arXiv:2601.14125v1 [math.CV] 20 Jan 2026

柔性曲线与豪斯多夫维数

ALEX RODRIGUEZ

Abstract. 我们证明，对于给定的对数奇异圆周同胚 h 以及任意的 $s \in [1,2]$，存在一条豪斯多夫维数为 s 、焊接为 h 的柔性曲线。我们还发现，存在另一条焊接为 h 且具有正面积的曲线。特别地，这意味着，对于给定的一条柔性曲线 Γ，存在一个平面同胚 $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它在 Γ 外共形，且使得 $\phi(\Gamma)$ 具有正面积。这回答了关于一般非共形可去集的相应猜想中的一个特例；这里考虑的曲线类在所有若尔当曲线组成的空间中是剩余的。

1. Introduction

设 $\gamma \subset \mathbb{C}_\infty$ 是一条若尔当曲线，并考虑 Ω，Ω^*，即 γ 在 $\mathbb{C}_\infty$（黎曼球面）中的两个补分支。根据黎曼映射定理，存在共形映射 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ 和 $g\colon \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D} = \mathbb{D}^* \to \Omega^*$，如图 1 所示。根据 Carath´eodory–Torhorst 定理，这些共形映射可延拓为从单位圆到 γ 的同胚。由此得到保向同胚 $h = g^{-1} \circ f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$，我们称之为共形焊接（简称焊接）。焊接 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 由 γ 唯一确定，但允许在前后复合 $\mathbb{D}$ 的自同构；我们用 $[h]$ 表示这一类圆周同胚。因此，共形焊接对应 $\mathcal{W}\colon [\gamma] \to [h]$ 定义良好，其中 $[\gamma]$ 表示由 γ 的莫比乌斯变换得到的曲线。这个对应并非满射；例如，Oikawa[Oik61, Example 1] 给出了一族并非焊接的圆周同胚。本文研究该对应对于对数奇异圆周同胚 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 的非单射性，也就是说，存在一个对数容量为零的博雷尔集 $E \subset \mathbb{S}^1$，使得 $h(\mathbb{S}^1 \setminus E)$ 的对数容量为零。

定理 1.1。设 h 是一个对数奇异圆周同胚。那么，h 是某条具有正面积的曲线的共形焊接，并且对于任意 $s \in [1,2]$，它也是某条豪斯多夫维数为s 的曲线的共形焊接。

对数奇异圆周同胚极不规则，但仍然是焊接。这一点最早由 Bishop [Bis07] 证明，也可由定理 1.1 推出。另一方面，圆周上的良态自映射，如拟对称映射，也是焊接。这就是所谓的共形焊接基本定理，最早由 Pfluger 于 [Pfl60] 借助可测黎曼映射

日期：2026年1月20日。作者部分获得了美国国家科学基金会 DMS 2303987 项目的资助。2020 数学主题分类。主要分类 30C85；次要分类 30E25。关键词与短语。拟共形映射、共形焊接、平面势理论。

定理证明。不久之后，Lehto 和 Virtanen [LV60] 也借助拟共形映射给出了另一种证明。Astala、Jones、Kupiainen 和 Saksman [AJKS11]的一些研究证明，至多在各尺度上 具备正则性是同胚成为焊接的充分条件。然而，我们仍缺乏能够刻画更一般焊接类的判据。最近，我证明了每个保向圆周同胚都是两个共形焊接的复合 [Rod25]。关于共形焊接的综述，读者可参阅 Hamilton 的 [Ham02]。

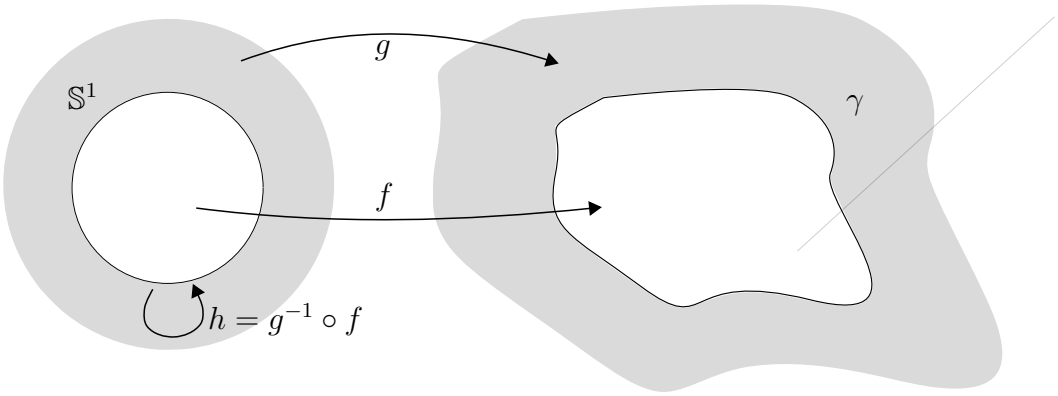

FIGURE 1. 共形焊接的定义。共形映射f 和 g 将单位圆的内部和外部映射到若尔当曲线 γ的两个补分支。映射h: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是 $\mathbb{S}^1$ 上的保向同胚。

接下来我们说明定理 1.1 的一些推论。

推论 1.2 ([Bis20]Question11)**.** 对于对数奇异圆周同胚，焊接对应是不可数对一的。

由对数奇异圆周同胚产生的曲线将在后文更详细地讨论，这类曲线称为柔性 曲线，最初由 Bishop [Bis94] 引入。若若尔当曲线 $\gamma \subset \mathbb{C}$ 满足以下条件，则称其为柔性曲线:

(i) 给定任意另一条若尔当曲线 $\tilde{\gamma}$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在一个同胚 ϕ: $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$，它在 γ之外共形，且 ϕ(γ)与 $\tilde{\gamma}$ 之间的豪斯多夫距离小于 ε。
(ii) 给定 z_1， z_2 在 $\mathbb{C}_\infty \setminus \gamma$ 的每个连通分支中，以及 w_1， w_2 在 $\mathbb{C}_\infty \setminus \tilde{\gamma}$的每个连通分支中，可以选择前述映射 ϕ ，使得 $\phi(z_j) = w_j$ 对 $j = 1$，2成立。

Bishop [Bis07] 注意到，应用 Balogh 和 Bonk 的一个定理 [BB99] 可得，柔性曲线的焊接同胚是对数奇异的。在同一篇论文中，Bishop 证明了逆命题也成立。

来自 (i) 的同胚集合 ϕ属于

$$\mathrm{CH}(\gamma) = \{\phi \colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty \text{ homeomorphism} \colon \phi \text{ conformal off } \gamma\}.$$

如果 CH(γ) 仅由 M¨obius 变换组成，那么我们称曲线 γ为共形可去。更多信息请参见 Bishop [Bis20] 和 Younsi 撰写的综述论文

[You15]，了解有关共形可去集的更多信息。刻画共形可去的若尔当曲线仍然是一个困难的开放问题，更不用说刻画共形可去集了。不过，值得一提的是 Ntalampekos [Nta24a] 的工作，它朝这一方向迈出了非常重要的一步。有界解析函数的相应问题则由 Tolsa[Tol03] 在其突破性工作中解决。

根据定义可知，柔性曲线是不可移去的。利用定理 1.1 还可给出另一种证明，并得到以下更强的结果。

推论 1.3. 设 $\gamma \subset \mathbb{C}$ 是一条柔性曲线，则存在一个同胚 $\phi \in CH(\gamma)$，使得 $\phi(\gamma)$ 具有正面积。

将图 2 中构造的同胚与定理 1.1 结合起来即可得到证明。

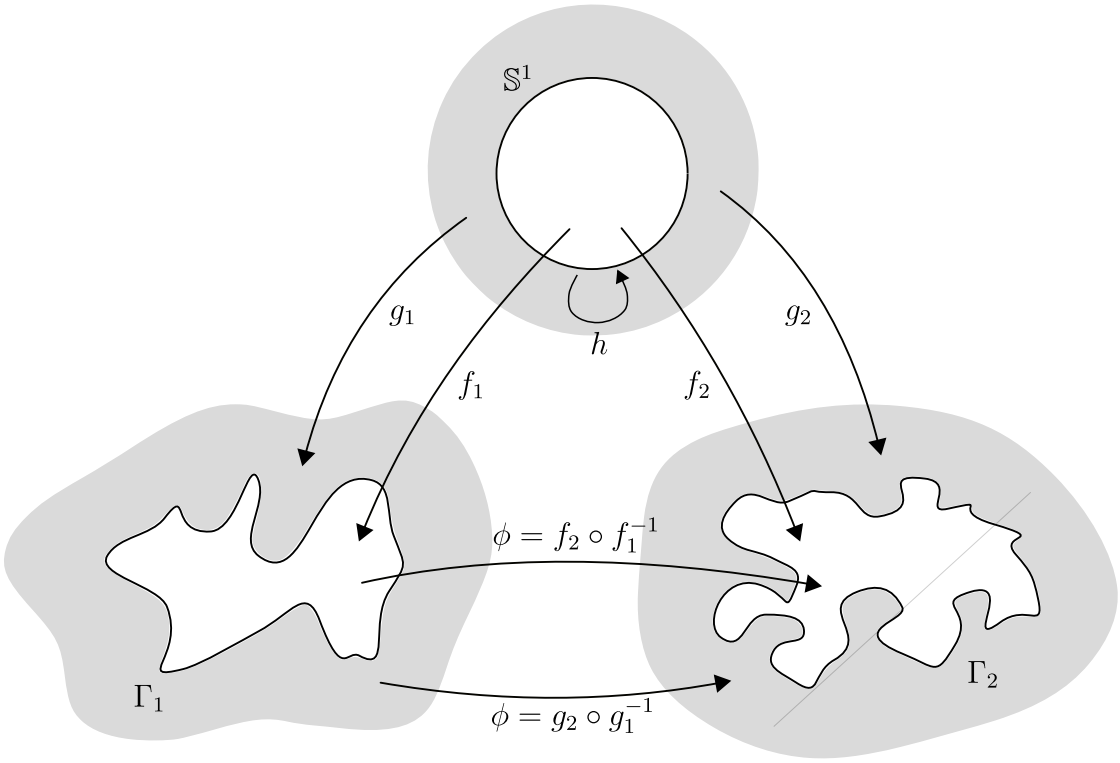

FIGURE 2. 如果两条非共形等价曲线 Γ_1，Γ_2 具有相同的焊接 h，那么存在一个同胚 $\phi \in CH(\Gamma_1)$，使得 $\phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$。

事实上，定理 1.1 还可给出以下更强的结果。

推论 1.4. 设 $\gamma \subset \mathbb{C}$ 是一条柔性曲线，且 $s \in [1, 2]$，则存在一个同胚 $\phi \in CH(\gamma)$，使得 $\phi(\gamma)$ 的豪斯多夫维数为 s。

推论 1.3 是一个已悬而未决 30 多年的猜想的特例。

猜想 1.5 ([Bis94] 问题 2)。 设 γ 是一条非可去曲线，则存在 $\phi \in \mathrm{CH}(\gamma)$，使得 $\phi(\gamma)$ 具有正面积。

根据 Pugh 和 Wu [PW12] 的一个结果以及 Beurling [Beu40] 的一个结果，柔性曲线在若尔当曲线空间中是稠密剩余的。因此，推论 1.3 证明了猜想 1.5 对一般 类若尔当曲线成立。

如果猜想 1.5 成立，那么以下这个已悬而未决 50 多年的猜想也成立。

猜想 1.6。 共形焊接对应是单射，当且仅当相应的若尔当曲线是共形可去的。也就是说，一条若尔当曲线由其焊接同胚（模去 M¨obius 变换）唯一确定，当且仅当它是共形可去的。

我能回忆起的这一猜想最早出现于 Lehto 的 [Leh70]。许多作者都曾声称这一猜想为真，但要么没有给出证明，要么论证有误；这一点由 Fortier-Bourque 注意到。参见 Younsi 的 [You15]。

后来，Younsi [You18]提出，共形焊接对应的单射性或许并不能完全由 γ 是否可共形去除来刻画。也就是说，即使 γ 不可去除且 $\phi \in \mathrm{CH}(\gamma)$，$\phi(\gamma)$ 也可能是 γ 的一个 M¨obius 像。更确切地说，Younsi[You18, 定理 1.3] 证明，存在一条零面积柔性曲线以及$\phi \in \mathrm{CH}(\gamma)$，使得 $\phi(\gamma) = \gamma$。然而，推论 1.4 表明，对于柔性曲线，还存在另一个 $\varphi \in \mathrm{CH}(\gamma)$，使得 $\varphi(\gamma)$ 不是 γ 的 M¨obius 像。

注意，如果假设 γ 具有正面积，那么根据可测黎曼映射定理，共形焊接对应 $\mathcal{W}$ 不是单射。

推论 1.4 还推出以下结果。

推论 1.7. 设 γ 是一条柔性曲线，则存在 $\phi \in \mathrm{CH}(\gamma)$，使得 $\phi(\gamma)$的面积为零。

由于定理 1.1 表明存在正面积的柔性曲线，这也回答了下面这个未解决猜想的一个特例。

猜想 1.8. 设 E 是一个无内部的正面积集合，则存在$\phi \in \mathrm{CH}(E)$，使得 $\phi(E)$的面积为零。

这个猜想最早以问题的形式出现在 Bishop 的 [Bis94, Question 3] 中。后来，Kaufman 和 Wu [KW96, Theorem 3] 证明，总是存在一个正面积的 $F \subset E$和一个 $\phi \in \mathrm{CH}(E)$，使得 $\phi(F)$ 的面积为零；他们还猜测 Bishop 问题的答案是否定的。也就是说，猜想 1.8 是错误的。

据我们所知，定理 1.1（以及推论 1.2）首次给出了这样一个情形：一条零面积的不可消除乔丹曲线通过 CH 同胚对应于不可数多条彼此非共形等价的乔丹曲线。见图 2。类似地，我们在定理 1.1 证明中的构造也蕴含如下结论。

推论 1.9 ([Bis20]Question14)。 柔性曲线的 CH-像集并非全不连通。

共形焊接已被应用于数学的许多其他领域。例如，Sheffield [She16] 和 Duplantier、Miller 及 Sheffield [DS11]利用共形焊接建立了刘维尔量子引力与 Schramm-Loewner 演化曲线之间的联系。Ang、Holden 和 Sun [AHS23] 证明，对于 $\kappa \in (0, 4)$，随机Loewner演化$_\kappa$ 测度自然地源自两个$\sqrt{\kappa}$-刘维尔量子引力圆盘的共形焊接。关于这一方向的近期工作，参见 Fan 和 Sung [FS25]。Sharon 和 Mumford [SM06] 在其计算机视觉应用中使用了共形焊接。共形焊接也是构造普遍 Te-ichm¨uller 空间的基础（例如参见 Lehto 的著作 [Leh87]）。McMullen [McM26] 最近在其复动力系统应用中使用了共形焊接。

1.1. **本文概述**。 现在我们简要概述定理 1.1 的证明：回顾 Bishop 的原始构造 [Bis07, Theorem 25], ，并说明如何对其进行改进，以构造出具有任意可能豪斯多夫维数（甚至正面积）的柔性曲线。我们的构造使用拟共形映射。请注意，我们也可以通过将共形焊接定义中的映射取为拟共形映射而非共形映射，来定义拟共形焊接。然而，根据可测黎曼映射定理，我们得到：

命题 1.10。 设 γ 是一个具有拟共形焊接 h的若尔当曲线，则存在一个拟共形映射 H: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得 $H(\gamma)$ 具有共形焊接h。也就是说，拟共形焊接与共形焊接是相同的。

在**第 2 节**中，我们介绍所有预备知识，其中包括对数容量、豪斯多夫测度与维数、柔性曲线、极值长度、拟共形映射和调和测度。

设 h: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个对数奇异圆周同胚，并假设我们有两个拟共形映射 f_1: $\mathbb{D} \to \Omega_1$ 和 g_1: $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \to \Omega_1^*$，其中 Ω_1,Ω_1^* 是闭包不交的若尔当域。我们的目标是得到新的拟共形映射 f_2: $\mathbb{D} \to \Omega_2$ 和 g_2 : $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \to \Omega_2^*$，其中 Ω_2 和 Ω_2^*是闭包不交的若尔当域，使得粗略地说

$$||(f_2)_{|\mathbb{S}^1} - (g_2 \circ h)_{|\mathbb{S}^1}||_\infty \leq c||(f_1)_{|\mathbb{S}^1} - (g_1 \circ h)_{|\mathbb{S}^1}||_\infty,$$

其中 $c < 1$。拟共形映射 f_2, g_2 将粗略地构造为 f_1, g_1的拟共形延拓。图 3 展示了这一过程。只要我们能够不断迭代这一过程，同时使映射的拟共形常数保持一致有界，根据命题 1.10， h 就是一个共形焊接。上述映射一般并不存在，但 Bishop[Bis06, Bis07]敏锐地注意到，可以在对数容量为零的集合上实现这一点。由于 h 是对数奇异的，这样的序列便存在，并且 h 将是一个共形焊接。

给定映射 f_1, g_1 我们按以下方式构造映射 f_2, g_2。首先，给定一个闭集 $E \subset \mathbb{S}^1$，它由有限个闭弧组成且对数容量很小，我们构造一个共形映射 ϕ: $\mathbb{D} \to W$，其中W 粗略来说是一个半径为 R 的大圆盘 $\mathbb{D}(0, R)$（当 E 的对数容量很小时， R 就很大），去掉了有限条径向裂隙；这些裂隙都与单位圆 $\mathbb{S}^1$ 相交。该映射在**第 3 节**中构造。

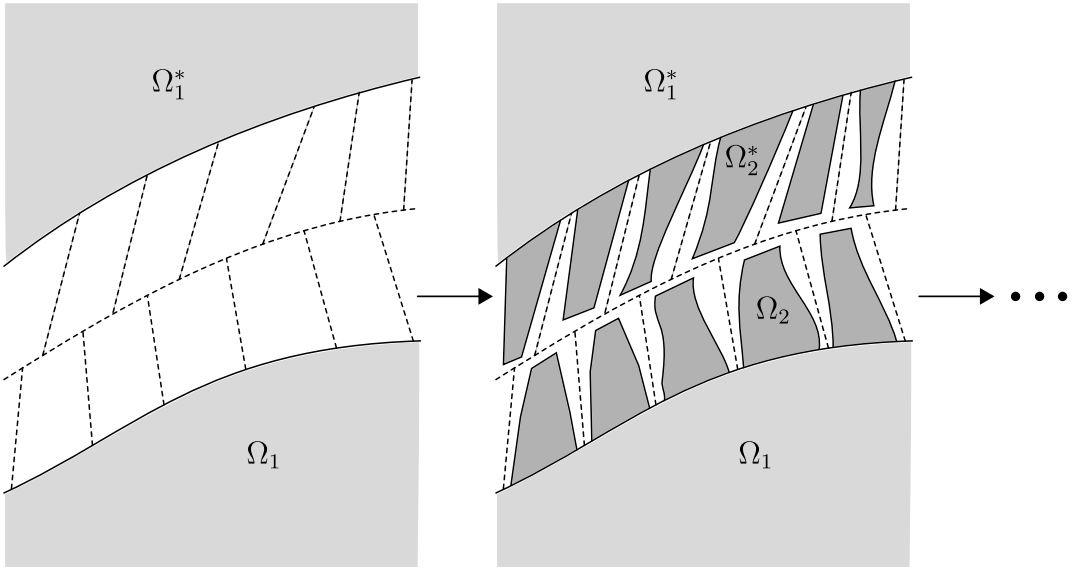

FIGURE 3. 具有焊接 h 的曲线是通过一个迭代过程构造的。在每一步中，我们对映射f_4：$\mathbb{D} \to \Omega_1$, g_1: $\mathbb{C} \setminus D \to \Omega_1^*$进行拟共形延拓，使 $f_1(\xi)$与 $g_1(h(\xi))$之间的无穷范数按固定比例减小。

并在图6中表示。注意， $W \setminus \mathbb{D}$ 由有限个四边形组成 W_k （我们稍后会具体说明四边形顶点和边）。

其次，我们构造 f_1 的拟共形延拓（并以类似的方式构造 g_2的拟共形延拓）。我们强调，要控制拟共形延拓的拟共形常数，就必须对其构造位置有充分的几何控制。注意，我们可以将四边形 W_k （构造 ϕ时得到）嵌入环域 $\mathbb{C} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_1^*)$中，方法是将 W_k 映射到图3中深色的四边形。这些嵌入可以是共形的。然而，一般而言，它们并不能延拓我们的映射 f_1。为了解决这一问题，我们在**第4节** 中引入容许形状的概念，这是本文最主要的新技术。简言之，我们量化了何时能够定义一个延拓，使其在我们的映射 f_1 与这些共形嵌入之间进行插值，并且其拟共形常数可以按需接近 f_1 的拟共形常数。示例见图4。

在**第 5 节** 中，我们使用容许形状来构造 ψ，即前述的 f_1 拟共形扩张（类似地，我们也可以为 g_1定义它）。

在**第 6 节** 中，我们定义 f_2。粗略地说， $f_2 = \psi \circ \phi$。我们完成了对 Bishop 的结果 [Bis07、定理 25]的证明。

正如我们将在第4节看到的，容许形状的主要优势之一是，在选择嵌入到环域 $\mathbb{C} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_1^*)$ 时，它们提供了很大的灵活性 。在**第7节** 中，我们利用这一点证明，存在一条具有正面积（因此豪斯多夫维数为 2）的柔性曲线，其焊接为 h。

回顾一下，当使用命题 1.10 通过共形焊接 h 恢复一条若尔当曲线时，相应的拟共形映射可能会改变豪斯多夫维

数。这个主题有着非常丰富的历史，例如参见 Astala 的 [Ast94]、Gehring 的 [GV73] 以及 Smirnov 的 [Smi10]。由于拟共形映射保持零测集不变，因此证明存在具有正面积的柔性曲线并不存在问题。然而，在证明存在豪斯多夫维数为 $s \in [1,2)$ 的柔性曲线时，这会带来问题。

