现在我们将证明以下结论：

定理 8.1。设 $\beta : F \curvearrowright B$ 是有限群 F 在可分 C^*-代数 B 上的作用，且 $\mathrm{Prim}(B)$ 中的每个单点集 $\{P\}$ 都是局部闭的。对于每个 $P \in \mathrm{Prim}(B)$，令 $\beta^P\colon F_P \curvearrowright B_P$ 表示稳定子群 F_P 对 P 的作用，该作用由 β 在简单子商 B_P 上诱导。则以下结论成立：

(1) 在（ FP）中的所有轨道$\mathrm{Prim}(B)$）都是局部闭的。*(2)* 每个单点集 $\{Q\} \in \mathrm{Prim}(B \rtimes_\beta F)$）都是局部闭的。*(3)* 与 $Q \in \mathrm{Prim}(B \rtimes_\beta F)$）对应的简单子商 $(B \rtimes_\beta F)_Q$ 与某个交叉积 $B_P \rtimes_{\beta^P} F_P$ 的一个简单子商 *Morita* 等价。

一旦得到以下结果，Mackey-Rieffel-Green 机制便几乎立即给出结论

引理 8.2. 设 F 是一个通过同胚作用于拓扑 T_0-空间 X上的有限群。那么，对于每个 $x \in X$，轨道 $F(x) = \{gx\colon g \in F\}$ 在相对拓扑下是离散的。此外，若 $\{x\}$ 在 X 中是局部闭的，那么 $F(x)$ 也如此。

[9]不难看出，$C^*(M_{\chi,\mu})$ 的所有本原理想都是极大的。

证明。对于第一个断言，我们先证明，对于每个 $x \in X$，轨道 $F(x) = \{gx : g \in F\}$ 在相对拓扑下是一个 T_1-空间。事实上，若此结论不成立，则存在某个 $x \in X$ 和某个 $g \in F$，使得 $gx \neq x$, 但 $gx \in \{x\}$。我们断言，这意味着 $x \in \{gx\}$ 也成立，因而 $gx = x$，因为 X 是一个 T_0-空间。事实上，由于 $gx \in \{x\}$，可得 $g^n x \in \{gx\}$ 对所有 $n \geq 1$均成立。对于$n = 1$，这显然成立；若对 n成立，我们还可得到

$$g^{n+1}x = g^n(gx) \subseteq g^n\overline{\{x\}} = \overline{\{g^n x\}} \subseteq \overline{\{gx\}}.$$

由于 F 是有限的，存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $g^n x = x$，因此 $x \in \overline{\{gx\}}$。由此可知，$F(x)$ 的每个子集 $= \{gx : g \in F\}$ 都是相对闭的，因此 $F(x)$ 关于相对拓扑是离散的。第二个断言由有限个局部闭集的并仍为局部闭集这一事实得出。□

定理 8.1 的证明。第一个断言直接由引理 8.2 得出。接着应用命题 3.3 可知，对于每个 $Q \in$原始理想空间$(B \rtimes_\beta F)$，存在唯一的轨道 $F(P) \subseteq$原始理想空间(B)，使得 Q 是局部闭子集原始理想空间$(B_{F(P)} \rtimes_\beta F)$ 的一个元素。同样由引理 8.2 可知，集合 $F(P)$ 在相对拓扑下是离散的，因此 $F(P)$ 与 F/F_P 典范同胚，从而 $(B_{F(P)} F, \beta)$ 同构于 $(\mathrm{Ind}_{F_P}^F B_P, F, \mathrm{Ind}\ \beta^P)$。由 Green 定理 2.12 可知，$B_{F(P)} \rtimes_\beta F$ 与 $B_P \rtimes_{\beta^P} F_P$ Morita 等价。由于 B_P 是单的且 F_P 是有限的，继而由 $[10,$ 定理 3.4$]$（或由 $[29,$ Satz 2$]$ 的交叉积版本）可知，$B_P \rtimes_{\beta^P} F_P$ 中的每个本原理想都是极大的。由 Morita 等价，同样的结论也适用于 $B_{F(P)} \rtimes_\beta F$。因此，$\{Q\}$ 是原始理想空间$(B_{F(P)} \rtimes_\beta F)$ 这一局部闭子集中的闭子集，而它是原始理想空间$(B \rtimes_\beta F)$ 的子集。由命题 3.1 可知，$\{Q\}$ 在原始理想空间$(B \rtimes_\beta F)$ 中是局部闭的。证明完毕。□

