arXiv:2601.14120v2 [math.GN] 25 Jan 2026

普适弦定理与一种拓扑分析

Ion Ciudin Eugen J. Ionascu

摘要

我们研究定义在 $[0,1]$ 上、满足 $f(0) = f(1) = 0$ 的实值连续函数的弦集。我们描述哪些弦可能成为孤立点，并给出示例来说明我们的刻画。我们引入并分析极大霍普夫集。

1 引言

普适弦定理（UCT）的来龙去脉由来已久，曲折复杂，最近又在文献中重新受到关注（见 [3]）。

这可以追溯到 1806 年，安德烈-玛丽·安培 [1] 证明了以下等价命题：

“每个定义在紧区间 $[0,1]$, *with* $f(0) = f(1) = 0$上的连续函数的图，至少有一条长度为 $\frac{1}{n}$ 的水平弦；也就是说，给定自然数 $\mathbf{n}$，存在 a 和 b，属于 $[0,1]$，使得 $|a-b| = \frac{1}{\mathbf{n}}$且 $f(a) = f(b)$。”

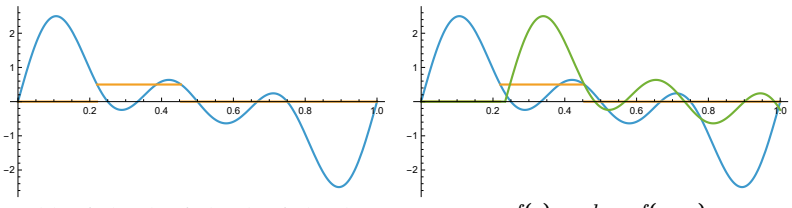

Figure 1. Chord of length 0.233843

换句话说，集合 $\mathbf{P} := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ 中的弦总是属于上述每个连续函数 f 的弦集合。这里，我们用 $\mathbb{N}$ 表示所有正整数。这只是标准 UCT 所说内容的一半。

对于一些记号，我们用 F 表示定义在紧区间$[0,1]$, 上的所有连续函数构成的类，其中 $f(0) = f(1) = 0$，并且

$$H(f) := \{\ell \in [0,1] | \quad f(x-\ell) = f(x) \text{ for some } x \in [\ell, 1]\},$$

函数 f 的弦集。如今，UCT 已有更精确的形式，并被归功于 Lévy（[6]）；他于 1934 年证明了等式中的另一包含关系

$$\mathcal{P} = \cap_{f \in \mathcal{F}} H(f). \tag{1}$$

但让我们纳入 [2] 中所述的等价版本（定理 4），该版本使用的记号较少。

定理 1 (通用弦定理)。对于给定的长度 ℓ，连续函数 $f: [0,L] \to \mathbb{R}$ 满足 $f(0) = f(L)$ 时，具有长度为 ℓ 的水平弦的充要条件是：对某个正整数 m, $\ell = \frac{L}{m}$。

要证明 (1) 中的另一个包含关系，需要说明：如果 $\ell \notin$P，那么存在一个函数f_ℓ，使得 $H(f_\ell)$ 不包含 ℓ。保罗·莱维的例子非常简单：取

$$f_\ell(x) = |\sin(\frac{\pi x}{\ell})| - x|\sin(\frac{\pi}{\ell})|$$

并注意到，由于 $|\sin\ x|$ 是周期为 π 的周期函数，因此对所有 $x \in [\ell, 1]$，差值 $f_\ell(x-\ell) - f_\ell(x) = \ell|\sin(\frac{\pi}{\ell})| \neq 0$ 均成立，这由关于 ℓ 的假设可知（见图2）。

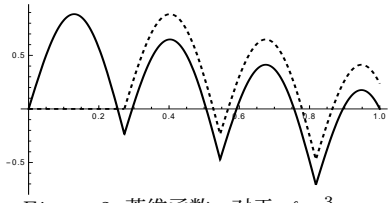

Figure 2. 莱维函数，对于 $\ell=\frac{3}{11}$

图1中给出了一个例子，也展示了一种几何上的理解方式：如何判断是否存在长度为 c 的弦。将 $y = f(x)$ 的图像向右平移 c，再寻找两条图像的交点即可。我们注意到，在这个例子中存在多个交点。