在**第8节** 中，我们利用形状以及关于小拟共形常数的平面拟共形映射与线性变换之间差异的一些界，证明了 $s = 1$的定理 **1.1**。

最后，在**第9节** 中，我们结合显式构造和第4节的结果，证明了 $s \in (1,2)$的定理 **1.1**。

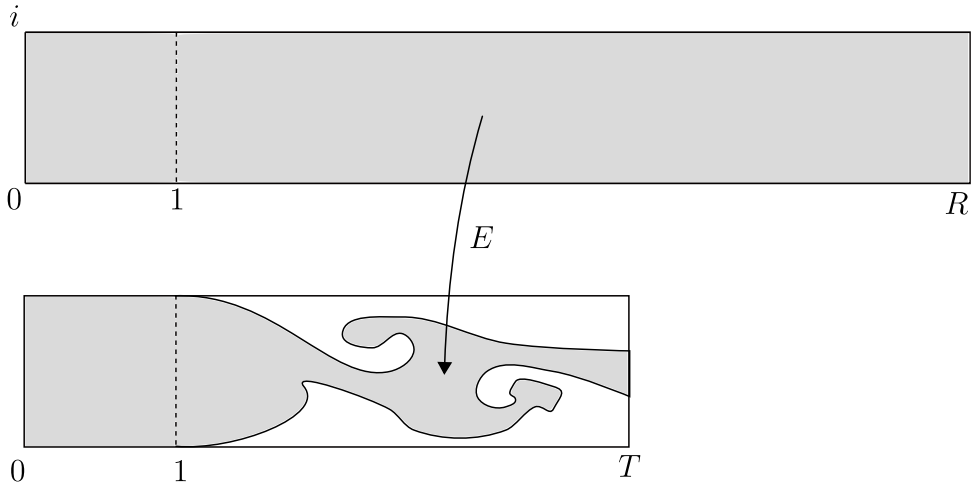

FIGURE 4. 形状刻画了一个四边形到另一个四边形的共形嵌入。映射 E 从矩形 $[0,R] \times [0,1]$ 到矩形 $[0,T] \times [0,1]$ 是共形的。

致谢。 本文的部分工作是在作者访问豪斯多夫数学研究所期间完成的。我要特别感谢 Chris Bishop 与我进行了多次交流，持续提供反馈并指出错误。我还感谢 Kari Astala、Stathis Chrontsios、Hrant Hakobyan、Randall Kayser、Willie Lim、Misha Lyubich、Dimitrios Ntalampekos、Eero Saksman、Raanan Schul、Jinwoo Sung、Malik Younsi 和 Catherine Wolfram，他们就本文的结果与我交流，并提出了意见。

记号。 我们用 $a \lesssim b$ 表示存在某个 $C < \infty$ 使得 $a \leq Cb$。若 $a \lesssim b$ 且 $b \lesssim a$，则记作 $a \simeq b$ 。在结果陈述或证明中途引入新定义时，我们使用：$=$。

和通常一样， $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ 表示单位圆盘， $\mathbb{S}^1 = \{|z| = 1\}$ 表示单位圆。类似地， $\mathbb{D}(a, R) = \{|z-a| < R\}$、 $\mathbb{D}^* = \{|z| > 1\}$，而 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$表示黎曼球面。 $[a,b]$ 表示连接 a， b的线段；不过在上下文明确时，它表示 $\mathbb{S}^1$ 中连接 a， b的最短圆弧。我们用 $|[a,b]|$ 表示此类区间或弧的长度。

除非我们特别说明相反的情况（使用 到或 映上），否则我们所考虑的映射都是同胚。

2. Preliminaries

本节总结有关（对数）容量的已知结果，这些结果将在后续各节中用到。这些结果都收录于 Carleson [Car67], Garnett 和 Marshall [GM08], 以及 Pommerenke[Pom92]的著作中。我们还将回顾豪斯多夫测度和维数的定义，以及此前关于柔性曲线、极值长度、拟共形映射和调和测度的一些已知结果。

2.1. 对数容量。 设 μ是一个具有紧支集的有限带符号（博雷尔）测度。 μ 的对数势是泛函

$$U_\mu(z) = \int \log \frac{1}{|\xi - z|} d\mu(\xi).$$

根据富比尼定理， $U_\mu(z)$关于勒贝格测度几乎处处有限。如果

$$\iint \left| \log \frac{1}{|z-\xi|} \right| d|\mu|(\xi) d|\mu|(z) < \infty,$$

我们称 μ 具有有限能量，并将能量积分 $I(\mu)$定义为

$$I(\mu) = \iint \log \frac{1}{|z-\xi|} d\mu(\xi) d\mu(z) = \int U_\mu(z) d\mu(z).$$

设 K 为紧集，并用 $P(K)$表示其上所有博雷尔概率测度的集合。将 K 的罗宾常数定义为

$$\gamma(K) = \inf\{I(\mu) \colon \mu \in P(K)\},$$

以及 K 的（对数）容量

$$\operatorname{Cap}(K) = e^{-\gamma(K)}.$$

由此可知， $\gamma(K) < \infty$ 当且仅当 $\operatorname{Cap}(K) > 0$，只要存在一个具有有限能量 $I(\mu) < \infty$ 的概率 $\mu \in P(K)$，这一条件便成立。如果 $K_1 \subset K_2$，那么 K_1 上的任意概率也是 K_2 上的概率。因此 $\gamma(K_1) \geq \gamma(K_2)$ 且 $\operatorname{Cap}(K_1) \leq \operatorname{Cap}(K_2)$，也就是说，容量集合函数关于集合包含关系是单调的。

任意博雷尔集 E 的容量定义为

$$\operatorname{Cap}(E) = \sup\{\operatorname{Cap}(K) \colon K \text{ compact}, K \subset E\}.$$

容量可能难以计算，但一些简单集合的容量是已知的（参见 [GM08，第 3] 章，或 [Pom92，第 9] 章）。例如，对于a， $b \in \mathbb{C}$，$\operatorname{Cap}[a,b] = |a-b|/4$，而圆盘的容量等于其半径，即 $\operatorname{Cap}(\mathbb{D}(a, r)) = r$。

现在，我们总结对数容量的一些其他已知性质，这些性质稍后会用到。

命题 2.1。对数容量具有以下性质。

(i) 如果 φ 是 *L-Lipschitz* 的，则 容量$(\varphi(E)) \leq L$容量(E)。 *(ii)* 如果 $h(\xi) = c\xi + c_0 + c_1\xi^{-1} + \cdots$ 将 $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}$ 共形地映射到 $\overline{G}$，则容量 $(\partial G) = |c|$。

(iii) 博雷尔集是可容量化的，即给定 E 博雷尔集和 $\varepsilon > 0$，存在一个开集 V，使得 $E \subset V$，且 容量(V) $<$ 容量(E) $+\varepsilon$。 *(iv)* 如果 E_n 是博雷尔集，且 $E = \cup E_n$ 的直径小于或等于一，则 $1/\gamma(E) \leq \sum 1/\gamma(E_n)$。

(i)、(ii) 和 (iii) 的证明见 [Pom92，第 9], 章；(iv) 可由 [Car67 第 3] 节中的引理 4 得出。

2.2. **豪斯多夫测度与维数**。我们遵循 [Car67, Chapter II]。

测度函数是 h: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 连续且递增，并且 $h(0) = 0$。h 在文献中也称为规范函数。设 E 有界，并考虑对 E 的所有可能覆盖，这些覆盖由可数个半径为 r_j 的圆盘 D_j 组成，即 $E \subset \cup_j D_j$。对于 $\delta \in (0, \infty]$，我们定义

$$H_h^\delta(E) = \inf\left\{\sum_j h(r_j)\colon E \subset \cup_j D_j, r_j \leq \delta\right\}. \tag{2.1}$$

极限,

$$H_h(E) = \lim_{\delta \to 0} H_h^\delta(E) \tag{2.2}$$

存在（尽管它可能为无穷大），称为与 h相关的豪斯多夫测度。 H_h^∞称为豪斯多夫容度，它不是测度，但 H_h^∞ 和 H_h 在相同的集合上为零。

如果 $h(r) = r^s$ 我们将测度 H_h 记为 H_s，并定义

$$\mathcal{H}\dim(E) = \inf\{s > 0\colon H_s(E) = 0\}$$

E的豪斯多夫维数。在证明某个集合具有某个豪斯多夫维数时，我们通常通过考虑显式覆盖来求得上界。要找到下界，则需要构造一个 Frostman 测度，即满足定理 2.2 中条件的测度。

定理 *2.2*（*Frostman* 引理）。设 μ 是一个测度，满足对于每个圆盘 D 或半径为 r的圆盘，均有 $\mu(D) \leq h(r)$，则 $\mu(E) \leq H_h(E)$。反过来，存在常数 c，使得对于每个紧集 F，都存在一个 μ 满足 $\mu(D_r) \leq h(r)$，且 $\mu(F) \geq cH_h^\infty(F)$。

定理 2.2 的一个非常优雅的证明见 Carleson 的著作 [Car67]，尽管最早的证明出现在 Frostman 的博士论文中。注意，只有当 $H_h^\infty(E) > 0$，即测度 μ 非零时，定理 2.2 才能提供有用的信息。将定理 2.2 应用于 $h(r) = r^s$ 和 μ 时，可得 $\mathcal{H}\dim(E) \geq s$。

2.3. **柔性曲线与对数奇异同胚**。 在 [Bis94]Bishop介绍并证明了柔性曲线的存在性。若尔当曲线 $\gamma \subset \mathbb{C}$ 若满足以下条件，则称其为柔性的：

(a) 给定任意另一条若尔当曲线 $\tilde{\gamma}$ 和任意 $\varepsilon > 0$，存在一个同胚映射 ϕ: $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$，在 γ之外共形，使得 $\phi(\gamma)$ 与 $\tilde{\gamma}$ 之间的豪斯多夫距离小于 ϵ。

(b) 给定，z_2 在 $\mathbb{C}_\infty \setminus \gamma$ 的每个连通分支中，以及 w_1，w_2 在 $\mathbb{C}_\infty \setminus \tilde{\gamma}$ 的每个连通分支中，可选取前述 ϕ，使得对于 $j = 1, 2$，$\phi(z_j) = w_j$。

柔性曲线在很强的意义下是共形不可去的（我们也将在定理 1.4 的证明中看到这一点）。后来，[Bis07] Bishop 证明了：$h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是柔性曲线的共形焊接，当且仅当 h 是对数奇异的。他证明的具体结果是定理 6.2，稍后将在第 6 节陈述。

我们有以下关于对数奇异同胚的刻画。

引理 2.3 ([Bis07] 引理 11)**.** 设 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个保向圆周同胚。那么以下条件等价。

(i) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在有限个闭区间的并集 $E \subset \mathbb{S}^1$，使得容量(E) + 容量$(h(\mathbb{S}^1 \setminus E)) < \varepsilon$。*(ii)* 对任意 $n \in \mathbb{N}$，存在紧集 $E_n \subset \mathbb{S}^1$，使得容量$(E_n) \leq 1/n$且容量$(h(\mathbb{S}^1 \setminus E_n)) \leq 1/n$。*(iii)* 存在一个博雷尔集 E，使得 E 和 $h(\mathbb{S}^1 \setminus E)$ 的对数容量均为零，即 h 是对数奇异的。

Pugh 和 Wu [PW12, 定理 3] 构造了一些特殊的若尔当曲线，它们是某些常微分方程的漏斗截面。这些若尔当曲线 γ 具有如下性质：任何两端点分别位于其 γ补分支中的可求长曲线 σ，与该曲线 γ的交点都不止一个（他们将这一条件称为非光滑可穿透）。在同一篇论文中，他们还证明了这类曲线是稠密的 [PW12, 定理 15], 也就是说，按照他们所定义的拓扑，它们构成若尔当曲线空间中的一个剩余集。这些曲线也具有柔性；Beurling 的一个结果 [Beu40] 表明，对于单连通域，除去边界上某个对数容量为零的集合 $\mathbb{S}^1$的像，其余边界点处终止的双曲测地线长度都有限。

柔性曲线也可能表现出非常病态的行为。例如，受 Pugh 和 Wu 的结果启发，Burkart 在 [Bur20] 构造了一条柔性曲线，使得在一个零长度集上，没有可求长弧能够与之相交（特别是，这样的曲线具有正面积）。

对数奇异圆周同胚也有应用。例如，在 [Rod25]中，我证明了每个圆周同胚都可以写成两个对数奇异圆周同胚的复合。

2.4. 路径族的极值长度与模数。 设 Γ是 $\mathbb{C}$中的一族曲线，其中每个 $\gamma \in \Gamma$ 都是开弧、闭弧或闭曲线的可数并，且每条闭弧都是可求长的。非负博雷尔函数$\rho\colon \mathbb{C} \to [0, \infty]$对 Γ 是可容许的，当且仅当

$$l(\Gamma) = l_\rho(\Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma \rho ds \geq 1.$$

我们将该路径族的模数 $M(\Gamma)$ 定义为

$$M(\Gamma) = \inf_\rho \iint \rho^2 dm$$

并将极值长度 $\lambda(\Gamma)$ 定义为 $=1/M(\Gamma)$。

利用柯西–施瓦茨不等式，我们可以看到，给定矩形 $[0,R]\times[0,1]$ 和连接垂直边的路径族，则 $M(\Gamma)=1/R$。此外，我们还可以利用这一点证明：如果 $A_{r,\ R}(z_0)=\{r<|z-z_0|<R\}$，且 Γ_A 是环域中分隔两个连通分支的路径族，那么

$$M(\Gamma_A)=\frac{1}{2\pi}\log(R/r).$$

所谓 Jordan 四边形 $Q=Q(v_1,v_2,v_3,v_4)\subset\mathbb{C}$，是指一个带有四个标记点的有界若尔当域；我们将这些点称为四边形顶点（并假设它们按逆时针方向排列）。为简便起见，我们将其简称为四边形。我们用 a_1,b_1,a_2 表示连接这些点的 Jordan 弧，并将 b_2 称为图 5 所示四边形的边。我们将每一对不相交的边称为对边，并称 a_1,a_2 为 a 边，称 Q 和 b_1,b_2 为 b 边。

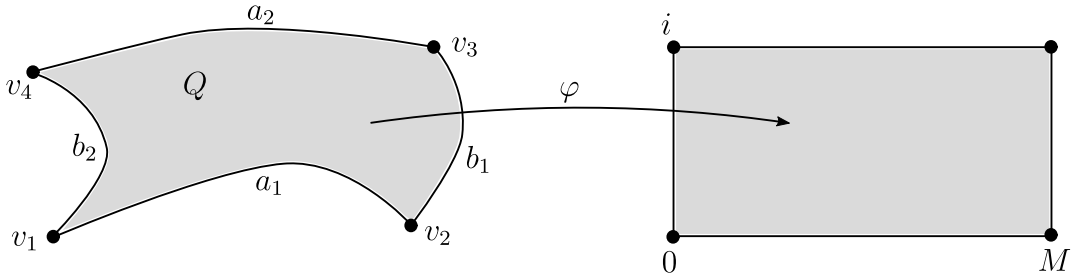

FIGURE 5. 四边形 Q 的四边形顶点、 a边和 b边的表示，以及通过共形映射 φ 将其映射到矩形 $[0,M]\times[0,1]$的表示；该映射将四边形顶点映射到矩形顶点。值 M 是一个共形不变量。

四边形 Q 可以共形地映射到一个矩形，使得该四边形的四边形顶点映射到矩形的顶点（参见 [Ahl21] 中的 6.2.3，或 [LV73]中第 I 章第 2.4 节）。该矩形的 a边与 b边的长度之比是一个共形不变量。如图 5 所示，量$M=M(Q)=M(Q(v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4))$ 称为 Q的模数。

模数是一个共形不变量。若定义路径族 Γ由所有连接四边形 Q的相对 a边的局部可求长路径组成，则该路径族的模数与该四边形的模数相同，即 $M(\Gamma)=M(Q)$。

我们总结一些主要性质。

命题 2.4（模数和极值长度的性质）。设 $\Gamma_k,\ \Gamma,\ \Gamma'$ 为路径族。

(i)（单调性）如果每个 $\gamma'\in\Gamma'$ 都包含某个 $\gamma\in\Gamma$，那么 $\lambda(\Gamma')\geq\lambda(\Gamma)$，且 $M(\Gamma')\leq M(\Gamma)$。*(ii)*（串联法则）如果 $\Gamma\supset\Gamma_1+\Gamma_2$，那么 $\lambda(\Gamma)\geq\lambda(\Gamma_1)+\lambda(\Gamma_2)$。*(iii)*（并联法则）如果 Γ_1、Γ_2 分别属于不相交的博雷尔集，且 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$，那么 $M(\Gamma)\geq M(\Gamma_1)+M(\Gamma_2)$。

(iv)（单调性+可数次可加性）如果 $\Gamma \subset \Gamma'$，或者对于每个 $\gamma \in \Gamma$ 都存在满足 $\gamma' \subset \gamma$ 的 $\gamma' \in \Gamma'$，那么 $M(\Gamma) \leq M(\Gamma')$。此外，

$$M\left(\bigcup_k \Gamma_k\right) \leq \sum_k M(\Gamma_k).$$

(v) 若 $\cup_k \Gamma_k \subset \Gamma$ 与 Γ_k 的支集位于互不相交的博雷尔集中，则$\sum_k M(\Gamma_k) \leq M(\Gamma)$。*(vi)* 若对每个 $\gamma \in \Gamma$ 都存在 $\gamma_k \in \Gamma_k$，则 $\lambda(\Gamma) \geq \sum_k \lambda(\Gamma_k)$。

我们还需要：

引理 2.5 ([Ahl06])。 $m = m_1 + m_2$ 当且仅当分界线为 $\{x = m_1\}$。

以下由 Balogh 和 Bonk 得出的结果（可利用极值长度证明）在本文中将发挥重要作用。

引理 2.6 ([BB99], [Bis07] Lemma 17)。 设 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ 是共形的，且对于 $R \geq 1$，我们定义

$$E = \{x \in \mathbb{S}^1 \colon |f(x)| \geq R \cdot d(f(0), \partial\Omega)\}.$$

于是 容量$(E) \leq CR^{-1/2}$，其中 C 与Ω无关。

2.5. **拟共形映射**。 拟共形映射由 H. Gr¨otzsch 于 1928 年引入。由于模数是共形不变量，不存在将正方形映射到矩形（非正方形）且将顶点映射到顶点的共形映射。平面拟共形映射有几种（等价的）定义（详见 [Ahl06、LV73] ）。若保向同胚 $\phi\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \Omega' \subset \mathbb{C}$ 满足对于每个四边形 $Q \subset \Omega$，都有，则称其为 K-拟共形映射

$$M(\phi(Q)) \leq KM(Q).$$

W我们称 $K \geq 1$ 为 拟共形常数， ϕ 或称其为 最大伸缩率 .

前述定义通常称为几何定义，它等价于： ϕ 是一个保向同胚，具有局部可积的分布导数 ϕ_z，ϕ_z 并且几乎处处满足 $|\phi_z| \leq k|\phi_z|$，其中$k = (K-1)/(K+1)$（我们称之为解析定义）。该不等式还保证了 $\phi \in W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}$。可测函数 $\mu_\phi = \phi_z/\phi_z$ 称为 ϕ的膨胀。我们还将 $\phi_z = \mu_\phi \phi_z$ 称为贝尔特拉米方程。

关于更多定义，以及度量情形和高维情形下的相应推广，建议读者阅读 Heinonen 和 Koskela 的论文 [HK95] 以及 Ntalampekos [Nta24b]较新的研究。

平面拟共形映射理论的基石之一便是所谓的可测黎曼映射定理。

定理 2.7 （Ahlfors-Bers， [Ahl06] 第五章）。设 $\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是一个可测函数，满足 $||\mu||_\infty = k < 1$。那么，存在一个（$1+k$）/（$1-k$）-拟共形映射 $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其膨胀为 μ。也就是说， ϕ 满足

$$\phi_{\bar{z}} = \mu\phi_z.$$

此外，如果我们将 ϕ 归一化，使其固定 0、1， ∞ 则该映射是唯一的 .

