arXiv:2601.14117v1 [math.DG] 20 Jan 2026

标量刚性浸没是黎曼乘积

Oskar Riedler 和 Thomas Tony

摘要

根据 Llarull、Goette–Semmelmann 以及第二位署名作者的研究，标量刚性映射是黎曼浸没。本文证明，它们本质上是底流形与里奇平坦纤维的黎曼乘积。作为应用，我们得到一个 Llarull 型定理，适用于映入由非负曲率算子流形与正里奇曲率流形构成的乘积、且目标还包含某个可扩张流形的非零度映射。证明基于狄拉克算子的旋量几何，并分析了克利福德乘法与曲率算子表示论之间的联系。

关键词 *ds*— 标量曲率 • 比较几何 • 狄拉克算子 • 黎曼浸没 • 曲率算子 or

1 引言与主要结果

标量曲率比较几何中的一个著名结果是 Llarull 的刚性定理[Lla98]。该定理指出，任意一个面积极不增的光滑非零度映射 $f\colon M \to S^n$ 从一个闭连通自旋流形 M（其维数为 $n \geq 3$，且标量曲率$_M \geq n(n-1)$）到圆球面的映射，必然是一个等距变换。该定理有助于理解一个普遍问题：黎曼流形的标量曲率下界如何约束其整体几何。

Llarull [Lla96] 将其经典刚性定理推广到一类定义在不同维数流形之间的比较映射。具体而言，任意一个面积不增的光滑映射 $f\colon M \to S^{n}$^，若其 A-度非零，其中 M 是一个闭连通自旋流形，维数为 m，且 scal$_M \geq n(n-1)$，则该映射本身就是一个黎曼浸没，并且 scal$_M = n(n-1)$。Goette 和 Semmelmann [GS02, Theorem 2.4] 将圆球面替换为某个曲率算子非负、欧拉示性数非零且 scal$_N > 2$Ric > 0的闭连通黎曼流形 N。第二作者 [Ton25b, Theorem A] 通过将对 A-度的条件替换为一个涉及高映射度的限制较弱的条件，推广了这一刚性定理 ^。

前面的讨论表明，标量刚性映射必须是黎曼浸没。虽然黎曼浸没这一类映射包含丰富多样且有趣的几何例子，但目前已知的标量刚性映射，除本质上为黎曼乘积的情形外，别无其他。本文的主要目的是证明情况总是如此（定理 A）。这推广了 [GS01 的定理 0 中关于乘积刚性的结果。2], 该结果证明了以 $\mathbb{CP}^n$ 为目标的比较映射具有乘积刚性。

定理 A。 设（N, g_N）是一个曲率算子非负且满足$\mathrm{Ric}_N > 0$的闭连通黎曼流形，并设 $f\colon M \to N$ 是从满足下列条件的闭连通黎曼流形（M, g_M）出发的光滑自旋映射

$$\chi(N) \cdot \deg_{\mathrm{hi}}(f) \neq 0 \in \mathrm{KO}_*(\mathrm{C}^*\pi_1(M)). \tag{1.1}$$

假设 标量曲率$_M \geq$标量曲率$_N \circ f$且 $g_M \geq f^* g_N$。那么存在一个闭且连通的里奇平坦流形 (F, g_F) 使得

$$(M, g_M) \cong (N, g_N) \times (F, g_F) \quad \textit{(locally isometric)} \tag{1.2}$$

且 f 由到第一因子的投影给出。此外，如果 标量曲率$_N > 2\mathrm{Ric}_N > 0$，那么即使我们仅在 $\Lambda^2 TM$ 上假设 $g_M \geq f^* g_N$，刚性结论仍然成立。

在定理 A中，若两个黎曼流形配备提升的黎曼度量后，其万有覆盖等距，则称它们局部等距；若映射 f 称为自旋，则其第一和第二 Stiefel–Whitney 类满足 $w_1(TM) = f^* w_1(TN)$ 且 $w_2(TM) = f^* w_2(TN)$。其高映射度定义为映射 f 的正则值处纤维的自旋狄拉克算子，取值于ˆ流形 M (定义3.16)的米先科–福缅科丛扭曲后的指标。这是经典 A-度的推广。

例 1.1（局部黎曼乘积）。结论 M 局部等距于一个黎曼乘积，意味着其万有覆盖是一个黎曼乘积。若令$M = S^{2n} \times [0,1]/\sim$配备 $(x,0)$ 和 $\sim(-x,1)$，则映射

$$f : (S^{2n} \times [0,1]/\sim, g_{\mathrm{round}} + dt^2) \to (\mathbb{RP}^{2n}, g_{\mathrm{round}}), \qquad [(x,t)] \mapsto [x]$$

是满足定理A条件的一个映射，它仅局部等距于黎曼乘积，而非整体等距。

注 1.2（非平凡平行自旋子的存在性）。定理 A 中的 Ricci平坦流形 F 在一个有限黎曼覆盖上带有非平凡平行自旋子。先验而言，这比定理 A 中的陈述更强，尽管有人猜想所有 Ricci平坦自旋流形在一个有限黎曼覆盖上都带有非平凡平行自旋子。参见[Ton25a]中的讨论。在定理 A 的情形下，对于 f的某个正则值 p ，我们有 $F = f^{-1}(p)$。由于 f 的高映射度不为零，因此 F的罗森伯格指标非平凡 [（参见 Ton25b，命题 2.7]）。结合纤维 F 是 Ricci平坦的这一事实，由 [Ton25a，定理 A]可知存在这样的非平凡平行自旋子。

注记 1.3（非负曲率算子）。 标量刚性流形 N 这一类别——我们在其中表述定理 A ——包含于具有非负曲率算子和正里奇曲率的闭流形类中。许多数学家的工作已对这类流形进行了分类 [GM75； CT06； BW08]。它们局部等距于紧型对称空间的黎曼乘积、某些与标准复结构双全纯等价的 K¨ahler 度量，以及具有非负曲率算子的球面。

作为定理 A中乘积刚性的一项应用，我们将 Llarull刚性定理推广 [Lla98] 至某些 $N \times F$ 乘积形式的非零度映射 F，其中包括可扩张流形（推论 B）。这一推广延续了 [HSS24定理 1 的思路。1]——该定理研究形如 $M^n \to S^3 \times T^{n-3}$且满足 $4 \le n \le 7$的非零度映射——并将 Chow 最近提出的刚性定理 [Cho25 定理 A] 推广至所有偶数维（例 C ）。本文的方法完全基于狄拉克算子方法，而 Hao、Shi 和 Sun [HSS24]以及 Chow [Cho25]的证明则依赖于最小切片与旋量技术的结合，因此仅适用于低维情形。

推论 B. 设 $f\colon M \to N \times F$ 是一个非零度光滑映射，其中

- M 和 N 是闭连通黎曼自旋流形，
- N 具有非零欧拉示性数、非负曲率算子，且 $\mathrm{Ric}_N > 0$，并且
- F 是一个闭且连通的定向流形，且要么是（面积）可扩张的，要么是有理本质的，并且其基本群满足强*Novikov*猜想。

若 $g_M \ge (\mathrm{pr}_1 \circ f)^* g_N$ 且 $\mathrm{scal}_M \ge \mathrm{scal}_N \circ \mathrm{pr}_1 \circ f$，则 M 局部等距于黎曼乘积 $N \times T^k$，其中 T^k 是一个平坦环面，而$\mathrm{pr}_1 \circ f$ 由到第一因子的投影给出。

这里，有理本质的是指 F 的基本类在由万有覆盖的分类映射 $\mu\colon F \to B\pi_1(F)$ 诱导的映射 $H_*(F;\mathbb{Q}) \to H_*(B\pi_1(F))$ 下映为非零。若Novikov组装映射是有理单射，我们就称其基本群满足强*Novikov*猜想。

根据流形 F的假设，映射 $\mathrm{pr}_1 \circ f\colon M \to N$ 满足高映射度条件（见第 6节）。推论B 由定理 A 应用于映射 $\mathrm{pr}_1 \circ f\colon M \to N$即可得出。

例 C。 设 (M, g_M) 是一个维数为 $2n+k$ 的闭连通黎曼自旋流形，(S^{2n}, g_{round}) 是圆球面，(T^k, g_{flat}) 是平坦环面，并且

$$f\colon M \to S^{2n} \times T^k$$

存在一个面积不增且次数非零的光滑映射。若 标量曲率$_M \ge 2n(2n-1)$，则 $M = (S^{2n}, g_{round}) \times (T^k, g_{flat})$ 具有某个平坦度量 g_{flat}，且映射 f具有形式 $f(x,y) = (x, h(y))$，其中存在一个次数非零的 1- 利普希茨映射 h 。

注 1.4。 若推论 N 中的流形 B 满足 $\mathrm{scal}_N > 2\mathrm{Ric}_N > 0$，则推论 B 中的刚性结论B仍然成立，即使对黎曼度量的假设仅要求作用于二向量时亦然。

注记 1.5. 请注意，流形 F 在推论 B 中未配备度量，也不一定是自旋流形。自旋条件和几何限制仅适用于映射 $\mathrm{pr}_1 \circ f$，而不适用于映射 f。

备注 1.6. 推论B中的刚性结论 F 也成立，只要它是闭、连通且定向的，并且其基本类在以下复合映射下的像非零

$$H_*(F,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{ph}^{-1}} \mathrm{KO}_*(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{KO}_*(B\pi_1(F)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\nu} \mathrm{KO}_*(\mathrm{C}^*\pi_1(F)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

这里，第一个映射是（同调）庞特里亚金特征 ph 的逆映射，第二个映射是 $\mu\colon F \to B\pi_1(F)$ 在 K-同调中的诱导映射，第三个映射是有理诺维科夫组装映射 [参见Zei20，第 2] 节。有理本质的闭、连通、定向流形，若其基本群满足强Novikov猜想，按定义具有这一性质；根据 [HS06定理 1 的证明，(面积)可扩张流形也具有这一性质。4] 以及 [HS07定理 1。

在引言余下部分，我们将简要讨论定理 A 中方程 (1.1) 的指标理论条件，并给出一些满足该条件的其他例子。若方程 (1.1) 中关于高映射度的条件成立，则对映射 f 的每个正则值 p，自旋流形$f^{-1}(p)$ 的罗森伯格指标都不为零。闭连通自旋流形 F 的罗森伯格指标记为 $\alpha(F)$，它是用 F [Ros83] 的米先科–福缅科丛扭曲的 $\mathbb{C}l$ 线性自旋狄拉克算子的高指标。其非零性是目前已知的、对正标量曲率度量存在性最一般的指标理论障碍。对于许多类流形，其罗森伯格指标非零这一点早已为人所知。例如，若流形 F 可扩张或面积可扩张 [HS06；HS07], 具有非正截面曲率度量，或者若 F 是渐近的，且强Novikov猜想对其基本群 [Ros83]成立，则其罗森伯格指标均非零。在所有这些例子中，罗森伯格指标甚至在有理意义下也非平凡 [参见 Ton25b，例 5.8]。通过涉及罗森伯格指标而非高映射度的条件来检测 $\chi(N)\cdot\deg_{\mathrm{hi}}(f)$ 的非零性很有用。 [Ton25b，推论 5.6], 对这一关系作了总体论述，并由此得到以下例子。

例 1.7（定理 A中的指标理论条件）。设 M 和 N 是定理 A中所述的黎曼流形，且 F 是一个闭连通自旋流形。在下面的例子中，定理 A中的方程（1.1）所涉及的指标理论条件成立。分别参见 [Ton25b中的推论 5.6、例 5.8、推论 5.13 和例 5.10], 。

ˆ（1） f：具有非零 A-度的 $M \to N$ 光滑自旋映射，且 $\chi(N) \neq 0$。（2）pr_1：$N \times F \to N$满足 $\chi(N)\cdot\alpha(F) \neq 0 \in \mathrm{KO}_*(\mathrm{C}^*\pi_1(F))$。例如，当$\chi(N) \neq 0$ 且 F 具有有理非平凡的罗森伯格指标时，该条件成立，例如 F 是可扩张的。（3） N 是二连通的，且 f: $M \to N$ 是一个纤维丛，其典型纤维为满足$\chi(N)\cdot\alpha(F) \neq 0 \in \mathrm{KO}_*(\mathrm{C}^*\pi_1(F))$的 F。例如，当 $\chi(N) \neq 0$且 F具有有理非平凡的罗森伯格指标时，该条件成立。（4） N 的欧拉示性数为奇数，且 f: $M \to N$ 是一个光滑自旋映射，存在一个点 $p \in N$，使得 $f^{-1}(p)$ 同构于一个具有非零 Hitchin 不变量 [Hit74] 的单连通流形。此类流形的例子包括某些维数为 1 和 2 模 8 [Hit74 的异球面，第 4 节.3]。由于异球面不承认 Ricci平坦度量，定理 A 表明，在此情况下不存在黎曼度量 g_M 定义在 M 上，使得 $g_M \geq f^*g_N$ 和 $\mathrm{scal}_M \geq \mathrm{scal}_N \circ f$ 成立。

最后，我们指出，即使在 [GS02], 的情形下，指标理论条件对于实现刚性究竟有多大必要性，也完全不清楚。能否用关于 f纤维的某种合成条件取代指标条件？我们在以下问题中提出一个自然条件：

问题 1.8。 设(N, g_N)是一个具有非负曲率算子和正里奇曲率的闭黎曼流形，且(M, g_M)是一个闭黎曼流形。设$f\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$是一个浸没，使得

(1) 标量曲率$_M \geq$标量曲率$_N \circ f$且 f是1-*Lipschitz* 的。

(2) $f^{-1}(\{p\})$对任意 p都不允许存在正标量曲率度量。

是否存在这样的例子： f不是黎曼浸没，或者甚至 M 在 N上不局部等距于一个乘积?

备注 1.9。 众所周知，如果不对 f 施加某些全局拓扑条件，刚性结论并不成立，参见例如 [BZ25，定理 B]。因此，我们加入 f为浸没的条件。另见 [Gro23，第 139], [Gro21，第 97]，其中讨论了标量曲率极值性背景下的类似问题。

1.1 文章结构

本文的组织如下：在第 2 节中，我们概述定理 A 的证明，并在更简单的情形下突出说明主要思想。在第 3 节的预备知识中，我们给出有关黎曼浸没（第 3.1 节）和高指标理论（第 3.2 节）的主要定义与性质。在第 4 节中，我们构造定理 A 的证明所涉及的旋量丛，并回顾 f 是黎曼浸没的证明（第 4.1 节）。随后，我们建立证明所依据的逐点不等式（第 4.2 节）。在第 5 节中，我们运用这些逐点不等式。首先，我们在第 5.1 节证明 $\mathrm{Ric}_M = f^* \mathrm{Ric}_N$。然后，在第 5.2 节中，我们推导出涉及 N的曲率算子的 O'Neill 张量 A 和 T 的方程，并在第 5.3 节中研究该曲率算子的像的若干性质。前两个小节的结果在第 5.4 节中结合起来，以证明$f^{-1}(\{p\})$的平均曲率对所有 $p \in N$都消失。最后，在第 6 节中完成定理 A 和推论 B 的证明。

1.2 致谢

我们谨此感谢 Christoph B¨ohm 和 Rudolf Zeidler 所进行的有益讨论，以及他们对这项工作的关注。第二位署名作者感谢其导师 Rudolf Zeidler 的指导和持续支持。

由欧盟（欧洲研究理事会启动资助 101116001 – COMSCAL）[1] 以及德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）资助——项目编号 427320536 – 协同研究中心 1442；同时也由德国卓越战略卓越集群 2044 390685587 资助，项目为明斯特数学：动力学–几何–结构。

[1]不过，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的立场。欧盟和资助机构均不对此承担责任。

2 定理证明概要A

本节简要概述证明定理的主要步骤 A。为使表述简单明了，我们假设 N 的欧拉示性数和 A-度数映射 f 均不为零，而不采用方程（1.1）中涉及该映射的高映射度的更一般的指标理论条件 f。一般情形可采用与本情形类似的思路，并使用 [Ton25b]中发展的方法。

设 $f\colon M \to N$ 是定理A 中的一个光滑映射，并假设 N 的欧拉示性数 $\hat{}$ 以及 f 的 A-度均不为零。我们分别用 m 和 n 表示流形 M 和 N的维数。由于映射 f 是自旋的，不定向量丛（$TM \oplus f^*TN, g_M \oplus(-g_N)$)具有不定 Spin 结构，因此我们得到流形 M 上的一个 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,n}$-线性 Dirac 丛 $\mathcal{S}$，以及克利福德乘法

$$c\colon TM \to \mathrm{End}(\mathcal{S}) \quad \text{and} \quad \overline{c}\colon f^*TN \to \mathrm{End}(\mathcal{S}).$$

关于 $\mathcal{S}$ 的构造以及克利福德乘法 c和 c的性质，请参见例 c和 c。我们通过令TM) 和 End(f^*TN)，分别将克利福德乘法 c和 c扩展到 End(TM) 和 End(f^*TN) 上

$$c(v \otimes w^\flat) \coloneqq c(v) \cdot c(w), \qquad \overline{c}(f^*\,\overline{v} \otimes \overline{w}^\flat) \coloneqq \overline{c}(f^*\overline{v}) \cdot \overline{c}(f^*\overline{w})$$

对于 $v,\ w \in TM$,$\overline{\ }v,\ w \in TN$。通过上述识别 $\Lambda^2 TM \cong \mathfrak{so}(TM) \subset \mathrm{End}(TM)$，我们还得到一个由二向量给出的克利福德乘法（见记号 4.1）。如 [GS02], 中的狄拉克算子 $\mathcal{D}$ 作用于 $\mathcal{S}$ 满足

$$\mathrm{ind}(D) = \chi(N) \cdot \deg_{\hat{A}}(f) \neq 0 \quad \text{and} \tag{2.1}$$

$$\mathcal{D}^2 = \nabla^*\nabla + \underbrace{\tfrac{1}{4}\,\mathrm{scal}_M + \tfrac{1}{16}\sum_\alpha \Big(c(L\overline{\omega}_\alpha)^2 + \overline{c}(f^*\overline{L\overline{\omega}_\alpha})^2\Big)}_{\geq\ \frac{1}{4}(\mathrm{scal}_M - \mathrm{scal}_N \circ f)\ \geq\ 0} + \underbrace{\sum_\alpha -\big(c(L\overline{\omega}_\alpha) - \overline{c}(f^*\overline{L\overline{\omega}_\alpha})\big)^2}_{\geq\ 0.} \tag{2.2}$$

这里，$\overline{\ }\{\omega_\alpha\}$ 表示 $\Lambda^2 TN$的局部标准正交标架，L是 N的曲率算子的平方根，而 $L\omega_\alpha$定义为 $\big(\Lambda^2 \mathrm{d}f\big)^T L\omega_\alpha$。

由方程 (2.1) 可知，存在一个非平凡的光滑截面 u，属于丛 S，且满足$\mathcal{D}u = 0$。如 [GS02], 所示，由方程 (2.2) 的前几项可得，截面 u 是平行的，并且映射 f 是一个黎曼浸没，其标量曲率满足 $\mathrm{scal}_M = \mathrm{scal}_N \circ f$。由方程 (2.2) 的最后一项可得

$$(c(\omega) - \overline{c}(f^*\overline{\omega}))u = 0 \tag{2.3}$$

对所有$\overline{\ }\omega \in \mathrm{im}\,\mathcal{R}_N$，其水平提升为 ω。方程 (2.3) 在 [GS02], 中未被使用，但该方程是我们研究的出发点。

我们的目标是证明黎曼浸没 f 在局部上是黎曼乘积。为此，我们将证明所谓的 O'Neill 张量 A，T 在 f 上消失。这些张量本质上描述了 f 的水平分布 $\mathcal{H}$ 和垂直分布 $\mathcal{V}$ 偏离平行状态的程度。

通过对方程（2.3）求协变导数，我们得到涉及张量 A，T 的逐点关系。为便于阅读，以下用（$c-c$）（ω）表示 c（ω） $-c$（$f^*\Lambda^2\mathrm{d}f\,\omega$），其中 $\omega\in\Lambda^2TM$。由于 c，c和 u均为平行的，计算协变导数相对简单，可得：

引理 2.1。对于每个点 $p\in M$，存在一个非平凡的 $u\in\mathcal{S}_p\cong\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,\,n}$ 以及一个线性映射 B: $T_pM\to\mathrm{End}\big(\Lambda^2\mathcal{H}_p\big)$，使得

$$(1)\ c(T_U^*\cdot\omega+A_U^*\cdot\omega-\omega\cdot A_U^*)u=0,\quad and\quad (2)\ c(2A_X\cdot\omega)u+(c-\bar{c})(B_X(\omega))u=0$$

对于所有垂直 $U\in T_pM$、所有水平 $X\in T_pM$，以及所有作为 $\mathcal{R}_N$的像中某个元素的水平提升的 $\omega\in\Lambda^2T_pM$，均成立。这里，$\cdot$表示线性映射的乘积。

这里 T_U^*和 A_X是线性映射 $\mathcal{H}_p\to\mathcal{V}_p$，并且我们将 ω视为 $\mathrm{End}(T_pM)$ 中的一个元素。关于 3.1 节中所使用的 A、T、A^*、T^* 的精确定义和关系，特别是定义 3.5 和引理3.11，请参见该节。相比之下，线性映射 B的具体形式对于后续所有讨论都无关紧要。