在 [2], 中可以找到对 UCT 的精彩阐述，以及它在赛跑中的一项现实应用。我们列出命题 2，让读者感受这类应用。

命题1 ([2])。 如果赛跑距离是整数英里，那么必定有一英里是以恰好等于平均配速的速度跑完的。

这一领域接下来的重要进展发生在莱维的工作之后不久，由海因茨·霍普夫（[4]）于1937年取得。他的结果相当出人意料。若一个实数集合 U 对加法封闭，即对于 U 中任意的 a 和 b，都有 $a + b \in U$，则称其为可加的。我们用 $H(f)^*$ 表示 $H(f)$ 在 $[0, \infty$ 中的补集。

定理2 (霍普夫)。 集合 $H(f)^*$ 是开且可加的。给定一个正数集合 U，它是开且可加的，并且包含 $(1, \infty)$ 作为一个极大区间（$1 \notin U$），则存在一个函数 $f \in \mathcal{F}$，使得 $H(f) = [0, \infty) \setminus U$。

关于 Hopf 定理及其他结果的简明证明，可参见 [3]。

观察恒等式 (1)，人们可能会认为，对于每个 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$，都存在一个函数$f_n \in$F，其弦集 $H(f_n)$ 满足

$$H(f_n) \subset [0, \frac{1}{n}] \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \{\frac{1}{k}\}.$$

但这不可能发生，原因有几个。我们将证明，点 $\frac{1}{n}$ 在 $H(f)$ 中不能是孤立的。第二个原因见 [3]。

定理3 ([3])。 对于每个 $f \in \mathcal{F}$，集合 $H(f)$ 的测度必须大于或等于 $\frac{1}{2}$。

定义 1. 我们将形如 $V \cup (1, \infty)$ 且 $V \subset (0, 1)$的开、可加集合 U称为霍普夫集。若此外还有 $m(V) = \frac{1}{2}$，则称 U 为极大霍普夫集。我们用 $m(A)$ 表示集合 A的勒贝格测度。

本文研究 $H(f)$ 的孤立点和聚点。一般而言，诸如 $H(f)^*$ 这样的正实数的可加开集相当复杂。我们还探讨了构造这类集合的一些可能方法，并回答了 [3] 中提出的一个问题。

在下文中，我们假设 $H(f)^*$ 在某个 $(0,\ 1)$ 中的开集上为 $V \cup (1,\ \infty)$，该开集可以为空。

P 中除 1 之外的两个点**不能是孤立点**

以下结论众所周知，但为方便读者，我们将基于 Hopf 定理给出证明

命题 2. 对于 $f \in \mathcal{F}$，存在一个区间 $[0, \beta]$，满足 $\beta > 0$，且包含于 $H(f)$ 中。

证明。若 $H(f)$ 为 $[0,1]$，则无需证明，因此我们可以假设 $H(f)^* = V \cup (1,\ \infty)$ 中的 V 非空。反设若 $H(f)$ 不包含形如 $[0,\beta]$ 的区间，则对每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在不属于 $H(f)$ 的 x_m，使得 $x_m < \frac{1}{m}$。因此，$H(f)^*$ 包含一个收敛到 0 的序列 $\{x_m\}$。我们取 V 中的一个极大区间，记作 $(a,\ b)$。换言之，$a,\ b \notin V$。因此，当 m 足够大时，$b - x_m$ 位于 $(a,\ b)$ 中。于是 $b = (b - x_m) + x_m \in V$，矛盾。 □

关于这一事实，Levit 在 1963 年有一项结果（[5]），指出："如果 $f \in$F 有 n符号变化，那么本定理中的 β可以取为$\frac{1}{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor}$。"