有关针对不同类别的可测函数 μ 对这一结果的更多扩展，请参阅 Astala 等人在 [AIM09] 上的研究。

Ahlfors 的著作还证明了以下公式，说明两个相似的贝尔特拉米方程的解之间有何差异。

定理 2.8 ([Ahl06]第五章定理 5). 设

$$\mu(t+s,z)=\mu(t,z)+s\nu(t,z)+s\varepsilon(s,t,z),$$

其中 $\nu,\mu,\varepsilon\in L^\infty$, $||\mu||_\infty<1$ 和 $||\varepsilon(s,t)||_\infty\to 0$ 当 $s\to 0$时。于是，若 $f^{\mu(\cdot)}$, 表示相应贝尔特拉米方程的唯一解，且该解固定0、1∞，则有

$$f^{\mu(t+s)}(\zeta)=f^{\mu(t)}+s\dot{f}(\zeta,t)+o(s)$$

在紧集上一致收敛，其中

$$\dot{f}(\zeta,t)=-\frac{1}{\pi}\iint\nu(t,z)R\left(f^{\mu(t)}(z),f^{\mu(t)}(\zeta)\right)\left(f_z^{\mu(t)}(z)\right)^2dm(z)$$

and

$$R(z,\zeta)=\frac{1}{z-\zeta}-\frac{\zeta}{z-1}+\frac{\zeta-1}{z}=\frac{\zeta(\zeta-1)}{z(z-1)(z-\zeta)}.$$

此外，若 $\nu(t,z)$ 关于 t （在 L^∞ 意义下）连续变化，则$(\partial/\partial t)f(z,t)$是 t 的连续函数。

2.6. **调和测度**。 在单连通域 Ω 中，关于点 $z\in\Omega$ 的子集 $I\subset\Omega$ 的调和测度，定义为从 z 出发的布朗运动首次在 I 时到达 $\partial\Omega$ 的概率测度。我们将其记为 $\omega(z,\ I,\ \Omega)$。由于平面布朗运动在共形变换下保持不变 [BP17，第 7 节，9]，若 f: $\mathbb{D}\to\Omega$ 是一个满足 $f(0)=z$ 的共形映射，则可得 $\omega(z,\ I,\ \Omega)$ 是 $f^{-1}(I)$ 的归一化弧长。若 $K\subset\mathbb{C}$ 是一个具有正对数容量的紧集，则 $\omega(\infty,\cdot,\ \mathbb{C}\setminus K)$ 对应于使能量积分最小化的概率测度。更多信息请参见 Garnett 和 Marshall 的 [GM08，第 III 章] 。

本文将使用以下调和测度估计。

引理 2.9 ([GM08] 引理 5.1，第 143 页)。 设 $R_L=\{z:\ |\text{实部}z|<L$、$|\text{虚部}z|<1\}$。若 $E_L=\{z\in\partial R_L:\ |\text{实部}(z)|=L\}$ 是 R_L 的竖直边的并集，则

$$e^{-\pi L/2}\leq\omega(0,E_L,R_L)\leq\frac{8}{\pi}e^{-\pi L/2}.$$

3. Construction of ϕ

本节将在命题 3.2 中构造引言中提到的共形映射 ϕ ，这是证明 Bishop 的结果 [Bis07，定理 25] 的第一步。 ϕ 可以通过多种方式构造，例如可以取 [Pom92，命题 9.15] 或 [Bis07，引理 26，引理 27]中定义的映射。就所有实际目的而言，Pommerenke 的方法已经足够，但我们将采用 Bishop 的方法，并对其加以扩展和完善。

命题 3.2 其中的映射 ϕ 将具有 $G(\exp)$, U 而 i 的是某个支集位于某个集合 $\tilde{E}\subset\mathbb{S}^1$ （该集合将对应于若干闭区间的并）上的概率测度的对数势

如引理 2.3 中所述），且其容量很小。这里我们依赖这样一点：在我们的情形下，可以选取该集合 E，使得 $h(\mathbb{S}^1 \setminus E)$的容量也很小。

引理 3.1. 设 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个对数奇异圆周同胚。对于固定的 $N \in \mathbb{N}$，存在 $A = A(N) > N$ 以及一个紧集 $E = E(A)$，其罗宾常数为 A，使得：

(i) 紧集 E 由有限个互不相交的非平凡闭弧组成，使得 容量(E) +容量$(h(\mathbb{S}^1 \setminus E)) < e^{-\gamma}$，对于 $\gamma = \gamma(A)$。*(ii)* 每个长度为 $1/N$ 的弧都与 E 相交于一个长度为正的集合，因此交集的对数容量为正。

证明。由引理 2.3，对于给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个紧集 $E = E(\varepsilon)$，它由有限个互不相交的非平凡闭弧组成，使得

$$\mathrm{Cap}(E) + \mathrm{Cap}(h(\mathbb{S}^1 \setminus E)) < \varepsilon.$$

给定 $N \in \mathbb{N}$，则长度为 $1/N$ 的弧经 h 映射后成为长度为$\eta = \eta(h, N) > 0$的弧。由于弧的长度与其对数容量相当，如果长度为 $1/N$ 的弧不与 E相交，那么

$$\mathrm{Cap}(h(\mathbb{S}^1 \setminus E)) \gtrsim \eta.$$

因此，固定 $N \in \mathbb{N}$ 后，存在足够小的 $\varepsilon = \varepsilon(N) > 0$，使得任意长度为 $1/N$ 的弧与 E 的交集都具有正长度。等价地，只要 $A > N$ $E = E(\varepsilon)$ 的罗宾常数足够大，该结论就成立。□

本节的主要目标是证明：

命题 3.2（的构造 ϕ）。设 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个对数奇异圆周同胚。假设 N 是一个较大的自然数，并考虑 $E = E$（N），如引理 *3.1* 中所述，其罗宾常数 $A > N$ 较大。再设 $M \in \mathbb{N}$ 足够大且 $\delta > 0$ 足够小，分别取决于 N 和 A。则存在 $\phi\colon \mathbb{D} \to W$，其为共形映射并满足：

(i) W 由一个若尔当域 W 去掉有限个径向裂隙后得到。事实上，W 接近一个圆盘，其含义是存在一个通用的 $C > 0$，使得

$$\mathbb{D}\left(0, \exp\left(\frac{A}{N} - C\frac{\log N}{N}\right)\right) \subset \tilde{W} \subset \mathbb{D}\left(0, \exp\left(\frac{A}{N} + C\frac{\log N}{N}\right)\right).$$

(ii) ϕ（E）$= \partial\tilde{W}$，即 ϕ（E）是若尔当曲线，并且 $\mathbb{S}^1 \setminus E$的每个连通分支都映射为一条径向裂隙。*(iii)* 我们可以选择 M 个点 $\{x_k\}_1^M \subset \partial W$，使得 $|x_k - \exp(2\pi ik/M)| \leq \delta$，并且每个 x_k 对应一条径向裂隙的一端。

以点 $\{x_k\}$ 为端点的径向裂隙构成四边形 $W_k \subset W \setminus \mathbb{D}$，其中我们考虑分隔与 x_k 对应的裂隙和与 x_{k+1}对应的裂隙的路径族。这些 W_k 的模数为

$$R_k := M(W_k) \simeq \frac{\pi N|x_{k+1} - x_k|}{A} \simeq \frac{\pi}{A}\frac{N}{M},$$

其中我们可以假设 $M \simeq N$。

此外，只要 N 足够大， ϕ 就可以在 $\mathbb{D}$ 的紧集上选得任意接近恒等映射。

命题 3.2 中对模数 R_k of W_k 的界，在[Bis07], 中并未出现，尽管它可以由其中的论证推出。

现在证明命题 3.2，它由若干引理组成。

设 $\mathbb{S}^1 = \cup_{k=1}^N I_k$，其中 I_k 是长度相同且内部互不相交的弧 $1/N$ 。定义 $E_k = E \cap I_k$，其中 $k = 1, \dots, N$，并令 μ_k为每个 E_k 上质量为 $1/N$ 的平衡测度（根据我们在引理 3.1 中的选择，该测度是良定义的）。令 $\mu = \sum \mu_k$ ，并定义势

$$G(z) = \int \log \frac{1}{|x-z|} d\mu(x) = \sum_k G_k(x) = \sum_k \int \log \frac{1}{|x-z|} d\mu_k(z).$$

注意， $NG_k(z) - A$ 是 $\mathbb{C}_\infty \setminus E_k$ 在 ∞处的格林函数。因此，在 E_k上有 $G_k(x) = A/N$ 。

引理 3.3 ([Bis07] 引理 26)。 映射 G 在 $\mathbb{C}$上连续，在$\mathbb{C} \setminus E$ 上调和，并且

(i) $G(z) \to$ 对数$|z|^{-1}$ 当 $|z| > 1$ 且 $G(z) \to 0$ 当 $|z| < 1$ 时成立。*(ii)* 对于 $\delta > 0$ 以及任意弧 $J \subset \mathbb{S}^1$， $|\{x \in J : \ |G(x)| > \delta\}|/|J| \to 0$ 当 $N \to \infty$时成立。

此外，*(ii)* 中的收敛速率与 A 无关，只要 A 足够大（其中 A 是 E 的罗宾常数）。我们还得到，对于 $x \in E$,

$$\frac{A}{N} - O\left(\frac{\log N}{N}\right) \le G(x) \le \frac{A}{N} + O\left(\frac{\log N}{N}\right). \tag{3.1}$$

证明。 G 在 E 外连续且调和是标准结论。由于 μ 弱收敛于 $\mathbb{S}^1$ 上的归一化弧长测度，因此 (i) 成立（对于 $|z| \le 1$ ，我们有∫对数$|z-x|^{-1}dx = 0$，且当 $|z| > 1$时等于 $\log\ |z|^{-1}$）。

为证明 (ii)，固定 $x \in \mathbb{S}^1$ ，并假设将 μ 定义中的 N 个区间重新标记，使得 $x \in I_0$ 和 I_1, I_2 与 I_0 相邻，并且对于 $k = 3, \dots, N-1$， $d(x,\ I_k) \simeq k/N$。令 $I = I_0 \cup I_1 \cup I_2$。于是,

$$G(x) = \int_I \log \frac{1}{|z-x|} d\mu(z) + \sum_{k>2} \int_{I_k} \log \frac{1}{|z-x|} d\mu(z) = H_1(x) + H_2(x).$$

注意，只要 N 足够大（例如 $N \ge 12$）， $H_1 > 0$ 就成立。由于 I 的直径为 ≤ 1，我们有

$$\int_I H_1 dx \le \int_I \int_I \log \frac{1}{|z-x|} d\mu(z)|dx| \le \mu(I) \max_{z \in I} \int_I \log \frac{1}{|z-x|} |dx| \le C \frac{\log N}{N^2}.$$

因此，根据切比雪夫不等式,

$$\left| \left\{ x \in I : H_1(x) \ge \frac{\lambda}{2} \frac{\log N}{N} \right\} \right| \le \frac{C}{N\lambda}. \tag{3.2}$$

为估计 H_2，注意到对于 $k>2$，$\log|x-z|^{-1}$ 在 I_k 上的变化至多为 C/k。因此，

$$|H_2(x)| \le \left|\sum_{k>2}\int_{I_k}\log\frac{1}{|z-x|}\left(d\mu(z)-\frac{|dz|}{2\pi}\right)\right| + \left|\sum_{k>2}\int_{I_k}\log\frac{1}{|z-x|}\frac{|dz|}{2\pi}\right| \le$$

$$\le \sum_{k>2}\frac{2\tilde{C}}{kN} + \int_I \log\frac{1}{|z-x|}\frac{|dz|}{2\pi} \le C\frac{\log N}{N}, \tag{3.3}$$

其中我们使用了 $\int_{\mathbb{S}^1}\log|z-x|^{-1}|dz|=0$ for $x\in\mathbb{S}^1$。因此，由 (3.2) 对于 $\lambda = 2\delta N/\log N$ 以及 (3.3)，可得

$$|\{x\in I_0 : |G(x)|\ge\delta\}| \le \frac{C|I_0|\log N}{\delta N}.$$

现在，给定 J 一个区间，设 $J=\cup_{k=0}^{j} I_k$ with $|I_k|\simeq |J|/(j+1)$。则，

$$|\{x\in J : |G(x)|\ge\delta\}| \le \sum_{k=0}^{j}|\{x\in I_k : |G(x)|\ge\delta\} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{j}\frac{C|I_k|\log N}{\delta N} = \frac{C|J|\log N}{\delta N}.$$

这意味着 (ii)，因为我们得到的估计与 A无关。最后，由于 $G_k(x)\le A/N$ 且 $G_k(x) = A/N$ for $x\in I_k$，所以对$|H_2|$的估计 (3.3) 推出 (3.1)。□

我们可以通过令 G 来对称化

$$U(z) = G(z) + G(z/|z|^2) = G(z) + G(1/\bar{z}).$$

于是 U在 $\mathbb{C}\setminus(E\cup\{0\})$ 上是调和的，并且在 E 上等于 $2G(x)$（并在 $0,\infty$ 处具有负对数极点）。

引理 3.4 ([毕07] 引理 27)。我们可以选取一个（多值）调和共轭函数 $\widetilde{U}$，使其在 $\mathbb{D}$ 上满足 U，从而$\exp(i\widetilde{U}(x))$ 为单值函数，并且$\exp(i\widetilde{U}(x)) \to x$一致地趋于 $N\to\infty$（且估计与 A无关）。

证明。U 在 $\mathbb{S}^1\setminus E$上的法向导数为零，因此 U 在 $\mathbb{S}^1\setminus E$的每个连通分支上均为常数。在 E 的每个连通分支 I 上，我们有：

$$\int_I \frac{d\widetilde{U}}{d\theta}d\theta = \int_I \frac{dU}{dn}d\theta = \frac{1}{2}\int_I \Delta U d\theta = \int_I \Delta G d\theta = 2\pi\mu(I).$$

因此，我们可以选取 $\widetilde{U}$，使得 $\exp(i\widetilde{U}(x)) = x$ 在 $\mathbb{S}^1$中的 N 等分布点处成立。由于 $\widetilde{U}$ 是单调的，这就推出了所需结果。□

考虑映射 $\varphi(z) = \exp(U(z)+i\widetilde{U}(z))$。它是共形的（它是一个覆盖，且目标区域是单连通的），并将圆盘映到一个区域 W，该区域由一个若尔当域 W 去掉有限条径向裂隙后组成（其中$\backsim W$ 是一个若尔当域，因为 U 在 E 上是单调的，这实际上意味着$\backsim W$ 关于 0 是星形的）。由引理 3.3 的最后一个估计可知

~只要 N足够大，就有 W包含圆盘 $D(0,\ \exp((2A/N)\ -1))$。此外，对于某个 $C<\infty$， W包含圆盘 $D(0,\ 1-C(\log\ N)/N)$。这是因为，沿用引理 3.3 证明中的记号， $G(x)\ =H_1(x)+H_2(x)$，其中 $H_1>0$，只要 N足够大，且 $|H_2(x)|\le C(\log\ N)/N$。

此外，由切比雪夫不等式，由于 $||H_1||_1\le C(\log\ N)/N^2$，

$$\left|\left\{x\in I\colon H_1(x)\le\frac{C}{2}\frac{\log N}{N}\right\}\right|\ge 1/N>0, \tag{3.4}$$

（其中 I 也与引理 3.3 的证明中相同），也就是说，存在 $x\in I$，使得$U(x)\ =\ 2G(x)\ \le\ 2C(\log\ N)/N$。对于这样的 x，当 $|U$ 足够大时，我们有 $x(|\ \le\ 1)\ N$，并且由 $|e^z-1|\le e|z|$，若 $|z|\le 1$，可得

$$|\varphi(x)|=e^{U(x)}\le 1+e\frac{2C\log N}{N}.$$

~由于 U 在 $\mathbb{S}^1\setminus E$ 中为常数，并且对于 $x\in E$，我们有 (3.1)，因此这样的 x 必须靠近裂隙的一端（这给出了裂隙长度的一个界）。如果 $A,\ N$ 足够大，那么我们可以选取 G 的一组 M 个临界点$\{x_k\}\subset\mathbb{S}^1$，使得

$$|x_k-\exp(2\pi ik/M)|\le\delta,$$

（其中 $M,\ \delta$ 与命题 3.2 的陈述中相同）并且

$$1-\delta\le\varphi(x_k)\le 1+\delta$$

对所有 $k=1,\ .....,\ M$均成立。最后，我们定义 $\phi=\varphi/(1+\delta)$。

事实上，由 (3.1) 可得 $\widetilde{W}$ 包含圆盘

$$D\left(0,\exp\left(\frac{A}{N}-C\frac{\log N}{N}\right)\right).$$

终止于点 $\{x_k\}$ 的裂隙构成四边形 W_k，如图6所示；这里我们考虑 $\mathbb{D}$ 中连接两条相邻裂隙的路径族（W_k 看起来像一个扇形）。注意，我们可以写出一个到矩形的显式共形映射，它近似对应于 log(z) 的某个适当平移（并对辐角作适当的选取）。因此其模数为，

$$M(W_k)\simeq\frac{2\pi|x_{k+1}-x_k|}{\log\frac{\exp\left(\frac{2A}{N}-2C\frac{\log N}{N}\right)}{\exp\left(0-2C\frac{\log N}{N}\right)}}\simeq\frac{\pi N|x_{k+1}-x_k|}{A}\simeq\frac{\pi}{A}\frac{N}{M}.$$

由于 $|I|\ \simeq\ 3/N$，由 (3.4) 可知我们可以取 $M\ \simeq\ N$。因此，$M(W_k)$ $\simeq\pi/A$ （所以，通过选取对数容量足够小的 E，它就可以小到所需程度）。因此， W_k 可以共形映射到一个 $1\times R_k$矩形，其中 $R_k\simeq A/\pi$，且 $x_k,\ x_{k+1}$ 分别映至顶点 0，i，而 W_k 的径向边对应于矩形的水平边。

命题 3.2 的证明至此完成。 □

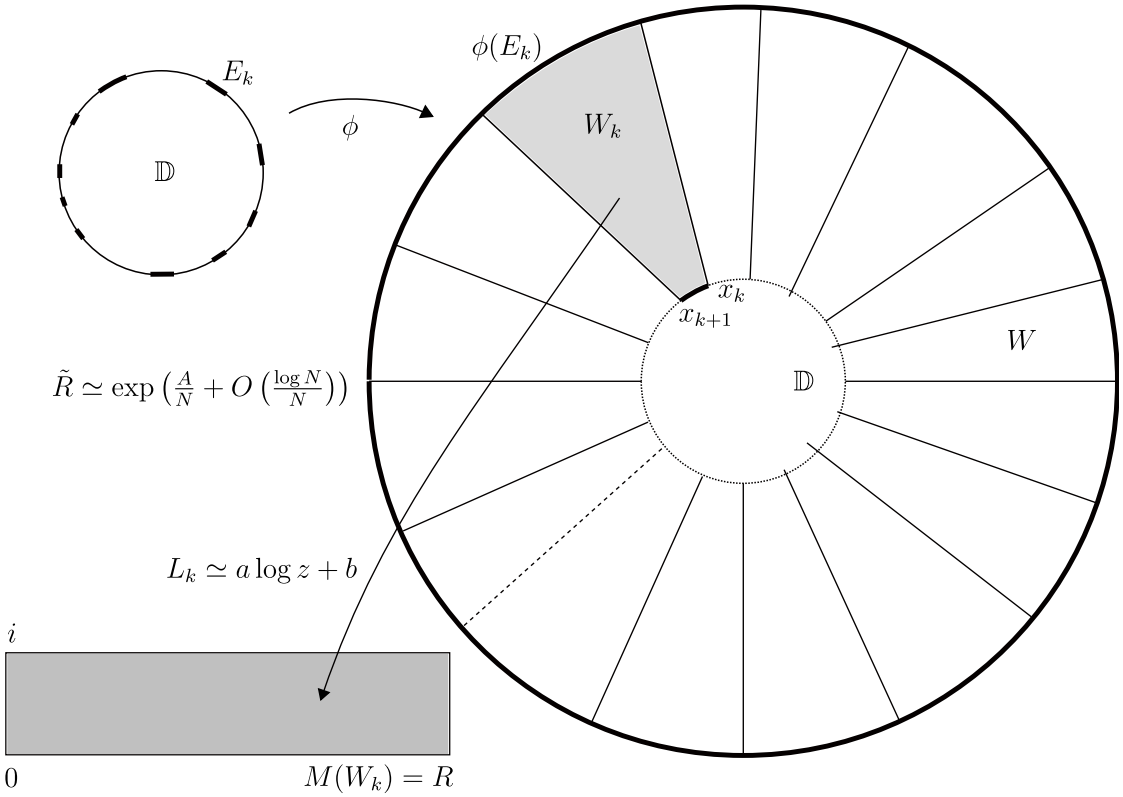

FIGURE 6. 映射的构造 ϕ，如命题 3.2 中所述，该映射$\widetilde{\ }$将集合 E （如引理 3.3 中所述）映射到 W 的边界，并将$\backsim\mathbb{S}^1 \setminus E$ 映射到裂隙。 W 由去除了裂隙的 W 组成。$\widetilde{\ }$若尔当域 W 近似为一个中心为 0、半径为$\tilde{R} \simeq \exp\left(\frac{A}{N} + O\left(\frac{\log N}{N}\right)\right)$的圆盘。

4. ADMISSIBLE SHAPES

正如我们在引言中提到的，在定理 1.1 的证明中，我们考虑四边形之间的嵌入，并需要将它们与给定的拟共形映射拼接起来，同时保持拟共形常数受控。本节将找出实现这一点所需的几何条件。为明确这些条件，我们在定义 4.2 中引入了 ε-可容许形状。命题 4.3 给出了这些几何条件。

令 $R > T$，并考虑矩形 $[0, R] \times [0, 1]$ 和 $[0, T] \times [0, 1]$。如果我们考虑连接相应矩形的相对水平边的路径族，则有

$$M([0, R] \times [0, 1]) = R > T = M([0, T] \times [0, 1]).$$

本节中，我们只考虑具有两条垂直对边的四边形。从现在起，我们还将默认只考虑连接四边形两条水平边的路径族（当讨论此类四边形的模数时，指的也是该路径族的模数）。见图 7。

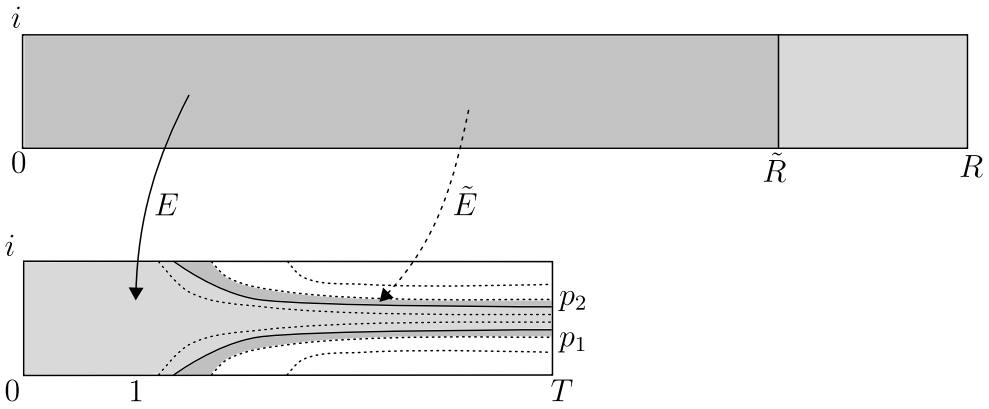

FIGURE 7. E 将矩形 $[0,R]\times[0,1]$ 共形映射到矩形 $[0,T]\times[0,1]$中浅色阴影的子集，点 p_1,p_2表示其中包含在 $\{T\}\times[0,1]$内的两个四边形顶点。~ ~E 将矩形 $[0,R]\times[0,1]$ 共形映射到矩形 $[0,T]\times[0,1]$中较浅和较深阴影的子集。随着最右侧两点 p_1,p_2 之间的距离减小，所需的 R值会增大。