现在我们解释如何利用方程（2.3）来加强引理 2.1中的关系。令$\omega\in\Lambda^2T_pM$ 为曲率算子 $\mathcal{R}_N$的像中某个元素的水平提升。如果$\eta\in\mathrm{End}(T_pM)$ 中满足 $c(\eta)u=0$，则由方程（2.3）我们得到

$$(c-\bar{c})(\omega)\,c(\eta)u-c(\eta)\,(c-\bar{c})(\omega)u=0. \tag{2.4}$$

通过简单计算（参见引理 5.7），利用 ω 的反对称性可得

$$(c-\bar{c})(\omega)\,c(\eta)-c(\eta)\,(c-\bar{c})(\omega)=-4\,c(\omega\cdot\eta-\eta\cdot\omega), \tag{2.5}$$

从而可以迭代地将方程 $c(\eta)u=0$ 提升为

$$c((\mathrm{ad}_{\omega_1}\circ\ldots\circ\mathrm{ad}_{\omega_\ell})(\eta))u=0 \tag{2.6}$$

对所有作为 $\mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$ 中元素的水平提升的 $\omega_1,\ldots,\omega_\ell$ 均成立。

暂且假设 N 是圆球面，或者更一般地，假设 N的曲率算子可逆。于是，由方程（$c-c$）（$B_X(\omega)$）$u=0$ （2.3）可得，我们可以消去这个恼人的项。回忆 A_X： $\mathcal{H}_p\to\mathcal{V}_p$ 并将方程（2.6）应用于引理 2.1的第（2）部分，得到

$$0=c((\mathrm{ad}_{\omega_1}\circ\ldots\circ\mathrm{ad}_{\omega_\ell})(A_X\omega_{\ell+1}))u=-c(A_X\cdot(\omega_1\cdot\ldots\cdot\omega_{\ell+1})^T)u$$

对任意 $\omega_1,\ldots,\omega_{\ell+1}\in\Lambda^2\mathcal{H}_p\cong\mathfrak{so}(\mathcal{H}_p)$ 均成立。不过，我们可以将任意线性映射 $\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p$ 写成 $\mathfrak{so}(\mathcal{H}_p)$ 中元素的乘积的线性组合。特别地，对任意 $X,Y\in\mathcal{H}_p$，我们有

$$0=c(A_X\cdot YY^T)u=c(A_XY)c(Y)u. \tag{2.7}$$

现在，如果 $A_XY\neq0$，那么 $c(A_XY)$ 和 $c(Y)$ 均可逆，方程 (2.7) 显然会导致矛盾。我们发现，对于所有水平的 X，Y，都有 $A_XY=0$，因此 $A=0$。引理 2.1 的第 (1) 部分于是简化为 $c(T_U^*\cdot\omega)u=0$。接着重复前面的步骤，发现对于所有垂直的 U 和水平的 X，都有 $T_U^*X=0$，从而得到 $T=0$。结合 $A=T=0$，我们便证明了 f 局部上是一个黎曼乘积（假设 N 的曲率算子可逆）。

现在考虑一般 N 的情形。我们首先说明如何消去引理 2.1 第 (2) 部分中的 $(c-c)(B_X(\omega))u$ 项。与方程 (2.4)、(2.5)、(2.6) 非常类似的计算，将关系 $(c-c)(\omega)u=0$ 从 $\omega\in(\Lambda^2\mathrm{d}f)^T(\mathrm{im}\ \mathcal{R}_N)\subseteq\Lambda^2\mathcal{H}_p$ 推广到由该像生成的李代数，参见命题 5.5。将这个李代数记为 $\mathfrak{g}$，我们可以假设 $B_X(\omega)$ 的取值属于 $\mathfrak{g}^\perp\subseteq\Lambda^2\mathcal{H}_p$（因为在引理 2.1 中，与 $\mathfrak{g}$ 相切的部分将取值为 0）。

现在将伴随表示ω-链（如方程（2.4）–（2.6）中所示，参见引理 5.9）应用于引理 2.1 (2) 的一部分，可得

$$c((\mathrm{ad}_{\omega_1}\circ\ldots\circ\mathrm{ad}_{\omega_\ell})(2A_X\cdot\omega))u+(c-\bar{c})((\mathrm{ad}_{\omega_1}\circ\ldots\circ\mathrm{ad}_{\omega_\ell})(B_X(\omega)))u=0 \tag{2.8}$$

对所有 $\omega_1,\ldots,\omega_\ell\in\mathfrak{g}$，以及 ω（其为 $\mathrm{im}\ \mathcal{R}_N$ 中某个元素的水平提升）。注意

$$(\mathrm{ad}_{\omega_1}\circ\ldots\circ\mathrm{ad}_{\omega_\ell})(A_X\cdot\omega)=(A_X\cdot\omega)(\omega_1\cdot\ldots\cdot\omega_\ell)^T,$$

也就是说，方程（2.8）中的第一项在伴随表示链作用下，按 $\mathfrak{g}$ 在$\mathcal{H}_p$上的表示变换，而第二项则按 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}^\perp$上的伴随表示变换。事实证明，条件 $\mathcal{R}_N\geq 0$、$\mathrm{Ric}_N>0$ 蕴含这两个表示互不相交（参见命题 5.17）。表示论中的一般事实是，此时可以找到 $\sum\prod$伴随表示ω_i的线性组合，由 $\mathfrak{g}$的伴随表示链构成，使得

$$\sum\prod\mathrm{ad}_{\omega_i}(A_X\cdot\omega)=A_X\cdot\omega,\qquad\sum\prod\mathrm{ad}_{\omega_i}(B_X(\omega))=0,$$

也就是说，我们可以分解方程（2.8），得到

$$0=c((\mathrm{ad}_{\omega_1}\circ\ldots\circ\mathrm{ad}_{\omega_\ell})(A_X\cdot\omega))u=-c(A_X\cdot(\omega_1\cdot\ldots\cdot\omega_\ell\cdot\omega)^T)u \tag{2.9}$$

对所有 $\omega_1,\ldots,\omega_\ell\in\mathfrak{g}$，以及 ω（其为 $\mathrm{im}\ \mathcal{R}_N$ 中某个元素的水平提升）。

为了处理方程（2.9），我们必须理解由 $\mathfrak{g}$ 生成的 $\mathrm{End}(\mathcal{H}_p)$ 的（结合）子代数。回想一下，当 N 是圆球面时，这个子代数恰好是整个 $\mathrm{End}(\mathcal{H}_p)$，因此我们可以得出结论：$A_XY=0$ 对所有 $X,Y\in\mathcal{H}_p$。一般情形稍微复杂一些。通常，$\mathcal{H}_p=\bigoplus_i V_i$ 可分解为 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示。关于这一分解，由 $\mathfrak{g}$ 生成的结合代数可分解为 $\bigoplus_i\mathcal{A}_i\subseteq\bigoplus_i\mathrm{End}(V_i)$。此外：

引理 2.2。对于每个 $\mathcal{A}_i\subseteq\mathrm{End}(V_i)$，以下情况必有其一：

(1) $\mathcal{A}_i=\mathrm{End}(V_i)$。(2) 存在一个 $\mathbb{R}$-线性等距变换 $\iota\colon V_i\to\mathbb{C}^k$，其中 k 满足 $\mathcal{A}_i=\iota^*\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^k)$，也就是说，$\mathcal{A}_i$由 V_i 上的所有复线性映射构成。于是，复单位元 $I\in\iota^*\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^k)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个元素。

引理 2.2 中描述的分解是曲率算子 $\mathcal{R}_N$ 具有非退化 Ricci 张量这一事实的抽象推论，参见命题 5.12和5.13。

现在，若 $Y \in V_i \subseteq \mathcal{H}_p$，其中 V_i 属于引理 2.2 中描述的第一类，则可以像之前一样证明，对于所有 $X \in \mathcal{H}_p$，均有 $A_X Y = 0, T^*_U Y = 0$ 和 $U \in \mathcal{V}_p$。然而，若 V_i属于第二类，则引理 2.1 中的方程只能推出 $g_M(Y, H_p) = 0$，其中 $H_p = \mathrm{Tr}(T)$ 是纤维 $f^{-1}(\{f(p)\})$ 在 p 处的平均曲率，参见命题 5.31。结合这两种情况，目前我们至多只能得出：

推论 2.3. 对所有 $p \in M$，都有 $H_p = 0$，其中 H_p 表示纤维 $f^{-1}(\{f(p)\})$的平均曲率。

讨论黎曼浸没时，纤维的平均曲率处处为零是一项有用的性质。黎曼浸没的一个标准曲率恒等式为

$$\mathrm{Ric}_M(X,X) - \mathrm{Ric}_N(df X, df X) = -2\|A_X\|^2 - \|T^*_{(\cdot)}X\|^2 + g_M(\nabla_X H, X) \tag{2.10}$$

对所有水平向量 X 以及适当的范数 $\|\ \|^2$，参见定理 3.8。若有一个形如 $\mathrm{Ric}_M(X,X) \geq \mathrm{Ric}_N(\mathrm{d}fX, \mathrm{d}fX)$ 的不等式对所有水平 X 都成立，那么我们便可由 $H = 0$ 得出 $A = 0, T = 0$。现在我们将概述方程 (2.3) 如何实际上推出：对所有 $X \in TM$（不一定是水平的），都有 $\mathrm{Ric}_M(X,X) = \mathrm{Ric}_N(\mathrm{d}fX, \mathrm{d}fX)$:

回想一下，u 是平行的，因此对所有 $\omega \in \Lambda^2 TM$，都有 $R^{\mathcal{S}}_\omega u = 0$，这里

$$R^{\mathcal{S}}_\omega = c(\mathcal{R}_M(\omega)) - \bar{c}(f^*\mathcal{R}_N(\Lambda^2 \mathrm{d}f\,\omega)) \tag{2.11}$$

是旋量丛的曲率端同态 $\mathcal{S}$。方程（2.3）和（2.11）立即推出

$$c\big(\mathcal{R}_M\omega - (\Lambda^2\mathrm{d}f)^T \circ \mathcal{R}_N \circ \Lambda^2\mathrm{d}f\omega\big)\, u = \big(c(\mathcal{R}_M\omega) - \bar{c}(f^*\mathcal{R}_N\Lambda^2\mathrm{d}f\omega)\big)\, u = 0.$$

注意，$\mathcal{R}_M - (\Lambda^2\mathrm{d}f)^T \circ \mathcal{R}_N \circ (\Lambda^2\mathrm{d}f)$是 T_pM 上的一个曲率算子，其里奇曲率为 $\mathrm{Ric}_M - \mathrm{d}f^T\,\mathrm{Ric}_N\mathrm{d}f$；这里用到了 f是黎曼浸没这一点。若 ω_α是 $\Lambda^2 T_pM$ 的标准正交基，则 $X \in T_pM$ 由经典的缩并恒等式可得：

$$0 = \sum_\alpha c(\omega_\alpha \cdot X)\, c\big(\mathcal{R}_M\omega_\alpha - (\Lambda^2\mathrm{d}f)^T \circ \mathcal{R}_N \circ \Lambda^2\mathrm{d}f\omega_\alpha\big)\, u = -c(\mathrm{Ric}_M X - \mathrm{d}f^T\,\mathrm{Ric}_N\,\mathrm{d}fX)u,$$

由此得到

$$\mathrm{Ric}_M X = \mathrm{d}f^T\,\mathrm{Ric}_N\,\mathrm{d}fX \tag{2.12}$$

对 $X \in T_pM$ 任意成立。结合方程（2.12）和推论 2.3 以及方程（2.10），我们可以得出 $A = 0,\ T = 0$ 在一般情形下也成立。

最后，我们对将指标理论条件从非零的 $\hat{A}$-次数推广到 $\chi(N) \cdot 度_{\mathrm{hi}}(f) \neq 0$ 时需要作出的修改作一些说明。在这种情况下，我们用 M 的米先科–福缅科丛扭曲丛 $\mathcal{S}$。指标条件保证存在一族 $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ 近似调和截面，定义在 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{L}$[Ton25b]，上；也就是说，对于所有 $\ell \geq 1$，$\mathcal{D}^\ell u_\epsilon$ 在 L^2 意义下是 $O(\epsilon)$ 的。在证明中，我们按照 [Ton25b] 中的方法使用莫泽迭代，以获得涉及 u_ϵ 及其导数的逐点（即 L^∞）估计，参见命题 4.5。然后，我们按照此处概述的方式继续推导，不过我们的逐点方程仅在相差一个适当常数 r乘以 $O(\epsilon^r)$ 项的意义下成立。

3 预备知识

本节回顾与黎曼浸没相关的一些预备概念，以及高指标理论中的一些事实。第一小节第 3.1 节旨在确定黎曼浸没的 O'Neill 张量的记号约定，并列出证明中所需的关系。第二小节第 3.2 节简要介绍本文所用的高指标理论，并解释与本文情形相关的基本例子。

3.1 黎曼浸没

定义 3.1。 设 (M, g_M)、(N, g_N) 为黎曼流形。浸没映射 $f\colon M \to N$ 称为<淋>{style i d='13'>黎曼浸没，若对任意 $p \in M$，$\mathrm{d}_p f$ 在水平空间 $\ker(\mathrm{d}_p f)^{\perp} \subseteq T_p M$ 上的限制是到 $T_{f(p)}N$ 的等距变换。

定义 3.2。 设 (M, g_M)、(N, g_N) 为黎曼流形，且 $f\colon M \to N$ 是一个黎曼浸没。我们用 $\mathcal{V}$ 表示垂直分布 $\ker(\mathrm{d}f)$，用 $\mathcal{H}$ 表示其正交补，即水平分布。我们定义 f 的*O'Neill* 张量 如下：

(1) f 的可积张量 是线性映射 $A\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{V}$，定义为

$$g_M(A_X Y, U) = \frac{1}{2} g_M([X, Y], U)$$

X、Y 为水平向量场，且 U 为垂直向量场时。

(2) f 的第二基本形式 是由下式定义的线性映射 $T\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{H}$

$$g_M(T_U V, X) = g_M(\nabla_U V, X),$$

其中，X 是水平向量场，U，V 是垂直向量场，而 ∇ 是M的 Levi-Civita 联络。

注记 3.3。 A 和 T 实际上是张量，即它们在点 $p \in M$ 处的取值仅取决于相关向量场 X，Y，U，V在 p处的取值。

定理 3.4。 设(M, g_M)、(N, g_N) 为黎曼流形，且 $f\colon M \to N$是一个黎曼浸没。以下条件等价：

(1) 张量 A, T 均恒等于零。

(2) 映射 $f\colon M \to N$ 局部上是某个黎曼乘积的投影映射；也就是说，对于 $p \in N$中的任意点，都存在一个邻域 $U_p \subseteq N$和一个黎曼流形(F, g_F)，使得$f^{-1}(U_p) \cong (U_p \times F, g_N + g_F)$，且$f|_{f^{-1}(U_p)}$是到第一因子的投影。

(3) 对于 (M, g_M)，(N, g_N) (M, g_M)、(N, g_N) 的万有覆盖满足 $(M, g_M) = (N \times_{\sim} \sim \sim F,$ $g_N + g_F)$，其中某个黎曼流形为 (F, g_F)，且诱导映射 $f\colon M \to N$是到第一因子的投影。

(4) 存在一个黎曼流形 (F, g_F) 和一个群同态 $\rho\colon \pi_1(N) \to Isom(F)$，使得 $(M, g_M) \cong \left((\widetilde{N} \times F)/\sim, g_N + g_F\right)$，其中 $(p, q) \sim (\gamma(p)\ \rho(\gamma)(q))$ 对于 $\gamma \in \pi_1(N)$。

由于 A，T 是 (1，2) 张量，因此它们可以通过多种方式与其他张量缩并。这很容易导致记号上的问题。为了适应这类缩并，我们引入以下记号来表示与 A，T 相关的不同 (1，1) 张量：

定义 3.5. 设 $(M,\ g)$、$(N,\ g_N)$ 为黎曼流形，$f\colon M \to N$ 为黎曼浸没，且 $p \in M$。对于 X，$U \in T_pM$ 分别为水平和垂直的情形，我们定义张量 A_X，S_X，T_U^*，A_U^* 如下：

$$T_U^* : \mathcal{H}_p \to \mathcal{V}_p, \quad X \mapsto g_M(T_U(\cdot), X)^\sharp, \qquad S_X : \mathcal{V}_p \to \mathcal{V}_p, \quad U \mapsto T_U^* X,$$
$$A_X : \mathcal{H}_p \to \mathcal{V}_p, \quad Y \mapsto A_X Y, \qquad A_U^* : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_p, \quad X \mapsto g_M(A_X(\cdot), U)^\sharp.$$

注 3.6。设 X，$Y \in T_pM$ 为水平的，且 $U \in T_pM$ 为垂直的，则

$$g_M(T_U^* X, T_U^* Y) = g_M\left(U, \frac{S_X S_Y + S_Y S_X}{2} U\right).$$

注 3.7。张量 $S_X : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ 也称为纤维沿 X 方向的形算子 或魏因加滕映射 。若 b_i 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基，则 $\mathrm{Tr}(S_{(\cdot)})^\sharp = \sum_i \mathrm{Tr}(S_{b_i})\, b_i$ 为纤维的平均曲率。

定理 3.8 ([Bes87，命题 9。36])。设 $(M,\ g_M)$、$(N,\ g_N)$ 为黎曼流形，且 $f\colon\ M \to N$ 为黎曼浸没。那么

$$\mathrm{Ric}_M(X, X) = \mathrm{Ric}_N(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(X)) - 2\|A_X\|_2^2 - \|S_X\|_2^2 + g_M\left(\nabla_X^M H, X\right)$$

对所有水平向量 $X \in TM$ 均成立。这里，$\|\cdot\|_2$ 表示希尔伯特-施密特范数，而 H 表示纤维的平均曲率。

定理 3.8 结合备注 3.7 中平均曲率的表达式，可得以下推论。

推论 3.9。设 $(M,\ g_M)$、$(N,\ g_N)$ 为黎曼流形，且 $f\colon\ M \to N$ 为黎曼浸没。若

$$\mathrm{Ric}_M(X, X) = \mathrm{Ric}_N(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(X)) \quad and \quad \mathrm{Tr}(S_X) = 0$$

对所有水平向量 $X \in TM$ 均成立，则 A 和 T 恒等于零。

现在我们说明一些关系，这些关系允许我们通过导数来表示张量 A 和 T。特别是，引理 3.11 将在主要证明中用于将克利福德乘法与 O'Neill 张量 A、T 联系起来。

引理 3.10. 设 (M, g)、(N, h) 为黎曼流形，且 $f\colon M \to N$ 为黎曼浸没，$p \in M$。设 X、$U \in T_pM$ 分别为水平和垂直的，$\underline{Y}$ 为 TN 的一个截面，其水平提升为 $Y = df^T \underline{Y}$。则

$$\nabla_U Y = T_U^* Y + A_U^* Y, \qquad \nabla_X Y = A_X Y + \widehat{\nabla_{df X}^N \underline{Y}},$$

其中 $\widehat{\ }$ 表示 N 的一个截面的水平提升。

证明。 这些都是利用 Koszul 公式和李括号的函子性所进行的标准计算，参见例如 [ONe66, 引理 1 至 3]。 □

引理 3.11. 设(M,g)、(N,h)为黎曼流形， $f\colon M\to N$为黎曼浸没， $p\in M$。设 X、$U\in T_pM$分别为水平和垂直的，并设 ω为截面 $\omega\in\mathrm{C}^\infty\big(N,\Lambda^2TN\big)$的水平提升。则

$$\nabla_U(\omega)=-\operatorname{ad}_\omega(T_U^*-(T_U^*)^T+A_U^*),\qquad \nabla_X\omega=-\operatorname{ad}_\omega(A_X-A_X^T)+\widehat{\nabla^N_{\overline{X}}\overline{\omega}},$$

其中$\widehat{\ }$表示 N上截面的水平提升，伴随表示ω 表示与$\mathfrak{so}(T_pM)\cong\Lambda^2T_pM$中某个元素的交换子，而 ^{T}表示线性映射的转置。

证明。 回忆一下，T_U^*、 A_X的取值都在 $\mathcal{V}_p$中，因此

$$-\operatorname{ad}_\omega(T_U^*)=T_U^*\cdot\omega,\quad \operatorname{ad}_\omega((T_U^*)^T)=\omega\cdot(T_U^*)^T,\quad -\operatorname{ad}_\omega(A_X)=A_X\cdot\omega,\quad \operatorname{ad}_\omega(A_X^T)=\omega\cdot A_X^T$$

对于任意水平的 ω均成立。另一方面， A_U^* 是 $\mathcal{H}_p\to\mathcal{H}_p$上的反对称线性映射，因此

$$-\operatorname{ad}_\omega(A_U^*)=A_U^*\cdot\omega+\omega\cdot(A_U^*)^T.$$

现在，对于 Y、 Z的任意截面， TM它们是 X的水平提升时，$\overline{Y}$由引理 3.10可得

$$\begin{aligned}\nabla_U(Y\otimes Z^\flat)&=(T_U^*Y)\otimes Z^\flat+Y\otimes(T_U^*Z)^\flat+(A_U^*Y)\otimes Z^\flat+Y\otimes(A_U^*Z)^\flat\\&=T_U^*\cdot(Y\otimes Z^\flat)+(Y\otimes Z^\flat)\cdot(T_U^*)^T+A_U^*\cdot(Y\otimes Z^\flat)+(Y\otimes Z^\flat)\cdot(A_U^*)^T,\end{aligned}$$