需要指出的是，命题 2 主要讨论实数的开加性集。若取 $V = (1/2,\ 1)$，我们就得到一个极大霍普夫集。函数 f满足 $H(f) = [0,1] \setminus U$is$f(x) = \sin(2\pi x)$。因此，我们看到点 1 可以在 $H(f)$ 中是孤立的。

定理 4. 对于 $n \in \mathbb{N}$、$n \geq 2$ 和 $f \in \mathcal{F}$，点 $\frac{1}{n}$ 不能在 $H(f)$ 中是孤立的。

证明。我们用 $c = \frac{1}{n}$ 表示。若 c 是孤立的，则存在集合 $J = (a,\ c) \cup (c,\ b)$，它属于 $H(f)^*$。因为我们可以写成 $n = p + q$，其中 p 和 q 是正整数，

$$1 = nc = q(c - p\epsilon) + p(c + q\epsilon)$$

当 ϵ 足够小时，我们有 $c - p\epsilon$，且 $c + q\epsilon$ 属于 J。由于 $H(f)^*$ 是可加的，我们可以将 1 写成 $H(f)^*$ 中两个元素的、系数为正整数的线性组合，因此可推出 $1 \in H(f)^*$。这与 $1 \notin H(f)^*$ 矛盾。 □

我们注意到，这里实际上证明了更强的结论：如果 $\ell \in H(f)$，那么 $\frac{\ell}{n}$ 不能是孤立点（$n \geq 2$）。有趣的是，$(0,\ 1) \setminus$ P 中的每一点都可以是孤立点。在陈述并证明这一点之前，我们先介绍一个重要的极大霍普夫集例子。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们记 J_n 为开区间（$\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}$）。

此时看来，我们需要对记号作一个小小的区分 ：

$$kA := A + A + \cdots + A = \{\sum_{i=1}^{k} a_i |\ a_i \in A\}$$

$$k \cdot A = \{ka|\ a \in A\}$$，其中 $A.$是一个实数集合

一般而言，$kA \neq k \cdot A$，但可以验证，如果 A 是一个区间，这些集合就相同。因此，该集合

$$V_n = \bigcup_{k=1}^{n} kJ_n \subset (0,1), \tag{2}$$

给出 $U_n = V_n \cup (1, \infty)$，这是一个可加集。它的测度为

$$\sum_{k=1}^{n} m(kJ_n) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2},$$

这表明它是一个极大霍普夫集。

定理5. 若 $a \in (0, 1) \setminus \mathcal{P}$，则存在 $f \in F$，使得 $a \in H(f)$，且 a 是 $H(f)$的一个孤立点。

证明. 根据我们的假设，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}$。考虑上文定义的霍普夫集$U_n$，并定义 $W_n = U_n \setminus \{a\}$。首先可以看出，$W_n$ 仍然是开集。一般而言，从 U_n 中删去一个点并不能保持可加性，但在此情形下没有问题，因为在 U_n中，$x + y = a$且 x, y是不可能的（我们从式（2）中定义 U_n的并集的第一个集合里删去了一个点）。根据 Hopf 定理，存在一个函数 f，满足 $H(f) = [0,1] \setminus W_n$。显然，$a$ 是 $H(f)$中的孤立点。 □

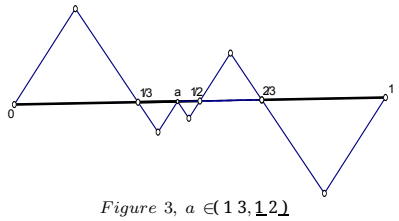

Figure 3. $a \in (1\,3, 1\,2)$

在图 3 中，我们展示了一个遵循 Hopf 思路的函数的标准构造。

这种拓扑分析让我们对非负实数的开加性集有了更深入的了解；在下一节中，我们将对此进行更详细的分析。

3 构造 $H(f)^*$ 的几种可能方式

首先可以观察到，如果 $U \subset (0, \infty)$ 是开加法集，那么它必定包含一个形如 (α, ∞) 的区间。事实上，由于它是开的，因此包含一个区间$I = (a, b)$，并且我们可以假设 $b < \infty$。如果 $n > \frac{a}{b-a}$，那么对于 $k \geq n$，kI 与 $(k+1)I$ 重叠，因为 $(k+1)a < kb$ 等价于 $k > \frac{a}{b-a}$。由于 kI 也必定属于 U，因此上述观察成立。我们还可以注意到，α 可以选取为满足极小性条件，因此有