接下来定义形状。在矩形 $[0,T]\times[0,1]$ 中，我们可以如下定义四边形：取 0、i 作为顶点，并在 $\{T\}\times[0,1]$上取两个不同的点，即 p_1和 p_2，使得 $\mathrm{Im}(p_1)<\mathrm{Im}(p_2)$。考虑两条不相交的简单路径 γ_1、$\gamma_2\subset[0,T]\times[0,1]$，使得 γ_1连接 0 和 p_1，而γ_2 连接 i 和 p_2。由此得到四边形 $Q(p_1,p_2,\gamma_1,\gamma_2)$，其四边形顶点为 0、$p_1$、$p_2$、$i$。见图 7。四边形 $Q(p_1,p_2,\gamma_1,\gamma_2)$ 的模数随我们对 $(p_1,p_2,\gamma_1,\gamma_2)$ 的选择而连续变化；只要 $T(p_1,p_2,\gamma_1,\gamma_2)$ 不同于 $[0,T]\times[0,1]$、$p_1\neq1$和 $p_2\neq1+i$，我们就有

$$M(Q(p_1,p_2,\gamma_1,\gamma_2))<M([0,T]\times[0,1]).$$

由于 p_1 是 γ_1 的一个端点，且 p_2 是 γ_2的一个端点，我们将省略对 p_1,p_2的依赖，即写作 $Q(\gamma_1,\gamma_2)$。

令 $d(\cdot,\cdot)$表示两个集合之间的豪斯多夫距离。由于 $d(\gamma_1,\gamma_2)\to0$，我们有 $M(Q(\gamma_1,\gamma_2))\to\infty$。由于 $R>T$，存在一对 γ_1,γ_2使得

$$R=M([0,R]\times[0,1])=M(Q(\gamma_1,\gamma_2)).$$

因此，存在一个共形映射 $E\colon[0,R]\times[0,1]\to Q(\gamma_1,\ \gamma_2)$，将矩形的顶点映射到四边形的四边形顶点。我们称这样的 E为从 $[0,R]\times[0,1]$到 $[0,T]\times[0,1]$的共形嵌入，并称$E([0,R]\times[0,1])=Q(\gamma_1,\ \gamma_2)\subset[0,T]\times[0,1]$为 $[0,R]\times[0,1]$的形状。形状并非唯一确定，因为我们可以有许多种方式选择路径，将矩形 $[0,T]\times[0,1]$的两条相对垂直边连接起来。这将使我们能够有效地控制面积

$$([0,T]\times[0,1])\setminus E([0,R]\times[0,1])$$

这将有助于构造正面积柔性曲线，以及构造具有所有其他可能豪斯多夫维数的柔性曲线。

反过来，给定一对如前所述的 γ_1, γ_2，存在 $R > T$，使得

$$R = M([0, R] \times [0, 1]) = M(Q(\gamma_1, \gamma_2)).$$

本讨论证明如下结论。

引理 *4.1*（形状）。设 $[0, T]\times[0, 1]$ 为一个矩形，γ_1和 γ_2 为 $[0, T] \times [0, 1]$ 内互不相交的简单路径，使得 γ_1 将 *0* 与一点 $p_1 \in \{T\} \times [0, 1]$连接起来，并且 γ_2 将 i 与 $p_2 \in \{T\} \times [0, 1]$连接起来，其中 *Im*($p_1$) $<$ *Im*(p_2)。令 $Q(\gamma_1, \gamma_2)$为由四边形顶点 *0*、p_1、p_2、i 以及边γ_1、$[p_1, p_2]$、γ_2、$[0, i]$定义的四边形。则存在 $R > T$和一个共形嵌入 E，使得$Q(\gamma_1, \gamma_2) = E([0, R] \times [0, 1])$。

在构造我们在第 5 节引言中提到的拟共形映射 ψ 时，我们需要克服一个困难：必须确保引理 4.1 中的映射 E 在矩形 $[0, R]\times[0, 1]$的左边附近接近恒等映射。参见命题 5.2。为此，我们需要以受控的方式引入一些拟共形性。

定义 4.2 (ε-可容许形状)。设 $[0, R] \times [0, 1]$ 和 $[0, T] \times [0, 1]$ 为矩形，且 $R > T$。设 E 是将 $[0, R] \times [0, 1]$ 共形嵌入到$[0, T] \times [0, 1]$ 中的映射，使得

$$[0, 1]^2 \subset E([0, R] \times [0, 1]).$$

如果存在一个拟共形映射，我们就称该形状为 ε-可容许的

$$\alpha \colon E([0, R] \times [0, 1]) \to E([0, R] \times [0, 1])$$

固定四边形 $E([0, R] \times [0, 1])$ 的四个四边形顶点，使得：

(i) $\alpha \circ E \colon [0, 1]^2 \to [0, 1]^2$ 是恒等映射。(ii) α 的膨胀小于 $1 + \varepsilon$。

注意，给定一个 K-拟共形映射 α，我们有

$$||\mu_\alpha||_\infty = ||\alpha_{\bar{z}}/\alpha_z||_\infty \leq (K - 1)/(K + 1)$$

并且若 $||\mu_\alpha||_\infty \leq k$，则 α 是（$1 + k$）/（$1 - k$）-拟共形的。若 $||\mu_\alpha||_\infty \leq \varepsilon$，且 $\varepsilon > 0$ 足够小，则 α 是 $\simeq$ （$1 + \varepsilon$）-拟共形的。反之，若 α是（$1 + \varepsilon$）-拟共形的，则有 $||\mu_\alpha||_\infty \lesssim \varepsilon$。在命题 4.3 中证明存在 ε-可容许形状时，只需证明对于我们将显式构造的映射α，有 $||\mu_\alpha||_\infty \leq \varepsilon$。见图 8。

命题 4.3。设 $[0, T] \times [0, 1]$ 是一个满足 $T \geq 6$ 的矩形，且 $2 \leq M$ 是一个满足 $2M < T$的自然数。那么，任何包含$[0, 2M]\times[0, 1]$ 的形状 E（$[0, R] \times [0, 1]$）都是 $\simeq e^{-\pi(M-1)/2}/M$-可容许的。此外，定义 *4.2* 中的映射α：E（$[0, R] \times [0, 1]$）$\to E$（$[0, R] \times [0, 1]$）的膨胀可以取为包含在 $[0, M] \times [0, 1]$中。

设 $E([0, R] \times [0, 1])$ 是一个形状，使得

$$[0, 2M] \times [0, 1] \subset E([0, R] \times [0, 1]).$$

（使用引理 4.1 求出 R 和嵌入 E。）为了证明命题 4.3，我们需要根据 M 的大小，量化 E 与恒等映射的接近程度。接下来

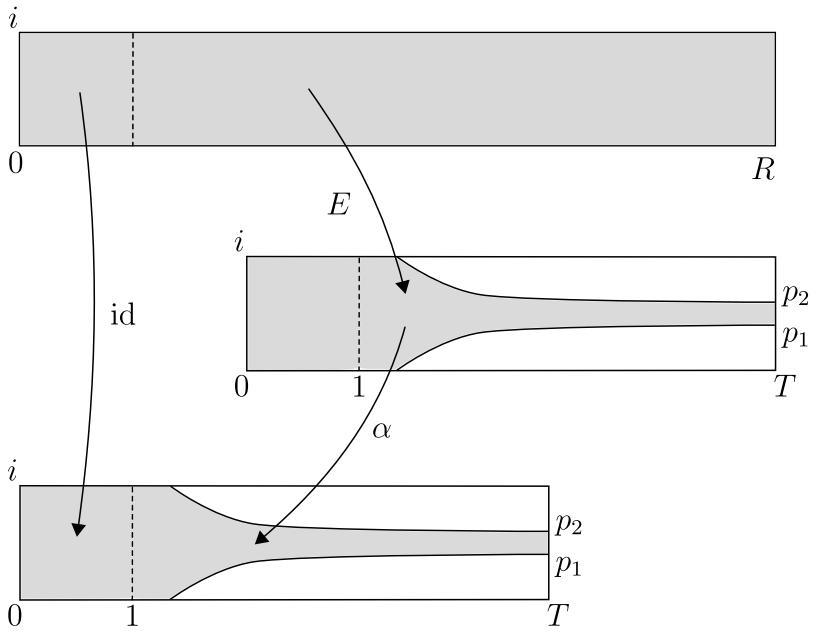

FIGURE 8. E 将矩形 $[0,R]\times[0,1]$ 共形映射到矩形 $[0,T]\times[0,1]$ 中浅色阴影部分，点 p_1，p_2表示其包含在 $\{T\}\times[0,1]$中的两个四边形顶点。形状 $E([0,R]\times[0,1])$ 是 ε-可容许的，当且仅当存在一个拟共形映射 $\alpha\colon E([0,R]\times[0,1])\to E([0,R]\times[0,1])$，其膨胀为$\leq\varepsilon$，并且 $\alpha\colon[0,1]\to[0,1]$ 是恒等映射。

，我们首先需要了解 $E([1,1+i])$与 $[1,1+i]$ 之间的差异如何取决于 M，以及 $E([M,M+i])$与 $[M,M+i]$之间的差异。

引理 4.4。设 $[0,2M]\times[0,1]\subset E([0,R]\times[0,1])$ 是一个形状，并定义 e

$$\rho_1=\min_{z\in[1,1+i]}\operatorname{Re}(E(z))\quad and\quad \rho_2=\max_{z\in[1,1+i]}\operatorname{Re}(E(z)).$$

于是存在与 M 无关的 $C<\infty$，使得 $\rho_2-\rho_1\leq Ce^{-\pi M}$ 和$|E'(1+it)-1|\leq Ce^{-\pi M}$ 对 $t\in[0,1]$成立。

证明。通过反射，我们可以将 E 延拓为带状区域的一个共形映射

$$\{z\in\mathbb{C}\colon -2M\leq\operatorname{Re}(z)\leq 2M\}.$$

注意，函数 $v(z)=\operatorname{Im}(E(z)-z)$ 在

$$R_{2M}=\{z\colon|\operatorname{Re}(z)|\leq 2M,|\operatorname{Im}(z)|\leq 1|\},$$

上为零，在 R_{2M} 的水平边以及 $|\operatorname{Im}(E(z)-z)|\leq 1$ 的竖直边上为零，其中 R_{2M}（我们称之为 E_{2M}）。根据最大值原理、引理 2.9 和哈纳克不等式，我们有：

$$|\operatorname{Im}(E(z)-z)|\leq\omega(z,E_{2M},R_{2M})\leq C\omega(0,E_{2M},R_{2M})\leq C_1e^{-\pi M}$$

在矩形 $R_{2M}\cap\{|\operatorname{Re}(z)|\leq 2\}$ 上。

利用 $\mathbb{D}(0,2)$ 的赫尔格洛茨公式（参见 [GM08，第 52] 页），可得

$$|\nabla v(z)| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|2e^{it}-z|^2}\frac{dt}{\pi}\right)||v||_\infty \leq \frac{2C_1 e^{-\pi M}}{(2-|z|)^2} \leq \tilde{C}e^{-\pi M}$$

对于 $|z| \leq \sqrt{2}$。因此，根据柯西-黎曼方程，$|E'(z)-1| \leq \tilde{C}e^{-\pi M}$。所以，如果 z，w 的实部为 x，

$$|\mathrm{Re}(E(z)) - x + x - \mathrm{Re}(E(w))| = |\mathrm{Re}(E(z)-z) + \mathrm{Re}(w - E(w))| \leq 2\tilde{C}e^{-\pi M}$$

因此，

$$\rho_2 - \rho_1 = \max_{z\in[1,1+i]} \mathrm{Re}(E(z)) - \min_{z\in[1,1+i]} \mathrm{Re}(E(z)) \leq 2\tilde{C}e^{-\pi M}.$$

˜引理中的常数为 $C = 2C$。 □

根据引理 4.4 的假设，可知如果我们定义

$$r_1 = \min_{z\in[M,M+i]} \mathrm{Re}(E(z)) \quad \text{and} \quad r_2 = \max_{z\in[M,M+i]} \mathrm{Re}(E(z)),$$

然后 $r_2 - r_1 \leq Ce^{-\pi M/2}$（平移 $-M+1$ 并使用引理 4.4）。

我们来做几点观察：

(a) 根据模的单调性（命题 2.4 (d)），我们有 $\rho_1 \leq 1 \leq \rho_2, r_1 \leq M \leq r_2$。

(b) 类似地，$M \simeq r_1$。现在我们可以证明命题 4.3。

命题 *4.3* 的证明。我们来构造拟共形映射

$$\alpha\colon E([0,R]\times[0,1]) \to E([0,R]\times[0,1])$$

使得 $\alpha \circ E_{|[0,1]^2}$ 是恒等映射，如图 9 所示。对于 $a > 1$，定义带状区域

$$S_a := \{1 < \mathrm{Re}(z) < a\}.$$

通过反射，我们可以将映射 E 延拓到带状区域 S_M。我们的目标是构造一个拟共形映射 α，将带状区域 $E(S_M)$ 映到由 $\{\mathrm{Re}(z) = 1\}$ 和 $E(M+i\mathbb{R})$ 界定的带状区域，见图 9。

我们可以通过共形映射 φ将这个带状区域共形地映射到带状区域 $S_{\tilde{M}}$。我们可以通过对带状区域内由 $\{\mathrm{Re}(z) = 1\}$ 和 $E(M+i\mathbb{R})$ 界定、且包含在 $\{|\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}$中的四边形进行一致化，然后利用反射将其延拓到带状区域的其余部分，从而构造这个一致化条带 $S_{\tilde{M}}$。

注意，根据引理 4.4，$|\tilde{M} - M| \leq 2Ce^{-\pi(M-1)/2}$。

这定义了解析映射 G_0, G_1，它们由 $iG_0(t) = \varphi(1+it) - 1$ 和 $iG_1(t) = \varphi(E(M+it)) - M$给出。我们的目标是为这两个映射定义一个拟共形延拓。定义延拓 $G\colon S_M \to S_{\tilde{M}}$ 如下

$$G(x+iy) = i\frac{x-1}{M-1}G_1(y) + i\left(1 - \frac{x-1}{M-1}\right)G_0(y) + \frac{\tilde{M}-1}{M-1}(x-1) + 1.$$

˜若记作 $G = u + iv$，则有，$u_x = (\tilde{M}-1)/(M-1)$，$u_y = 0$，

$$v_x = \frac{1}{M-1}\left(G_1(M+iy) - G_0(1+iy)\right)$$

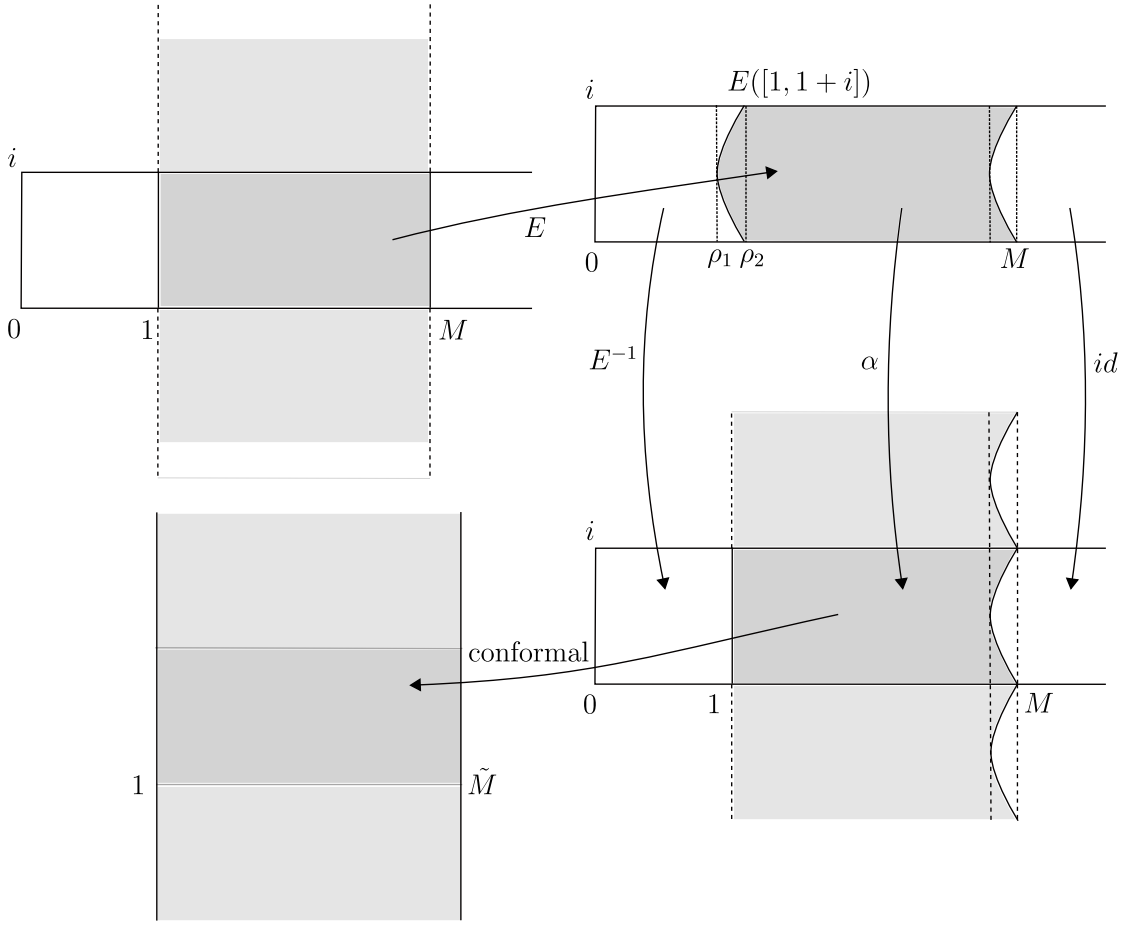

FIGURE 9. 将映射延拓到带状区域。利用线性插值构造拟共形映射 α。

and

$$v_y = \frac{x-1}{M-1} G_1'(y) + \left(1 - \frac{x-1}{M-1}\right) G_0'(y).$$

注意到 $G_1(y) - G_0(y)$ 是 1-周期的，且其绝对值不超过 1。根据我们先前的估计，还有 $G_0'(y) = \varphi'(1+it) \simeq 1$ 以及 $G_1'(y) = \varphi' \cdot E'(M+iy) \simeq E'(M+it) \simeq 1$。事实上，我们有 $|E'-1| \le Ce^{-\pi M/2}$ 和 $|\varphi'-1| \le Ce^{-\pi M/2}$。因此，

$$|v_y - 1| = \left| G_0'(y) - 1 + (G_1'(y) - G_0'(y)) \frac{x-1}{M-1} \right| \le Ce^{-\pi M/2} + 2Ce^{-\pi M/2}.$$

因此 $v_y \simeq 1$。所以， G 的膨胀为

$$\left|\frac{G_{\bar{z}}}{G_z}\right| \simeq \left| \frac{-1 + \frac{\tilde{M}-1}{M-1} + i\frac{1}{M-1}}{\frac{\tilde{M}-1}{M-1} + 1 + i\frac{1}{M-1}} \right| \simeq \left| \frac{-1 + \frac{\tilde{M}-1}{M-1}}{1 + \frac{\tilde{M}-1}{M-1}} \right| \lesssim \left| \frac{M - \tilde{M}}{M-1} \right| \le \frac{2Ce^{-\pi(M-1)/2}}{M-1}.$$

为了完成证明，我们只需考虑 $\alpha = \varphi^{-1} \circ G \circ E^{-1}$。这个映射可以拟共形地扩展到 $E([0,R] \times [0,1])$ 的其余部分，而不改变

膨胀，方法是在 $E([1,1+i])$ 的左边设为 E^{-1}，并在 $E([M,M+i])$ 的右边设为恒等映射。□

5. Construction of ψ

本节构造我们在引言中提到的映射 ψ。设 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个对数奇异圆周同胚，并考虑命题 3.2 中的 $E \subset \mathbb{S}^1$ 和$\phi\colon \mathbb{D} \to W$ 共形。给定一对 K-拟共形映射 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ 和 $g\colon \mathbb{D}^* \to \Omega_*$，其中 Ω，Ω^* 是闭包不交的光滑 Jordan 域（且满足 $\infty \in \Omega^*$），我们希望找到一个拟共形映射$\sim\psi\colon W \to \Omega$，使得对于 $x \in E$，有

$$|(\psi \circ \phi)(x) - g(h(x))|$$

可以按第 6 节将要说明的意义变得足够小。此外，我们还需要确保 ψ 的拟共形常数与 f 的拟共形常数尽可能接近。映射 ψ 在定理 5.1 中构造。

我们还将假设，当 $\delta > 0$ 足够小时，$f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ 在圆盘 $D(0, 1+\delta)$ 上可延拓为拟共形映射（拟共形常数相同）。

回想一下，在引言（第 1.1 节）中，我们提到，将通过把命题 3.2 中的四边形 W_k嵌入环域 $A = \mathbb{C}_\infty \setminus (\Omega \cup \Omega^*)$，来构造 f 的拟共形延拓。为此，我们找到一组四边形 $\{Q_k\}$，使得 $Q_k \subset A$，然后找到从 W_k 到 Q_k 的嵌入。根据我们对 Q_k 的选择，稍后我们将在第 6 节看到，关于 $|(\psi \circ \phi)(x) - g(h(x))|$ 的界如何得出。

我们来定义四边形 $Q_k \subset A$。首先定义 A 的叶状结构。取命题 3.2 中的点 $\{x_k\}$。取 A 的叶状结构 $\mathcal{C}$，使得：

(i) $\gamma \in \mathcal{C}$是双曲测地线 $\gamma \subset A$，由 $t \in [1, N]$ 索引（记作 γ_t）。每条 γ 的端点分别位于 ∂A的不同连通分支上，并连接某个 $f(x) \in \partial\Omega$与 $g(h(x)) \in \partial\Omega^*$。(ii) 对于 $t \neq s$，测地线 γ_t 和 γ_s 互不相交，且 $\cup_t \gamma_t = A$。(iii) γ_1 是 A 内连接 $f(x_1)$ 和 $g(h(x_1))$ 且欧几里得长度最短的双曲测地线。(iv) 对于 $k \in \mathbb{N}$（$1 \leq k \leq N$），测地线 γ_k连接 $f(x_k)$ 和 $g(h(x_k))$。