由此可得引理的第一个关系。第二个关系同理可证。 □

3.2 $\mathcal{A}$-线性 Dirac 丛与高映射度

本节简要介绍高指标理论。我们定义线性于 C*-代数的 Dirac 丛（定义 3.12）及其诱导的狄拉克算子，概述它们最重要的性质，并研究两个相关例子：首先是由米先科–福缅科丛扭曲的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_m$-线性旋量丛（例 3.14）。其次是由自旋映射 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,n}$-线性 Dirac 丛 $f\colon M\to N$ 诱导得到的丛（例 3.15）。本节最后，我们定义自旋映射的高映射度（定义 3.16）。

关于（分次实）含幺 C*-代数、其实K理论以及 Hilbert C*-模的背景知识，请参见 [Mur90; Roe17; Lan95]。关于有限生成投射 Hilbert $\mathcal{A}$-模丛以及一阶 $\mathcal{A}$-线性微分算子的介绍，请参见[MF80; Ebe16; Sch05]。 $\mathcal{A}$-线性 Dirac 丛的定义 [参见 CZ23，定义 2.1] ，这是对 $\mathbb{C}\mathrm{l}$-线性 Dirac 丛的直接推广，后者见 [LM89，第二章 §7]。关于高指标理论、自旋映射和高映射度的更多细节，另请参见 [Ton25b]。

定义 3.12。 设 $\mathcal{A}$ 是一个分次实幺元 C*-代数，且 (M,g) 是一个维数为 m 的闭黎曼流形。一个分次实 $\mathcal{A}$-线性狄拉克丛 是一个丛 $\mathcal{S}\to M$ ，其纤维为有限生成射影分次实 Hilbert $\mathcal{A}$-模，并配备一个取值于 $\mathcal{A}$ 的内积，

度量联络，以及一个平行丛映射 $c\colon TM \to \mathrm{End}(\mathcal{S})$，满足 $c(v)$ 为奇、实、斜伴随且 $\mathcal{A}$-线性的，并且对所有 $v \in TM$，都有 $c(v)^2 = -g(v,v)$。分次和实结构必须与所有其他结构相容。由分次实 $\mathcal{A}$-线性狄拉克丛 $\mathcal{S}$ 诱导的 $\mathcal{A}$-线性狄拉克算子 定义为

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{S}}\colon \mathrm{C}^\infty(M,\mathcal{S}) \longrightarrow \mathrm{C}^\infty(M,\mathcal{S}), \quad \mathcal{D}u := \sum_{i=1}^{m} c(e_i)\nabla_{e_i} u.$$

这里 $e_1,\dots,e_m$ 表示 TM的局部标准正交标架。

事实与记号 3.13. 设 M 是一个闭黎曼流形， $\mathcal{A}$ 是一个分次实幺 C*-代数， $\mathcal{S}$ 是一个分次实 $\mathcal{A}$-线性 Dirac 丛。对于诱导的 $\mathcal{A}$-线性狄拉克算子 $\mathcal{D}$ ，有如下结论：

(1) $\mathcal{D}$ 是一个实奇椭圆、形式自伴的一阶 $\mathcal{A}$-线性微分算子 .

(2) $\mathcal{A}$-线性狄拉克算子 $\mathcal{D}$ 可扩张为一个自伴正则无界算子

$$\mathcal{D}\colon \mathrm{H}^1(M,\mathcal{S}) \to \mathrm{L}^2(M,\mathcal{S})$$

[Ebe16，定理 1。14]。这里 $\mathrm{L}^2(M,\ \mathcal{S})$ 和 $\mathrm{H}^1(M,\ \mathcal{S})$ 是分次实希尔伯特 $\mathcal{A}$-模，由分次实预希尔伯特 $\mathcal{A}$-模 $\mathrm{C}^\infty(M,\ \mathcal{S})$ 完备化而成，其上赋予 $\mathcal{A}$-值内积

$$\langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathrm{L}^2} := \int_M \langle \bullet, \bullet \rangle_p \, \mathrm{d}\mu(p) \quad \text{and} \quad \langle \bullet, \bullet \rangle_{H^1} := \langle \nabla \bullet, \nabla \bullet \rangle_{\mathrm{L}^2} + \langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathrm{L}^2},$$

分别。这里我们用 $\langle \bullet, \bullet \rangle_p$表示 $\mathcal{S}$在点 $p \in M$处的纤维中的 $\mathcal{A}$-值内积。在此语境下，我们定义 $|\bullet|_p^2 := \langle \bullet, \bullet \rangle_p$, $\|\bullet\|_p^2 := \|\langle \bullet, \bullet \rangle_p\|_{\mathcal{A}}$，以及 ($\mathcal{A}$值) L^2范数如下

$$|\bullet|_{\mathrm{L}^2}^2 := \langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathrm{L}^2} \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad \|\bullet\|_{\mathrm{L}^2}^2 := \big\|\langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathrm{L}^2}\big\|_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}.$$

(3) 由于流形 M 是闭的，分次实自伴正则算子 $\mathcal{D}\colon \mathrm{H}^1(M,\mathcal{S}) \to \mathrm{L}^2(M,\mathcal{S})$ 的泛函演算在 K C*-代数 $\mathcal{A}$ [Ebe16]的 0 次实 高指标为其 $\mathcal{D}$ -理论群的谱图景中定义了一个类，并记作 $\mathrm{ind}(\mathcal{D}) \in \mathrm{KO}_0(\mathcal{A})$。

例 3.14（$\mathbb{C}\mathrm{l}_m$-线性旋量丛与罗森伯格指标）。 设 M 是一个维数为 m 的闭连通黎曼自旋流形。分次实 *C $\mathbb{C}\mathrm{l}_m$ -代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_m$ 由复克利福德代数 [Ebe16第 4]，页中给出的范数定义，并赋予其自然分次与实结构。我们定义流形 M上的以下两个丛。

- $\mathbb{C}\mathrm{l}_m$-线性旋量丛 $\mathcal{S}M$ 定义为与 $\mathrm{Spin}(m)$-主丛相关联的向量丛，其对应的表示 $\mathrm{Spin}(m) \to \mathbb{C}\mathrm{l}_m$ 由左乘给出。它定义了一个分次实 $\mathbb{C}\mathrm{l}_m$-线性 Dirac 丛。

- 令 $\mathrm{C}^*\pi_1(M)$ 表示流形 M 的基本群的最大群 C*-代数，并赋予平凡分次及其自然实结构。流形 M 的*Mishchenko–Fomenko* 丛 $\mathcal{L}(M)$ 定义为

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}(M) := \widetilde{M} \times_{\pi_1(M)} \mathrm{C}^*\pi_1(M).$$

这里 $\widetilde{\ }$ $\pi_1(M)$ 通过左乘作用于 $\mathrm{C}^*\pi_1(M)$，而 M 表示 M 的万有覆盖。米先科–福缅科丛定义了一个平坦的、分次实有限生成投射 Hilbert $\mathrm{C}^*\pi_1(M)$-模丛 [MF80]。

我们将 $\mathbb{C}\mathrm{l}_m$-线性旋量丛与米先科–福缅科丛作张量积，得到一个分次实 $\mathbb{C}\mathrm{l}_m \otimes \mathrm{C}^*\pi_1(M)$-线性 Dirac 丛 $\mathcal{S}M_{\mathcal{L}}$。其诱导的$\mathbb{C}\mathrm{l}_m \otimes \mathrm{C}^*\pi_1(M)$-线性狄拉克算子的高指标称为流形 的罗森伯格指标 M [Ros83]。

例 3.15（Spin 映射及其 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,n}$-线性旋量丛 [Ton25b，第 2 节。2]）。设 (M, g_M) 和 (N, g_N) 分别为维数为 m 和 n 的闭连通黎曼流形，并且 $f\colon M \to N$ 是一个光滑 Spin 映射。也就是说，第一和第二 Stiefel–Whitney 类满足

$$\omega_1(TM) = f^*\omega_1(TN) \quad \text{and} \quad \omega_2(TM) = f^*\omega_2(TN).$$

由于 f是自旋的，配备不定度量 $g_M \oplus (-f^*g_N)$ 的向量丛 $TM \oplus f^*TN$具有不定 Spin 结构。这是沿映射 $\lambda\colon \mathrm{Spin}(m,n) \to \mathrm{SO}(m,n)$ [Bau81]，将 $TM \oplus f^*TN$ 的正交标架 $\mathrm{SO}(m,n)$-主丛提升为 $\mathrm{Spin}(m,n)$-主丛。$\mathrm{Spin}(m,n)$-主丛产生一个分次实 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,n}$-线性 Dirac 丛 $\mathcal{S}$；它来自 $\mathrm{Spin}(m,n)$ 在 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,n}$ 上由左乘给出的表示，以及克利福德乘法

$$c\colon TM \to \mathrm{End}(\mathcal{S}) \quad \text{and} \quad \bar{c}\colon f^*TN \to \mathrm{End}(\mathcal{S})$$

[Ton25b，第 2 节.2]。这里 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,n}$ 是由 $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ 生成的分次实 C*-代数，其中 $(v,w)^* = (-v,w)$，并且

$$(v,w)(v',w') + (v',w')(v,w) = -2\langle v, v'\rangle_{\mathrm{euc}} + 2\langle w, w'\rangle_{\mathrm{euc}}$$

对所有 $(v,\ w)$、$(v',\ w') \in \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ [参见 Ebe16，第 4] 页。逐纤维地，Clifford 乘法 c和 $\bar{c}$ 由映射 $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n \to \mathrm{End}(\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,\ n})$ 通过左乘诱导，因此

- $c(v)$ 是斜伴随的，并且对所有 $v \in TM$，$c(v)^2 = -g_M(v,\ v)$，且
- $\bar{c}(w)$ 是自伴的，并且对所有 $w \in f^*TN$，$c(w)^2 = g_N(w,\ w)$。

局部地，丛 $\mathcal{S}$ 同构于 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,\ 0}$-线性旋量丛 $\mathcal{S}M$ 与带有张量联络的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{0,\ n}$-线性旋量丛 $\mathcal{S}N$ 的分次张量积。

定义 3.16（高映射度 [Ton25b，定义 5。2]）。设 $f\colon M \to N$ 是两个闭连通黎曼流形之间的自旋映射 M 和 N。的高映射度定义为自旋流形 $\mathbb{C}\mathrm{l}_k$-线性狄拉克算子的高指标，其中该算子 $M_p = f^{-1}(p)$ 被流形 M的米先科–福缅科丛扭曲：

$$\deg_{\mathrm{hi}}(f) := \mathrm{ind}\big(\mathcal{D}_{\mathcal{S}M_p \otimes \mathcal{L}(M)|_{M_p}}\big) \in \mathrm{KO}_0(\mathbb{C}\mathrm{l}_k \otimes \mathrm{C}^*\pi_1(M)) \cong \mathrm{KO}_k(\mathrm{C}^*\pi_1(M)).$$

这里 $p \in N$表示映射 f, k:=$\dim(M) - \dim(N)$ 的一个正则值，而 $\mathcal{S}M_p$是自旋流形 M_p上的$\mathbb{C}\mathrm{l}_k$-线性旋量丛。

4 设置与逐点估计的推导

本节给出定理 A 的证明框架。我们证明映射 $f\colon M \to N$如定理 A 所述，是一个黎曼浸没（第4.1节），并建立 M 和 N 的克利福德乘法与局部几何量之间的逐点估计（第 4.2节）。

在本节中，设 (M, g_M) 和 (N, g_N) 分别为维数为 m 和 n的闭连通黎曼流形，并设 $f\colon M \to N$ 是一个光滑自旋映射，满足$\chi(N) \cdot \deg_{\mathrm{hi}} f \neq 0$。此外，我们假设 N的曲率算子非负，$\mathrm{scal}_M \geq \mathrm{scal}_N \circ f$，且满足以下条件之一

- $g_M \geq f^* g_N$ 且 $\mathrm{Ric}_N > 0$，或
- $g_M \geq f^* g_N$在 $\Lambda^2 TM$上且 $\mathrm{scal}_N > 2\,\mathrm{Ric}_N > 0$。

这里 $\chi(N)$ 表示 N的欧拉示性数，而 $\deg_{\mathrm{hi}}(f)$ 表示 f的高映射度，回顾定义 3.16。

4.1 设置与回顾

记 $\mathcal{A}$ 为分次实 C*-代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,n} \otimes \mathrm{C}^*\pi_1(M)$，其范数记为 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$。自旋映射 f 给出了如例 3.15 中的 $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m,n}$-线性 Dirac 丛 $\mathcal{S}$。我们用 M 的平坦米先科–福缅科丛扭曲丛 $\mathcal{S}$，得到一个 $\mathcal{A}$-线性 Dirac 丛$\mathcal{S}_{\mathcal{L}} := \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}(M)$，以及克利福德乘法

$$c\colon TM \to \mathrm{End}(\mathcal{S}_{\mathcal{L}}) \quad \text{and} \quad \bar{c}\colon f^*TN \to \mathrm{End}(\mathcal{S}_{\mathcal{L}}).$$

我们将诱导的 $\mathcal{A}$-线性狄拉克算子记为 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$。

设 e_1、……、e_m 为 TM 的局部 g_M-正交标架，且 e_1、……、e_n 为 TN 的局部 g_N-正交标架，使得存在非负函数 μ_1、……、$\mu_{\min(m,n)}$，满足

$$\mathrm{d}f(e_i) = \begin{cases} \mu_i \bar{e}_i & \text{if } i \leq \min(m,n) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

通过考虑 $\mathrm{d}f$ 的奇异值分解即可做到这一点。我们采用以下记号：

记号 4.1. (1) 设 $\{\omega_\alpha\} = \{e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$，类似地，设 $\{\omega_\beta\}$ 分别为 $\Lambda^2 TM$ 和 $\Lambda^2 TN$ 的局部正交标架。

(2) 我们定义 Clifford 乘法

$$c\colon \mathrm{End}(TM) \to \mathrm{End}(\mathcal{S}_{\mathcal{L}}) \quad \text{and} \quad \bar{c}\colon \mathrm{End}(f^*TN) \to \mathrm{End}(\mathcal{S}_{\mathcal{L}})$$

via

$$c(A) := \sum_{i,j} g_M(Ae_i, e_j) c(e_i) c(e_j)$$

对 c也同理。通过这些识别

$$\Lambda^2 TM \cong \mathfrak{so}(TM) \subseteq \mathrm{End}(TM), e_i \wedge e_j \to e_i \otimes e_j^\flat - e_j \otimes e_i^\flat$$

对 f^*TN也同理，由此我们还可以定义二向量[1]的克利福德乘法。这里 $\mathfrak{so}$表示特殊正交群的李代数，由所有反对称自同态构成。

(3) 我们将 N 的曲率算子记为 $\mathcal{R}_N$，其平方根记为 L；由于 $\mathcal{R}_N \geq 0$，该平方根存在。此外，我们记

$$L\overline{\omega}_\alpha := \sum_\beta g_N\big(\overline{L}\overline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\beta\big)\omega_\beta.$$

注意，对于所有 $\omega \in \Lambda^2 TN$，都有$L\omega = \big(\Lambda^2 \mathrm{d}f\big)^T L\omega$。

的曲率算子是非负的，因此狄拉克算子 $\mathcal{D}_\mathcal{L}$ 满足[GS02第 1b 节] 中的下述薛定谔–利希涅罗维茨型公式。

Lem命题 4.2。 狄拉克算子 $\mathcal{D}_\mathcal{L}$ 满足薛定谔–利希涅罗维茨型公式

$$\mathcal{D}_\mathcal{L}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{scal}_M}{4} + \frac{1}{16}\sum_\alpha \Big(c(L\overline{\omega}_\alpha)^2 + \overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)^2 - \big(c(L\overline{\omega}_\alpha) - \overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big)^2\Big) \tag{4.1}$$

with

$$\sum_\alpha c(L\overline{\omega}_\alpha)^2 = -2\sum_{i,j}\mu_i^2\mu_j^2\big(R^{TN}_{ijji}\circ f\big) \quad \textit{and} \quad \sum_\alpha \overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)^2 = -2\,\mathrm{scal}_N \circ f. \tag{4.2}$$

证明。 由于米先科–福缅科丛是平坦的，由 [LM89定理 4.15 和 817]

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mathcal{L}^2 &= \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{scal}_M}{4} - \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l} g_N\big(R^{TN}_{\overline{e}_i,\overline{e}_j}\overline{e}_k, \overline{e}_l\big)c(e_i)c(e_j)\overline{c}(f^*\overline{e}_k)\overline{c}(f^*\overline{e_l})\\ &= \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{scal}_M}{4} + \frac{1}{8}\sum_{\alpha,\beta} g_N(\mathcal{R}_N\overline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\beta)c(\omega_\alpha)\overline{c}(f^*\overline{\omega}_\beta).\end{aligned}$$

与 [GS02], 相比，1/8 前的符号不同。这是因为在构造扭曲丛 $-f^*g_N$ 时，我们采用负定度量 $f^*\mathcal{S}N$ （参见例3.15）。利用 N 的曲率算子存在平方根这一事实，如[GS02第 1b 节]，可得方程（4.1）和方程（4.2）。

□

引理 4.3。 存在一族 u_ϵ 几乎 $\mathcal{D}_\mathcal{L}$-调和截面，定义于 $\mathcal{S}_\mathcal{L}$ 上，即存在一族$\{u_\epsilon\} \subset \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(M, \mathcal{S}_\mathcal{L})$，满足

$$\|u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} = 1 \quad \textit{and} \quad \|\mathcal{D}_\mathcal{L}^\ell u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} < \epsilon^\ell$$

对所有 $\epsilon > 0$ 以及所有 $\ell \geq 1$，均成立。

证明。 根据映射 f 在方程 (1.1) 中的指标理论假设，以及 [Ton25b，定理 5。4], 扭曲狄拉克算子 $\mathcal{D}_\mathcal{L}$ 的高指标满足

$$\mathrm{ind}(\mathcal{D}_\mathcal{L}) = \chi(N)\cdot \deg_{\mathrm{hi}}(f) \neq 0 \in \mathrm{KO}_*(\mathrm{C}^*\pi_1(M)).$$

由此可知 $\mathcal{D}_\mathcal{L}$ 不可逆，因此 [Ton25b，引理 3。2] 给出了一族几乎$\mathcal{D}_\mathcal{L}$-调和截面。

□

[1]该 c 此处的记号与 [GS02] 中的记号相差一个因子 2。我们有 $c(e_i \wedge e_j) = 2c(e_i)c(e_j)$。

薛定谔¨-利希纳罗维茨型公式，由引理4.2可得：

引理 4.4。 对于 u_ϵ 上的几乎 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$-调和截面族 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ ， 以下结论成立。

(1) $\|\nabla u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} < \epsilon$ 对所有 $\epsilon > 0$ 均成立。(2) 对于每个 $\ell \geq 2$ ， 存在常数 C ， 使得 $\left\|\nabla^\ell u_\epsilon\right\|_{\mathrm{L}^2} < C\sqrt{\epsilon}$ 对所有 $\epsilon \in (0,1)$ 均成立。 –

证明。由于 因为标量曲率$_M \geq$ 标量曲率$_N \circ f$， $\mathcal{R}_N \geq 0$，且 f 面积不增，由引理4. 2

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^2 \geq \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{scal}_M - \mathrm{scal}_N \circ f}{4} \geq \nabla^*\nabla.$$

由于 u_ϵ 几乎是 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$-调和的，对所有 $\epsilon > 0$ 均有 $\|\nabla u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} < \epsilon$ 。对于固定的 $\ell \geq 2$，存在常数 C ，使得

$$\|\nabla^\ell u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \left\|\left\langle (\nabla^*)^{\ell-1}\nabla^\ell u_\epsilon, \nabla u_\epsilon \right\rangle_{\mathrm{L}^2}\right\|_{\mathcal{A}} \leq \left\|(\nabla^*)^{\ell-1}\nabla^\ell u_\epsilon\right\|_{\mathrm{L}^2} \|\nabla u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} < C^2\epsilon$$

对所有 $\epsilon \in (0,\ 1)$。这里 $\nabla^*\colon\ \mathrm{C}^\infty(M,\ T^*M \otimes \mathcal{S}_{\mathcal{L}}) \to \mathrm{C}^\infty(M,\ \mathcal{S}_{\mathcal{L}})$ 表示 L^2-伴随表示 ∇。第二步由柯西-施瓦茨不等式得到，最后一步用到了第（1）部分以及

$$\left\|(\nabla^*)^{\ell-1}\nabla^\ell u_\epsilon\right\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|u_\epsilon\|_{H^{2\ell-1}} \leq C_1 \sum_{j=0}^{2\ell-1} \|\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^j u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2} < 2\ell C_1 =: C^2, \tag{4.3}$$

这对某个合适的常数 C_1 由基本椭圆估计 [参见 Ton25b，引理 2。5] 以及 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$-调和性几乎成立 u_ϵ。 □

对于 $u \in \mathrm{C}^\infty(M,\ \mathcal{S}_{\mathcal{L}})$ 我们通过以下方式定义 L^∞-范数 $\|u\|_\infty :=$ 最大值$_{p\in M}\|u\|_p$。按照 [Ton25b，引理 3 的证明，我们将 5] L^2-估计从 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^\ell u_\epsilon$和 $\nabla^\ell u_\epsilon$提升为 $\|\cdot\|_\infty$-范数估计，方法是采用莫泽迭代， [参见Ton25b，引理 3。4]。

命题 4.5。 令 u_ϵ 为几乎 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$-调和截面组成的族，且 $r :=$ $e^{-(m-1)\ln(2)/2}$。

(1) 对于每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$，L^∞-范数 $\nabla^\ell u_\epsilon$ 一致有界，且上界为某个常数 $nt.$

(2) 对每个微分算子 $P\colon \mathrm{C}^\infty(M, \mathcal{S}_{\mathcal{L}}) \to \mathrm{C}^\infty(M, \mathcal{S}_{\mathcal{L}})$，都存在一个常数 C，使得 $\|Pu_\epsilon\|_\infty \leq C\|Pu_\epsilon\|^r{}_{\mathrm{L}^2}$ 对所有 $\epsilon \in (0,\ 1)$均成立。

(3) 对每个 $\ell \geq 1$ ，都存在常数 C_1 和 C_2 ，使得

$$\|\mathcal{D}^\ell u_\epsilon\|_\infty < C_1\epsilon^r \quad and \quad \|\nabla^\ell u_\epsilon\|_\infty < C_2\epsilon^{r/2}$$

对所有 $\epsilon \in (0,\ 1)$均成立。

(4) Th存在一个 $\epsilon_0 \in (0,\ 1)$，使得$\|u_\epsilon\|_p^2 > (2\mathrm{vol}(M))^{-1}$对所有 $p \in M$以及所有 $\epsilon \in (0,\ \epsilon_0\quad)$.