$$\alpha \leq \inf\{\alpha_{(a,b)} |\ (a,b) \subset U\}, \text{ where } \alpha_{(a,b)} := (\max(\lfloor \frac{a}{b-a} \rfloor, 1) + 1)a, \tag{3}$$

其中，按照惯例，$\lfloor x \rfloor$ 是 x （实数）的整数部分。因此，如果将集合 U 除以某个正数，我们可以假设该集合的形式为 $U = V \cup （1, \infty）$，其中 $V \subset （0, 1）$。人们希望给出这些集合的一种显式构造。

上一节中定义的霍普夫集 U_n 在构造正数的开加法集 U 时发挥着重要作用。由命题 2 可知，U 必须包含在某个区间（β, ∞）中。我们假设 β 是具有此性质的最大数。如果 $\beta = 1$,

那么我们就得到 $V=\emptyset$，因此 $U=(1,\infty)$是这类集合的一个平凡例子，与 $U=(0,\infty)$属于同一类。我们称这些情形为例外情形。

我们已经证明，不失一般性，如果 U 不是例外情况，我们可以假设 $U=V\cup(1,\infty)$，其中 V非空且 $V\in(0,1)$。由于 1 不在集合 U中，因此整个集合 P 不可能包含在该集合中。所以，我们可以假设

$$V\subset[(0,1)\setminus\mathcal{P}]\cap(\beta,\infty).$$

引入关于点 $\frac{1}{2}$ 的对称性 ϕ，即 $\phi(x)=1-x$，其中 $x\in[0,1]$。

这里有一点值得注意：$\phi(V)$ 与 V 不相交，而且二者都是 $[0,1]$ 的子集。由于 ϕ 保持勒贝格测度，我们得到 $m(V)+m(\phi(V))\leq m([0,1])=1$ 或 $2m(V)\leq 1$。我们得出与 [3] 中相同的结论，即 $m(V)\leq\frac{1}{2}$；其中作者使用了关于任意点$d\in H(f)$进行反射的这一思路。

取自然数 m，使得 $\frac{1}{m+1}\leq\beta<\frac{1}{m}$。我们将区间 $(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m})$ 记为J_m。定义 $W_k=U\cap kJ_m$，其中 $k\in\{1,2,\cdots m\}$。我们知道 W_1 非空且为开集。那么 U 包含所有集合

$$kW_1=W_1+W_1+\cdots W_1$$

其中 $k\in\{1,2,\cdots m\}$，但 W_k可以严格大于 $k\cdot W_1$（只需乘以 2）.

3.1 情形 $\mathbf{m=1}$。

这是我们构造中一个简单但重要的情形。我们有 $J_1=\left(\frac{1}{2},1\right)$，并且由于 J_1 中任意两个数的和都大于 1，因此 J_1 的加性得以保证，对 J_1的任何子集也同样如此。因此，我们可以选取子集 Z，使其成为一列开区间的可数并，这些开区间在任意区间 $[a,b]\subset J_1$ 中定义一个康托集，且 $m(Z)=\frac{1}{2}$。