图10给出了示意图。对于 $1 \leq k \leq N$，我们考虑曲线 γ_k上关于欧几里得长度的中点y_k。现在我们构造 Jordan 四边形 $Q_k = Q(x_k, x_{k+1})$，其四条边分别为：

(a) Ω 上连接 $f(x_k)$ 与 $f(x_{k+1})$ 的弧。(b) 连接 $f(x_k)$ 与 y_k 的 γ_k 子弧。(c) 连接 $f(x_{k+1})$ 与 y_{k+1} 的 $\gamma(x_{k+1})$ 子弧。(d) 一条光滑弧 σ_k，连接 y_k 与 y_{k+1}，使得 σ_k 与 γ_k，γ_{k+1} 正交，并且它近似于当 $t \in [k, k+1]$ 时曲线 γ_t 的中点曲线。

四边形 Q_k 如图10所示，它对应于 A内两个阴影区域的并集。请记住，我们之前假设 f能够延拓为拟共形映射，且拟共形常数保持不变，在

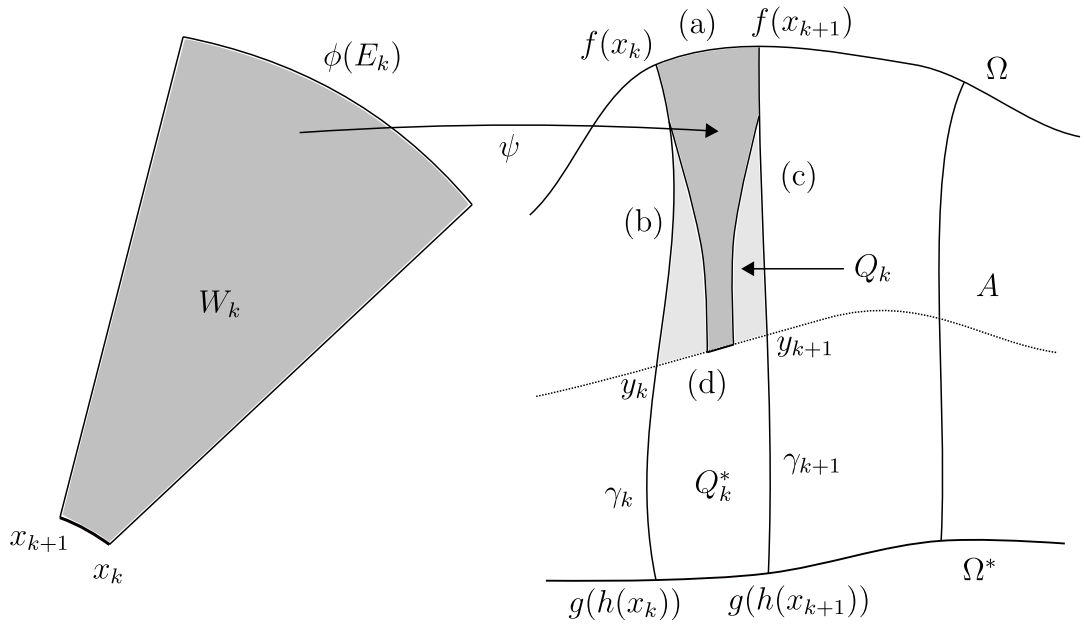

FIGURE 10. 定理 5.1 中映射 ψ 的表示。该映射是拟共形的，在 $[x_k, x_{k+1}] \subset \mathbb{S}^1$ 上与 f 一致，并满足$\psi(W_k) \subset Q_k$。叶状结构 $\mathcal{C}$ 中的曲线 γ_k，γ_{k+1} 也一并表示出来，同时还展示了它们与中点曲线 Γ的交点 y_k，y_{k+1}。

$\mathbb{D}(0, 1+\delta)$ 中，当 δ 足够小时。假设 $|x_k - x_{k+1}|$ 足够小，使得以下条件成立：

(i) $[x_k, x_{k+1}] \subset \mathbb{S}^1$是包含在 $\mathbb{D}(0, 1+\delta) \setminus \tilde{\mathbb{D}}$中的四边形 $\tilde{Q}_k$的一条边，其模数为 $M(Q_k)$；稍后我们需要假设该模数足够大（见图 12）。注意，$f(Q_k)$是一个四边形，其模数介于$K^{-1}M(\tilde{Q}_k)$和 $KM(\tilde{Q}_k)$之间。(ii) 对于固定的 $\eta > 0$，只要 N（如命题 3.2 中所述）足够大，我们就可以假设 $l(Q_k \cap \sigma_k) \leq \eta$。这是因为 N 与命题 3.2 中点集 $\{x_k\}$ 的基数相当，而这些点在 $\mathbb{S}^1$中近似均匀分布。

本节的主要目标是证明以下结论，其中我们使用了本节中引入的所有记号。

定理 em 5.1 (构造 ψ)。在与之前相同的条件下，如果我们定义

$$V = \mathbb{D} \cup \bigcup_k W_k \cup \bigcup_k [x_k, x_{k+1}],$$

存在一个拟共形映射

$$\psi \colon V \to \widetilde{\Omega},$$

因此 $\psi_{|\mathbb{D}} = f$，即 ψ是 f的拟共形延拓。映射 ψ还可以满足 $\psi(W_k) \subset Q_k$，其中 W_k 中与 $\mathbb{S}^1$ 相对的边映射到曲线 σ_k内（但不一定映满该曲线）。

此外，给定 $\varepsilon > 0$，则 ψ 的拟共形常数可以取为 $K \cdot (1+\varepsilon)$，前提是命题 *3.2* 中 $E \subset \mathbb{S}^1$ 的对数容量以及 $\max_k |x_{k+1} - x_k|$ 都足够小。

命题 3.2 和定理 5.1 中的映射如图 15 所示。

请注意，在定理 5.1 中，定义 ψ 的集合 V 是将命题 3.2 中的集合 W 加回一些裂隙后得到的。

令 T_k 为 Q_k 的模数（这里考虑连接曲线 γ_k，γ_{k+1} 所包含的两条边的路径族）。考虑 ι_k，它是从 $[0, T_k] \times [0,1]$ 到 Q_k 的共形映射，并将四边形顶点映射到四边形顶点。值 $T_k = T(x_k,\ x_{k+1})$ 随 x_k，x_{k+1} 的选取连续变化，并在 $|x_k - x_{k+1}| \to 0$ 时趋于 ∞。类似地，我们可以定义 T_k^*，但针对顶点为 $g_n(h(x_k))$ $g_n(h(x_{k+1}))$ 和 y_k，y_{k+1} 的四边形。对每个 $\delta > 0$，我们令

$$T(\delta) = \max\{T_k + T_k^* \colon |x_k - x_{k+1}| \geq \delta\}.$$

我们可以取足够大的 A，使得 $R_k \simeq A/\pi > T(1/2M)$，其中 $R_k = M(W_k)$ 如命题 3.2 所示。所有 W_k 中的 R_k 大致相同，因此为简便起见，我们记作 $R_k = R$。

由于 $R > T(\delta) > T_k$，存在一个共形映射 E_k，将 $[0,R] \times [0,1]$ 映入 $[0, T_k] \times [0,1]$，并将左边一一映到左边、将右边映入右边（但不一定映满右边）。见图 7。这个映射 E_k 正是引理 4.1 中构造的映射，在此我们始终假设

$$[0,1]^2 \subset E_k([0,R] \times [0,1]).$$

由此得到共形映射 $\iota_k \circ E_k \circ L_k$，将我们的第 k 个径向扇形 W_k 映入第 k 个四边形 Q_k。现在的目标是沿着 $f([x_k, x_{k+1}])$ 将映射 $\iota_k \circ E_k \circ L_k$ 与 f 拼接起来，从而定义 ψ（见图 15）。为此，我们需要引入一些拟共形性，同时确保膨胀不会增加太多（这样扩张映射的拟共形常数就能接近我们之后所需的 K）。这一过程见图 11 中的示意图，下面我们将对此进行说明。

令 L_k 为对数函数的 $\mathbb{C}$-线性变换（采用适当的辐角取值），将 W_k 映射到矩形 $[0, R_k] \times [0,1]$。像之前一样取 $\tilde{Q}_k$，使得 $L_k(\tilde{Q}_k) = [0, M(Q_k)] \times [0,1]$。

由于 E_k 是共形的，四边形 $E_k([0,1]^2) \subset [0, T_k] \times [0,1]$ 的模数为 1。然而，由引理 2.5 可知，除非 E_k 是恒等映射，否则不会有 $E_k([0,1]^2) = [0,1]^2$；但根据假设，$T_k < R_k = R$，因此这不可能。为解决这一问题，我们像第4节中那样，在后面复合一个拟共形映射 α_k。

命题 5.2 (命题 4.3)。存在一个 E_k 的拟共形自映射 α_k $([0, R_k] \times [0,1])$，使得 $\alpha_k \circ E_k$ 在 $[0,1]^2$ 上为恒等映射。只要满足以下条件，α_k 的拟共形常数就可以取得任意小。

$$[0, M] \times [0,1] \subset E_k([0, R_k] \times [0,1])$$

当 M 足够大时，且可假设 α_k 的膨胀支集位于 $[0, M] \times [0,1]$ 上。特别是，若 T_k 和 R_k 足够大，则可选取映射 E_k，使得 α_k 的拟共形常数小到任意所需的程度。

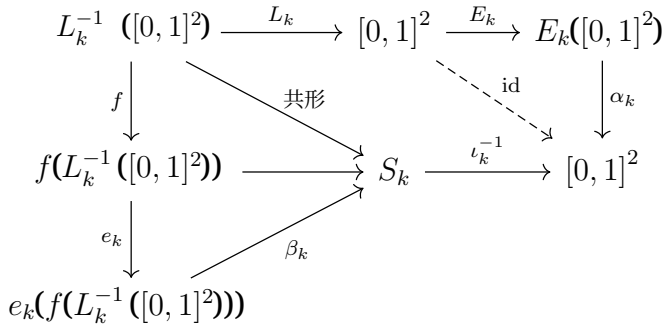

FIGURE 11. ψ构造中的示意图。四边形的四边形顶点映射到正方形的顶点。映射 L_k, E_k, ι_k 是共形的。映射 e_k 是共形的，˜将 $f(Q_k)$嵌入 Q_k，并延拓为一个映射到 Q_k上的共形映射。映射 β_k 满足 $\beta_k \circ e_k \circ f$ 是共形的，其示意图见图 13。

命题 5.2 只是我们在第4节证明的命题 4.3 的一个简化版本。我们强调，命题 4.3 还定量说明了拟共形常数相对于 M 可以有多小，以及其支集所在的位置。生成具有任意可能豪斯多夫维数的柔性曲线时，需要控制映射 α_k 的膨胀支集。

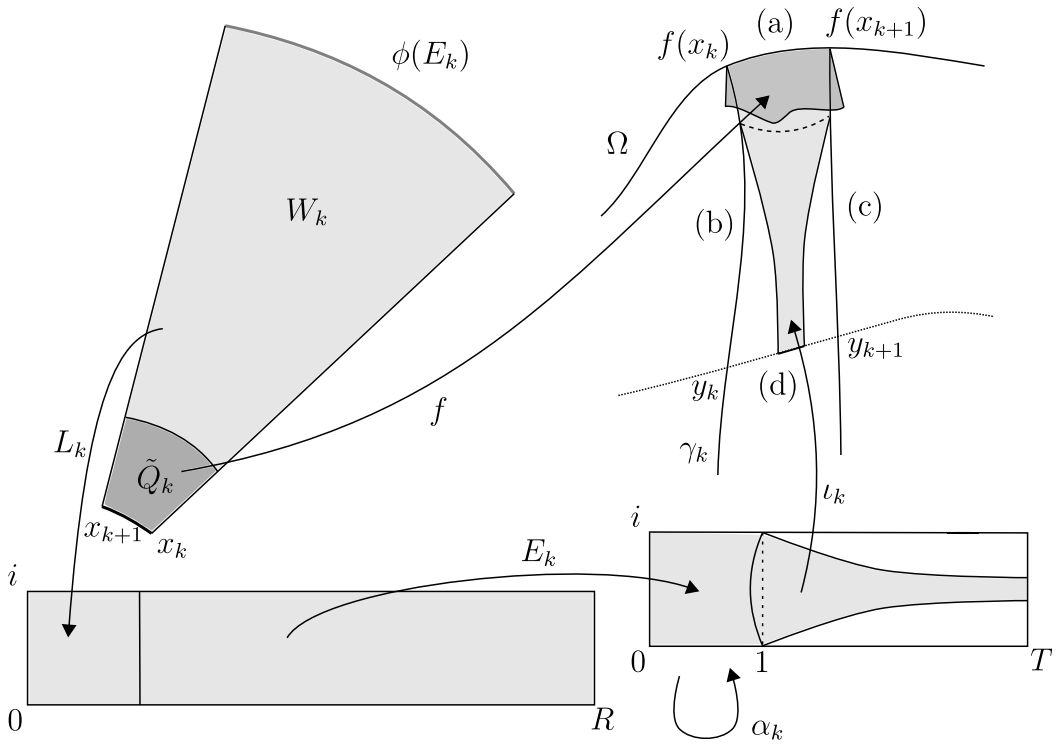

FIGURE 12.定理 5.1 中的映射 ψ 是拟共形的，在 $[x_k, x_{k+1}] \subset \mathbb{S}^1$ 上与 f 一致，并且 $\psi(W_k) \subset Q_k$。

由于当 δ 足够小时，可以假设 f 在 $\mathbb{D}(0,\ 1+\delta)$ 上是 K 拟共形的，因此四边形 $f(\tilde{Q}_k)$ 的模数介于 $K^{-1}M(\tilde{Q}_k)$ 和 $KM(\tilde{Q}_k)$ 之间。~一般来说，我们不会有 $f(Q_k) \subset Q_k$，所以取

$$e_k \colon f(\tilde{Q}_k) \hookrightarrow Q_k$$

~ ~共形，并记为 $S_k = e_k(f(Q_k))$。如果我们适当地选择映射 e_k，就可以将它们延拓为共形映射

$$e_k \colon e_k^{-1}(Q_k) \to Q_k,$$

使四边形顶点映射到四边形顶点，且 $e_k^{-1}(Q_k) \supset f(\tilde{Q}_k)$，并且在 $f(\tilde{Q}_k)$ 的某个邻域之外，四边形 $e_k^{-1}(Q_k)$ 恰好是 Q_k。

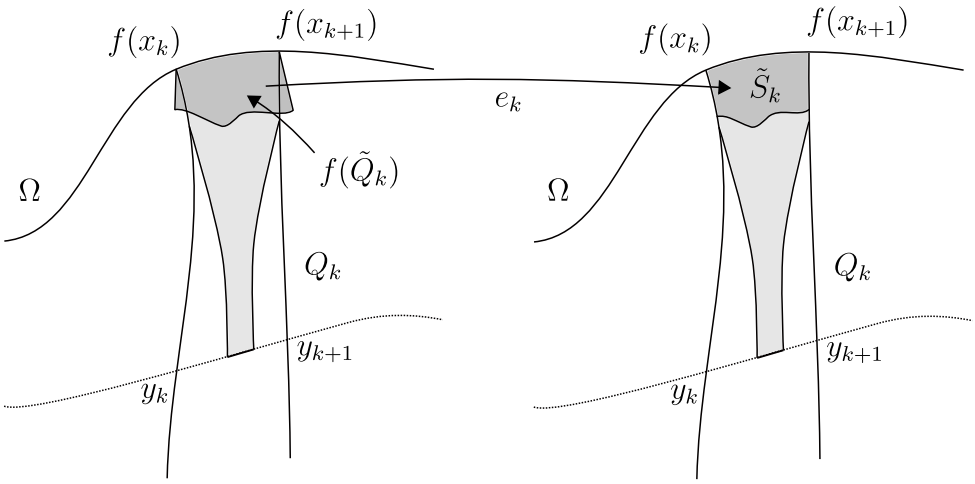

FIGURE 13.映射 e_k 的表示。我们可以取β_k: $Q_k \to Q_k$ 拟共形，使映射 $\beta_k \circ e_k \circ f$ 在 Q_k 上共形。

命题 5.3。存在一个拟共形映射 β_k: $Q_k \to Q_k$，使得

$$\beta_k \circ e_k \circ f \colon L_k^{-1}([0,1]^2) \to S_k := \iota_k([0,1]^2)$$

是共形的。此外，给定 $\varepsilon > 0$，我们可以假设 β_k 的拟共形常数为 $K \cdot (1+\varepsilon)^{1/2}$，前提是 $M(\tilde{Q}_k)$ 足够大，且其膨胀~支集位于四边形 $i_k([0, M(Q_k)] \times [0,1])$中。

*Pr*证明。只需找到一个映射 α: $[0,T_k] \times [0,1] \to [0,T_k] \times [0,1]$，使得 t:

(a) $\alpha \circ \iota_k^{-1} \circ e_k \circ f$在 $L_k^{-1}([0, M(\tilde{Q}_k)] \times [0,1])$ 上是共形的。

(b) $\alpha \circ \iota_k^{-1} \circ e_k \circ f(L_k^{-1}([0,1]^2)) = [0,1]^2$。

一旦我们构造出这样的 α，所需的映射 β_k 就是

$$\beta_k = \iota_k \circ \alpha \circ \iota_k^{-1} \colon Q_k \to Q_k.$$

事实上，我们还将看到，可以这样选取映射 α：

(c) $[0,1]^2$ 的顶点在 $\alpha \circ \iota_k^{-1} \circ e_k \circ f \circ L_k^{-1}$. 下保持固定。因此它是恒等映射。

首先，通过使 $|x_k - x_{k+1}|$ 如定理 5.1 的陈述中那样足够小，我们可以假设 K-拟共形映射 f 延拓为在模数为 $2M(Q_k)$的四边形 $2Q_k \subset W_k$ 上的 K-拟共形$\tilde{}$ $\tilde{}$（如我们之前所定义）。

存在一个 $K \cdot (1+\varepsilon)^{1/4}$-拟共形映射

$$\tilde{\alpha}\colon [0, T_k] \times [0,1] \to [0, T_k] \times [0,1],$$

使得该映射

$$E = \tilde{\alpha} \circ \iota_k^{-1} \circ \beta_k^1 \circ f \circ L_k^{-1}\colon [0, M(\tilde{Q}_k)] \times [0,1] \to [0, T_k] \times [0,1]$$

是共形的，并且映射 $\tilde{\alpha}$ 在

$$[0, T_k] \times [0,1] \setminus (\iota_k^{-1} \circ \beta_k^1 \circ f \circ L_k^{-1})([0, 2M(\tilde{Q}_k)] \times [0,1]).$$

特别地，如果 T_k 足够大，则形状 $E([0, M(\tilde{Q}_k)] \times [0,1])$ 是 $(1+\varepsilon_n)^{1/4}$-可容许的。因此，根据命题 4.3，存在一个 $(1+\varepsilon_n)^{1/4}$-拟共形映射

$$\hat{\alpha}\colon E([0, M(\tilde{Q}_k)] \times [0,1]) \to E([0, M(\tilde{Q}_k)] \times [0,1])$$

使得 $\hat{}\alpha \circ E\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ 是恒等映射。映射 α 是 $\alpha = \hat{}\alpha \circ \tilde{\alpha}$。 □

现在我们可以完成定理 5.1 的证明。

定理 *5.1* 的证明。取 $\beta_k\colon\ Q_k \to Q_k$ 拟共形，如命题 5.3 所示，$\tilde{}$并令 $M(Q_k)$ 足够大，使得 β_k 的膨胀有界于

$$K \cdot (1+\varepsilon)^{1/2}.$$

映射 $\iota_k^{-1}\colon\ Q_k \to [0, T_k] \times [0,1]$ 是共形的，并将 S_k 映射到 $[0,1]^2$。图 11 中的图表并不交换。然而，映射

$$\iota_k^{-1} \circ \beta_k \circ e_k \circ f \circ L_k^{-1}\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$$

是共形的，且在顶点处为恒等映射。因此它就是恒等映射。于是，

$$f_{|L_k^{-1}([0,1]^2)} = e_k^{-1} \circ \beta_k^{-1} \circ \iota_k \circ L_{k|L_k^{-1}([0,1]^2)}.$$

由于 $\alpha_k \circ E_k$ 在 $[0,1]^2$, 上为恒等映射，拟共形映射

$$\psi_{|W_k} = e_k^{-1} \circ \beta_k^{-1} \circ \iota_k \circ \alpha_k \circ E_k \circ L_{k|W_k}$$

定义了 f 在 W_k 上的拟共形延拓，并将四边形 W_k 中与 $[x_k, x_{k+1}] \subset \mathbb{S}^1$ 相对的边映射到 $f([x_k, x_{k+1}])\tilde{}$ 中位于 Q_k 内的相对边。此外，在 $\cup_k \psi(W_k)$ 内，映射 ψ 在 $\cup_k \psi(Q_k)$ 之外是共形的。

ψ 的拟共形常数取决于 f, α_k 和 β_k的拟共形常数。根据命题 5.2（或命题 4.3），如果我们适当地选择集合E（$[0, R_k] \times [0,1]$），就可以确保 α_k 的拟共形常数被（$1+\varepsilon$）$^{1/2}$. 所界。因此， $\psi_{|W_k}$ 的拟共形常数被以下数值所界：

$$K \cdot (1+\varepsilon)^{1/2} \cdot (1+\varepsilon)^{1/2} = K \cdot (1+\varepsilon),$$