证明。 设 u_ϵ 为一族几乎 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$-调和截面。第一部分由与方程（4.3）类似的考虑以及索伯列夫嵌入成立。设 P 为 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ 上某个阶为 k的微分算子。对于 $\epsilon > 0$ 以及某个态 ρ （属于 C^*-代数 $\mathcal{A}$），我们定义函数

$$f_{\epsilon,\rho}\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad p \to \rho\left(|Pu_\epsilon|_p^2\right)^{1/2}.$$

对所有 $p \in M$，我们得到，如同 [Ton25b 中引理 3 的证明那样。5],

$$f_{\epsilon,\rho}(p)\Delta f_{\epsilon,\rho}(p) \leq 4\rho\big(|\nabla^*\nabla P u_\epsilon|_p^2\big)\rho\big(|P u_\epsilon|_p^2\big) \leq \alpha f_{\epsilon,\rho}^2(p)$$

对于某个 $\alpha > 0$ 与 ϵ 以及态 ρ无关。在最后一步中，我们利用了：所有 ∞ 的协变导数的 L-范数 u_ϵ 直至 $k+2$ 阶，均由第 (1) 部分一致有界。莫泽迭代 [参见 Ton25b，引理 3。4] 可得存在常数 C_3 使得

$$\|P u_\epsilon\|_\infty \leq C_3 \|P u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2}^r$$

对所有 $\epsilon \in (0,1)$，这证明了第 (2) 部分。第 (3) 部分直接由第 (2) 部分、$\mathcal{D}_\mathcal{L}$-调和性近似 u_ϵ 以及引理 4.4得出。

剩下只需证明命题的第 (4) 部分。由 [Ton25b，引理 3。6], 可得存在常数 C_4 使得

$$\big\|\overline{u}_\epsilon - |u_\epsilon|_p^2\big\|_\mathcal{A} < C_4\epsilon^r \quad \text{with} \quad \overline{u}_\epsilon := \frac{1}{\mathrm{vol}M}\int_M |u_\epsilon|_q^2 \,\mathrm{d}\mu(q) \tag{4.4}$$

对所有 $\epsilon \in (0,1)$ 以及所有点 $p \in M$。对于 $\epsilon_0 := \min\big\{1, (2C_4\mathrm{vol}(M))^{-1/r}\big\}$，利用三角不等式的逆不等式和方程 (4.4)，即可得到所需的估计。

□

几乎 $\mathcal{D}_\mathcal{L}$调和截面 u_ϵ (引理4.3)族的存在，结合命题4.5 得出以下刚性结论：

定理 4.6 ([GS02；Ton25b，定理 2.4 和定理 A])。 映射 f 是一个黎曼浸没，具有 标量曲率 $_M$ =标量曲率$_N \circ f$ ，而引理 ¨中的薛定谔-利希纳罗维奇型公式 4.2可化为

$$\mathcal{D}_\mathcal{L}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{16}\sum_\alpha -\big(c(L\overline{\omega}_\alpha) - \overline{c}\big(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha\big)\big)^2. \tag{4.5}$$

ˆ证明。 假设 A度非平凡的 f 经典版本由 Goette 和 Semmelmann 证明 [GS02], ，一般版本则由第二位作者在 [Ton25b第 5]节中证明。论证可概述如下。

由引理 4.2 结合 $g_M \geq f^*g_N$ 和 $\mathcal{R}_N \geq 0$

$$\mathcal{D}_\mathcal{L}^2 \geq \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{scal}_M}{4} - \frac{1}{8}\sum_{i,j}\mu_i^2\mu_j^2\big(R^{TN}_{ijji}\circ f\big) - \frac{\mathrm{scal}_N\circ f}{8} \tag{4.6}$$

$$\geq \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{scal}_M - \mathrm{scal}_N\circ f}{4}. \tag{4.7}$$

几乎 $\mathcal{D}_\mathcal{L}$调和截面 u_ϵ (引理 4.3)族的存在，满足命题4.5 中的估计，结合方程（4.7），得出极值性结论 $\mathrm{scal}_M = \mathrm{scal}_N \circ f$。类似地，由方程（4.6）可得

$$\sum_{i,j}\mu_j^2\mu_j^2\big(R^{TN}_{ijji}\circ f\big) = \mathrm{scal}_N\circ f, \tag{4.8}$$

由此可得，如 [GS02，第 1.c 节] $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 1$所示。换言之， f是一个黎曼浸没。

尚需证明方程（4.5）。根据方程（4.2），$\operatorname{scal}_M = \operatorname{scal}_N \circ f$以及方程（4.8）中的关系，我们得到

$$\sum_\alpha c(L\overline{\omega}_\alpha)^2 + \sum_\alpha \overline{c}\big(f^*\overline{L\overline{\omega}_\alpha}\big)^2 = -2\sum_{i,j}\mu_i^2\mu_j^2\big(R^{TN}_{ijji}\circ f\big) - 2\operatorname{scal}_N\circ f = -4\operatorname{scal}_M,$$

以及 Schr¨odinger-Lichnerowicz 型公式在方程（4.1）中化为方程（4.5）。 □

4.2 建立逐点不等式

回顾一下，根据定理 4.6 和引理 4.3，映射 $f\colon M\to N$ 是一个黎曼浸没，扭曲狄拉克算子 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ 满足

$$\mathcal{D}^2_{\mathcal{L}} = \nabla^*\nabla + \frac{1}{16}\sum_\alpha -\big(c(L\overline{\omega}_\alpha) - \overline{c}\big(f^*\overline{L\overline{\omega}_\alpha}\big)\big)^2, \tag{4.9}$$

并且存在一个族 u_ϵ 近乎 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$-调和截面，它们属于丛 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$，且满足命题 4.5中的性质。本节始终固定这样一个族 u_ϵ、一个点 $p\in M$、$r := e^{-(m-1)\ln(2)/2}$ 并记 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{H}$ 分别为从 T_pM到其垂直部分和水平部分的垂直投影与水平投影。

本节的目标是推导引理 4.7、4.8、4.9和4.10中陈述的逐点估计。尽管这四个结论都纯粹是逐点的，其证明仍要求截面 u_ϵ 在局部定义且几乎平行。

引理 4.7。 存在常数 C 使得

$$\big\|R^{\mathcal{S}_{\mathcal{L}}}_{X,Y}u_\epsilon\big\|_p < C\,\|X\|\,\|Y\|\,\epsilon^{r/2}$$

对所有 X、$Y\in T_pM$ 以及所有 $\epsilon\in(0,\ 1)$，其中 $R^{\mathcal{S}_{\mathcal{L}}}$ 表示 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$的曲率端同态。

证明。 对于 $X,\ Y\in T_pM$ 以及一个 $\epsilon\in(0,\ 1)$，我们得到

$$\begin{aligned}\big\|R^{\mathcal{S}_{\mathcal{L}}}_{X,Y}u_\epsilon\big\|_p^2 &\le 3m^2\sum_{i,j} g_M(X,e_i)^2 g_M(Y,e_j)^2\big(\big\|\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}u_\epsilon\big\|_p^2 + \big\|\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}u_\epsilon\big\|_p^2 + \big\|\nabla_{[e_i,e_j]}u_\epsilon\big\|_p^2\big)\\ &\le C^2\,\|X\|^2\,\|Y\|^2\,\epsilon^r.\end{aligned}$$

第二步对于某个适当的常数 C 成立，该常数独立于 X、Y 以及 ϵ，根据命题4.5 (3)。

□

引理 4.8。 存在常数 C 使得

$$\big\|\big(c(\omega) - \overline{c}(f^*\overline{\omega})\big)u_\epsilon\big\|_p < C\,\|\omega\|\,\epsilon^{r/4}$$

对于所有 $\omega\in\operatorname{im}(\mathcal{R}_N)$，其具有水平提升 $\omega\in\Lambda^2T_pM$，以及所有 $\epsilon\in(0,\ 1)$。

证明。 固定引理中的某些 ω、ω 和 $\epsilon\in(0,1)$。由于 $\operatorname{im}\mathcal{R}_N = \operatorname{im} L$，存在一个 $\eta\in(\ker L)^\perp$ 使得 $\omega = \overline{L\eta}$。我们得到

$$\overline{\omega} = \sum_\alpha g_N(\overline{\eta},\overline{\omega}_\alpha)\overline{L\overline{\omega}_\alpha} \quad\text{and}\quad \omega = \sum_\alpha g_N(\overline{\eta},\overline{\omega}_\alpha)L\overline{\omega}_\alpha,$$

因此

$$
\begin{aligned}
|(c(\omega)-\overline{c}(f^*\overline{\omega}))u_\epsilon|_p^2 &= \Big|\sum_\alpha g_N(\overline{\eta},\overline{\omega}_\alpha)\big(c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big)u_\epsilon\Big|_p^2 \\
&\le C_1\|\overline{\omega}\|^2\sum_\alpha\big|\big(c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big)u_\epsilon\big|_p^2 \\
&= 16C_1\|\omega\|^2\Big(\big\langle\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^2u_\epsilon\,,u_\epsilon\big\rangle_p-\big\langle\nabla^*\nabla u_\epsilon\,,u_\epsilon\big\rangle_p\Big).
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

第二步由该估计成立

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_\alpha g_N(\overline{\eta},\overline{\omega}_\alpha)\big(c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big)u\Big|_p^2 &\le \tbinom{n}{2}\sum_\alpha g_N(\overline{\eta},\overline{\omega}_\alpha)^2\big|\big(c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big)u\big|_p^2 \\
&\le \tbinom{n}{2}\|\overline{\eta}\|^2\sum_\alpha\big|\big(c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big)u\big|_p^2 \\
&\le C_1\|\overline{\omega}\|^2\sum_\alpha\big|\big(c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big)u\big|_p^2
\end{aligned}
$$

与 $C_1=\binom{n}{2}\big\|L|^{-1}_{(\text{核 }L)^\perp}\big\|^2_{\text{算子}}$，

第三步则由 $c(L\omega_\alpha)-c\big(f^*L\omega_\alpha\big)$ 的斜伴随性以及方程 (4.5) 得出。对方程 (4.10) 取 C*-代数 $\mathcal{A}$ 中的范数，便可得到一个适当的常数 C，它与 ω 和 ϵ无关：

$$
\|(c(\omega)-\overline{c}(f^*\overline{\omega}))u_\epsilon\|_p^2\le 16C_1\|\omega\|^2\Big(\|\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^2u_\epsilon\|_p\|u_\epsilon\|_p+\|\nabla^*\nabla u_\epsilon\|_p\|u_\epsilon\|_p\Big)\le C^2\|\omega\|^2\epsilon^{r/2}.
$$

Here 我们使用了三角不等式、柯西-施瓦茨不等式以及命题4.5 (3)。 □

为了获得有关黎曼浸没 f的 O'Neill 张量 A 和 T 的信息，我们沿垂直向量和水平向量的方向对方程 (4.9) 求协变导数。由此分别得到引理4.9 和引理4.10 。

引理 4.9。 存在一个常数 C，使得

$$
\big\|c(\nabla_U\omega)u_\epsilon\big\|_p<C\,\|U\|\,\|\omega\|\,\epsilon^{r/8}
$$

对于所有垂直向量 $U\in T_pM$、所有作为 $\mathcal{R}_N$ 的像中某个元素的水平提升的 $\omega\in\Lambda^2T_pM$，以及所有 $\epsilon\in(0,\,1)$，均成立。

证明。 固定一个 $\epsilon\in(0,\,1)$、一个垂直向量 $U\in T_pM$，以及某个 $\omega\in\Lambda^2T_pM$作为ω的水平提升：$\overline{\overline{\cdot}}=L\eta$对于某个 $\eta\in\overline{(\ker\,L)^\perp}\subset\Lambda^2T_{f(p)}N$。与引理 4.8 的证明类似，我们得到

$$
\omega=\sum_\alpha g_N(\overline{\eta},\overline{\omega}_\alpha)L\overline{\omega}_\alpha,\quad C_1:=\tbinom{n}{2}\big\|\overline{L}|^{-1}_{(\ker\overline{L})^\perp}\big\|^2_{\text{op}}
$$

在点 p，以及一个与 U、X、ω 和 ϵ 无关的适当常数 C_2

$$
\begin{aligned}
\big\|c(\nabla_U\omega)u_\epsilon\big\|_p^2=\Big\|\sum_\alpha g_N(\overline{\eta},\overline{\omega}_\alpha)c\big(\nabla_U(L\overline{\omega}_\alpha)\big)u_\epsilon\Big\|_p^2&\le C_1\|\omega\|^2\Big\|\sum_\alpha\big|c\big(\nabla_U(L\overline{\omega}_\alpha)\big)u_\epsilon\big|_p^2\Big\|_{\mathcal{A}} \\
&\overset{(\star)}{<} C_1\,C_2\,\|U\|^2\|\omega\|^2\epsilon^{r/4}.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

第一步中，我们利用了左侧的项关于 ω是张量性的。接下来需要证明方程（$\star$）中的估计（4.11）。其余证明中的所有常数均选取为与 U、 ω 以及 ϵ无关。我们开始计算

$$\begin{aligned}
&\nabla_U^2\big[c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big]^2u_\epsilon\\
&\quad=2c\big(\nabla_U(L\overline{\omega}_\alpha)\big)^2u_\epsilon+\big[c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big]^2\nabla_U^2u_\epsilon\\
&\quad\quad+c\big(\nabla_U^2(L\overline{\omega}_\alpha)\big)\big[c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big]u_\epsilon+\big[c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big]c\big(\nabla_U^2(L\overline{\omega}_\alpha)\big)u_\epsilon\\
&\quad\quad+2\big[c\big(\nabla_U(L\overline{\omega}_\alpha)\big)\big[c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big]+\big[c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big]c\big(\nabla_U(L\overline{\omega}_\alpha)\big)\big]\nabla_Uu_\epsilon.
\end{aligned}\tag{4.12}$$

将 u_ϵ 代入方程（4.9），取 ∇_U^2，然后对纤维上的 $\mathcal{A}$-值内积（$\mathcal{S}_\mathcal{L}$）$_p$，其中 u_ϵ。代入方程（4.12）、重新排列各项、在 C*-代数 $\mathcal{A}$中取范数，并利用三角不等式和柯西-施瓦茨不等式估计右端，可得

$$\begin{aligned}
&2\Big\|\sum_\alpha\big|c\big(\nabla_U(L\overline{\omega}_\alpha)\big)u_\epsilon\big|_p^2\Big\|_\mathcal{A}\\
&\le\sum_\alpha\Big[\big\|\nabla_U^2u_\epsilon\big\|_p\big\|\big[c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big]^2u_\epsilon\big\|_p+2\big\|c\big(\nabla_U^2(L\overline{\omega}_\alpha)\big)u_\epsilon\big\|_p\big\|\big[c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big]u_\epsilon\big\|_p\\
&\quad+2\|\nabla_Uu_\epsilon\|_p\big\|\big(c\big(\nabla_U(L\overline{\omega}_\alpha)\big)\big[c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big]+\big[c(L\overline{\omega}_\alpha)-\overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big]c\big(\nabla_U(L\overline{\omega}_\alpha)\big)\big)u_\epsilon\big\|_p\Big]\\
&\quad+\big\|\nabla_U^2\mathcal{D}_\mathcal{L}^2u_\epsilon\big\|_p\|u_\epsilon\|_p+\big\|\nabla_U^2\nabla^*\nabla u_\epsilon\big\|_p\|u_\epsilon\|_p.
\end{aligned}$$

这里我们用到了 c 和 c 对两个向量是斜伴随的。由命题 4.5 (1) 和 (2)，存在常数 C_3、 C_4 和 C_5，使得 $\|u_\epsilon\|_p\le C_3$,

$$\begin{aligned}
\big\|\nabla_U^2\mathcal{D}_\mathcal{L}^2u_\epsilon\big\|_p^2\le(m-n)^2\|U\|^4\big\|\nabla^2\mathcal{D}_\mathcal{L}^2u_\epsilon\big\|_p^2&\le C_4\|U\|^4\big\|\nabla^2\mathcal{D}_\mathcal{L}^2u_\epsilon\big\|_{\mathrm{L}^2}^{2r}\\
&\le C_4\|U\|^4\big\|\big\langle\mathcal{D}_\mathcal{L}^2u_\epsilon,(\nabla^*)^2\mathcal{D}_\mathcal{L}^2u_\epsilon\big\rangle_{\mathrm{L}^2}\big\|_\mathcal{A}^r\\
&\le C_4\|U\|^4\big\|\mathcal{D}_\mathcal{L}^2u_\epsilon\big\|_{\mathrm{L}^2}^r\big\|(\nabla^*)^2\mathcal{D}_\mathcal{L}^2u_\epsilon\big\|_{\mathrm{L}^2}^r\\
&<C_4\epsilon^{r/2}
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\big\|\nabla_U^2\nabla^*\nabla u_\epsilon\big\|_p^2\le(m-n)^2\|U\|^4\big\|\nabla^2\nabla^*\nabla u_\epsilon\big\|_p^2&\le C_5^2\|U\|^4\|\nabla u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2}^r\big\|(\nabla^*)^2\nabla^*\nabla u_\epsilon\big\|_{\mathrm{L}^2}^r\\
&<C_5\epsilon^{r/2}.
\end{aligned}$$

结合引理 4.8 和命题4.5 (3)，对于常数 C_2

$$\Big\|\sum_\alpha\big|\nabla_U(L\overline{\omega}_\alpha)u_\epsilon\big|_p^2\Big\|_\mathcal{A}<C_2\|U\|^2\epsilon^{r/4},$$

因此，方程（$\star$）中的估计（4.11）得证。 □

引理 4.10。 存在常数 C 和线性映射 $B\colon\ T_pM\to\mathrm{End}(\Lambda^2\mathcal{H}_p)$ 使得

$$\big\|\big[c(\mathcal{V}\nabla_X\omega)+c\big(B_X\omega\big)-\overline{c}\big(f^*\overline{B_X\omega}\big)\big]u_\epsilon\big\|_p<C\|X\|\|\omega\|\epsilon^{r/8}$$

对于每个水平向量 $X \in T_pM$、每个作为点 p N的曲率算子像中某个元素的水平提升的 $\omega \in \Lambda^2 T_pM$，以及所有 $\epsilon \in (0,\ 1)$。此处 $B_X\omega$表示通过映射 $\Lambda^2 \mathrm{d}f$将 $B_X\omega$投影到 $\Lambda^2 T_{f(p)}N$所得的投影。

证明。固定一个 $\epsilon \in$ (0,1)，取一个水平向量 $X \in T_pM$ 以及某个 ω，它是 $\omega \in$在 $\mathcal{R}_N$中的水平提升。我们将 $B_X\omega \in \Lambda^2 T_pM$定义为

$$\big(\nabla_{\mathrm{d}f(X)}\overline{L}\big)\overline{L}^{-1}\overline{\omega} \in \Lambda^2 T_{f(p)}N,$$

其中 $\overline{L}^{-1}$是由 $L|_{(\ker L)^\perp}\colon (\ker L)^\perp \to \operatorname{im} L$的逆映射给出的线性映射，并将其以零延拓。取某个 $\eta \in (\ker L)^\perp$使得 $\omega = L\eta$，定义 $X \coloneqq \mathrm{d}f(X)$，并记$\widehat{\ }$为某个 N中的二向量的水平提升。由引理 4.8 的证明可得，对某个适当的常数 C_1