在 [3] 中，有这样一个问题：是否存在一个具有可数个“山脉区间”和可数个“山谷区间”的函数，也就是说，存在可数个相对极大值或相对极小值点f，以及 $m(H(f))=\frac{1}{2}$。举一个简单的例子，可以验证下面这个映射满足要求：

$$f_D(x)=\begin{cases}-|x\sin(\frac{\pi}{x})|, & 0<x\leq\frac{1}{2},\\ |(1-x)\sin\left(\frac{\pi}{1-x}\right)|, & \frac{1}{2}<x<1,\\ 0, & x\in\{0,1\}.\end{cases}$$

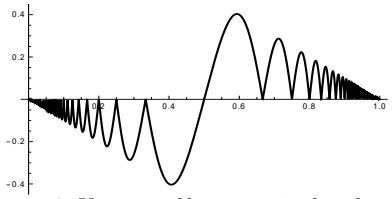

Figure 4, Uncountably many isolated poins

在这种情况下，我们有 $H(f_D)=[0,\frac{1}{2}]\cup\{1\}\cup\bigcup_{j=1}^{n}\{1-\frac{1}{j}\}$。要像 [3], 中所要求的那样构造一整类例子，我们需要让函数 f 定义在 $H(f)\supset\left[0,\frac{1}{2}\right]$的一侧，并且具有图 4 所示的可数个零点，以及定义康托集的开区间的可数并C位于区间 $[a,b]\subset J_1$ 中，其中 f 的符号与在 $[0,1/2]$ 上的符号相反。我们需要确保$m(C)=0$。此外，我们还有不可数个零点。当然，我们可以使用两个康托集来实现这一点。

3.2 情形 $m = 2$。

对于 $m = 2$，我们取 $W_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + s) \cup (\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2})$，其中 $t + s < \frac{1}{6}$。于是，我们有

$$2W_1 = W_1 + W_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + 2s) \cup (\frac{5}{6} - t, \frac{5}{6} + s) \cup (1 - 2t, 1) = (\frac{2}{3}, 1)$$

如果 $2s+t > \frac{1}{6}$且 $s+2t > \frac{1}{6}$。对于许多 t和 s的取值，都会出现这种情况，例如 $s = t \in (\frac{1}{18}, \frac{1}{12})$。这样的集合不是霍普夫集，但我们可以添加集合 $Z = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \setminus \phi(W_1) = (\frac{1}{2} + t, \frac{2}{3} - s)$，使该集合具有满测度 $\frac{1}{2}$，同时保持加性，因为任意两个数 $x \in Z$和 $y \in W_1 \cup 2W_1$都会给出 $x + y$，且其位于 $(1, \infty)$ 或 $(\frac{2}{3}, 1)$ 中。这个思路可以推广。

定理 6. 任何由有限个区间的并构成的霍普夫集，都可以扩展为一个极大霍普夫集。

证明。对于实数集 S，我们像往常一样用 $\overline{S}$表示 S的拓扑闭包。令$U = V \cup (1, \infty)$为一个霍普夫集，且 $V \subset (0, 1)$，并定义 $A = V \cap (0, \frac{1}{2})$以及 $B = (\frac{1}{2}, 1) \setminus \phi(A)$。我们要证明，$U = A \cup B \cup (1, \infty)$是一个包含 U的极大霍普夫集。显然，U是一个开集。根据假设，A 是有限个开区间的并，因此 $m(A) = m(\overline{A})$。由此可得

$$m(B) = m((\frac{1}{2}, 1)) - m(\overline{\phi(A)}) = \frac{1}{2} - m(A) \implies m(A \cup B) = \frac{1}{2},$$

这意味着 U 在测度意义下是极大的。为了证明 U 包含 U，我们反设 $U \setminus U \neq \emptyset$，从而导出矛盾。出现这种情况的唯一可能是 $\phi(A) \cap U \neq \emptyset$。因此，令 z为这个交集中的一点。

首先，假设 $z \in \phi(A)$。那么 $z = 1 - a$ 对某个 $a \in A$成立。于是，根据 U 的可加性，$1 = a + z \in U$，这与 $U \subset (0, 1) \cup (1, \infty)$ 矛盾。