推论 8.3。设 G 是一个几乎连通局部紧群。那么，原始理想空间$(C^*(G))$ 中的每个单点集 $\{Q\}$ 都是局部闭的。此外，$C^*(G)$ 中与 Q 对应的简单子商，要么同构于某个希尔伯特空间 H 上的 $K(H)$，要么 *Morita* 等价于某个形如$(C^*(Z, \omega) \otimes K(H)) \rtimes_\beta F$的交叉积的某个简单商，其中 $C^*(Z, \omega)$ 是某个简单非交换 n-环面，F 是某个有限群。

证明。这可由定理 8.1 以及此前的讨论得出。□

因此，研究交叉积 $(C^*(Z, \omega) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) \rtimes_\beta F$的结构将非常有趣，其中 $C^*(Z, \omega)$ 是一个维数为 $n \geq 2$ 的简单非交换 n- 环面，而 F 是一个有限群。关于作用 $\beta : F \curvearrowright C^*(Z, \omega)$ 的情形（例如，参见 $[4, 14, 21, 22]$），已有一些研究，但一般情形仍很不明朗。我们以如下例子作结，该例或许能说明可以期待什么：

例 8.4. 回顾例 7.3 中的 Mautner 群 $M_\theta := \mathbb{C}^2 \rtimes_\theta \mathbb{R}$。下面，我们将 M_θ 的元素写作三元组 (z, w, t)，其中 $(z, w) \in \mathbb{C}^2, t \in \mathbb{R}$。二元群 $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 M_θ 上有如下作用：

$$\epsilon \cdot (z, w, t) = (\bar{z}, \bar{w}, -t)$$

对生成元 $\epsilon \in \mathbb{Z}_2$。由此得到几乎连通群 $M_\theta \rtimes \mathbb{Z}_2$，它也可以表示为半直积 $\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2)$。与例 7.3 中一样，我们得到

$$C^*(M_\theta \rtimes \mathbb{Z}_2) \cong C^*(\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2)) \cong C^*(\mathbb{C}^2) \rtimes_{\alpha_*} (\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2) \cong C_0(\mathbb{C}^2) \rtimes_\alpha (\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2)$$

带有作用 $\alpha : \mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2 \curvearrowright C_0(\mathbb{C}^2)$，其在 $t \in \mathbb{R}$ 上如例 7.3 所给，并在生成元 $\epsilon \in \mathbb{Z}_2$ 上由 $\epsilon \cdot (z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$ 给出。现在考虑 (7.5) 中的 $\mathbb{T}^2$-轨道 $\mathcal{O}_{x,y}$，它们在 $\mathbb{C}^2$ 中，且都在作用 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$ 下不变。因此

我们可以将 Prim($C^*(M_\theta \rtimes \mathbb{Z}_2)$) 分解为两两不交的空间 Prim($C(\mathcal{O}_{x,\ y})\ \rtimes_\alpha \mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$) 之并。若 $x = 0$ 或 $y = 0$，则很容易看出这些交叉积是 I 型，因此我们将讨论范围限制在 $x \neq 0 \neq y$ 的情形。与例 7.3 一样，此时我们可以将 $\mathcal{O}_{x,\ y}$ 与 $\mathbb{T}^2$ 等同。$\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{T}^2$ 的第一因子 $\mathbb{T}$ 上的作用在 $1 \in \mathbb{T}$ 处的稳定子群为 $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$，因此得到一个典范的 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$-等变同胚 $\mathbb{T} \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2)/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2)$。由此得到一个 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2$-等变的第一因子投影 $p\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T} \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2)/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2)$。于是，根据定理 2.11 和 Green 定理 2.12，我们得到

$$\begin{aligned} C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2) &\cong \operatorname{Ind}_{\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2}^{\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2} C(\mathbb{T}) \rtimes_{\operatorname{Ind} \alpha^\theta} (\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2) \\ &\sim_M C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha^\theta} (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2) \\ &\cong \left(C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha^\theta} \mathbb{Z}\right) \rtimes \mathbb{Z}_2 \\ &\cong A_\theta \rtimes \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