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[c(\mathcal{V}\nabla_X\omega) + c\big(B_X\omega\big) - \overline{c}\big(f^*\overline{B_X\omega}\big)\big]u_\epsilon\big\|_p^2 \\
&\quad= \Big\|\sum_\alpha g(\overline{\eta},\overline{\omega}_\alpha)\big[c\big(\mathcal{V}\nabla_X(L\overline{\omega}_\alpha)\big) + c\big(\widehat{(\nabla_{\bar{X}}\overline{L})\,\overline{\omega}_\alpha}\big) - \overline{c}\big(f^*(\nabla_{\bar{X}}\overline{L})\,\overline{\omega}_\alpha\big)\big]u_\epsilon\Big\|_p^2 \\
&\quad\le C_1\Big\|\sum_\alpha\big|\big[c\big(\mathcal{V}\nabla_X(L\overline{\omega}_\alpha)\big) + c\big(\widehat{(\nabla_{\bar{X}}\overline{L})\,\overline{\omega}_\alpha}\big) - \overline{c}\big(f^*(\nabla_{\bar{X}}\overline{L})\,\overline{\omega}_\alpha\big)\big]u_\epsilon\big|_p^2\Big\|_{\mathcal{A}}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

这里我们用到了方程 (4.13) 的左端关于 ω具有张量性，以及 $B_X\omega$ 等于 $\big(\nabla_{\bar{X}}L\big)L^{-1}L\eta = (\nabla_{\bar{X}}L)\eta$的水平提升。注意，

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\big(c(L\overline{\omega}_\alpha) - \overline{c}(f^*\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big) \\
&\quad= c(\mathcal{V}\nabla_X(L\overline{\omega}_\alpha)) + c(\mathcal{H}\nabla_X(L\overline{\omega}_\alpha)) - \overline{c}\big(f^*\nabla_{\bar{X}}(\overline{L}\overline{\omega}_\alpha)\big) \\
&\quad= c(\mathcal{V}\nabla_X(L\overline{\omega}_\alpha)) + c\big(\widehat{(\nabla_{\bar{X}}\overline{L})\overline{\omega}_\alpha}\big) - \overline{c}\big(f^*(\nabla_{\bar{X}}\overline{L})\overline{\omega}_\alpha\big) + c\big(\overline{L}\widehat{\nabla_{\bar{X}}\overline{\omega}_\alpha}\big) - \overline{c}\big(f^*(\nabla_{\bar{X}}\overline{L})\overline{\omega}_\alpha\big).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

所需的估计可由方程（4.13）和方程（4.14）推出，方法与引理 4.9的证明相同，即对方程（4.9）取两次协变导数，并使用命题 4.5和引理 4.8。

□

5 逐点计算

设 $f\colon\ M \to N$ 如定理 A中所述。由定理 4.6可知，映射 f 是一个黎曼浸没。本节将开始研究第 4.2节推导出的逐点不等式，并将其与局部几何量联系起来，例如 O'Neill 张量 A、T 以及 M、N的曲率。下文的引理 5.2 概述了这些逐点关系，并将其整理得更易理解。初读时，可以将引理 5.2 视为一个黑箱。

在第 5.1 节中，我们证明了 $\mathrm{Ric}_M = f^*\mathrm{Ric}_N$ 之间的关系。第 5.2 节用张量 A, T 表示我们的逐点方程，并通过对它们应用伴随表示 ad 的链将这些方程加以推广，参见命题 ω_i 5.5。为了处理这些关系，我们需要了解曲率算子 $\mathcal{R}_N$ 的像是什么样的。第 5.3 节接着对 im $\mathcal{R}_N$进行抽象分析。第 5.4 节将这一分析应用于第 5.2节的关系，从而得出 f 的纤维平均曲率为零（参见命题 5.28 和5.31）。

我们先在下文的引理 4 5.2 中总结第 5.2 4 节的结果。设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别表示 TM的水平子丛和垂直子丛。当不会引起混淆时，这些符号也表示到相应分布上的投影。我们采用以下简写记号：

定义5.1。 对于 $p \in M$ 和 $\omega \in \Lambda^2 T_p M$ 某个 $\omega \in \Lambda^2 T_{f(p)} N$的水平提升，我们定义

$$(c - \overline{c})(\omega) \coloneqq c(\omega) - \overline{c}(f^* \overline{\omega}).$$

引理 5.2。 对于每个点 p $p \in M$，存在一个族 $\{u_\epsilon\} \subset (\mathcal{S}_{\mathcal{L}})_p \cong \mathbb{C}\mathrm{l}_{m,n} \otimes \mathrm{C}^* \pi_1(M)$，满足 $\|u_\epsilon\|_p = 1$，以及常数 C、r和一个线性映射 $B\colon T_p M \to \mathrm{End}(\Lambda^2 \mathcal{H}_p)$，使得

(1) $\left\| R^{\mathcal{S}_{\mathcal{L}}}_{Y,\ Z} u_\epsilon \right\|_p \leq C \|Y\| \|Z\| \epsilon^r$，(2) $\|(c - c)(\omega)$
$u_\epsilon\|_p \leq C \|\omega\| \epsilon^r$，(3) $\|c(\nabla_U \omega) u_\epsilon\|_p \leq C \|U\| \|\omega\| \epsilon^r$，
以及(4) $\|c(\mathcal{V}\nabla_X \omega) u_\epsilon + (c - c)(B_X \omega)$
$u_\epsilon\|_p \leq C \|X\| \|\omega\| \epsilon^r$

对所有 $\epsilon > 0$、所有 $Y, Z \in T_p M$、所有垂直 $U \in T_p M$、所有水平 $X \in T_p M$，以及所有作为 N 的曲率算子像中某个元素的水平提升的 $\omega \in \Lambda^2 T_p M$ 。

备注 5.3。 尽管其中出现了导数，引理 3) 和 (4) 的部分5.2 关于ω具有张量性。此外， B 的具体形式与我们的讨论无关。

引理 5.2的证明。 固定一个点 $p \in M$。由引理 4.3 可知，存在一个近似 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$-调和截面族。根据命题 4.5(4)，适当缩放是可行的；再将其限制到点 p，即可得到一个族 u_ϵ 。由引理 4.7、4.8、4.9 和4.10，对于适当的常数 C, r，该族满足估计 (1)-(4)，其中对所有 $\epsilon \in$，$(0, \epsilon_0)$ 均成立，且某个 $\epsilon_0 \in$ 属于 (0,1)。对于 $\epsilon \geq \epsilon_0$，我们只需重新定义 $u_\epsilon := u_{\epsilon_0/2}$，引理得证。 □

5.1 黎曼浸没中的里奇曲率

M 的标量曲率根据定理 4.6 等于 N的标量曲率。在本节中，我们将证明，在定理 A 的假设下，流形 M 和 N的里奇曲率也满足这一结论，准确地说，有如下命题：

命题 5.4。 M和 N 的里奇曲率通过以下关系相联系：$\mathrm{Ric}_M = \mathrm{Ric}_N \circ (\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f)$。

证明。 固定一点 $p \in M$ 和一个切向量 $X \in T_p M$。令 $\{u_\epsilon\} \subset (\mathcal{S}_{\mathcal{L}})^p$ 为引理 5.2中的一族，并记 $X := \mathrm{d}f(X)$。在 M 上的里奇曲率与旋量丛 $\mathcal{S}M$ 上的曲率张量之间满足如下关系

$$c(\mathrm{Ric}_M(X)) = -2 \sum_{\gamma=1}^{m} c(e_\gamma) R^{\mathcal{S}M}_{X, e_\gamma}. \tag{5.1}$$

由于米先科–福缅科丛 $\mathcal{L}$ 是平坦的，且狄拉克丛 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}$ 局部等于 $\mathcal{S}M$ 与 $\mathcal{S}N$的分次张量积，因此 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ 上的曲率张量可分解，从而得到

$$2\sum_{\gamma=1}^{m} c(e_\gamma) R^{\mathcal{S}_{\mathcal{L}}}_{e_\gamma, X} u_\epsilon = 2\sum_{\gamma=1}^{m} c(e_\gamma) R^{\mathcal{S}M}_{e_\gamma, X} u_\epsilon + 2\sum_{\gamma=1}^{n} c(e_\gamma) R^{\mathcal{S}N}_{\bar{e}_\gamma, \bar{X}} u_\epsilon. \tag{5.2}$$

右边第一项等于 $c(\mathrm{Ric}_M(X))u_\epsilon$，由方程（5.1）。我们利用旋量丛的曲率张量公式改写第二项 [LM89，第二章定理 4。15]。注意符号不同，因为我们考虑的是与 TN相关联并配备负定度量（$-g_N$）的旋量丛（见例 3.15）。我们得到

$$\begin{aligned} 2\sum_{\gamma=1}^{n} c(e_\gamma) R^{\mathcal{S}N}_{\bar{e}_\gamma, \bar{X}} u_\epsilon &= -2\sum_{\gamma=1}^{n} c(e_\gamma) \sum_{k<\ell} g_N\big(R^{TN}_{\bar{e}_\gamma, \bar{X}} \bar{e}_k, \bar{e}_\ell\big) \bar{c}(f^* \bar{e}_k) \bar{c}(f^* \bar{e}_\ell) u_\epsilon \\ &= -2\sum_{\gamma=1}^{n} c(e_\gamma) \sum_{k<\ell} g_N\big(R^{TN}_{\bar{e}_\gamma, \bar{X}} \bar{e}_k, \bar{e}_\ell\big) c(e_k) c(e_\ell) u_\epsilon \\ &\quad + 2\sum_{\gamma=1}^{n} c(e_\gamma) \sum_{k<\ell} g_N\big(R^{TN}_{\bar{e}_\gamma, \bar{X}} \bar{e}_k, \bar{e}_\ell\big)\big(c(e_k)c(e_\ell) - \bar{c}(f^* \bar{e}_k)\bar{c}(f^* \bar{e}_\ell)\big) u_\epsilon. \end{aligned} \tag{5.3}$$

方程（5.3）第一项中所有具有三个两两不相交指标的求和项都因比安基恒等式而消失，故该项等于 $c\big(\widehat{\mathrm{Ric}_N(X)}\big)u_\epsilon$，这可由简短计算得到，该计算分析 $\widehat{\text{含}}\ \gamma = k$ 与 $\gamma = \ell$ 的那些求和项。这里 $\overline{\mathrm{Ric}_N(X)}$ 表示 $\mathrm{Ric}_N(X)$ 的水平提升。将方程（5.1）、（5.2）与（5.3）合起来，得到

$$\begin{aligned} &c\big(\mathrm{Ric}_M(X) - \widehat{\mathrm{Ric}_N}(\overline{X})\big)u_\epsilon \\ &\quad = -2\sum_{\gamma=1}^{m} c(e_\gamma) R^{\mathcal{S}_{\mathcal{L}}}_{e_\gamma, X} u_\epsilon + 2\sum_{\gamma=1}^{n} c(e_\gamma) \sum_{k<\ell} g_N\big(R^{TN}_{\bar{e}_\gamma, \bar{X}} \bar{e}_k, \bar{e}_\ell\big)\big(c(e_k)c(e_\ell) - \bar{c}(f^* \bar{e}_k)\bar{c}(f^* \bar{e}_\ell)\big) u_\epsilon. \end{aligned} \tag{5.4}$$

注意，

$$\mathcal{R}_N(\overline{X} \wedge \bar{e}_\gamma) = \sum_{k<\ell} g_N(\mathcal{R}_N\big(\overline{X} \wedge \bar{e}_\gamma\big), \bar{e}_k \wedge \bar{e}_\ell) \bar{e}_k \wedge \bar{e}_\ell = \sum_{k<\ell} g_N\big(R^{TN}_{\bar{e}_\gamma, \bar{X}} \bar{e}_k, \bar{e}_\ell\big) \bar{e}_k \wedge \bar{e}_\ell,$$

因此，方程（5.4）右侧的第二项等于

$$2\sum_{\gamma=1}^{n} c(e_\gamma)(c - \bar{c})\big(\widehat{\mathcal{R}_N(\overline{X} \wedge \bar{e}_\gamma)}\big)u_\epsilon. \tag{5.5}$$

这里 $\widehat{\mathcal{R}_N(X \wedge e_\gamma)}$ 表示 $\mathcal{R}_N(X \wedge e_\gamma)$ 的水平提升。将方程 (5.5) 代入方程 (5.4)，对两边取 $\|\cdot\|_p$，得到

$$\begin{aligned} \big\|c\big(\mathrm{Ric}_M(X) - \widehat{\mathrm{Ric}_N}(\overline{X})\big)u_\epsilon\big\| &\le 2\sum_{\gamma=1}^{m} \big\|R^{\mathcal{S}_{\mathcal{L}}}_{e_\gamma, X} u_\epsilon\big\| + 2\sum_{\gamma=1}^{n} \big\|(c - \bar{c})\big(\widehat{\mathcal{R}_N(\overline{X} \wedge \bar{e}_\gamma)}\big)u_\epsilon\big\| \\ &< C\,\|X\|\,\epsilon^r \end{aligned}$$

对于适当的常数 C, r ，它们与 ϵ 无关。这里第一步用到了三角不等式、 $c(^e\gamma)$ 是斜伴随的性质，以及 $c(^e\gamma)c(^e\gamma) = -1$。第二步由引理 5.2 (1) 和 (2) 可得。由于 $\|u_\epsilon\|_p = 1$，我们得到

$$\left\|\mathrm{Ric}_M(X) - \widehat{\mathrm{Ric}}_N(\overline{X})\right\| < C\,\|X\|\,\epsilon^r,$$

且在极限 $\epsilon \to 0$ 下，$\mathrm{Ric}_M(X) = \mathrm{Ric}_N(X)$。 □

5.2 O'Neill 张量 A 和 T 的逐点方程

本节推导黎曼浸没 A, T 的 O'Neill 张量 $f\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ 的一组逐点方程。这些关系表明，某些二向量在克利福德代数中不可逆。这些二向量由张量 A, T、$\mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$的元素以及引理 B 中的张量 5.2构成。本节的主要结果如下：

命题 5.5。 设 $p \in M$ 且设 u_ϵ, r, B 如引理 5.2所述。则对每个 $\ell \in \mathbb{N}$，存在一个常数 C_ℓ 使得：

(1) 设 ϖ 是由 $\mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$ 生成的李代数中的一个元素，并令 ω 表示其到 $\Lambda^2 T_pM$的水平提升。对所有 $\epsilon > 0$

$$\|(c - \overline{c})\,(\omega)u_\epsilon\| \le C_1\,\|\omega\|\epsilon^r. \tag{5.6}$$

(2) 设 $U \in T_pM$为垂直向量， ω_1、...、 $\omega_\ell \in \Lambda^2 T_pM$为$\mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$中元素的水平提升。对于所有 $\epsilon > 0$

$$\|c((\mathrm{ad}_{\omega_1} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{\omega_\ell})(2T_U + A^*_U))u_\epsilon\| \le C_\ell\,\|\omega_1\| \cdots \|\omega_\ell\|\,\|U\|\epsilon^r. \tag{5.7}$$

(3) 设 $X \in T_pM$为水平向量， ω_1、...、 $\omega_\ell \in \Lambda^2 T_pM$为$\mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$中元素的水平提升。对于所有 $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\Big\|c((\mathrm{ad}_{\omega_1} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{\omega_\ell})(2A_X))u_\epsilon + (c - \overline{c})\big((\mathrm{ad}_{\omega_1} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{\omega_{\ell-1}})(B_X\omega_\ell)\big)u_\epsilon\Big\| \\ \le C_\ell\|\omega_1\| \cdots \|\omega_\ell\|\,\|X\|\,\epsilon^r.\end{aligned} \tag{5.8}$$

为方便读者，我们回顾命题 5.5 中出现的若干定义和对象。

注 5.6。 (1) 对于线性映射 $L : T_pM \to T_pM$，我们定义了

$$c(L) = \sum_{ij} g_M(Le_i, e_j)\,c(e_i)c(e_j),$$

其中 $e_1, \ldots, e_m$是 T_pM的某个标准正交基。

(2) 我们回顾 A、A^*、T^*的定义。设 $p \in M$为一点， U、$W \in \mathcal{V}_p$为垂直向量，X、$Y \in \mathcal{H}_p$为水平向量。我们在定义 T^*_U、 $\mathcal{H}_p \to \mathcal{V}_p$、 A_X、 $\mathcal{H}_p \to \mathcal{V}_p$、$A^*_U$： $\mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_p$中通过以下方程定义了这些张量3.5

$$g_M(T^*_U X, W) = -g_M(\nabla_U X, W), \quad g_M(A_X Y, U) = \tfrac{1}{2}\,g_M(U, [X, Y]) = g_M(A^*_U X, Y).$$

这些恒等式不依赖于将 W, X, Y延拓为向量场的具体选择 s.

(3) B 是一个线性映射 $T_pM \to \mathrm{End}(\Lambda^2\mathcal{H}_p)$。其具体形式无关紧要。

(4) 对于 U, X, ω 如命题中所述，我们将 A_X, A^*_U, T^*_U, $B_X(\omega)$ 延拓为线性映射 $T_pM \to T_pM$，令它们在其定义域的正交补上取零。

(5) 若 $\omega \in \Lambda^2 T_pM$ 和 $L \in \mathrm{End}(T_pM)$，我们使用伴随表示 $\mathrm{ad}_\omega(L)$ 表示交换子 $[\omega, L] = \omega \cdot L - L \cdot \omega$，其中我们将 $\Lambda^2 T_pM$ 与 $\mathfrak{so}(T_pM) \subseteq \mathrm{End}(T_pM)$ 按照记号 4.1 中的点 2 进行识别。

(6) 由于 T^*_U 将水平空间 $\mathcal{H}_p$ 映射到垂直空间 $\mathcal{V}_p$，并且在 $\mathcal{V}_p$ 上为零，因此有

$$(\mathrm{ad}_{\omega_1} \circ \ldots \mathrm{ad}_{\omega_\ell})(T_U) = (-1)^\ell T_U \cdot \omega_\ell \cdots \omega_1 = T_U \cdot (\omega_1 \cdots \omega_\ell)^T,$$

其中 $\cdot$ 表示 $\mathrm{End}(T_pM)$ 中的乘积，^{T} 表示转置。对于 A_X 也类似。另一方面，A^*_U 和 $B_X(\omega_\ell)$ 是从 $\mathcal{H}_p$ 到 $\mathcal{H}_p$ 的反对称线性映射，因此涉及它们交换子的项无法化简。

In 为了证明命题 5.5 我们将使用以下初等引理 :

引理 5.7. 设 $(V, \langle , \rangle)$ 为一个实希尔伯特空间，$L_1, L_2 \in \mathrm{End}(V)$。则

$$[c(L_1), c(L_2)] = -2\, c(L_1 \cdot L_2) + 2\, c(L_1 \cdot L_2^T) - 2\, c(L_2^T \cdot L_1) + 2\, c(L_2 \cdot L_1).$$
$$[\overline{c}(L_1), \overline{c}(L_2)] = +2\, \overline{c}(L_1 \cdot L_2) - 2\, \overline{c}(L_1 \cdot L_2^T) + 2\, \overline{c}(L_2^T \cdot L_1) - 2\, \overline{c}(L_2 \cdot L_1).$$

这里，$c, \overline{c}$ 是满足条件 $c(v)^2 = -\langle v, v\rangle$ 以及 $c(v)^2 = +\langle v, v\rangle$ 的克利福德乘法，其中任意 $v \in V$ 均成立。$[\,,\,]$ 表示相应克利福德代数中的交换子。

证明。设 $e_1, \ldots, e_n$ 是 V 的一组标准正交基。则对于 $i, j, k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$，有：

$$\begin{aligned}
c(e_i)c(e_j)c(e_k)c(e_\ell) &= -2\delta_{jk}c(e_i)c(e_k) - c(e_i)c(e_k)c(e_j)c(e_\ell) \\
&= -2\delta_{jk}c(e_i)c(e_\ell) + 2\delta_{j\ell}c(e_i)c(e_k) + c(e_i)c(e_k)c(e_\ell)c(e_j) \\
&= -2\delta_{jk}c(e_i)c(e_\ell) + 2\delta_{j\ell}c(e_i)c(e_k) - 2\delta_{ik}c(e_\ell)c(e_j) - c(e_k)c(e_i)c(e_\ell)c(e_j) \\
&= -2\delta_{jk}c(e_i)c(e_\ell) + 2\delta_{j\ell}c(e_i)c(e_k) - 2\delta_{ik}c(e_\ell)c(e_j) + 2\delta_{i\ell}c(e_k)c(e_j) \\
&\quad + c(e_k)c(e_\ell)c(e_i)c(e_j).
\end{aligned}$$

注意到

$$c(L_1)c(L_2) - c(L_2)c(L_1) = \sum_{ijk\ell} (L_1)_{ij}(L_2)_{k\ell}(c(e_i)c(e_j)c(e_k)c(e_\ell) - c(e_k)c(e_\ell)c(e_i)c(e_j))$$