如果 z 属于 $\phi(A)$ 且属于 U，由于 U 是开集，必存在某个 $\epsilon >$，使得 $I = (z-\epsilon, z+\epsilon) \subset U$。由于 $z \in \phi(A)$，因此对于 $\phi(A)$ 中的某个序列 $\{z_n\}$，$z_n \to z$。于是，当 n 足够大时，$z_n \in I \subset U$，这与我们刚才分析的情形矛盾。

我们得出结论：$U \subset \tilde{U}$。接下来只需证明 $\tilde{U}$ 是可加的。为此，令 x，$y \in U$ 是任意元素。我们有以下几种可能。

情形（i）：x，$y \in (\frac{1}{2}, 1)$。在这种情况下，$x + y > 1$因此 $x + y \in U$。

情形（ii）：x，$y \in (0, \frac{1}{2})$。因此，x和 y属于 A。于是，$x + y$属于 $U \subset U$。

情形（iii）：$x \in A$ 且 $y \in B$。反设 $x + y \in \phi(A)$。这意味着 $x + y = 1 - w$，其中 $w_n \to w$ 且$\{w_n\}$是 A中的一个序列。

由于 $x \in A \subset V$且 V是开的，因此存在一个区间 $(x - \eta, x + \eta) \subset V$，其中某个$\eta > 0$。利用 U 的加性，我们得到 $(x + w_n - \eta, x + w_n + \eta) \subset U$对所有 n成立。根据假设，U是有限个开区间的并。因此，对于无穷多个 n，$(x + w_n - \eta, x + w_n + \eta)$ 是 U中同一个开区间的子集，记为 (a, b)。

令 n沿此子列趋于无穷，我们得到 $[x + w - \eta, x + w + \eta] \subset [a, b]$。这表明实际上 $x + w \in (a, b) \in U$。现在，$x + w = 1 - y < \frac{1}{2}$，因此 $x + w \in A$。这意味着$y = 1 - (x + w) \in \phi(A)$，与 $y \in B$ 矛盾。由此可知 $x + y \notin \phi(A)$，这意味着$x + y > 1$ 或 $x + y \in B$。无论哪种情况，我们都有 $x + y \in U$，从而完成了关于U加性的论证。

□

推论 1。 对于 $n \in \mathbb{N}$、 $n \geq 2$，以及 $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ 中的一个有限个开区间的并的集合 W，我们定义 $A = \bigcup_{j=1}^{k} jW$，其中 $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 且 $B = (\frac{1}{2}, 1) \setminus \phi(A)$。那么集合 $\widetilde{U} = A \cup B \cup (1, \infty)$是一个极大霍普夫集。

证明。 如果 W_1 和 W_2 是有限个开区间的并，那么很容易看出， $W_1 + W_2$ 也是有限个开区间的并。令 $V = \bigcup_{j=1}^{n} jW$，并注意到，根据我们对 $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 的选择， $A = V \cap (0, 1/2)$ 和 $U = V \cup (1, \infty)$ 随后是开且可加的，即一个霍普夫集。根据我们在定理 6 中的 $\sim$ 构造，集合 U 正好是从 U 得到的集合。 □

$\sim$特别地，如果 $n = 2$ 和 $W = (\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$，那么该构造给出 $U = (\frac{2}{5}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{5}, 1) \cup (1, \infty)$。我们注意到，这里实际上与数论存在联系。如果将该集合乘以 10，我们得到

$$10 \cdot \widetilde{U} = (4, 5) \cup (6, 10) \cup (10, \infty),$$

这是三个端点为正整数的开区间的并集，具有可加性；并且从区间长度之和等于端点中最高（有限）值的一半这一意义上说，它是极大的。此外，该集合还是本原的，即不能被某个正整数整除后仍得到端点为整数的集合。我们称这样的集合为整数本原极大霍普夫集。很容易证明，只有一个具有两个区间的整数本原极大霍普夫集：$(1, 2) \cup (2, \infty)$。