其中，$\mathbb{Z}_2 \curvearrowright A_\theta$ 在无理旋转代数 A_θ 上的作用由其在标准酉生成元 u, v 上的取值给出：A_θ 由 $u \mapsto u^*, v \mapsto v^*$给出。因此我们看到，对于 $x \neq 0 \neq y$，交叉积 $C(\mathcal{O}_{x,y}) \rtimes_\alpha (\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2)$ 均与交叉积 $A_\theta \rtimes \mathbb{Z}_2$ 同构（事实上，它们是后者的稳定化），而后者是由翻转自同构得到的。Bratteli 和 Kishimoto 已证明，这些是非 I 型 AF 代数 [2]（另见 [14]）。

参考文献

[1] Larry Baggett 和 Adam Kleppner，阿贝尔群的乘子表示，《函数分析杂志》14 (1973), 299–324, DOI 10.1016/0022-1236(73)90075-x. [2] Ola Bratteli 和 Akitaka Kishimoto，非交换球面。III. 无理旋转，《数学物理通讯》147 (1992), no. 3, 605–624.[3] Alcides Buss 和 Siegfried Echterhoff, 通过余作用对 C^*-代数进行变形的新方法，《数学研究》281 (2025), no. 2, 117–169, DOI 10.4064/sm240208-25-9. [4] Sayan Chakraborty，非交换轨形上的投射模追踪，《非交换几何杂志》17 (2023), no. 2, 385–406, DOI 10.4171/jncg/487.[5] Joachim Cuntz、Siegfried Echterhoff、Xin Li 和 Guoliang Yu，群 C^*-代数与半群 C^*-代数的 K-理论，Oberwolfach 研讨会丛书，第 47 卷，Birkhäuser/Springer, Cham, 2017.[6] Anton Deitmar 和 Siegfried Echterhoff，《调和分析原理》，第二版，Universitext，Springer, Cham, 2014.[7] Jacques Dixmier，关于连通局部紧群的正则表示，《高等师范学校科学年刊》（4）2 (1969), 423–436. [8] , C^*-代数，North-Holland 数学文库，第 Vol. 15 卷，North-Holland Pub- lishing Co., 阿姆斯特丹-New York-Oxford, 1977.[9] Siegfried Echterhoff，关于诱导协变系统，《美国数学会会刊》108 3, 703 1990 706, 10 2307 2047790 ( ), no. – DOI .才.[10]　　，关于某些群 C^*- 代数和交叉积代数中的极大素理想，《算子理论杂志》 23 (1990), no. 2, 317–338.[11]　　,Morita 等价的扭曲作用与 Packer-Raeburn 稳定化技巧的新版本，《伦敦数学会杂志》（2）50 (1994), no. 1, 170–186, DOI 10.1112/jlms/50.1.170. [12]　　, 阿贝尔扭曲协变系统中诱导与限制的对偶性，《剑桥哲学会数学学报》116 (1994), no. 2, 301–315, DOI 10.1017/S0305004100072595. [13]　　, 连续迹交叉积，《美国数学会回忆录》123 (1996), no. 586, viii+134, DOI 10.1090/memo/0586. [14] Siegfried Echterhoff、Wolfgang Lück、N. Christopher Phillips 和 Samuel Walters，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的有限子群作用下无理旋转代数交叉积的结构，《纯粹与应用数学杂志》639 (2010), 173–221, DOI 10.1515/CRELLE.2010.015.[15] Siegfried Echterhoff 和 Jonathan Rosenberg，具有常值 Mackey 障碍的阿贝尔群作用之 Mackey 机器的精细结构，《太平洋数学杂志》170 (1995), no. 1, 17–52.[16] Caleb Eckhardt，由几乎幂零群的表示生成的 C*- 代数，《数学进展》 444 (2024), 论文编号 109628, 15, DOI 10.1016/j.aim.2024.109628. [17] James Glimm，局部紧变换群，《美国数学会汇刊》101 (1961), 124–138, DOI 10.2307/1993415.