并仔细完成所有缩并后，即可得到关于 $[c(L_1)\ c(L_2)]$ 的方程。关于 c 的方程证明过程相同；注意，所有缩并的符号都发生了反转。 □

注记 5.8。假设其中一个 L_1, L_2 是反对称的，那么引理 5.7 指出

$$[c(L_1), c(L_2)] = -4c(\mathrm{ad}_{L_1} L_2), \qquad [\overline{c}(L_1), \overline{c}(L_2)] = 4\overline{c}(\mathrm{ad}_{L_1} L_2).$$

证明命题 5.5的关键计算如下:

引理 5.9。 设 $p \in M$ 和 u_ϵ 如引理 5.2所述，假设 $\eta_1 \in \mathrm{End}(T_pM)$ 以及 $\eta_2 \in \mathrm{End}(f^*(TN)_p)$ 使得

$$\|c(\eta_1)u_\epsilon + \overline{c}(\overline{\eta}_2)u_\epsilon\| \leq C\left(\|\eta_1\| + \|\overline{\eta}_2\|\right)\epsilon^r \tag{5.9}$$

对所有 $\epsilon > 0$ 均成立。则存在常数 C'_ℓ，使得对于 $\ell \in N$

$$\|c((\mathrm{ad}_{\omega_1} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{\omega_\ell})(\eta_1))u_\epsilon + \overline{c}((\mathrm{ad}_{\overline{\omega}_1} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{\overline{\omega}_\ell})(\overline{\eta}_2))u_\epsilon\| \leq C'_\ell \|\omega_1\| \cdots \|\omega_\ell\| \left(\|\eta_1\| + \|\overline{\eta}_2\|\right)\epsilon^r$$

对所有 $\omega_1, \ldots, \omega_\ell \in \Lambda^2 T_pM$ 均成立，其中它们是 $\omega_1, \ldots, \omega_\ell \in \mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$ 的水平提升。

证明。 我们先证明 $\ell = 1$ 的情形，一般情形则可通过反复应用从 $\ell = 1$ 到.....的情形得出

$$\eta'_1 = (\mathrm{ad}_{\omega_2} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{\omega_\ell})(\eta_1), \qquad \overline{\eta}'_2 = (\mathrm{ad}_{\overline{\omega}_2} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{\overline{\omega}_\ell})(\overline{\eta}_2).$$

为此，设 ω 是元素 $\omega \in \mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$ 的一个水平提升。注意交换子的量级很小

$$\begin{aligned}\left\|\left[(c-\overline{c})(\omega), c(\eta_1)+\overline{c}(\overline{\eta}_2)\right]u_\epsilon\right\| &\leq \|(c-\overline{c})(\omega)\|\,\|(c(\eta_1)+\overline{c}(\overline{\eta}_2))u_\epsilon\| + \|c(\eta_1)+\overline{c}(\overline{\eta}_2)\|\,\|(c-\overline{c})(\omega)u_\epsilon\| \\ &\leq C'\,\|\omega\|\left(\|\eta_1\| + \|\eta_2\|\right)\epsilon^r\end{aligned}$$

对于某个常数 C'。这里用到了引理 2 的第 5.2 点以及方程 (5.9)。回顾引理5.7，特别是注记 5.8，可知

$$[(c-\overline{c})(\omega), c(\eta_1) + \overline{c}(f^*\overline{\eta}_2)] = -4\,c(\mathrm{ad}_\omega\,\eta_1) - 4\,\overline{c}(f^*\,\mathrm{ad}_{\overline{\omega}}\,\overline{\eta}_2),$$

其中我们还使用了 $[c(L_1)\ c(L_2)] = 0$对任意 $L_1 \in \mathrm{End}(T_pM)$、 $L_2 \in \mathrm{End}(f^*(TN)_p)$均成立这一事实；该交换子由来自彼此分次交换的子代数的两个偶元素构成。证明完毕。

□

命题 5.5 的证明。 我们首先证明命题 5.5 的第（1）部分。回顾

$$\|(c-\overline{c})\,(\omega)u_\epsilon\| \leq C\,\|\omega\|\,\epsilon^r$$

对所有 ω 均为某个 $\omega \in \mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$的水平提升。我们应用引理 5.9 及 $\eta_1 = \omega$，$\eta_2 = \omega$ 得到

$$\|(c-\overline{c})\,((\mathrm{ad}_{\omega_1} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{\omega_\ell})(\omega))u_\epsilon\| \leq C'_\ell \|\omega_1\| \cdots \|\omega_\ell\|\,\|\omega\|\,\epsilon^r.$$

现在，由 $\mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$ 生成的李代数中的任意元素，按定义都是形如 $(\mathrm{ad}_{\omega_1} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{\omega_\ell})(\omega)$ 的元素的线性组合。固定该李代数的某个基 ω_α，令 ω_α表示这些基元素的水平提升。选择一种将该基表示为伴随表示链线性组合的方式，可得到一个常数 C'，使得

$$\|(c-\overline{c})(\omega_\alpha)u_\epsilon\| \leq C'\,\epsilon^r,$$

对所有 α。将 ω_α 线性组合起来，即可得到适当常数1对应的第 (C 1.

对于第 (2部分，注意由引理5.2的第 (3部分以及引理3.11 可得

$$\|c(\mathrm{ad}_{\omega_\ell}(2T_U^* + A_U^*))u_\epsilon\| = \|c(\nabla_U \omega_\ell)u_\epsilon\| \leq C\,\|U\|\,\|\omega_\ell\|\,\epsilon^r$$

对所有 $U \in T_pM$ 垂直且 ω_ℓ 是 $\mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$中某个元素的水平提升$f(p)$。命题的第（2）部分随即由引理5.9立即得出。第（3）部分的证明完全相同：由引理5.2第（4）部分和引理3.11 可得

$$\|c(2\,\mathrm{ad}_\omega A_X)u_\epsilon + (c-\bar{c})(B_X\omega)u_\epsilon\| = \|c(\mathcal{V}\nabla_X\omega)u_\epsilon + (c-\bar{c})(B_X\omega)u_\epsilon\| \leq C\,\|X\|\,\|\omega\|\,\epsilon^r$$

对所有 $X \in T_pM$ 水平且 ω 是 $\mathrm{im}(\mathcal{R}_N)^{f(p)}$中某个元素的水平提升$f(p)$。现在应用引理5.9。

□

注5.10。由此我们已经看到，对于由$c-c)(\bar{\omega})u_\epsilon$ 所生成的李代数中元素的水平提升，u_ϵ 同样很小，而不仅仅是对像中的元素如此。当然，现在可以检查之前的所有计算，并验证我们对 $\mathrm{im}\,\mathcal{R}_N$ 得出的任何结论也适用于由该像生成的李代数，特别是引理5.2和命题5.5。为了写出清晰易读的证明，我们选择不这样做。

不过需要注意的是，命题5.5的第（2）部分的陈述本身可以推广到李代数，因为 [伴随表示$_{\omega_1}$，伴随表示$_{\omega_2}$] = 伴随表示$_{[\omega_1,\omega_2]}$。未将第（3）部分表述为李代数情形，唯一带来的后果是在下文引理5.30的证明中多出一个技术性难点。

5.3 曲率算子的像

由命题5.5 可知，O'Neill 张量 A，T 满足一个 Clifford 方程组，其中涉及 $\mathcal{R}_N$的像，即 N的曲率算子。回顾一下，$\mathcal{R}_N \geq 0$具有正 Ricci 张量。本节将纯粹从代数角度分析这两个正性条件的推论，不过许多初始命题并未充分利用这两个条件。本节的结论将在第5.5节应用于命题5.4。

定义 5.11。令 $p \in N$，我们将 $\mathfrak{g}(p) \subseteq \mathfrak{so}(T_pN)$ 记为在识别 $\Lambda^2 T_pN \cong \mathfrak{so}(T_pN)$ 下由曲率算子 $\mathcal{R}_N$ 的像生成的李代数。

首先，我们将 $\mathfrak{g}(p)$在 T_pN 上的作用分解为不可约直和项。由于李代数由曲率算子的像生成，因此它也会相应地分解。

命题 5.12. 设 $p \in N$。将 $T_pN = \bigoplus_i V_i$ 分解为$\mathfrak{g}(p)$作用下的不可约直和项，可得

$$\overline{\mathfrak{g}}(p) = \bigoplus_i \overline{\mathfrak{g}}_i(p),$$

其中 $\overline{\mathfrak{g}}_i(p)$ 是由 $\mathcal{R}_N(\Lambda^2 V_i)$生成的李代数。李代数 $\overline{\mathfrak{g}}_i(p)$ 在 V_i 上不可约地作用，并在 V_j 上平凡作用，其中 $j \neq i$。

证明。 注意到 $\Lambda^2 T_pN = \bigoplus_i \Lambda^2 V_i \oplus \bigoplus_{i<j} V_i \wedge V_j$。我们首先验证

$$\mathcal{R}_N(\Lambda^2 T_pN) = \bigoplus_i \mathcal{R}_N(\Lambda^2 V_i), \tag{5.10}$$

即 $\mathcal{R}_N(X \wedge Y) = 0$ 对于 $X \in V_i, Y \in V_j$ 满足 $i \neq j$。对于任意 $\omega \in \Lambda^2 T_pN$，有

$$g_N(\mathcal{R}_N(X \wedge Y), \omega) = g_N(\mathcal{R}_N(\omega), X \wedge Y) = g_N(\mathcal{R}_N(\omega)Y, X) = 0,$$

因为 V_i 在 $\mathfrak{g}(p)$ 的作用下是不变的，且与 V_j 正交。于是结论成立。

接下来我们证明

$$\mathcal{R}_N(\Lambda^2 V_i) \subseteq \Lambda^2 V_i, \tag{5.11}$$

即 $\mathcal{R}_N(X_1 \wedge X_2)Y = 0$ 对于 $X_1, X_2 \in V_i, Y \in V_j$ 满足 $i \neq j$。这是前述计算和比安基恒等式的推论

$$\mathcal{R}_N(X_1 \wedge X_2)Y = -\mathcal{R}_N(X_2 \wedge Y)X_1 - \mathcal{R}_N(Y \wedge X_1)X_2 = 0.$$

命题由方程（5.10）和（5.11）得出。 □

由于 $\mathfrak{g}_i(p)$ 在 V_i 上不可约地作用，且由反对称端同态组成，因此它在 $\mathrm{End}(V_i)$ 中生成的（结合）代数很容易理解。根据 Schur引理，原则上有四种可能（参见 [Ros16] 关于实 $*$-代数的 Schur引理）。点 p p 处里奇张量的非退化性提供了进一步的限制：

命题 5.13。 设 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 如命题 5.12所述。那么以下两种情况必有其一：

(1) 由 $\mathfrak{g}_i(p)$ 生成的$\mathrm{End}(V_i)$ （结合）子代数为 $\mathrm{End}(V_i)$。(2) 存在一个 $\mathbb{R}$-线性等距变换 ι: $V_i \to \mathbb{C}^k$，其中某个 k。由 $\mathfrak{g}_i(p)$ 生成的（结合）代数为 $\iota^* \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^k)$。记 I: $V_i \to V_i$ 为 $\mathbb{C}^k$ 的复单位元的拉回，则有 $I \in \mathfrak{g}_i(p)$。

注记 5.14。 命题 5.13 只要求 $\mathcal{R}_N$ 的里奇张量非退化。此外，如果曲率算子的像是平行的，那么根据 Ambrose和Singer 的定理 $\mathfrak{g}(p)$ 是 N 的全纯代数 [AS53]。命题 5.13 由此重现了众所周知的点态计算结果，例如 Calabi-Yau流形是 Ricci平坦的。

命题的证明 5.13。 首先注意到 $\mathfrak{g}_i(p) = 0$ 会立即与里奇张量的非退化性矛盾，因为若 $X \in V_i$，且 e_j 是 T_pN 的某个标准正交基，则

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_j g_N(\mathcal{R}_N(e_j \wedge Y)X, e_j) = 0$$

对所有 $Y \in T_pN$ 均成立。

令 $\mathfrak{g}_i(p)'$ 表示 $\mathfrak{g}_i(p)$ 在 $\mathrm{End}(V_i)$ 中的交换子，即所有与 $\mathfrak{g}_i(p)$ 对易的自同态。由于 $\mathfrak{g}_i(p) \neq 0$ 由反对称自同态构成，且在 V_i 上不可约地作用，我们应用 Schur引理，得出 $\mathfrak{g}_i(p)'$ 同构于实除法代数 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$或 $\mathbb{H}$ 之一。

在 $\mathbb{R}$ 的情形下，双交换子 $\mathfrak{g}_i(p)'' = \mathrm{End}(V_i)$。现在， $\mathfrak{g}_i(p)''$ 等于由 $\mathrm{End}(V_i)$ 中的 $\mathfrak{g}_i(p)$ 生成的子代数，这是由双交换子定理得出的（该定理对实 $*$-代数同样成立，参见 [Li03]的定理 4.3.8）。此情形对应于命题中的点 (1)。

对于剩下的两种情况 $\mathbb{C}$， $\mathbb{H}$ 相对于 V_i 上某种复结构或四元数结构，有 $\mathfrak{g}_i(p)'' = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 或 $\mathfrak{g}_i(p)'' = \mathrm{End}_{\mathbb{H}}(V_i)$ 两种情形。在这两种情况下 $\mathbb{C}$， $\mathbb{H}$ 至少存在一个复单位元 $I\colon\ V_i \to V_i$，使得 $I \in \mathfrak{g}_i(p)'$。通过考察 $\overline{\mathfrak{g}_i(p)' \cap \mathfrak{g}_i(p)''}$，可以区分情况 $\mathbb{C}$， $\mathbb{H}$；该式分别等于 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$。

接下来，我们假设存在一个复单位元 $I\colon\ V_i \to V_i$，它与 $\mathfrak{g}_i(p)$ 交换。利用里奇张量的非退化性，我们将构造出一个非零的反对称元素，属于 $\mathfrak{g}_i(p)' \cap \mathfrak{g}_i(p)''$，从而排除情况 $\mathbb{H}$。事实上，我们的构造满足 $I \in \mathfrak{g}_i(p)$。完成这些步骤后，命题的证明也就完成了。

设 $I \in \mathfrak{g}_i(p)'$ 为一个复单位元。由于 $\mathfrak{g}_i(p)$ 中的元素与 I 交换，因此它们相对于 I 都是复线性映射。若 e_1，……， e_{2k} 是 V_i 的一个（实）标准正交基，则元素 $\omega \in \mathfrak{g}_i(p)$ 的复迹为：

$$2\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\omega) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(\omega) - i\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(I\omega) = \sum_j g_N(\omega e_j, e_j) + i\sum_j g_N(\omega e_j, Ie_j) \in \mathbb{C}.$$

注意，由于 ω 是反对称的，被加项 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(\omega)$ 将为零。

断言：存在一个元素 $\eta \in \mathfrak{g}_i(p)$，使得 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\eta) \neq 0$。

为证明该断言，令 X， $Y \in V_i(p)$，则

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}_N(X \wedge IY)) &= i\sum_j g_N(\mathcal{R}_N(X \wedge IY)e_j, Ie_j) \\ &= -i\sum_j g_N(\mathcal{R}_N(X \wedge e_j)Ie_j, IY) - i\sum_j g_N(\mathcal{R}_N(X \wedge Ie_j)IY, e_j) \end{aligned}$$

这里我们应用了比安基恒等式。注意，根据假设，线性等距变换 I 与 $\mathcal{R}_N$的像可交换，因此

$$-i\sum_j g_N(\mathcal{R}_N(X \wedge e_j)Ie_j, IY) = -i\,\mathrm{Ric}(X, Y).$$

类似地，利用 Ie_j 也是 V_i 的一组标准正交基，可得

$$-i\sum_j g_N(\mathcal{R}(X \wedge Ie_j)IY, e_j) = i\sum_j g_N(\mathcal{R}_N(X \wedge Ie_j)Y, Ie_j) = -i\,\mathrm{Ric}(X, Y),$$

因此 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}_N(X \wedge IY)) = -i\,\mathrm{Ric}(X,\ Y)$。由 Ric 的非退化性可知，存在一个$\eta \in \mathfrak{g}_i(p)$，使得 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\eta) \neq 0$。断言得证。

由此 η，我们现在构造出一个非零的 $\mathfrak{g}_i(p)' \cap \mathfrak{g}_i(p)''$的反对称元素。令 $G_i \subseteq \mathcal{U}(V_i)$表示由 $\mathfrak{g}_i(p) \subseteq \mathfrak{u}(V_i)$生成的李群。那么：

$$\mathrm{Ad}_{G_i}(\eta) \coloneqq \frac{1}{\mathrm{Vol}(G_i)} \int_{G_i} \mathrm{Ad}_g(\eta)\,\mathrm{d}\mu(g)$$

它与 η 具有相同的复迹，并且是 Ad-不变的。因此，它非零，且与 $\mathfrak{g}_i(p)$的每个元素都可交换。这表明它是 $\mathfrak{g}_i(p)'$的一个元素。此外，它是 $\mathrm{Ad}_g(\eta) \in \mathfrak{g}_i(p)$中元素的线性组合，因此也是 $\mathfrak{g}_i(p) \subseteq \mathfrak{g}_i(p)''$的一个元素。证明至此完成。

□

我们为命题5.13 中的两种情形命名：

定义 5.15. 设 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$如命题 5.12 中所述。我们称

(1) $(\bar{\mathfrak{g}}_i(p)\ \overline{V_i})$ 是实型，若由 $\mathfrak{g}_i(p)$ 生成的（结合）代数是 $\mathrm{End}(V_i)$。(2) $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 是复型，若存在一个 $\mathbb{R}$-线性等距变换 $\iota\colon V_i \to \mathbb{C}^k$，其中某个 k，且由 $\mathfrak{g}_i(p)$ 生成的（结合）代数是 $\iota^*\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^k)$。

除了命题 $\mathfrak{g}_i(p)$ 关于其生成的结合代数的信息 5.13之外，我们还需要关于 $\mathfrak{g}_i(p)$ 的表示论的另一个事实。与前面几处不同，这一事实既需要 $\mathcal{R}_N$ 的非负性，也需要 Ric_N 的非退化性。

定义 5.16. 设 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$如命题 5.12 中所述。我们用 $\mathfrak{p}_i(p)$ 表示 $\mathfrak{g}_i(p)$ 在 $\Lambda^2 V_i$中的正交补，它在 $\mathfrak{g}_i(p)$ 的伴随作用下封闭。

命题 5.17。 设 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$如命题 5.12所述。那么 $\mathfrak{p}_i(p)$ 不包含任何与 $\mathfrak{g}_i(p)$ 同构的 V_i 子表示。

注 5.18。 命题 5.17 结合了文献中的两个结果。在一篇介绍所谓整体性系统的论文中，Simons [Sim62] 通过逐点计算证明，我们所称的 $\mathfrak{g}_i(p)$ 实际上是一个不可约对称空间的李代数。在处理对称空间时，Laquer 的一项计算 [Laq92] 进而给出一个卡西米尔元，它在 V_i 和 $\mathfrak{p}_i(p)$ 上取不同的值，由此表明它们作为表示必定互不相交。

为方便读者，我们将给出命题 5.17 的一个自包含证明。证明分几个步骤进行，并且比刚才引用的论述更简单。我们先定义一个辅助曲率算子：

定义 5.19。 令 $G_i = \exp(\mathfrak{g}_i(p)) \subseteq O(V_i)$为由 $\mathfrak{g}_i(p)$ 生成的李群。我们定义

$$\widetilde{R}_i : \Lambda^2 V_i \to \Lambda^2 V_i, \qquad \omega \mapsto \frac{1}{\mathrm{Vol}(G_i)} \int_{G_i} \mathrm{Ad}_g\big(\mathcal{R}_N(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\omega)\big)\,\mathrm{d}\mu(g).$$

引理 5.20。 R_i 是一个代数曲率算子，并且

$$\mathrm{im}\,\widetilde{R}_i \subseteq \bar{\mathfrak{g}}_i(p) \subseteq \big\{\omega \in \Lambda^2 V_i \mid \mathrm{ad}_\omega \circ \widetilde{R}_i = \widetilde{R}_i \circ \mathrm{ad}_\omega\big\}.$$

证明。 作为曲率算子 R_i 的线性组合， R_i 是一个曲率算子。此外，$\mathfrak{g}_i(p)$在对所有 $g \in G_i$ 的 Ad_g 作用下是不变的，因此对于所有 $\omega \in \Lambda^2 V_i$，有 $\mathrm{Ad}_g(\mathcal{R}_N(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\omega)) \in \mathfrak{g}_i(p)$。这就说明了第一个包含关系。第二个包含关系由注意到以下事实可得

$$\mathrm{Ad}_g \circ \widetilde{R}_i = \widetilde{R}_i \circ \mathrm{Ad}_g$$

对所有 $g \in G_i$，并对 g 求导。 □

注记 5.21。 由引理 $\widetilde{R}_i \subseteq \{\omega \in \Lambda^2 V_i \mid \text{伴随表示}_\omega \circ \widetilde{R}_i = \widetilde{R}_i \circ \text{伴随表示}_\omega\}$ 中的包含关系 5.20 可得 $\operatorname{im} R_i$ 是一个李代数：

$$\left[\widetilde{R}_i\omega, \widetilde{R}_i\eta\right] = \operatorname{ad}_{\widetilde{R}_i\omega}\left(\widetilde{R}_i\eta\right) = \widetilde{R}_i\left(\operatorname{ad}_{\widetilde{R}_i\omega}\eta\right) \in \operatorname{im}\widetilde{R}_i.$$