自然会让人想知道下面这个问题的答案。
问题： “具有 n 个区间的整数本原极大霍普夫集有哪些？”$n = 8$的一个例子是

$$(25, 26) \cup (40, 44) \cup (45, 48) \cup (50, 52) \cup (55, 56) \cup (60, 74) \cup (75, 100). \tag{4}$$

对于 $n = 3$，不难看出，其刻画为

$$(a, b) \cup (2b - a, 2b) \cup (2b, \infty),$$

对于所有互素的正整数 a、 b，使得 $b \in (a, \frac{3a}{2}]$。对于 $a = 4$，我们得到 $b \in (4, 6]$，从而得到上面所描述的唯一可能的集合。对于 $a = 5$，我们得到两个集合：

$$(5, 6) \cup (7, 12) \cup (12, \infty) \quad \text{and} \quad (5, 7) \cup (9, 14) \cup (14, \infty).$$

可以按照推论 1 构造一个包含四个区间的例子：

$$H(h)^* = (4, 5) \cup (6, 7) \cup (8, 12) \cup (12, \infty)$$

相应函数 h 的图为

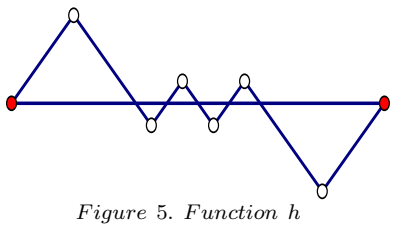

Figure 5. Function h

从这些例子中我们观察到，与它们相关的标准霍普夫函数具有关于 1/2 的（180° 旋转）对称性。下面将对此作出精确表述。

定理 7。 设函数 $f \in \mathcal{F}$ 满足 $U = \overline{H(f)^*}$，且 $U = V \cup (1, \infty)$ 是一个极大霍普夫集。那么我们有 $H(f) = \phi(V) \cup \partial V \cup \{0, 1\}$（其中 ∂V 是 V 的边界）。

证明。 我们通过双向包含来证明这一点。由于 $H(f) = \overline{[0,1] \setminus V}$ 且 $\phi(V) \cap V = \emptyset$，因此可得 $\phi(V) \subset H(f)$。应用闭包自函子，得到 $\phi(V) \subset H(f) = H(f)$，因为 $H(f)$ 是一个闭集。另一方面，$\partial H(f) = \partial V$，这意味着 $\partial V \subset H(f)$。于是我们得到一个包含关系：

$$\overline{\phi(V)} \cup \partial V \cup \{0, 1\} \subset H(f),$$

因为我们已经证明了 $\{0, 1\} \subset H(f)$。（我们在此证明的结论对每个霍普夫集 $H(f)^*$ 都成立。）

对于另一个包含关系，我们再次从 $\phi(V) \cap V = \emptyset$ 开始，并首先得出

$$m(\phi(V) \cup V) = m(\phi(V)) + m(V) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

因此，我们还必须有 $m(\overline{V} \cup \overline{\phi(V)}) = 1$，因为 $\overline{V} \cup \overline{\phi(V)} \subset [0, 1]$。考虑集合

$$X = (0, 1) \setminus (\overline{V} \cup \overline{\phi(V)}),$$

根据构造，这是一个开集。但根据我们先前证明的结论，$m(X) = 0$。因此，X 既是开集又是零测集，必为空集。由此我们得到

$$[0, 1] = \overline{V} \cup \overline{\phi(V)}) \cup \{0, 1\} = V \cup \partial V \cup \overline{\phi(V)}) \cup \{0, 1\},$$

这就证明了另一个包含关系。 □

特别地，如果 $H(f)^*$ 是有限个区间的并，那么 ∂V 和 $\partial \phi(V)$ 都是有限集。因此，实质上 $H(f)$ 是 $\phi(V)$，由此可知，我们观察到的对称性是由 f 的构造所导致的。