正如我们所希望看到的。 □

6. Log-singular circle homeomorphisms are weldings

本节回顾 [Bis07, Theorem 3], 的证明。Bishop 在其中证明，圆周同胚是对数奇异的，当且仅当它是某条柔性曲线的焊接。证明的主要组成部分是第 3 节中的映射 ϕ （命题 3.2）以及第 5 节中的映射 ψ （定理 5.1）。通过在第 4 节引入可容许形状，我们实际上已经大幅扩展了 Bishop 的证明。我们还改进了他的论证，最终得以构造出正面积柔性曲线，以及具有所有其他可能豪斯多夫维数的柔性曲线。

与 Bishop 的论文一样，我们从较容易的方向入手，它可由 Balogh 和 Bonk 的一个定理 [BB99] 得出。

引理 6.1 ([Bis07] 引理 24)。设 h 是与一条柔性曲线相关联的共形焊接。那么存在一个集合 $E \subset \mathbb{S}^1$，使得 E 和 $h(\mathbb{S}^1 \setminus E)$ 的容量均为零，也就是说，h 是对数奇异的。

证明。设 n 足够大，并令 $\Gamma_n = \partial W_n$，其中 $W = [-1, n^2] \times [-1, 1]$。由于 h 是一条柔性曲线的焊接，存在一条与 h 对应的曲线 γ_n，它与 Γ_n 的豪斯多夫距离小于 $1/4$。因此，存在共形映射 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega_n$、$g\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \Omega_n$，其中 $\partial\Omega_n = \gamma_n$，且 Ω_n 有界。我们还可以假设 $f(0) = 0$。

令 $E_n = f^{-1}(\{x + iy \in \Gamma_n\colon x \geq n\})$。于是

$$h(\mathbb{S}^1 \setminus E_n) = g^{-1}(\{x + iy \in \Gamma_n \colon x < n\}).$$

根据引理 2.6，E_n 和 $h(\mathbb{S}^1 \setminus E_n)$ 的对数容量都很小。因此，取 $n \to \infty$ 并应用引理 2.3，可得 h 是对数奇异的。□

Th本节余下部分的目标是证明相反方向。

定理 *6.2*（[*Bis*07]定理 *25*）。设 h 是保向的对数奇异同胚。设存在共形映射 $f_0\colon \mathbb{D} \to \Omega$ 和 $g_0\colon \mathbb{D}^* \to \Omega^*$，分别映到闭包不交的若尔当域，并且满足 $\infty \in g_0(\mathbb{D}^*)$。那么，对于任意 $r < 1$ 和任意 $\eta > 0$，存在共形映射 F 和 G，将 $\mathbb{D}$和 $\mathbb{D}^*$ 分别映到一条若尔当曲线 Γ 的两个补分支，使得在 $\mathbb{S}^1$ 上有$h = G^{-1} \circ F$，且对所有 $|z| \leq r$，$|F(z) - f_0(z)| \leq \eta$；对所有 $|z| \geq 1/r$，$|G(z) - g_0(z)| \leq \eta$。

结合引理 6.1，可推出 [Bis07，定理 3]。实际上，我们将证明下面这个看似较弱的命题；事实证明，借助命题 1.10，它足以证明定理 6.2。

定理 *6.3.* 设 h 是一个保向对数奇异同胚，且 $f_0\colon \mathbb{D} \to \Omega$，$g_0\colon \mathbb{D}^* \to \Omega^*$ 是映到闭包不交且边界光滑的区域上的共形映射，使得 $\infty \in g_0(\mathbb{D}^*)$。固定一个正实数序列 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足：若 $K_n = \prod_{j=1}^{n}(1 + \varepsilon_j)$，则 $K = \prod_n(1 + \varepsilon_n) = \lim_n K_n < \infty$（假设 $\varepsilon_0 = 0$）。那么存在 K_n-拟共形映射 $f_n\colon \mathbb{D} \to \Omega_n$，$g_n\colon \mathbb{D}^* \to \Omega_n^*$，它们映到闭包不交的光滑 *Jordan* 域上，并满足：若环域 $A_n = \mathbb{C} \setminus (\Omega_n \cup \Omega_n^*)$ 被定理 *5.1* 中所述的一族 $\mathcal{C}_n$ 所叶状分解，现将其按 $x \in \mathbb{S}^1$编号，则有：

(i) $l(\gamma_{n+1}(x)) \le (2/3) l(\gamma_n(x))$，其中 $l(\gamma)$ 表示 γ 的长度。因此，*(ii)* $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le C (2/3)^n L$ 且 $|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \le C (2/3)^n L$。

因此，由最大模原理，序列 f_n, g_n 收敛到 K-拟共形映射 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega_\infty, g\colon \mathbb{D}^* \to \Omega_\infty^*$，映到若尔当曲线 Γ 的互补连通分支上，使得 $h = g^{-1} \circ f$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上成立。

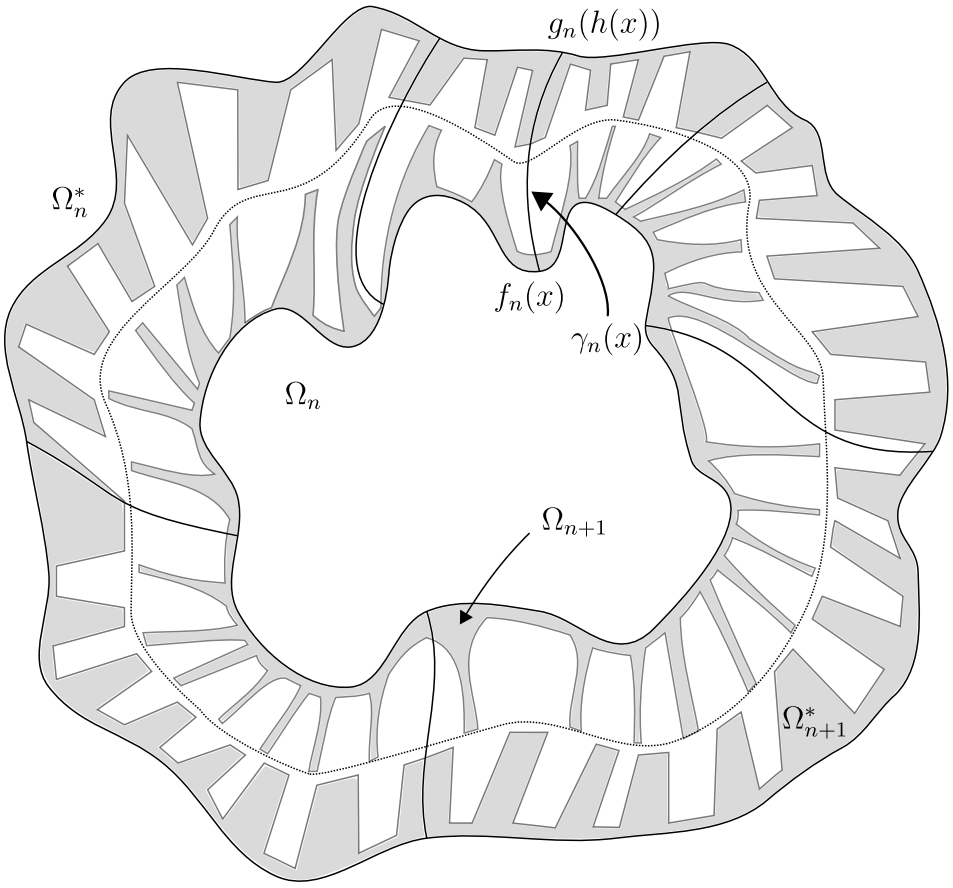

FIGURE 14. 定理 6.3 中迭代过程的示意图。区域 Ω_{n+1}，Ω_{n+1}^* 由 Ω_n，Ω_n^* 构造而来，方法是使用 f_n，g_n 的拟共形延拓，使得序列 $||f_n(x) - g_n(h(x))||_\infty$ 随 n 递减。

在继续证明定理 6.3 之前，我们先回顾它如何推出定理 6.2。取一个拟共形映射 $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得 $F := H \circ f\colon \mathbb{D} \to \phi(\Omega_\infty)$ 和 $G := H \circ g\colon \mathbb{D}^* \to \phi(\Omega_\infty^*)$ 是共形映射。若尔当曲线 $H(\Gamma)$ 的共形焊接为 h。设 $r < 1$。由拟共形映射的紧性（或定理 2.8），如果定理 6.3 中的序列 $\{\varepsilon_n\}$ 选取得使 $K = \prod(1+\varepsilon_n)$ 足够接近 1，那么便可得到定理 6.2 中的估计。

如前所述，我们现在利用第 3 节和第 5 节的结果来证明定理 6.3。见图 15。我们为序列 f_n 所作的所有构造，同样适用于 g_n。

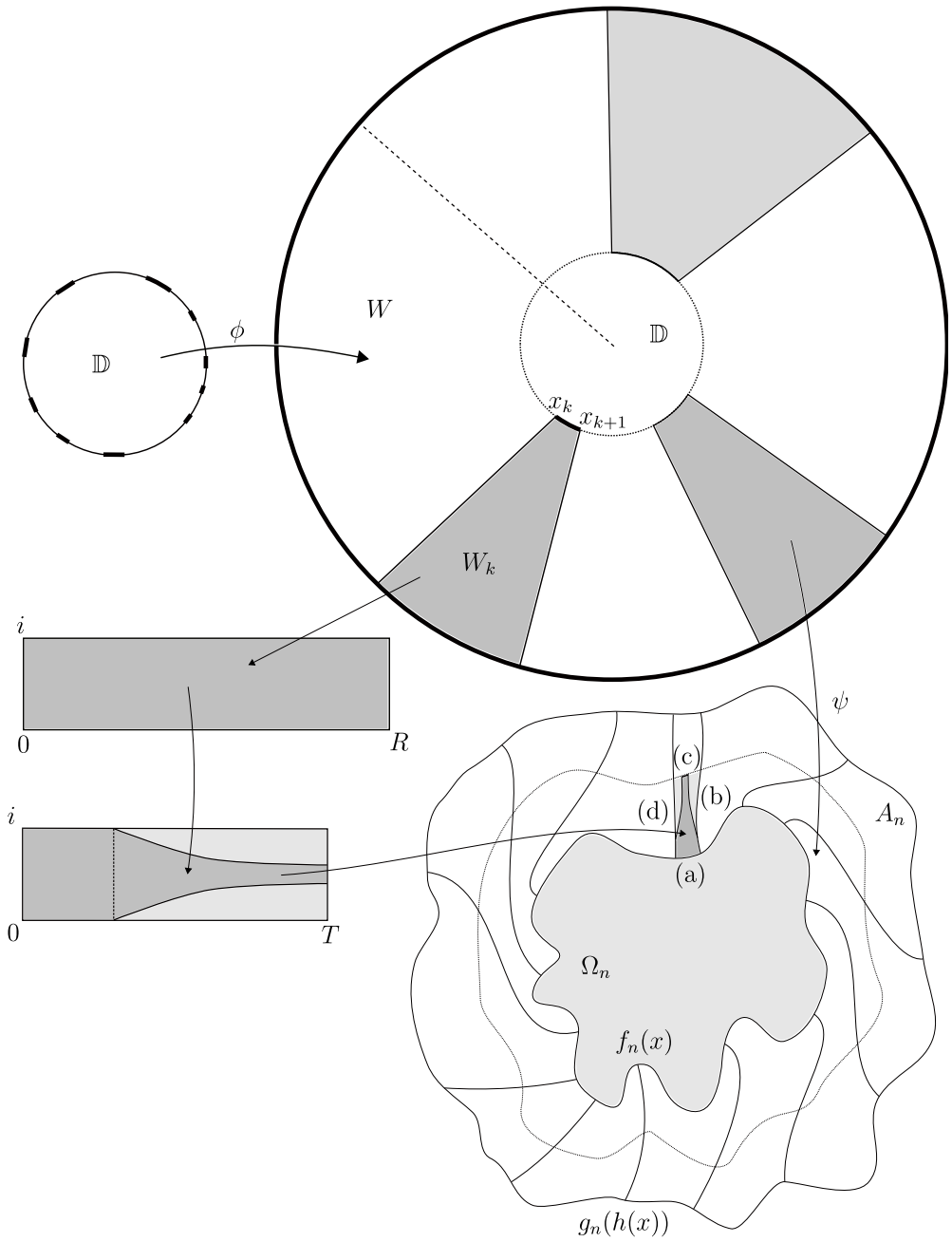

FIGURE 15. 命题 3.2 中映射 ϕ和定理 5.1 中映射 ψ 的表示。定理 6.3 中的映射 f_{n+1} 大致为 $\psi \circ \phi$。

对于基例 $n = 0$，我们可以假设映射 f_0 共形地延拓到圆盘 $\mathbb{D}(0,\ 1+\delta)$，方法是令 Ω_0 具有解析边界，或者考虑 $f_0(tz)$，其中 t 足够接近 1。

假设我们已获得满足定理 6.3 结论的映射 f_0、f_1、……、f_n（以及 g_0、g_1、……、g_n）。我们对 f_n、g_n 和 ε_n应用定理 5.1，同时也由此根据命题 3.2 构造出 ϕ。映射 $\psi \circ \phi$

是 $K_n(1+\varepsilon_n) = K_{n+1}$-拟共形的，在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上接近 f_n，并且在对数容量极小的集合 $E_n \subset \mathbb{S}^1$ 上更接近 $g_n \circ h$，从而$h(\mathbb{S}^1 \setminus E_n)$的对数容量也极小（见引理 3.1 和命题 3.2）。然而，$(\psi \circ \phi)(\mathbb{D})$不是若尔当域。为了解决这个问题，我们将对足够接近 1 的 t 定义 $f_{n+1} = (\psi \circ \phi)(tz)$。

类似地，我们可以构造一个拟共形映射 g_{n+1}，它在 $\mathbb{D}^*$ 的紧子集上接近 g_n。如果我们令 t 足够接近 1，那么对于 $x \in E_n$，连接 $f_{n+1}(x)$ 与 $g_{n+1}(h(x))$ 的测地线现在的长度为 $\leq (\varepsilon + 1/2) l\gamma(x)$（其中 γ 是连接 $f_n(x)$ 与 $g_n(h(x))$ 的测地线）。这由以下引理予以证明，其陈述和证明均与 Bishop 论文中的相同。

引理 *6.4*（[*Bis*07]引理 *28*）。设 Γ 是一条光滑闭若尔当曲线，Ω、Ω^* 是由 Γ 的补分支去除有限条光滑互不相交弧 $\{\gamma_k\}$ 后得到的单连通域；每条弧除恰有一个端点位于 Γ 外，均与 Γ 不相交。设 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$、$g\colon \mathbb{D}^* \to \Omega^*$ 为共形映射，并令 $A_t = \mathbb{C} \setminus (f(t\mathbb{D}) \cup g(\mathbb{D}^*/t))$。那么，对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $t < 1$，使得 A_t 中连接边界点 $f(tx)$ 与 $g(y/t)$ 的双曲测地线的欧几里得长度至多为 $L(x,y) + \varepsilon$，其中 $L(x,y)$ 是在 $X = \partial\Omega \cup \partial\Omega^*$ 中连接 $f(x)$ 与 $g(y)$ 的最短路径的长度。

证明。如果 t足够接近 1，那么除弧 γ_k 的有限个尖端以及它们相交的有限个点 Γ外，A_t 局部看起来像一条带状区域。共有 $M = 2 \cdot \#\{\gamma_k\}$ 个尖端和交点。用一个 $\varepsilon/(2M)$ 圆盘覆盖其中每一个点。给定 A_t中的一条测地线，在这些圆盘内，根据 Gehring-Hayman 不等式，距离小于 $C\varepsilon/M$（圆盘的直径）。在圆盘之外，A_t 中测地线的欧几里得长度接近于 X上的长度。□

这个引理保证，从步骤 n 进行到步骤 $n+1$ 时，我们能够控制新叶状结构上测地线的欧几里得长度。

现在我们完成定理 6.3 的证明。

定理 *6.3* 的证明。我们此前已经验证了基例。假设我们已经验证了直到 $n \in \mathbb{N}$ 的归纳假设。像之前一样设 f_{n+1}，根据定理 5.1，它可以取为 K_{n+1}-拟共形的。如果定理 5.1 中的 η 足够小，那么在 E_n上，如命题 3.2 所示，

$$l(\gamma_{n+1}(x)) \leq 2/3 l(\gamma_n(x)),$$

其中，$\gamma_m(x)$ 表示连接 $f_m(x)$ 与 $g_m(h(x))$ 的双曲测地线 .

类似地，我们以这样的方式得到 g_{n+1}，使得对于 $y \in h(\mathbb{S}^1 \setminus E_n)$，我们有 e

$$l(\gamma_{n+1}(h^{-1}(y))) \leq 2/3 l(\gamma_n(h^{-1}(y))).$$

由于 $\mathbb{S}^1 = E_n \cup h^{-1}(h(\mathbb{S}^1 \setminus E_n))$，我们由定理 6.3 得到 (i)。

(ii)基于类似的理由成立，因为 ψ_n 是 f_n 的拟共形扩张（ g_{n+1}也同理）。□

7. Positive area flexible curves

本节中，我们通过使用ε-可容许形状，证明存在正面积柔性曲线。为此，我们改进了用于证明定理 6.3 的构造方法：在构造定理 5.1 中的映射 ψ_n 时，控制嵌入 E_k 会留下多少比例的面积。

我们强调，在证明定理 6.3 时，归纳构造的每一步中， R 的值（根据命题 3.2，它在所有 W_k 中近似相同）都可以取得足够大。 T_k 的值可能会变化，不过我们总可以假设它大于某个固定的大值。

令 $\varepsilon > 0$，并固定一个矩形 $[0,T] \times [0,1]$。我们在命题 4.3 中已经看到，只要 T 足够大，就存在 ε-可容许形状。

定义 7.1（形状的剩余面积百分比）。 给定一个与矩形 $[0,R] \times [0,1]$ 相关联的 ε-可容许形状E。我们将以下量称为

$$a(E,T) = \frac{m(([0,T] \times [0,1]) \setminus E([0,R] \times [0,1]))}{m([0,T] \times [0,1])} \in [0,1)$$

该形状的剩余面积百分比，如图 16 所示，其中 m表示勒贝格测度。

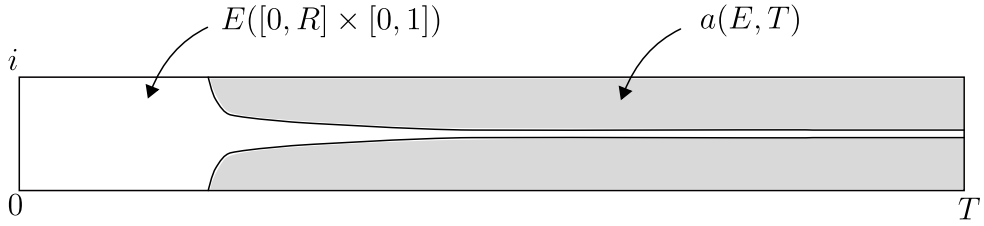

Figure 16. 表示某个形状所占面积与其嵌入其中的矩形总面积之比。所占面积的百分比以浅色阴影表示。在此例中 $a(E, T) > 0.75$。

在定理 7.4 中，我们将通过对一列正面积集合取无限交集来构造一条柔性曲线。只要确保面积在每一步都不会减少太多，就能保证所得集合也具有正面积（根据定理 6.3，它将是一条曲线）。这与构造正长度的康托集类似。

注意，根据命题 4.3 中的估计，我们需要使 T 足够大，从而存在一个 M，满足 $1 < M < 2M < T$，并且，

$$\frac{e^{-\pi(M-1)/2}}{M-1} = (\exp(\pi(M-1)/2 + \log(M-1)))^{-1} < \varepsilon.$$

也就是说，

$$\log(1/\varepsilon) < \pi\frac{M-1}{2} + \log(M-1). \tag{7.1}$$

特别地，我们可以取 $M > 1 + 2\log(1/\varepsilon)/\pi$。

引理 7.2. 设 $\varepsilon > 0$和 $a \in (0、1)$，则存在矩形 $[0,T]\times[0,1]$和$[0,R]\times[0,1]$，满足 $R > T$，它们允许一个 ε-可容许形状 E，使得 $a(E,T) = a$。

证明。给定 $\varepsilon > 0$，选取满足 (7.1) 的 $M > 1$。现在取足够大的 $T > 2M$，使得

$$2M/T < (1-a)/2.$$

现在我们可以找到一个形状 E，使得 $a(E,\ T) = a$，且该形状是 ε-可容许的（命题 4.3）。引理 4.1 得出，对于某个 R，有 $E = E([0,R]\times[0,1])$；通过修改 $E([0,R]\times[0,1])$ 右侧的四边形顶点，可以使 R 足够大。□

注意，在引理 7.2 的证明中，我们需要 $4M/(1-a) < T$。现在的目标是将引理 7.2 应用于一组 T_j，并在它们之间获得一致的 R。

命题 7.3。设 $\varepsilon > 0,\ \ 0 < a < 1$，并假设选取 M 使得 *(7.1)* 成立。若对于 $j = 1,\ldots,n,\ \ \{T_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{N}$ 满足 $4M/(1-a) < T_j$，则我们可以找到 $R < \infty$ 和 ε-可容许形状 $E_j([0,R]\times[0,1]) \subset [0,T_j]\times[0,1]$，使得 $a(E_j,T_j) = a$。

证明。由引理 7.2 可知，我们可以找到形状

$$\tilde{E}_j = \tilde{E}_j([0,R_j]\times[0,1]) \subset [0,T_j]\times[0,1]$$

˜，它们是 ε-可容许的，并且使得 $a(E_j,\ T_j) = a$。如果取 $R =$ 最大值 R_j，那么我们˜可以利用引理 4.1 修改四边形 E_j 右侧的四边形顶点，使得 $E_j = E_j([0,R]\times[0,1])$，并且 E_j 与 E_j 在 $[0,T_j]\times[0,1]$ 中是同一子集。□