Lemma 引理 5.22。 R_i 的里奇张量非退化，且 $\operatorname{im} R_i$ 在 V_i 上不可约地作用。

证明。由于 R_i 是 G_i-等变的，其里奇张量也如此。但在不可约正交表示（例如 G_i 在 V_i 上的表示）下不变的任何二次型，都必须与标量积成比例。现在验证这个比例因子非零：由于 $\mathcal{R}_N$ 的里奇张量为正， $\mathcal{R}_N$ 沿 $\Lambda^2 V_i$ 的偏迹严格为正。根据构造，这个偏迹就是 R_i 的迹，因此 R_i 的里奇张量非零（因而非退化）。

现在验证 $\operatorname{im} R_i$ 在 V_i 上不可约地作用。由命题 5.12 可知， im 的任意两个子表示彼此正交。若 $\operatorname{im} R_i$ 的一个子表示与某个不可约直和项不正交，那么它必定包含该直和项。

设 $W \subset V_i$ 是 $\operatorname{im} R_i$ 的一个非平凡不可约子表示。由于 G_i 在那里不可约地作用，存在 $g \in G_i$ 使得 $gW \neq W$。由 G_i 的连通性，不妨设 gW 与 W 不正交。我们将证明 gW 是 $\operatorname{im} R_i$ 的一个子表示，由上一段可知，它必然包含 W。由于 W 和 gW 具有相同的维数，我们得到矛盾 $W = gW$。因此， V_i 不含任何非平凡不可约子表示，故其自身必为不可约的。

现在我们证明 gW 是 $\operatorname{im} \widetilde{R}_i$ 的一个子表示。令 $x \in W, \omega \in \Lambda^2 V_i$，展开 关系 $\operatorname{Ad}_g(R_i(\omega)) = R_i(\operatorname{Ad}_g \omega)$，得到：

$$\widetilde{R}_i(\omega)gx = g\widetilde{R}_i(\operatorname{Ad}_{g^{-1}}\omega)x \in gW$$

因此， gW 在 $\operatorname{im} R_i$ 的作用下是闭的。 □

引理 5.23。有

$$\operatorname{im}\widetilde{R}_i = \overline{\mathfrak{g}}_i(p) = \left\{\omega \in \Lambda^2\overline{V}_i \mid \operatorname{ad}_\omega \circ \widetilde{R}_i = \widetilde{R}_i \circ \operatorname{ad}_\omega\right\}.$$

证明。 由引理 5.20 只需证明 $\{\omega \in \Lambda^2 V_i \mid \text{伴随表示}_\omega \circ \widetilde{R}_i = \widetilde{R}_i \circ \text{伴随表示}_\omega\} \subseteq \operatorname{im}\widetilde{R}_i$。令 $\omega \in \operatorname{im}(\widetilde{R}_i)^\perp \cap \{\omega \in \Lambda^2 V_i \mid \text{伴随表示}_\omega \circ \widetilde{R}_i = \widetilde{R}_i \circ \text{伴随表示}_\omega\}$。由于 $\widetilde{R}_i$ 是自伴的，我们得到 $\widetilde{R}_i(\omega) = 0$。现在对任意 $\eta \in \Lambda^2 V_i$：

$$\left[\omega, \widetilde{R}_i\widetilde{R}_i\eta\right] = \operatorname{ad}_\omega\left(\widetilde{R}_i\widetilde{R}_i\eta\right) = \widetilde{R}_i\left(\operatorname{ad}_\omega(\widetilde{R}_i\eta)\right) = -\widetilde{R}_i\left(\operatorname{ad}_{\widetilde{R}_i\eta}\omega\right) = -\operatorname{ad}_{\widetilde{R}_i}\left(\widetilde{R}_i\omega\right) = 0,$$

因此 ω 与 $\operatorname{im}(\widetilde{R}_i^2) = \operatorname{im}\widetilde{R}$ 中的每个元素交换 $\widetilde{R}_i)'$。 由引理 5.22 可知 $\operatorname{im} R_i$ 在 V_i 上不可约地作用，并且 R_i 具有非退化的里奇曲率。命题5.13 于是适用，从而该 交换子 $\operatorname{im}(R_i)'$ 中的所有反对称元素都已经属于 $\operatorname{im} R_i$。我们得到 $\omega = 0$，这就证明了该引理。 □

由引理 5.23 可知，将 R_i 限制到 $\mathfrak{g}_i(p)$ 后，得到一个可逆的、伴随表示 $\overline{\operatorname{ad}}(\mathfrak{g}_i(p))$-等变的线性映射 $\mathfrak{g}_i(p) \to \overline{\mathfrak{g}}_i(p)$。借助此映射，我们现在可以描述区分 V_i 与 $\mathfrak{p}_i(p)$ 的卡西米尔元。

引理 5.24。 令 $\omega_1, ..., \omega_k$ 为 $\mathfrak{g}_i(p)$的标准正交基。存在一个标量 $\lambda_i < 0$，使得:
(1) 对任意 $v \in V_{\pm}$，都有 $\sum_\alpha \big(\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha\big)^2 v = \lambda_i\, v$。(2)
对任意 $\eta \in \mathfrak{p}_i(p)$，都有 $\sum_\alpha \big($伴随表示 $\widetilde{R}_i^{1/2}\,\omega_\alpha\big)^2\eta = 2\lambda_i\,\eta$。

证明。 注意， $\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_1,...,\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_k$ 是正定的伴随表示$(\mathfrak{g}_i(p))$-不变二次型的一组标准正交基

$$Q : \bar{\mathfrak{g}}_i(p) \times \bar{\mathfrak{g}}_i(p) \to \mathbb{R}, \qquad (\omega, \eta) \mapsto g_N\big(\omega, \widetilde{R}_i^{-1}\eta\big).$$

由此可知，对于任意 ρ 的 $\mathfrak{g}_i(p)$不可约表示， $\sum_\alpha \rho(\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha)^2$ 作为一个负标量作用，因为它是与 Q 相关联的卡西米尔元的像。这说明了第（1）点。

现在假设 $\eta \in \mathfrak{p}_i\,(p)$，由引理 5.23，回想这等价于 $\eta \in \Lambda^2 V_i$ 以及 $R_i\,(\eta) = 0$。选取标准正交基 e_1，.....， e_ℓ 使其属于 V_i，满足 $\eta = \sum_{ab}\eta_{ab}e_a \wedge e_b$。于是

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha \big(\mathrm{ad}_{\widetilde{R}_i^{1/2}\,\omega_\alpha}\big)^2\eta &= \sum_{\alpha,ab}\eta_{ab}\Big(\big((\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha)^2 e_a\big)\wedge e_b + e_a \wedge \big((\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha)^2 e_b\big) - 2\big(\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha e_a\big)\wedge\big(\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha e_b\big)\Big) \\
&= 2\lambda_i\,\eta - 2\sum_{\alpha,ab}\eta_{ab}\,\big(\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha e_a\big)\wedge\big(\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha e_b\big) \\
&= 2\lambda_i\,\eta - 2\sum_{\alpha,abcd}\eta_{ab}\,g_N\big(\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha e_a, e_c\big)\,g_N\big(\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha e_b, e_d\big)\,e_c\wedge e_d \\
&= 2\lambda_i\,\eta - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,abcd}\eta_{a,b}\,g_N\big(\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha, e_a\wedge e_c\big)\,g_N\big(\widetilde{R}_i^{1/2}\omega_\alpha, e_b\wedge e_d\big)\,e_c\wedge e_d \\
&= 2\lambda_i\,\eta - \frac{1}{2}\sum_{abcd}\eta_{ab}\,g_N\big(\widetilde{R}_i(e_a\wedge e_c), e_b\wedge e_d\big)\,e_c\wedge e_d
\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中第二行使用了点（1），以及 $\widetilde{R}_i^{1/2}$ 的自伴性；第三行使用了 ω_α 是 $\mathrm{im}\,R_i$ 的标准正交基这一事实。由于 R_i 满足比安基恒等式，我们进一步得到

$$g_N\big(\widetilde{R}_i(e_a\wedge e_c), e_b\wedge e_d\big) = g_N\big(\widetilde{R}_i(e_a\wedge e_b), e_c\wedge e_d\big) - g_N\big(\widetilde{R}_i(e_a\wedge e_d), e_c\wedge e_b\big). \tag{5.13}$$

回想按定义， $R_i\,(\eta) = 0$，从而得到

$$\sum_{abcd}\eta_{ab}\,g_N\big(\widetilde{R}_i(e_a\wedge e_b), e_c\wedge e_d\big)\,e_c\wedge e_d = \widetilde{R}_i\Big(\sum_{ab}\eta_{ab}e_a\wedge e_b\Big) = \widetilde{R}_i(\eta) = 0$$

因此，用 5.13 式与 $\sum_{abcd}\eta_{ab}\,e_c\wedge e_d$ 收缩后，将消去 5.13 式右端的第一项。此外，利用反对称性 $\eta_{ab} = -\eta_{ba}$ 以及 $\widetilde{\ }$ 的自伴性 R_i，由 5.13 式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{abcd}\eta_{ab}\,g_N\big(\widetilde{R}_i(e_a\wedge e_c), e_b\wedge e_d\big)\,e_c\wedge e_d &= -\sum_{abcd}\eta_{ab}\,g_N\big(\widetilde{R}_i(e_a\wedge e_d), e_c\wedge e_b\big)\,e_c\wedge e_d \\
&= -\sum_{abcd}(-\eta_{ba})\,g_N\big(\widetilde{R}_i((-e_b)\wedge e_c), e_a\wedge e_d\big)\,e_c\wedge e_d
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{abcd} \eta_{ab}\, g_N\big(\widetilde{R}_i(e_a \wedge e_c), e_b \wedge e_d\big)\, e_c \wedge e_d.$$

其和　　于是，5.12 式右端的项消失。证明完毕。 □

现在我们可以证明命题 5.17。

命题 5.17 的证明。若 $\mathfrak{p}_i(p)$ 有一个与 V_i 同构的不可约子表示，那么必存在非零的 $\eta \in \mathfrak{p}_i(p)$，使得 $\sum_\alpha$(伴随表示$\tilde{R}_{i\omega_\alpha})^2\eta = \lambda_i \eta$，由引理 5.24 的第（1）点可知。这与同一引理的第（2）点矛盾。 □

5.4 曲率算子与克利福德代数的相互作用

我们的目标是利用第 $\mathfrak{g}(f(p))$ 节中推导出的关于 5.3 的信息，通过简单的逐点计算，从方程（5.7）得出形算子 S_X 对任意 $X \in \mathcal{H}_p$ 都是无迹的。这将是证明定理 A 所需的最后一个要素，见第 6 节。

定义 5.25。 对 $p \in M$，我们用 $\mathfrak{g}(p)$ 表示 $\mathfrak{g}(f(p))$ 到 p 的水平提升。类似地，我们用 V_i、$\mathfrak{g}_i(p)$、$\mathfrak{p}_i(p)$ 分别表示 V_i、$\mathfrak{g}_i(f(p))$、$\mathfrak{p}_i(f(p))$ 的水平提升。

处理链 $\omega_1, \ldots, \omega_\ell \in \mathfrak{g}(p)$ 时，将它们与由 $\mathfrak{g}(p)$ 生成的张量代数中的元素等同起来，可以省去大量记账工作。为此，我们作如下定义：

定义 5.26. 令 $p \in M$。

(1) 令 $\mathfrak{U}(p) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathfrak{g}(p)^{\otimes k}$ 表示由 $\mathfrak{g}(p)$ 生成的张量代数。$\mathfrak{U}_i(p) \subseteq \mathfrak{U}(p)$ 表示由 $\mathfrak{g}_i(p)$ 生成的张量代数。

(2) 令 $\mathrm{ad} : \mathfrak{U}(p) \to \mathrm{End}(\mathrm{End}(T_pM))$ 表示由下式定义的代数态射

$$\mathrm{ad}_{\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_\ell}(\eta) = (\mathrm{ad}_{\omega_1} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}_{\omega_\ell})(\eta)$$

对于 $\omega_1, \ldots\ldots, \omega_\ell \in \mathfrak{g}(p)$。

(3) 令 $\rho : \mathfrak{U}(p) \to \mathrm{End}(T_pM)$ 表示由下式定义的态射

$$\rho(\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_\ell) = \omega_1 \cdots \omega_\ell$$

对于 $\omega_1, \ldots\ldots, \omega_\ell \in \mathfrak{g}(p)$，其中 $\cdot$ 是 $\mathrm{End}(T_pM)$ 中的乘积。

注 5.27。回顾一下，T_U^*和 A_X是映射 $\mathcal{H}_p \to \mathcal{V}_p$，使得 $\mathrm{ad}_\omega(T_U) = T_U \cdot \rho(\omega)^T$，$\mathrm{ad}_\omega(A_X) = A_X \cdot \rho(\omega)^T$，对于 $\omega \in \mathfrak{U}(p)$。

我们先讨论实情形。

命题 5.28。 对于每个 $p \in M$，都有如下结论：设 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 为实型且$h \in V_i$，则 $A_X h = 0$，$T_U h = 0$对所有 $X \in \mathcal{H}_p$和 $U \in \mathcal{V}_p$均成立。

我们分三步证明这一点。回顾命题 5.5中的方程 （5.8），它给出对于$\omega \in \mathfrak{U}(p)$ 以及 η某个属于 im $(R_N)^{f(p)}$ 中元素的水平提升，有如下估计：[1]

$$\|c(\mathrm{ad}_\omega(2A_X\eta))u_\epsilon + (c-\bar{c})(\mathrm{ad}_\omega B_X(\eta))u_\epsilon\| \leq C\|\omega\|\,\|\eta\|\,\|X\|\,\epsilon^r,$$

这里 B_X 是 End$(\Lambda^2 T_{f(p)}N)$ 的某个元素。前两个步骤的目的是说明可以从这个不等式中删去 B_X 项。这里的关键是命题5.17。令 $\pi_i : \mathcal{H}_p \to V_i$ 表示到 V_i 的正交投影，我们首先分离出所有“非对角”项 $\pi_\ell B_X(\eta)\pi_k$，其中 $\ell \neq k$:

引理 5.29。 设 $p \in M$。对于所有的 $X \in \mathcal{H}_p$, $\omega \in \mathfrak{U}(p)$， η （某个元素的水平提升）im $(R_N)^{f(p)}$，以及任意两个不同的 $(\mathfrak{g}_\ell(p)\ V_\ell)$、$(\mathfrak{g}_k(p)\ V_k)$，对所有 $\epsilon > 0$ 均有

$$\|(c-\bar{c})(\mathrm{ad}_\omega(\pi_\ell B_X(\eta)\pi_k))u_\epsilon\| \leq C\,\|\omega\|\,\|\eta\|\,\|X\|\,\epsilon^r.$$

证明。 令 $\omega_\ell \in \mathfrak{U}_\ell(p)$、 $\omega_k \in \mathfrak{U}_k(p)$，使得 $\rho(\omega_\ell) = \pi_\ell$、 $\rho(\omega_k) = \pi_\ell$。那么 $\mathrm{ad}^{\omega_\ell\otimes\omega_k}(2A_X\eta)$ $=2A_X\eta\pi_k\pi_\ell = 0$ 并且

$$\mathrm{ad}_{\omega_\ell\otimes\eta_k}(B_X(\eta)) = -\pi_k B_X(\eta)\pi_\ell - \pi_\ell B_X(\eta)\pi_k$$

因为所有混合项 $\rho(\omega_{\ell,\ i})\rho(\omega_{k,\ j})$ 都为零。现在

$$(c-\bar{c})\,(\pi_k B_X(\eta)\pi_\ell) = (c-\bar{c})\,(\pi_\ell B_X(\eta)\pi_k)$$

由 $B_X(\eta)$ 的反对称性可知，因此对任意 $\omega \in \mathfrak{U}(p)$，可得

$$\begin{aligned}\|(c-\bar{c})(\mathrm{ad}_\omega(\pi_\ell B_X(\eta)\pi_k))u_\epsilon\| &= \frac{1}{2}\|c(\mathrm{ad}_{\omega\otimes\omega_k\otimes\omega_\ell}(2A_X\eta))u_\epsilon + (c-\bar{c})(\mathrm{ad}_{\omega\otimes\omega_k\otimes\omega_\ell}(B_X(\eta)))u_\epsilon\| \\ &\leq \frac{1}{2}C\,\|\omega\|\,\|\eta\|\,\|X\|\,\|\omega_\ell\|\,\|\omega_k\|\,\epsilon^r.\end{aligned}$$

将范数 $\|\omega_\ell\|$, $\|\omega_k\|$ 吸收到常数中，即可证明该引理。 □

引理 5.30。 设 $p \in M$。对于所有 $X \in \mathcal{H}_p$ 和 $\omega \in \mathfrak{U}$ （p） ，有

$$\|c(A_X \cdot \rho(\omega)^T)u_\epsilon\| \leq C\,\|\omega\|\,\|X\|\,\epsilon^r. \tag{5.14}$$

证明。 由引理 5.29可知

$$\|c(\mathrm{ad}_\omega(2A_X\eta))u_\epsilon + (c-\bar{c})\,(\mathrm{ad}_\omega(\sum_j \pi_j B_X(\eta)\pi_j))u_\epsilon\| \leq C\,\|\omega\|\,\|\eta\|\,\|U\|\,\epsilon^r \tag{5.15}$$

对于任意 $\omega \in \mathfrak{U}(p)$ 以及 η属于 im $(\mathcal{R}_N)$ 的元素的水平提升 $f(p)$。首先注意到，由于 A_X是线性映射 $\mathcal{H}_p \to \mathcal{V}_p$，因此

$$\mathrm{ad}_\omega(2A_X\eta) = 2A_X\eta \cdot \rho(\omega)^T$$

[1]注意，常数 C 取决于链的长度 ω，但这无关紧要。例如，我们可以将这种依赖性吸收到 $\mathfrak{U}(p)$ 的范数中，或者注意到我们只需处理长度不超过某个值的链，比如 100 dim$(M)^{100}$。

根据注记 5.27。接下来注意到 $\pi_j B_X(\eta)\pi_j$ 是 $\Lambda^2 V_j = \mathfrak{g}_j(p) \oplus \mathfrak{p}_j(p$的一个元素，并回想一下，根据命题 $c - \bar{c}$ 在 $O(\epsilon^r$作用于 $\mathfrak{g}$ 时，由方程 (5.6) 可知这一点。命题 5.5中的方程 (5.15) 随即推出一个形如

$$\|c(2A_X\eta \cdot \rho(\omega)^T)u_\epsilon + (c - \bar{c})\,(\mathrm{ad}_\omega\,\mathfrak{p})u_\epsilon\| \le C\,\|\omega\|\,\|\eta\|\,\|X\|\,\epsilon^r$$

对于某个元素 $\mathfrak{p} \in \bigoplus_j \mathfrak{p}_j(p)$。由命题 5.17 可知，此处出现的 $\bigoplus_j \mathfrak{g}_j(p)$ 的两个表示，即 ρ 在 $\mathcal{H}_p = \bigoplus_j V_j$ 上的表示和 $\bigoplus_j \mathfrak{p}_j(p)$ 上的伴随表示，是不相交的。因此，根据表示论的一般定理，存在一个元素 $\omega' \in \mathfrak{U}(p)$，使得 $\rho(\omega') = 1$且伴随表示$_{\omega'}(\mathfrak{p}) = 0$。值得一提的是，其实不必借助一般定理，因为也可以明确写出这个元素。若 $\omega'(j) := \sum_\alpha (\widetilde{R}_j^{1/2}\omega_\alpha)^{\otimes 2}$ 是引理 5.24 中的卡西米尔元，那么 $\omega' = \sum_j \frac{1}{3\lambda_j^4}(4\lambda_j^2\omega'(j)^{\otimes 2} - \omega'(j)^{\otimes 4})$ 就能满足要求。

—

对于任意 $\omega \in \mathfrak{U}(p)$ 以及 η 任意一个属于 $\mathrm{im}(R_N)^{f(p)}$ 中元素的水平提升，我们有

$$\begin{aligned}\|c(2A_X \cdot \rho(\omega \otimes \eta)^T)u_\epsilon\| &= \|c(2A_X\eta \cdot \rho(\omega \otimes \omega')^T)u_\epsilon + (c - \bar{c})\,(\mathrm{ad}_{\omega\otimes\omega'}(\mathfrak{p}))u_\epsilon\| \\ &\le C\,\|\omega\|\,\|\omega'\|\,\|\eta\|\,\|X\|\,\epsilon^r.\end{aligned}$$

将 $\|\omega'\|$ 吸收到常数 C 中，并将 η 吸收到 ω 中（回忆一下，η 在曲率算子的像中是任意的，而该像生成 $\mathfrak{g}(p)$），即可证明此引理。 □