[18] Elliot C. Gootman 和 Aldo J. Lazar，阿贝尔群作用下 I 型 AF 代数的交叉积，《以色列数学杂志》56 (1986), no. 3, 267–279, DOI 10.1007/BF02782937. [19] Philip Green，扭曲协变代数的局部结构，《数学学报》140 (1978), no. 3-4, 191–250, DOI 10.1007/BF02392308. [20] ，印模代数的结构，《函数分析杂志》36 1, 88 1980 104, 10 1016 0022 1236 80 90108 1 ( ), no. – DOI . / - ( ) - .[21] Zhuofeng He，高维非交换环面上的某些有限阿贝尔群作用，《明斯特数学杂志》12 (2019), no. 2, 473–495, DOI 10.17879/53149722293. [22] Ja A. 和 Lee Jeong Jae Hyup，作用于高维非交换环面的有限群，《函数分析杂志》268 (2015), no. 2, 473–499, DOI 10.1016/j.jfa.2014.10.010. [23] Eberhard Kaniuth，群代数中的主理想，《数学月刊》93 4, 293 1982 10 1007 01295230 ( ), no. –302, DOI . / BF . [24] Adam Kleppner，阿贝尔群上的乘子，《数学年刊》158 (1965), 11–34, DOI 10.1007/BF01370393. [25] ，乘子与射影表示的连续性和可测性，《函数分析杂志》17 (1974), 214–226, DOI 10.1016/0022-1236(74)90012-3.[26] Deane Montgomery 和 Leo Zippin，《拓扑变换群》，Interscience Publishers, 纽约-伦敦, 1955.[27] Calvin C. Moore 和 Jonathan Rosenberg，具有 T_1 本原理想空间的群，《函数分析杂志》 22 (1976), no. 3, 204–224, DOI 10.1016/0022-1236(76)90009-4. [28] Judith A. Packer 和 Iain Raeburn， C^*-代数的扭曲交叉积，《剑桥哲学会数学学报》106 (1989), no. 2, 293–311, DOI 10.1017/S0305004100078129.[29] Detlev Poguntke，有限扩张局部紧群的本原理想空间，《数学档案》（巴塞尔）28 (1977), no. 2, 133–138, DOI 10.1007/BF01223902.[30] ，二步幂零群与连通李群的群 C^*-代数的简单商，《高等师范学校科学年刊》（4）16 (1983), no. 1, 151–172. [31] L. Pukanszky，连通李群的特征，《数学学报》133 (1974), 81–137, DOI 10.1007/BF02392143. [32] Iain Raeburn 和 Dana P. Williams，Morita 等价与连续迹 C^*-代数，《数学调查与专著》，第 60 卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯, 1998. [33] Marc A. Rieffel， C^*-代数的诱导表示，《数学进展》13 (1974), 176–257, DOI 10.1016/0001-8708(74)90068-1.[34] ，群扩张的酉表示；Mackey 和 Blattner 理论的代数方法，《分析研究》，1979, pp. 43–82.[35] O Ungermann，关于局部拟紧几乎豪斯多夫 G-空间的 Glimm 定理（2016）。arXiv:1202:5018v2. [36] Dana P. Williams， C^*-代数的交叉积，《数学调查与专著》，第 134 卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯, 2007. 电子邮箱： echters@uni-muenster.de

数学研究所，明斯特大学，爱因斯坦街62号，明斯特48149，德国