4 结论与开放问题

我们在此引入并研究的概念似乎都是新的。数学文献中有 Hopf 代数和 Hopf 纤维化等广为人知的概念，但令人颇感意外的是，1937年提出的 Hops 定理（定理2）并未开启代数方向的研究，而我们在本文中也只是对这一方向进行了初步探索。这些概念与数学的各个分支之间的联系显而易见，我们提到了其中一些：数论、加性数论、代数组合学、代数、分析、拓扑学和描述集合论；人们还可以想到许多其他分支。定理 6 亟待推广为更一般的表述，我们相信，在一些温和的限制条件下，它可以推广到任意开集的并。关于整数极大 Hopf 集，还可以提出许多问题。另一个同样自然的问题是：“是否存在这类集合，它们并非由推论 1 中的构造得到？”仔细考察例子（4）可知，答案是“是”，因此还可以探究构造整数极大 Hopf 集的其他方法。

最后，我们以一个最初引起我们对这一主题兴趣的问题作结。考虑函数 $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(2\pi k x)$，$x \in [0, 1]$。

猜想 K 证明 $H(g_n)^*$ 是式 (2) 中定义的集合 V_n。

在图 5 中，我们可以看到，对于某些弦长，在 h 的图上有多种方式可以得到它们。与此相关的是，D. J. Newman 于 1963 年在本刊提出了一个问题，N. J. Fine 在次年给出了解答（[7]），问题等价地表述如下

定理 8. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和每个 $f \in \mathcal{F}$，至少存在 n 条不同的 f 弦，其长度是 $\frac{1}{n}$ 的整数倍。

我们邀请读者使用 UCT 通过归纳法证明这一点。我们注意到，对于每个 $\ell \in$ P，都可以定义一个向量 $v(\ell) = [m_1, m_2, ..., m_n]$，其分量为 m_i 非负整数，表示弦 ℓ 在 f的图中出现的次数。显然，根据 UCT，我们有 $m_1 \geq 1$；根据定理 8，我们有 $m_n = 1$ 和 $\sum_k m_k \geq n$。了解这些信息能让我们对函数f有更多认识，因此一个自然的问题是：这个定义在 P 上的向量函数，是否能在某些保持集合 $H(f)$ 不变的变换下唯一确定函数 f？这类变换包括 $f \to h \circ f$和$f \to f \circ \phi$，其中 h 是连续双射，$h(0) = 0$；而 $\phi : [0,1] \to [0,1]$是关于我们先前使用的 $1/2$ 的对称性，$\phi(x) = 1 - x, x \in [0,1]$。

参考文献

[1] 安德烈-玛丽·安培，关于导函数理论若干问题的研究：由此得出泰勒级数的新证明，以及在级数截断于任意项时被忽略项的有限表达式，巴黎综合理工学院学报**6** (1806)，第13期，148–181页。[2] K·伯恩斯、O·达维多维奇和D·戴维斯，平均速度与水平弦，《数学情报》**39** (2017)，第4期，41–45页。[3] D·戴维斯和S·特罗别茨科伊，水平弦集，《美国数学月刊》**131** (2024)，第6期，519–525页。[4] 海因茨·霍普夫，关于平面连续统的弦与闭合路径的环，《Comment. Math. Helv.》**198** (1937)，第13期，303–319页。[5] R·J·莱维特，罗尔定理的有限差分扩展，《美国数学月刊》**70** (1963)，第1期，26–30页。[6] 保罗·莱维，罗尔定理的一种推广。，《C. R. Acad. Sci.》**198** (1934)，第13期，424–425页。[7] D. J. Newman和N. J. Fine，扩展弦定理，《美国数学月刊》**71** (1964)，第1期，104页。

Ion Ciudin，米哈伊·埃米内斯库国立学院，博托沙尼，罗马尼亚，电子邮件地址：ciudini@yahoo.com

Eugen J. Ionaşcu，哥伦布州立大学，哥伦布，佐治亚州，电子邮件地址：nnueminescu@outlook.com，ionascu@columbusstate.edu