利用方程 (5.14)，现在可以开始证明命题 5.28。

命题 5.28 的证明。 由于 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 是实型 $\rho(\mathfrak{U}_i(p)) = \mathrm{End}(V_i)$，因此存在一个元素 $\omega_h \in \mathfrak{U}_i(p)$，使得 $\rho(\omega_h) = hh^T$。注意到

$$c(A_X \cdot hh^T) = c(A_X h) \cdot c(h),$$

由方程 (5.14) 可得

$$\|c(A_X h)\|\,\|h\| = \|c(A_X \cdot hh^T)u_\epsilon\| \le C\|\omega_h\|\,\|X\|\,\epsilon^r$$

对所有 $\epsilon > 0$ 均成立。在极限 $\epsilon \to 0$ 下，我们得到 $A_X h = 0$。

这就意味着 $A_U^* h = 0$对所有 U，因为 $g(A_U^* h,\ X) = g(U,\ A_X h)$，回顾定义3.5。特别地，伴随表示 $\mathrm{ad}\omega(A_U^*) = 0$ 对所有 $\omega \in \mathfrak{U}_i(p)$。对于 $\omega \in \mathfrak{U}_i(p)$，命题5.7中的方程5.5随后变为

$$\|c(T_U^* \cdot \rho(\omega)^T)u_\epsilon\| = \|c(\mathrm{ad}_\omega(T_U^*))u_\epsilon\| \le C\|\omega\|\,\|U\|\,\epsilon^r.$$

如前所述，代入一个 $\omega_h \in \mathfrak{U}_i(p)$，使得 $\rho(\omega_h) = hh^T$，并取 $\epsilon \to 0$，可得 $T_U^* h = 0$。 □

现在我们转向复数情形。

命题 5.31。 设 $p \in M$ 和 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 为复型。则对于所有$h \in V_i$，都有$\mathrm{Tr}(S_h) = 0$，其中 S_h 是方向为 h的 p 点处纤维的形算子。

初始准备与实情形类似，不同之处在于我们可以直接分离出关于 T_U^* 的方程（即方程 (5.7)），而无需考虑关于 A_X 的方程（即方程 (5.8)）。

引理 5.32。 设 $p \in M$ 和 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 均为复型。那么

$$\|c(\mathrm{ad}_\omega(T_U^*))u_\epsilon\| \le C\,\|\omega\|\,\|U\|\,\epsilon^r$$

对所有 $\omega \in \mathfrak{U}_i(p)$ 以及 $\epsilon > 0$，均成立。

证明。 回顾方程 (5.7):

$$\|c(\mathrm{ad}_\omega(2T_U^* + A_U))u_\epsilon\| \le C\,\|\omega\|\,\|U\|\epsilon^r.$$

与引理5.29的证明完全相同，我们可以将其分开，从而得到不等式

$$\|c(\mathrm{ad}_\omega(2T_U^* + \sum_j \pi_j A_U^* \pi_j))u_\epsilon\| \le C\,\|\omega\|\,\|U\|\,\epsilon^r$$

对任意 $\omega \in \mathfrak{U}(p)$。由于 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 为复型，因此存在一个 $\omega_i \in \mathfrak{U}_i(p)$，使得 $\rho(\omega_i) = I$ 是 V_i 上的一个复单位元（根据定义，回顾命题 5.13）。注意，伴随表示 $\mathrm{ad}_{\omega_i}(\pi_j A_U^* \pi_j) = 0$ 对$i \neq j$成立，并且记

$$L_1 := \pi_i \frac{A_U^* + I A_U^* I}{2} \pi_i, \qquad L_2 := \pi_i \frac{A_U^* - I A_U^* I}{2} \pi_i$$

可得 $\pi_i A_U^* \pi_i = L_1 + L_2$ 以及 $(\mathrm{ad}_{\omega_i})^2(L_1) = -4L_1$，$(\mathrm{ad}_{\omega_i})^2(L_2) = 0$。那么

$$(\mathrm{ad}_{\omega_i})^2(2T_U^* + \sum_j \pi_j A_U^* \pi_j) = -2T_U^*\pi_i - 4L_1, \quad (\mathrm{ad}_{\omega_i})^4(2T_U^* + \sum_j \pi_j A_U^* \pi_j) = 2T_U^*\pi_i + 16L_1.$$

因此，对任意 $\omega \in \mathfrak{U}_i(p)$

$$\|c(\mathrm{ad}_\omega(6T_U^*))u_\epsilon\| = \Big\|c\Big(\mathrm{ad}_{\omega\otimes(4\omega_i^{\otimes 2}+\omega_i^{\otimes 4})}(2T_U^* + \sum_j \pi_j A_U^* \pi_j)\Big)u_\epsilon\Big\| \le C\,\|\omega\|\,\|U\|\,\epsilon^r,$$

whe我们将 $4\omega_i^{\otimes 2} + \omega_i^{\otimes 4}$ 的范数吸收到常数中。这就证明了该引理。 □

命题的证明 5.31。 回顾一下，根据备注 $(\omega(T_U^*) = T_U^* \cdot \rho(\omega)^T$5.27。由于 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 是复型，根据定义5.15，映射 $\rho(\mathfrak{U}_i(p))$ 的像等于 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$，即所有与某个复单位元 I 在 V_i 上对易的线性映射。特别地，对 $h \in V_i$ 有

$$hh^T - Ihh^T I = hh^T + (Ih)(Ih)^T$$

属于 ρ 的像。于是可得

$$c(T_U^* h)c(h)u_\epsilon + c(T_U^* Ih)c(Ih)u_\epsilon = O(\epsilon^r), \tag{5.16}$$

其中 $\|u_\epsilon\| = 1$ 对所有 ϵ均成立。我们的首要目标是证明，方程（5.16）蕴含 $\|T_U^* h\| = \|T_U^* Ih\|$ 以及 $g(T_U^* h,\ T_U^* Ih) = 0$。首先，由方程（5.16）可得

$$\|T_U^* h\|\,\|h\| = \|c(T_U^* h)c(h)u_\epsilon\| = \|c(T_U^* Ih)c(Ih)u_\epsilon\| + O(\epsilon^r) = \|T_U^* Ih\|\,\|Ih\| + O(\epsilon^r).$$

取极限 $\epsilon \to 0$ 并利用 $\|h\| = \|Ih\|$ 可推出 $\|T_U^* h\| = \|T_U^* Ih\|$。由此，将方程（5.16）左乘 c（$T_U^* h$）c（Ih）$+ c$（$T_U^* Ih$）c（h），可得：

$$\left(\|T_U^* h\|^2 c(h)c(Ih) + \|Ih\|^2 c(T_U^* h)c(T_U^* Ih) + \|h\|^2 c(T_U^* Ih)c(T_U^* h) + \|T_U^* Ih\|^2 c(Ih)c(h)\right) u_\epsilon = O(\epsilon^r$$

由于 $\|T_U^* h\| = \|T_U^* Ih\|$、$\|h\| = \|Ih\|$ 和 $c(h)c(Ih) + c(Ih)c(h) = 0$，我们得到

$$-2\|h\|^2 \langle T_U^* h, T_U^* Ih\rangle \, u_\epsilon = O(\epsilon^r)$$

因此 $T_U h \perp T_U Ih$。

回顾一下，按定义 $S_h U = T_U^* h$，且 S_h 是对称的。因此我们已经看到，对于任意 $U \in \mathcal{V}_p$ 和 $h \in V_i$，都有

$$\|S_h U\|^2 = \|T_U^* h\|^2 = \|T_U^* Ih\|^2 = \|S_{Ih} U\|^2,$$
$$g(U, (S_h S_{Ih} + S_{Ih} S_h)U) = 2g(S_h U, S_{Ih} U) = g(T_U^* h, T_U^* Ih) = 0.$$

这些关系意味着 $\mathrm{Tr}(S_h) = 0$，因为例如，将 $TM \otimes \mathbb{C}$ 与一个复单位元 i 复化后，可以计算得

$$(S_h + iS_{Ih})^2 = S_h^2 - S_{Ih}^2 + i\,(S_h S_{Ih} + S_{Ih} S_h) = 0.$$

于是 $S_h + iS_{Ih}$ 是幂零的，因而迹为零，但其迹恰为 $\mathrm{Tr}(S_h) + i\mathrm{Tr}(S_{Ih})$。 □

6 完成定理 A的证明及其应用

本节首先说明如何结合前几节的结果来证明本文的主要结论，即定理 A。之后，我们证明定理 A 如何推出推论 B。

定理 A的证明。 回想一下，$f\colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ 根据定理 4.6是一个黎曼浸没。根据命题 5.4，我们还知道 $\mathrm{Ric}_M = f^* \mathrm{Ric}_N$。由推论 3.9可知，$f$ 局部是一个黎曼乘积；也就是说，如果纤维的平均曲率为零，则 O'Neill 张量 A 和 T 恒等于零。现在我们说明，如何由前几节的结果推出平均曲率为零。

设 $p \in M$ 和 $X \in T_p M$ 为水平向量。对 $h_i \in V_i$，将 $X = \sum_i h_i$ 分解，其中 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 是第 5.3 和 5.4 节中的 $\mathcal{H}_p$ 的分解；回想定义 5.25 和命题 5.12。于是 $S_X = \sum_i S_{h_i}$，其中 S 是纤维的形算子，参见定义 3.5。若 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 为实型，则由命题 5.28 有 $S_{h_i} = 0$；若 $(\mathfrak{g}_i(p)\ V_i)$ 为复型，则由命题 5.31 有 $\mathrm{Tr}(S_{h_i}) = 0$。综合这两种情形可得 $\mathrm{Tr}(S_X) = \sum_i \mathrm{Tr}(S_{h_i}) = 0$。由于 X 任意，纤维的平均曲率$H = \mathrm{Tr}(S_{(\cdot)})^\sharp$ 为零。

□

现在我们转向推论 B 的证明。

推论 B 的证明 证明策略是将定理 A 应用于自旋映射 $\mathrm{pr}_1 \circ f\colon M \to N$，因此我们必须验证 $\chi(N) \cdot$ 度$_{\mathrm{hi}}(\mathrm{pr}_1 \circ f) \neq 0$。令 $p \in N$为 $\mathrm{pr}_1 \circ f$的一个正则值，且存在一个点 $q \in F$，使得（p，q）是 f的正则值。定义

$$M_p := f^{-1}(\{p\} \times F) = (\mathrm{pr}_1 \circ f)^{-1}(p) \quad \text{and} \quad f_p := (\mathrm{pr}_2 \circ f)|_{M_p}\colon M_p \to F.$$

注意，$\deg(f_p) = \deg(f) \neq 0$。令 $\mathcal{L}(F)$ 表示流形 F关于 $\pi_1(F)$ 的约化群 C*-代数的米先科–福缅科丛。我们定义 $E := (\mathrm{pr}_2 \circ f)^* \mathcal{L}(F)$，它是流形 M 上由有限生成射影希尔伯特 $\mathrm{C}^*\pi_1(F)$-模构成的平坦丛，并断言

$$\mathrm{ind}\big(\mathcal{D}_{\mathcal{S}M_p \otimes E|_{M_p}}\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0 \in \mathrm{KO}_{\dim(F)}(\mathrm{C}^*\pi_1(F)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}. \tag{6.1}$$

我们按照 [Zei20, 命题 5.2] 的证明进行论证。对于某个离散群 Γ、其分类空间 $B\Gamma$ 以及某个闭自旋流形 X，诺维科夫组装映射 $\nu\colon \mathrm{KO}_*(B\Gamma) \to \mathrm{KO}_*(\mathrm{C}^*\Gamma)$ 满足 $\nu(\phi_*[X]_{\mathrm{KO}}) = \mathrm{ind}\big(\mathcal{D}_{\mathcal{S}X \otimes \phi^*\mathcal{L}(B\Gamma)}\big)$，对每个映射 $\phi\colon X \to B\Gamma$ [均成立，参见 Zei20，第 2] 节。令 $\Gamma = \pi_1(F)$、$X = M_p$和 $\phi = \mu \circ f_p$。这里，$\mu\colon F \to B\pi_1(F)$ 表示 F的万有覆盖的分类映射。与注 1.6 中一样，我们用 ν 表示有理诺维科夫组装映射，用 ph 表示庞特里亚金特征，从而得到

$$\begin{aligned}\big(\nu \circ \mu_* \circ \mathrm{ph}^{-1} \circ (f_p)_*\big)\big([M_p] \cap \hat{A}(M_p)\big) &= \big(\nu \circ (\mu \circ f_p)_* \circ \mathrm{ph}^{-1}\big)\big([M_p] \cap \hat{A}(M_p)\big) \\ &= \mathrm{ind}\big(\mathcal{D}_{\mathcal{S}M_p \otimes E|_{M_p}}\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

这里我们用到了 $\mathrm{ph}\big([M_p]_{\mathrm{KO}}\big) = [M_p] \cap \hat{A}(M_p)$。由于 $\deg(f_p) \neq 0$，所以 $(f_p)_*\big([M_p] \cap \hat{A}(M_p)\big)$ 的最高次部分在 $H_*(F; \mathbb{Q})$ 中非零。根据关于流形 F 的假设以及注 1.6 可知，$(f_p)_*\big([M_p] \cap \hat{A}(M_p)\big)$ 在映射 $\nu \circ \mu_* \circ \mathrm{ph}^{-1}$ 下的像非零，因此由方程 (6.2) 可得方程 (6.1)。

由 [Ton25b，注 5。7], 方程（1.1）中关于高映射度的条件得到满足，因此定理 A 适用于映射 $\mathrm{pr}_1 \circ f\colon M \to N$。我们得到，存在一个闭且连通的 Ricci平坦自旋流形 F，使得 M 局部等距于黎曼乘积 $N \times F$，且 $\mathrm{pr}_1 \circ f$ 由到第一因子的投影给出。根据 Ricci平坦流形的结构定理 [参见 FW75，定理 4。5], Ricci平坦流形 F 在某个有限黎曼覆盖上等距于某个单连通里奇平坦流形 X 与某个平坦环面的黎曼乘积。由于 F 是有理本质的，且映射 $f_p\colon F \cong M_p \to F$的度数非零，我们得到 X 必为一个点，推论得证。 —

□

参考文献

[AS53] W. Ambrose 和 I. M. Singer。《关于整体性的一个定理》。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953)，第 428–443 页。 DOI: 10.2307/1990721。[Bau81] H. Baum。《伪黎曼流形上的自旋结构与狄拉克算子》。第 41 卷。Teubner，莱比锡，1981 年。[Bes87] A. L. Besse。《爱因斯坦流形》。第 10 卷。Ergeb. Math. Grenzgeb.，第 3 辑。Springer，查姆，1987 年。 DOI: 10.1007/978-3-540-74311-8。[BW08] C. BöhM 和 B. Wilking。《具有正曲率算子的流形是空间形式》。载于：Ann. of Math. (2) 167.3 (2008)，第 1079–1097 页。 DOI: 10.4007/annals.2008.167.1079。[BZ25] C. Baer 和 R. Zeidler。《Llarull 标量曲率刚性定理中的度条件》。预印本。2025 年。arXiv: 2507.05459 [math.DG]。

[Cho25] T.-K. A. Chow。《球面与环面乘积的标量曲率刚性》。预印本。2025 年。arXiv: 2511.04407。[CT06] X. X. Chen 和 G. Tian。《Kähler-爱因斯坦流形上的里奇流》。载于：Duke Math. J. 131.1 (2006)，第 17–73 页。 DOI: 10.1215/S0012-7094-05-13112-X。[CZ23] S. Cecchini 和 R. Zeidler。《标量曲率与广义卡利亚斯算子》。载于：《标量曲率展望》。共 2 卷。新加坡：世界科学出版社，2023 年，第 515–542 页。 DOI: 10.1142/9789811273223_0002.[Ebe16] J. Ebert。《非紧流形族上狄拉克算子的椭圆正则性》。预印本。2016 年。arXiv: 1608.01699。[FW75] A. E. Fischer 和 J. A. Wolf。《紧致里奇平坦黎曼流形的结构》。载于：《微分几何杂志》10 (1975)，第 277–288 页。 DOI: 10.4310/jdg/1214432794。[GM75] S. Gallot 和 D. Meyer。《黎曼流形的曲率算子与微分形式拉普拉斯算子》。载于：J. Math. Pures Appl. (9) 54.3 (1975)，第 259–284 页。[Gro21] M. Gromov。《标量曲率四讲》。2021 年。arXiv: 1908.10612 [math.DG]。[Gro23] M. Gromov。《标量曲率四讲》。载于：《标量曲率展望》。共 2 卷。新加坡：世界科学出版社，2023 年，第 1–514 页。 DOI: 10.1142/9789811273223_0001。[GS01] S. Goette 和 U. Semmelmann。《自旋结构与标量曲率估计》。载于：Ann. Global Anal. Geom. 20.4 (2001)，第 301–324 页。 DOI: 10.1023/A:1013035721335。[GS02] S. Goette 和 U. Semmelmann。《紧致对称空间的标量曲率估计》。载于：Diff. Geom. Appl. 16.1 (2002)，第 65–78 页。 DOI: 10.1016/s0926-2245(01)00068-7。[Hit74] N. J. Hitchin。《调和旋量》。载于：《数学进展》14 (1974)，第 1–55 页。 DOI: 10.1016/0001-8708(74)90021-8。[HS06] B. Hanke 和 T. Schick。《可扩张性与指标理论》。载于：《微分几何杂志》74.2 (2006)，第 293–320 页。 DOI: 10.4310/jdg/1175266206。[HS07] B. Hanke 和 T. Schick。《可扩张性与指标理论：无限覆盖》。载于： K-Theory 38.1 (2007)，第 23–33 页。 DOI: 10.1007/s10977-007-9004-3。[HSS24] T. Hao、Y. Shi 和 Y. Sun。《正标量曲率完备流形上的 Llarull 型定理》。载于：Trans. Am. Math. Soc. 377.10 (2024)，第 7403–7420 页。 DOI: 10.1090/t ran/9249。[Lan95] E. C. Lance。《Hilbert C^*-模：算子代数学家的工具箱》。第 210 卷。Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 剑桥：大学出版社，1995 年。 DOI: 10.1017/CBO9780511526206。[Laq92] H. T. Laquer。《对称空间上的不变仿射联络》。载于：Proc. Amer. Math. Soc. 115.2 (1992)，第 447–454 页。 DOI: 10.2307/2159267。[Li03] B. Li。《实算子代数》。世界科学出版公司，里弗埃奇，新泽西州，2003 年，第 xiv 页。 DOI: 10.1142/9789812795182。[Lla96] M. Llarull。《(n + 4k) 维流形的标量曲率估计》。载于：《微分几何及其应用》6.4 (1996)，第 321–326 页。 DOI: 10.1016/S0926-2245(96)0002 5-3。[Lla98] M. Llarull。《锐估计与狄拉克算子》。载于：《数学年刊》310.1 (1998)，第 55–71 页。 DOI: 10.1007/s002080050136。[LM89] H. B. j. Lawson 和 M.-L. Michelsohn。《旋量几何》。第 38 卷。Princeton Math. Ser. 普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社，1989 年。 DOI: 10.1515/9781400883912。

[MF80] A. S. Mishchenko 和 A. T. Fomenko。《 C^*代数上的椭圆算子指标》。载于：苏联数学学报 15（1980），第 87–112 页。 DOI: 10.1070/im1980v015n01ab eh001207.[Mur90] G. J. Murphy。《C*代数与算子理论》。马萨诸塞州波士顿等：Academic Press, Inc.，1990 年。DOI: 10.1016/C2009-0-22289-6.[ONe66] B. O'Neill。《浸没的基本方程》。载于：《密歇根数学杂志》13（1966），第 459–469 页。 DOI: 10.1307/mmj/1028999604.[Roe17] J. Roe。《K理论与算子代数讲义》。AMS Open Math Notes。2017 年。[Ros16] J. Rosenberg。《实 C^*代数的结构与应用》。载于：《算子代数及其应用》。第 671 卷。《当代数学》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2016 年，第 235–258 页。DOI: 10.1090/conm/671/13513.[Ros83] J. Rosenberg。《 C* 代数、正标量曲率与诺维科夫猜想》。载于：Publications Math ´ematiques 58（1983），第 409–424 页。 DOI: 10.1007/BF02953775.[Sch05] T. Schick。《L^2指标定理、KK理论与联络》。载于：《纽约数学杂志》11（2005），第 387–443 页。[Sim62] J. Simons。《论整体性系统的传递性》。载于：Ann. of Math. (2) 76（1962），第 213–234 页。 DOI: 10.2307/1970273.[Ton25a] T. Tony。《里奇平坦流形、平行旋量与罗森伯格指标》。载于：SIGMA。《对称性、可积性、几何与方法及其应用》21（2025），论文编号 072。 DOI: 10. 3842 /SIGMA.2025.072.[Ton25b] T. Tony。《标量曲率刚性与高映射度》。载于：《泛函分析杂志》288.3（2025）。 DOI: 10.1016/j.jfa.2024.110744.[Zei20] R. Zeidler。《宽度、大性与指标理论》。载于：SIGMA，《对称性、可积性、几何与方法及其应用》16（2020），论文 127，共 15 页。 DOI: 10.3842/SIGMA.2020.127.

Universität Potsdam, Institut für Mathematik, 14476 Potsdam, Germany电子邮箱：oskar.riedler@uni-potsdam.de，网址：www.sites.google.com/view/oskarriedler/电子邮箱：math@ttony.eu，网址：www.ttony.eu