现在我们可以证明存在正面积柔性曲线，从而证明定理 1.1 对于 $s = 2$成立。

定理 7.4 (正面积柔性曲线**)**。设 $h\colon\ \ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是保向的对数奇异圆周同胚，且 $\{\varepsilon_n\}_{\mathbb{N}}$ 是一个正实数序列，使得若 $K_n = \prod_{j=1}^{n}(1+\varepsilon_j)$，则 $K = \lim_n K_n < \infty$。考虑$\{a_n\}_n \subset (0,\ 1)$，使得 $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0$。那么存在 K-拟共形映射$f\colon\ \ \mathbb{D} \to \Omega,\ \ g\colon\ \ \mathbb{D}^* \to \Omega^*$，使得Ω、Ω* 是互不相交的区域，$J = \partial\Omega = \partial\Omega^*$ 是满足 $h = g^{-1}\circ f$ 的若尔当曲线，并且

$$m(J) = \prod_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0.$$

因此，存在一条焊接为 h 的正面积柔性曲线。

证明。我们按照命题 3.2 和定理 5.1 构造一个环域序列 A_n，使得

$$\liminf_n m(A_n) \geq m(A_0)\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

其中 m表示勒贝格测度。为此，只需证明环域序列 $\{A_n\}_n$ 可以选取为满足 $m(A_n) = a_n m(A_{n-1})$，其中 $n \in \mathbb{N}$。示意见图 17。

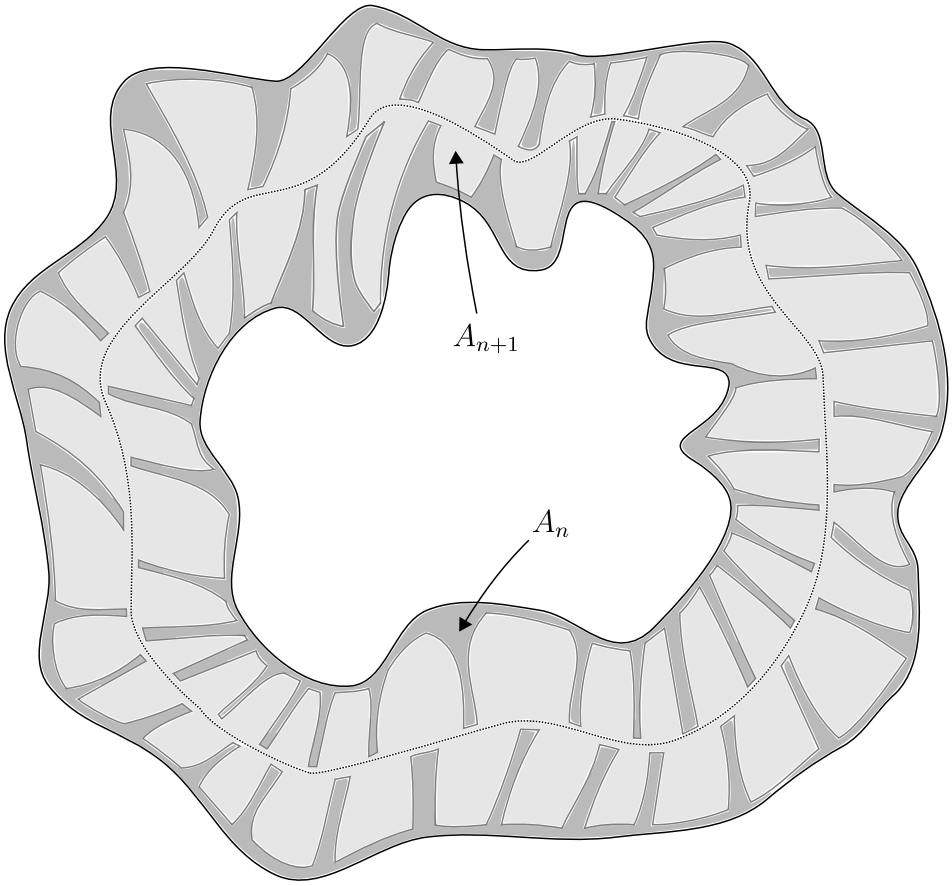

FIGURE 17. 构造一条焊接为 h 的正面积柔性曲线: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, 一个固定对数奇异同胚。 A_{n+1}占据了 A_n的大部分面积。 A_{n+1} 对应于颜色较浅的环域。 A_n 是 A_{n+1}与两个颜色较深的环域的组合。

这样，在定理 6.3 的证明中应用引理 6.4 时，若以适当的方式在每一步缩小其中的 ε ，所得的若尔当曲线 J的面积将为

$$m(A_0) \geq m(J) \geq \frac{m(A_0)}{2} \prod_{n \in \mathbb{N}} a_n > 0.$$

通过用 $\mathbb{C}$ 的一个适当共形映射重新缩放，我们可以得到 $m(J) = \prod_n a_n > 0$。现在我们找到一个拟共形映射 $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ，它在 J 上的畸变为零，使得 $H^{-1} \circ f$和 $H^{-1} \circ g$ 是共形的。然后，

$$h = g^{-1} \circ f_{|\mathbb{S}^1} = (H^{-1} \circ g)^{-1} \circ (H^{-1} \circ f)_{|\mathbb{S}^1}.$$

由于拟共形映射保持零面积集，因此 $H^{-1}(J)$ 是一条正面积柔性曲线。

下面我们将说明如何构造这样的环域序列，图 17 展示了这一构造。在定理 6.2 的证明中，当第$n > 1$步构造拟共形映射 f_n 时，出于多种原因，我们必须使 $|x_k - x_{k+1}|$ 足够小，

这样做会增大四边形 Q_k （见图10、图 11 和图 12）的模数，我们将其记为 T_k。我们取 T_k 足够大，使 ε_n和 $\tilde{a}_n$ 满足命题 7.3 的假设（稍后将具体说明）。

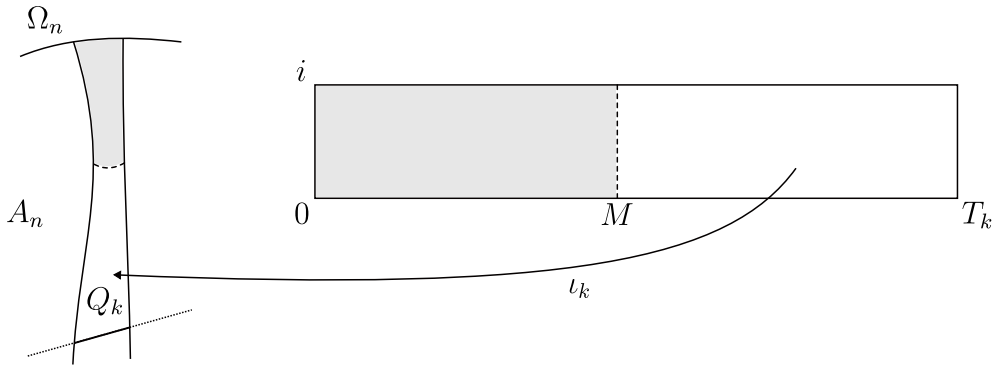

FIGURE 18. ι_k的表示： $[0,T_k]\times[0,1]\to Q_k$，它是共形的，并将顶点映射到四边形顶点，其中顶点 0， i对应于 Q_k 中包含在 $\partial\Omega_n$内的四边形顶点。虚线线段 $[M,M+i]$ 通过 ι_k映射为 Q_k中的虚线曲线。百分比 $m(\iota_k([0,M]\times[0,1]))/m(Q_k)$与 M/T_k可比。

考虑共形映射 ι_k ，使得

$$\iota_k([0,T_k]\times[0,1])=Q_k,$$

将顶点映射到四边形顶点，其中 Q_k 在定理 5.1 中定义。参见图 11、图 12 和图18。映射 ι_k 会改变面积，但要得到 ε_n-可容许形状所需的命题 7.3 中的 M 仅取决于 ε_n （见 (7.1)）。模数估计表明 M/T_k 与

$$m(\iota_k([0,M]\times[0,1]))/m(Q_k)$$

相差一个因子 L，它仅取决于 M （而不取决于 T_k）。

由此可知，我们可以用 a_k 和 L 找到 $\tilde{a}_k\in(0,1)$，并将命题 7.3 应用于 $\varepsilon_n,\tilde{a}_n$，从而得到一个 ε_n-可容许形状 $E_k\subset[0,T_k]\times[0,1]$，使得$a(E_j,T_k)=\tilde{a}_n$，且满足

$$m(\iota_k([0,T_k]\times[0,1]\setminus E_k))/m(Q_k)=a_n.$$

因此， $m(A_n)=a_nm(A_{n-1})$，这就完成了证明。 □

注记 7.5。 在第 5 节、第4节和第7节中，为简化记号，我们一直假设在定理 6.3 的证明中，命题 3.2 在步骤 n所提供的 R_k 是相同的。正如我们强调过的，这并非事实，若要相应地调整论证，则需要做一些显而易见的修改。不过，在证明命题 7.3 时，我们也可以看到，能够匹配每个 R_k ，并得到所需的剩余面积（这可由其中的论证推出）。因此，这种记号上的简化不会影响结果的有效性。

8. Flexible curves of dimension 1

本节中，我们证明 $s = 1$的定理 1.1。更确切地说：

定理 8.1 (一维柔性曲线)。设 $h\colon\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个保向的对数奇异圆周同胚。则存在一条柔性曲线 Γ，其焊接为 h，且其豪斯多夫维数1。

注 8.2。事实上，本节中的论证将证明：若 m 是一个规范函数，满足 $m(t) = o(t)$，且 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个对数奇异圆周同胚，则存在一条柔性曲线 Γ，其焊接为 h，使得 $H_m(\Gamma) = 0$。

我们将按照定理 6.3 的证明进行，也就是说，考虑共形映射 $f_0\colon \mathbb{D} \to \Omega_0$ 和 $g_0\colon \mathbb{D}^* \to \Omega_0^*$，其中 Ω_0, Ω_0^*是闭包不交的光滑 Jordan 域$\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$。然而，在根据定理 6.3 构造映射 $f_1\colon \mathbb{D} \to \Omega_1$ 和$\tilde{g_1}\colon \mathbb{D} \to \Omega_1^*$之后，我们考虑拟共形映射 $H_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\tilde{\quad}$，它固定 0，1，$\infty$，使得 $f_1 = H_1 \circ f_1$、$g_1 = H_1 \circ \tilde{g}_1$ 是共形的，并且 $\mu_{H_1} = \mu_1\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$在 $\mathbb{C} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_1^*)$ 上膨胀为零。

由定理 2.8 可得：

推论 8.3。设 $\mu\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是一个贝尔特拉米系数，即 μ 是一个可测函数，满足 $||\mu||_\infty \le k < 1$；设 $H\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是满足 $\mu_H = \mu$ 且固定 0、1 和 ∞ 的唯一拟共形映射。如果 μ 的紧支撑包含于 $\mathbb{D}$（0、R）中，那么对于 $z \in \mathbb{D}$（0、R），有

$$|H(z) - z| \le C||\mu||_\infty.$$

推论 8.3 也可以通过结合 [Ahl06 的第五章 A 节] 以及 [Ahl06 的第五章 B 节、定理 1]，利用附录 A 中的结果来证明。

我们将把推论 8.3 应用于之前给出的贝尔特拉米系数 μ_1。由命题 5.2（命题 4.3）和命题 5.3 可知——我们正是利用它们证明了定理 5.1——我们可以保证使 $||\mu_1||_\infty$ 任意小，同时还可以使 μ_1 的支集具有任意小的测度。

为了证明定理 8.1，我们需要反复使用推论 8.3，以确保能够得到定理 6.3 中的估计，同时也能控制相应环域序列（它们生成该曲线）的覆盖。

证明。令 f_0, g_0与之前一样为共形。考虑映射 ϕ_1, ϕ_1^*（命题 3.2）和 ψ_1, ψ_1^*（定理 5.1），其中 ϕ_1, ψ_1 对应于 f_0，而 ϕ_1^*, ψ_1^*对应于 g_0。我们选择 ψ_1,ψ_1^*，使得紧集

$$\mathbb{C} \setminus ((\psi_1 \circ \phi_1)(\mathbb{D}) \cup (\psi_1^* \circ \phi_1^*)(\mathbb{D}^*))$$

由有限条光滑曲线组成。见图 19。由于光滑曲线的豪斯多夫维数为 1，因此存在一个由有限个半径为 $\{r_j^1\}$ 的开圆盘$\{D_j^1\}$ 构成的覆盖，使得

$$\sum_j (r_j^1)^{1+1} \le 1/2.$$

如果映射 H_1 的膨胀足够小，则由推论 8.3 可知，在引理 6.4 中我们可以将 t 视为足够接近 1，从而环域

$$A_1 = A_1(t) = \mathbb{C} \setminus ((\psi_1 \circ \phi_1)(t\mathbb{D}) \cup (\psi_1^* \circ \phi_1^*)(\mathbb{D}^*/t))$$

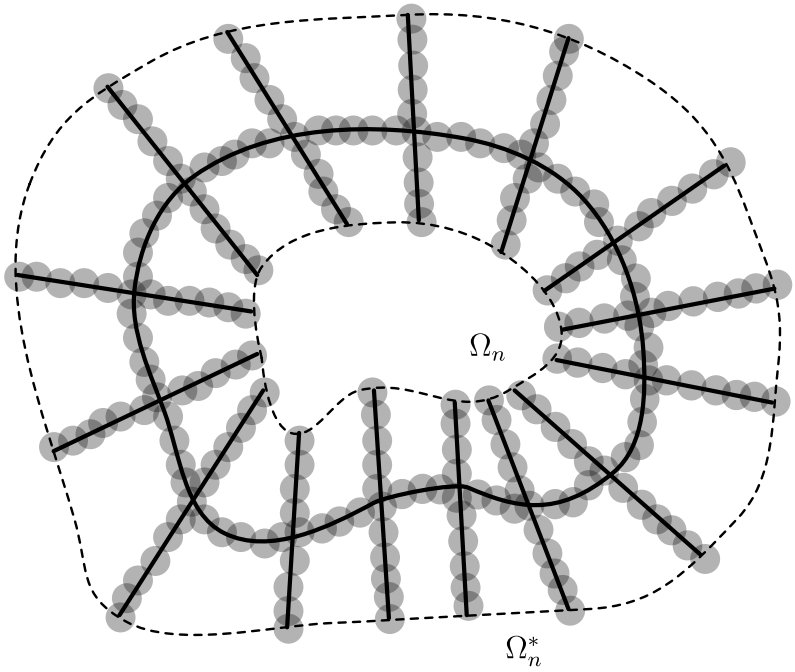

FIGURE 19. 定理 8.1 证明中的构造。我们选择形状，使得 $\mathbb{C} \setminus ((\psi_n \circ \phi_n)(\mathbb{D}) \cup (\psi_n^* \circ \phi_n^*)(\mathbb{D}^*))$ 由有限条光滑曲线组成，这些曲线由深色粗线表示。我们可以用有限个圆盘覆盖这些曲线（以浅灰色表示）。

满足：

(a) $A_1 \subset \cup_j D_j^1$。(b) $H_1(A_1) \subset \cup_j D_j^1$。(c) 映射 $f_1(z) = (H_1 \circ \psi_1 \circ \phi_1)(tz)$ 和 $g_1(z) = (H_1 \circ \psi_1^* \circ \phi_1^*)(z/t)$ 满足定理 6.3 中的估计 (i) 和 (ii)。

定义 $\Omega_1 = f_1(\mathbb{D})$ 和 $\Omega_1^* = g_1(\mathbb{D}^*)$。

类似地，对于 $n > 1$，我们可以定义共形映射 $f_n\colon \mathbb{D} \to \Omega_n$、$g_n\colon \mathbb{D}^* \to \Omega_n^*$，它们满足具有一致常数的条件：

(i) $|f_n(x) - g_n(h(x))| \lesssim (2/3)^n$ for $x \in \mathbb{S}^1$.
(ii) $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \lesssim (2/3)^n$, $|g_n(x) - g_{n-1}(x)| \lesssim (2/3)^n$ for $x \in \mathbb{S}^1$.

并且存在有限个圆盘 D_j^n，每个圆盘的半径为 r_j^n，满足

(a) $A_n = \mathbb{C} \setminus (f_n(\mathbb{D}) \cup g_n(\mathbb{D}^*)) \subset \cup_j D_j^n$.(b) $\sum_j (r_j^n)^{1+1/n} \le 2^{-n}$. (c) $\cup D_j^n \subset \cup D_j^{n-1}$.

由此可知，共形映射序列 $\{f_n\}, \{g_n\}$ 收敛到共形映射 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega_\infty$ 和 $g\colon \mathbb{D}^* \to \Omega_\infty^*$，其中 $\Gamma = \partial\Omega_\infty = \partial\Omega_\infty^*$ 是一条若尔当曲线，其共形焊接为 h，豪斯多夫维数为 1。□

9. Flexible curves of dimension $s \in (1, 2)$

本节将完成定理 1.1 的证明，为方便读者，我们再次写出该定理。

定理 9.1。设 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个保向对数奇异圆周同胚，且 $s \in [1, 2]$。那么存在一条柔性曲线 γ，其焊接为 h，使得 $\mathcal{H}dim(\gamma) = s$。

定理 7.4 和定理 8.1 证明了 $s = 2$ 和 $s = 1$的定理 9.1。因此，只需证明 $s \in (1, 2)$ 的情形。

我们在前几节中所作的构造使用了拟共形映射。众所周知，拟共形映射是双 Hölder 连续的（见 [Ahl06，第 30] 页或 [AIM09，定理 3.10.2]），但通常并非双 Lipschitz（很容易构造一个平面上的拟共形映射，使得在一个稠密集上 $\mathbb{C}$ 导数存在且为零）。此外，众所周知，拟共形映射会改变豪斯多夫维数（见 [Ast94、GV73、IM91、Smi10]）。在 [Ast94，推论 1.3] Astala 证明了：若 $f\colon \Omega \to f(\Omega)$ 是 K-拟共形映射，且 $E \subset \Omega$ 是紧集，那么

$$\mathcal{H}\dim(f(E)) \leq \frac{2K\mathcal{H}\dim(E)}{2 + (K-1)\mathcal{H}\dim(E)}.$$

若 $K \simeq 1$，则对于 $C < \infty$，$||\mu_f||_\infty \simeq 0$且 $K \leq (1 + C||\mu_f||_\infty)$。因此，

$$\frac{\mathcal{H}\dim(E)}{1 + C||\mu_f||_\infty} \leq \mathcal{H}\dim(f(E)) \leq (1 + C||\mu_f||_\infty)\mathcal{H}\dim(E). \tag{9.1}$$

由 (9.1) 可得。

引理 9.2。设 $E \subset \Omega$ 为紧集，且 $f\colon \Omega \to f(\Omega)$ 为 K-拟共形。若对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个邻域 $U_\varepsilon \supset E$ 包含于Ω中，使得$f_\varepsilon = f_{|U_\varepsilon}$ 的膨胀为 $||\mu_{f_\varepsilon}||_\infty \leq \varepsilon$，则 $\mathcal{H}\dim(E) = \mathcal{H}\dim(f(E))$。

在我们的情形中，我们在定理 6.3 中证明，对于给定的对数奇异圆周同胚 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 以及一个序列 $\{\varepsilon_n\}_n \in (0, \infty)$，若令 $K_n = \prod_{j=1}^{n}(1 + \varepsilon_j)$，则 $K = \lim_n K_n = \prod_n(1 + \varepsilon_n) < \infty$。存在序列$f_n\colon \mathbb{D} \to \Omega_n$和 $g_n\colon \mathbb{D}^* \to \Omega_n^*$，它们是 K_n-拟共形映射，其中 Ω_n，Ω_n^* 是闭包不交的若尔当域（且 $\infty \in \Omega_n^*$）。

映射序列 f_n，g_n 分别收敛到 K-拟共形映射- ping $f\colon \mathbb{D} \to \Omega_\infty$, $g\colon \mathbb{D}^* \to \Omega_\infty^*$，它们映 onto 若尔当曲线的补分支 Γ，使得 $h = g^{-1} \circ f$。如果我们定义环域

$$A_n = \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_n \cup \Omega_n^*},$$

那么 $\Gamma =$ 上极限$_n A_n$。

根据可测黎曼映射定理（定理 2.7），存在一个 K-拟共形映射 $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得 $H \circ f$ 和 $H \circ g$ 为共形映射（其中我们将 Γ 上的膨胀设为 0）。因此，若尔当曲线 $H(\Gamma)$ 的共形焊接为 $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$。我们的目标是结合 (9.1) 和引理 9.2，证明在某些条件下，当 $s \in (1,2)$ 时，曲线 Γ (模型柔性曲线) 与 $H(\Gamma)$（实际柔性曲线）具有相同的豪斯多夫维数。

为此，我们要利用命题 5.2（命题 4.3）和命题 5.3 的一个性质：它们还量化了归纳构造的每一步中我们添加膨胀的位置。下面回顾所需的记号。在定理 5.1 中，我们有四边形 Q_k^n （这里强调步骤 n ），以及一个共形映射

$$(\iota_k^n)^{-1}\colon Q_k^n \to [0, T_k^n] \times [0,1].$$

根据命题 4.3，只要存在 $M_n = M(\varepsilon_n)$ 使得 $2M_n \le T_k^n$，就存在 ε_n-可容许形状。在选定一个满足命题 4.3 中条件的形状后，映射 α_k^n 的膨胀包含于 $[0, M_n] \times [0,1]$ 中。同样，映射 β_k^n 的膨胀包含于 $i_k^n([0, M_n] \times [0,1])$ 中。

因此，按照定理 5.1 的证明中的论证（另见图 11），映射 ψ_n 在 A_n 内具有非零膨胀

$$\cup_k \iota_k^n([0, M_n] \times [0,1]).$$

注意，商 M_n/T_k^n 可以做到任意小。注意，$\psi_n(\mathbb{S}^1) \cap \partial A_n$ 由有限个点组成。使用命题 3.2 和定理 5.1 以及 g_n 时，还要考虑映射 ϕ_n^*, ψ_n^*。

对 $t < 1$ 使用引理 6.4 时，我们得到由下式给出的环域 $A_{n+1}(t)$

$$A_{n+1}(t) := \mathbb{C} \setminus \overline{((\psi_n \circ \phi_n)(t\mathbb{D}) \cup \psi_n^* \circ (\phi_n^*)(\mathbb{D}/t))}.$$

在 $A_{n+1}(t)$ 内，映射 f_{n+1}^{-1} 的膨胀支集包含于紧集

$$B_{n+1}(t) = \overline{A_{n+1}(t)} \cap \left(\overline{\Omega_n} \cup \bigcup_k \iota_k^n([0, M_n] \times [0,1]) \right).$$

我们对某个接近 1 的 t_{n+1} （使定理 6.3 中的条件成立）定义 $A_{n+1} = A_{n+1}(t_{n+1})$。我们还定义 $B_{n+1} = B_{n+1}(t_{n+1})$。由引理 9.2 可得：

推论 9.3。在与之前相同的条件下，若 $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是 K-拟共形映射，使得 $H \circ f$ 和 $H \circ g$ 是共形的，且 $(\mu_H)_{|\Gamma} = 0$ 几乎处处成立。那么，若 E 是满足以下条件的紧集

$$E \subset A_{n+1} \setminus B_{n+1}$$

对所有 n，我们有 $\mathcal{H}\dim(E) = \mathcal{H}\dim(H(E))$。

注 9.4。注意，随着 $t \to 1$、$B_{n+1}(t)$ 在豪斯多夫度量下收敛到有限条光滑曲线的并，存在一个序列 $\{t_n\}_n \subset (0, 1)$，使得集合 $B = \limsup_n B_n$ 的豪斯多夫维数为 1。

我们得出以下结论。

推论 9.5。在与前面相同的条件下，若存在 $E \subset \Gamma$ 紧集，使得 $E \subset A_{n+1} \setminus B_{n+1}$，$\mathcal{H}\dim(\Gamma \setminus E) = 1$ 且 $\mathcal{H}\dim(E) > 1$。那么，如果 $K = \lim_n K_n$ 足够接近1，我们有

$$\mathcal{H}\dim(\Gamma) = \mathcal{H}\dim(H(\Gamma)).$$

证明。 由推论 9.3可得 $\mathcal{H}\dim(E) = \mathcal{H}\dim(H(E))$。若我们取 K足够接近 1，使得

$$\frac{2K}{2+(K-1)} \leq K \leq \mathcal{H}\dim(E),$$

我们有，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\dim(H(\Gamma)) &= \max\{\mathcal{H}\dim(H(E)), \mathcal{H}\dim(H(\Gamma \setminus E))\} \\ &= \mathcal{H}\dim(H(E)) = \mathcal{H}\dim(E) = \mathcal{H}\dim(\Gamma). \qquad \square\end{aligned}$$

推论 9.5 的条件表明，定理 6.3 中的模型曲线与实际柔性曲线（即像之前那样与准共形映射 H 复合后的曲线）在 $s > 1$ 时具有相同的豪斯多夫维数。我们将看到，对于每个 $s \in (1, 2]$，都可以找到这样一条若尔当曲线。

我们将用来构造曲线的策略，概括如下，出自 [Mat95，第4节。12],我们将其简化为以下命题。

命题 9.6。设 $s \in (0, 2]$，并假设对于 $k \in \mathbb{N}$，我们有紧集 $E_{i_1,\ldots,i_k}$，其中 $i_j = 1, \ldots, m_j$，满足以下条件：若 $d(\cdot)$ 表示一个集合的直径，则：

(i) $E_{i_1,\ldots,i_k,i_{k+1}} \subset E_{i_1,\ldots,i_k}$。*(ii)* $d_k = \text{最大值}_{i_1\cdots i_k} d(E_{i_1,\ldots,i_k}) \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时。*(iii)* $\sum_{j=1}^{m_{k+1}} d(E_{i_1,\ldots,i_k,j})^s = d(E_{i_1,\ldots,i_k})^s$。*(iv)* 对于任意满足 $d(B) \geq d_k$ 的球 B，存在一个正数常数 $c > 0$，使得

$$\sum_{B \cap E_{i_1,\ldots,i_k}} d(E_{i_1,\ldots,i_k})^s \leq c d(B)^s.$$

那么，如果我们定义

$$E = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{i_1\cdots i_k} E_{i_1,\ldots,i_k},$$

我们有 $0 < H_s(E) < \infty$. 因此， E 的豪斯多夫维数为 s。

下面的引理 9.7 保证，在构造模型柔性曲线Γ时，我们可以实现命题 9.6 中的 (iii)。

引理 9.7 (寻找 s-可加正方形)。 设 $Q = [0, 1]^2$ 且 $s \in (1,2)$。对于$m \in \{1, 2, 3, 4\}$，固定具有不交闭包且边长为 $1/5$ 的正方形 $R^m \subset Q$，使得 $d(\partial Q, R^m) = 1/5$，并且对于 $i \neq j$, $d(R^i, R^j) \geq 1/5$。那么存在 $n = n(s) \in \mathbb{N}$, $x = x(s) \in (0,1)$ 以及闭正方形的子集合 $\{Q_j^m\}_{j=1}^n \subset Q$，其中 $m \in \{1, 2, 3, 4\}$，且具有不交内部，使得：

(i) 每个 $Q_j^m \subset R^m$ 都是边长为 x 的正方形。

（*ii*）我们有 $1 = 4n(\sqrt{2}x)^s$，也就是说，这些正方形 Q_j^m满足

$$1^s = \sum_{j,m} d(Q_j^m)^s = 4n2^{s/2}x^s.$$

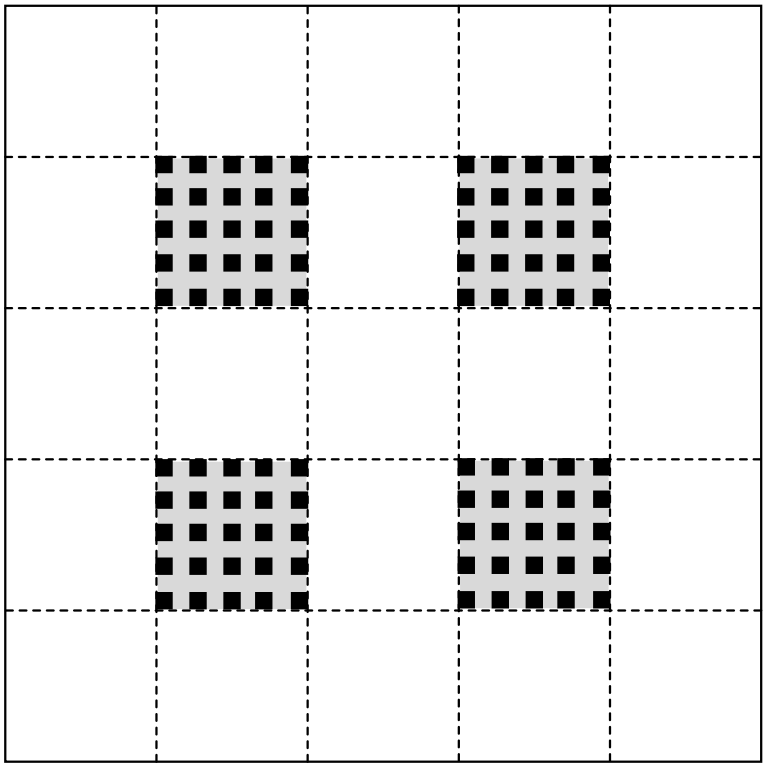

FIGURE 20. 找出 s-可加正方形（颜色较深的那些），使它们如引理 9.7 和引理 9.8 中那样彼此充分分离。

此外，我们可以选择这些正方形 $\{Q_j^m\}$，使其在每个R^m中均匀分布。也就是说，如果我们定义 $n = n(s)$ 与 R^m中正方形总数之间的比率 $P(s)$，

$$P(s) := \left(\frac{25}{4 \cdot 2^{s/2}}\right) x^{2-s},$$

那么，对于每个圆盘 $D(z,r)$，满足 $z \in R^m$ 和 $r > 0$，与 $D(z,r)$ 相交的正方形 Q_j^m 的数量与以下数值相当

$$P(s) \cdot \frac{r^2}{x^2}. \tag{9.2}$$

特　　别地，Q_j^m 到其最近邻的距离与 $x^{s/2}$ 相当。

证明。假设选取 $n \in \mathbb{N}$, $x \in (0,1)$，使得 $1 = 4n2^{s/2}x^s$。要满足条件 (i)，我们需要

$$nx^2 = \frac{x^{2-s}}{4 \cdot 2^{s/2}} \leq 1/25.$$

由于 $s \in (1,2)$，因此存在一个 x 区间使得这一结论成立（代价是需要使 n 足够大）。因此，存在一对 $n = n(s) \in \mathbb{N}$ 和$x = x(s) \in (0,1)$，使得 (ii) 成立。

为证明最后一部分，我们选择 Q_j^m，使其在 R^m 内均匀分布（见图 20），如引理陈述中所定义。若 $d = d(s)$ 是

Q_j^m 到其最近邻的距离，那么

$$\frac{9x^2}{(3x+2d)^2} \simeq \left(\frac{25}{4\cdot 2^{s/2}}\right) x^{2-s}.$$

因此， $x^s \simeq (3x+2d)^2$。这意味着 $d \simeq x^{s/2}$. □

请注意，如果我们不取 $[0,1]^2$ ，而是取任意一个正方形 Q，那么就存在一个仿射变换 L ，将 $[0,1]^2$ 映射到 Q。在这样的仿射变换下，引理 9.7 中的值 $x = x(s)$ 会按照 L进行缩放，但数值$n = n(s)$ 不变。特别地，引理 9.7 中经过仿射变换 L 得到的正方形会被映射为满足类似结论的正方形，其中条件 (ii) 得以保留。

正如我们之前提到的，引理 9.7 将保证满足命题 9.6 中的条件 (iii)。现在的目标是看看，采用引理 9.7 中的正方形时，命题 9.6 中的条件 (iv) 是否也成立。图 20 展示了相关示意。

引理 9.8 (s加性的大间距正方形)。 设 $Q = [0,1]^2$ ，并令正方形 R^m 和 Q_j^m 如引理 *9.7* 中所述。那么，对于任意半径为 $r \geq x(s)$ 的圆盘 D ，其中 $x(s) = x$ 是每个 Q_j^m 的边长，我们有

$$\sum_{D\cap Q_j^m \neq \emptyset} d(Q_j^m)^s \lesssim d(D)^s \simeq r^s.$$

证明。 首先假设 $x \leq r \leq 1/5$ 。给定一个半径为 r 、包含在 Q 中的圆盘，当 $D \cap R^m \neq \emptyset$ 时，引理中的不等式取到极值。在这种情况下，对于 $\tilde{m} \neq m$，我们有 $D \cap R^{\tilde{m}} = \emptyset$。由于按引理 9.7 中的定义，正方形 Q_j^m的密度 $P(s)$ 与 x^{2-s}相当，因此上述半径为 r的圆盘至多与 $x^{2-s}r^2/x^2 = r^2/x^s$ 个正方形相交。利用 $d(Q_j^m) \simeq x$，我们得到

$$\sum_{D\cap Q_j^m \neq \emptyset} d(Q_j^m)^s \lesssim x^s r^2/x^s = r^2 \leq r^s.$$

这一条件也可由已知 Q_j^m 到其最近邻的距离与 $x^{s/2}$ 相当推出。这是因为，如果一个边长为 r 的正方形中有 m^2 个正方形，那么 $r \simeq mx + mx^{s/2} \simeq mx^{s/2}$.

对于 $r \geq 1/5$，极端情况是所有 Q_j^m 都包含在 D 中，但在这种情况下，

$$\sum_{D\cap Q_j^m \neq \emptyset} d(Q_j^m)^s = 1 \lesssim r^s.$$

引理的证明至此完成。 □

现在证明，引理 9.7 和引理 9.8 中找到的 s-可加正方形，可以置于由 $[0,1]^2$ 划分的区域内，该划分由光滑曲线构成，并包含在形状补集的并集中（如第4节所述），从而满足推论 9.5 中的条件。图21对此作了说明。

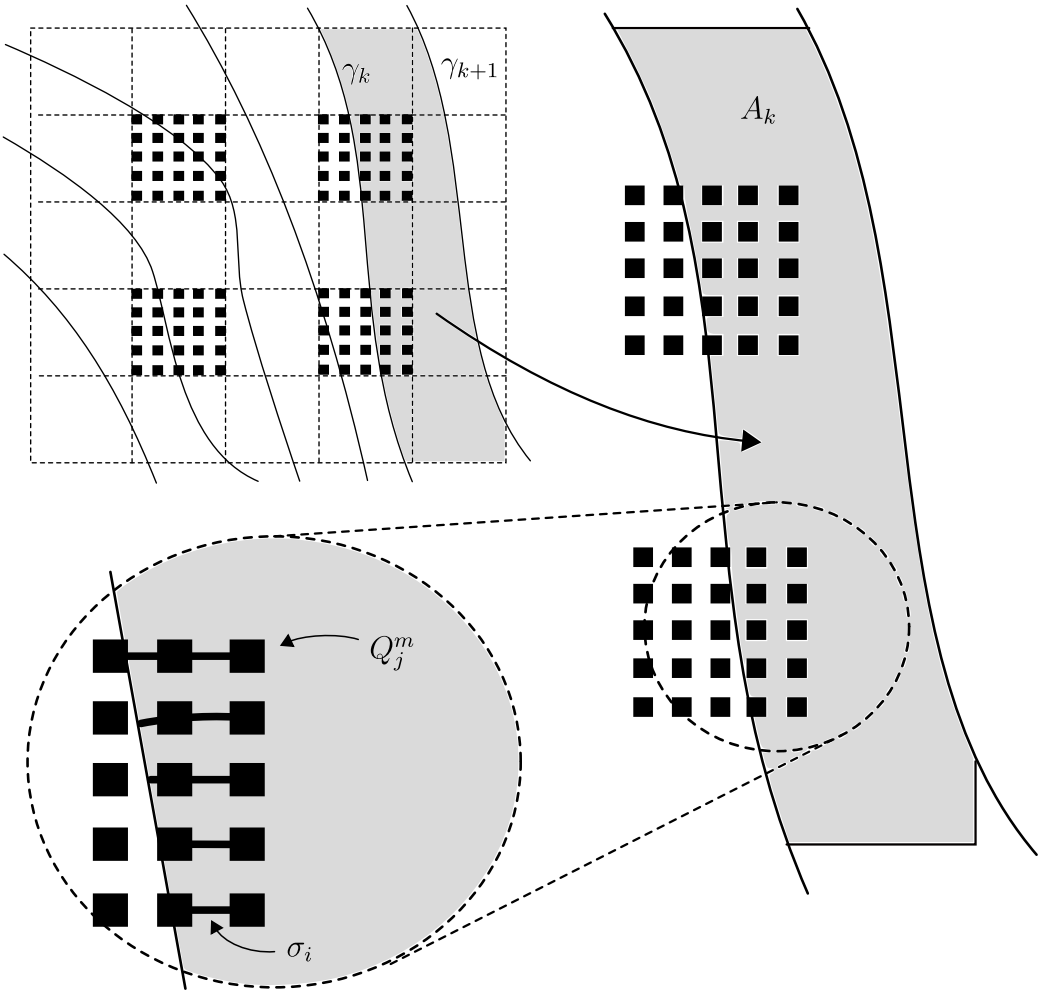

FIGURE 21. 在命题 9.9 中，我们按照第4节的方法，将引理 9.8 中两两分离的 s−可加正方形 Q_j^m实现为某个形状的补集的一部分。这些正方形 Q_j^m由细长的四边形 σ_i连接

命题 9.9 (连接 s-可加且彼此充分分离的正方形)。 设 $s \in (1,2)$,$\delta > 0$, $Q = [0,1]^2$，且有一组有限的 N 光滑简单不相交曲线 $\{\gamma_k\}$，其端点位于 ∂Q 上，并满足：

~*(a)* 对任意 k, k， γ_k 与 $\gamma_{\tilde{k}}$ 同痕。*(b)* 每个 γ_k 都与 Q 的内部相交，且不会两次与 Q的同一条边相交。*(c)* 这些 $\{\gamma_k\}$ 是有序的，也就是说，对于 $0 \le k < N$，存在唯一一个 $Q \setminus \{\gamma_k, \gamma_{k+1}\}$ 的连通分支A_k，其中不包含任何其他 γ_j。*(d)* A_k 是一个四边形。

接着，考虑引理 *9.7* 中的正方形 $Q_j^m \subset R^m$，其边长为 $x = x(s)$。那么，当 x 足够小时，存在一个有限的四边形集合 $\{\sigma_i\}$，满足：

(i) $\sigma_i \subset \overline{A_k}$ 并且它与 σ_i的一条边上的至少一个 Q_j^m相交。

(ii) 每个 σ_i 至多与两个不同的 $Q_j^m \subset A_k$相交。

(iii) 该集合，

$$\left(\bigcup_{Q_j^m \cap A_k \neq \emptyset} Q_j^m \right) \cup \bigcup_{\sigma_i \cap A_k \neq \emptyset} \sigma_i$$

相对于四边形 A_k围成一个形状，如第*4*节所述。

(iv) 存在一个覆盖 $\{D_j\}$，其中每个 D_j 都是半径为 r_j的圆盘，覆盖 $\cup\sigma_i$ ，使得，

$$\sum_j r_j^s \leq \delta.$$

此外，给定 $\varepsilon > 0$ ，*(iii)* 中的形状可以取为 ε-可容许的，只要d（γ_k，γ_{k+1}）足够小。

证明。 取自引理 9.7 的 $x = x(s)$足够小，使得没有 Q_j^m与两个不同的 γ_k相交。现在，给定 A_k 以及正方形集合 Q_j^m，使其内部与 A_k相交，通过考虑有限条光滑互不相交的简单曲线 β_i 将它们连接起来，使得，

(a) β_i 至少与一个 Q_j^m相交，且远离 Q_j^m的角。(b) 每个 β_i 只与 A_k的一条边相交。(c) 任意两个不同的 β_i，β_l 不会与同一个 Q_j^m相交。(d) $d(\beta_i, \partial Q) \geq 1/5$。

这些曲线如图21所示。

我们可以用有限个开圆盘 $\{D_j\}$覆盖 β_i 的并集，令 D_j 的半径为 r_j，从而若 s，δ 如引理陈述中所述，则有：

$$\sum_j r_j^s \leq \delta.$$

由于圆盘 D_j 是开集，存在曲线的加厚 σ_i ，满足条件(i)、(ii)、(iii)和(iv)。

最后，每个 A_k 都可以共形地映射到一个矩形，并且集合

$$A_k \cap \{z \in Q \colon d(z, \partial Q) \leq 1/4\} \subset A_k$$

围成一个四边形 B_k。由于 R^m 满足 $d(R^m, \partial Q) = 1/5$，因此随着$d(\gamma_k, \gamma_{k+1})$减小，四边形 B_k 的模数会退化。因此，根据命题 4.3，当 $d(\gamma_k, \gamma_{k+1})$足够小时，$A_k$ 中任何包含B_k 的形状都是 ε-可容许的。□

现在我们可以证明 $s \in (1, 2)$ 的定理 9.1。

定理 *9.1* 的证明。 $s = 2$ 的情形即为定理 7.4，$s = 1$ 的情形即为定理 8.1，因此我们假设 $s \in (1, 2)$。

我们需要证明，在定理 6.3 的证明中，环域序列 A_n 可以选取得使若尔当曲线 $\Gamma = \limsup A_n$的豪斯多夫维数为 s ，并满足推论 9.5 的条件。

为此，从 $A_0 = \{1 < |z| < 4\}$ 开始，并考虑定理 5.1 中的四边形 Q_k。取一个边长为 1 且包含在 Q_k并集中的正方形。考虑将 $\tilde{Q}_0$ 映射到 $Q = [0, 1]^2$的 $\mathbb{C}$ 共形映射。我们

对 s 和 $\delta = 1/2^0$应用命题 9.9。如果四边形 Q_k 足够薄，那么根据命题 9.9，我们可以得到 ε_1-可容许形状，并且在剩余的 Q_k上存在ε_1-可容许形状。这就生成了命题 9.6 中集合 E_i 的首次迭代~。

我们对剩余部分中的形状作如下选取：使得任意两个相邻的 Q_k中，形状的补集都可以用半径为r_j 的开圆盘覆盖，并且这些开圆盘满足 Q_k

$$\sum r_j^s \leq (1/2^0)/(N+2),$$

其中， N 是形状尚未按命题 9.9 加入的 Q_k总数。这定义了一个集合 A_1，使得 $A_1 \setminus \cup_i E_i$ 可以由有限个半径为 r_j 的圆盘 D_j 覆盖，并满足

$$\sum r_j^s \leq (1/2^0)(N+1)/(N+2).$$

与定理 6.3 的证明一样，现在我们需要用到引理 6.4。这样做时，尺度会发生变化，但如果引理 6.4 中的 t 足够小，我们就可以保证，对于固定的 $a_1 > 1$ ，能得到一个环域 A_1 和包含于~$A_1 \cap Q_0$ 中的集合 $E_i \supset E_i$ ，使得

$$\sum d(E_i)^s = a_1 d(\tilde{Q}_0)^s,$$

其中， $A_1 \setminus \cup_i E_i$ 可以由有限个半径为 r_j的圆盘 D_j 覆盖，并满足

$$\sum_j r_j^s \leq 1/2^0,$$

因此，对于命题 9.6 中任意满足 D 且具有 $d(D) \geq d_k$ 的圆盘，我们有，

$$\sum_{D \cap E_i \neq \emptyset} d(E_i)^s \lesssim a_1 d(D)^s.$$

假设在第 n 步，我们得到一个环域序列 $\{A_k\}_{k \leq n}$ 和集合 $E_{i_1,\ldots,i_n}$ ，使得对于 $k < n$ ，我们有

$$\sum_j d(E_{i_1,\ldots,i_k,j})^s = d(E_{i_1,\ldots,i_k})^s \prod_{j=1}^{k} a_j \tag{9.3}$$

其中 $a_j > 1$。对于 $k \leq n$，集合 $A_k \setminus (\cup E_{i_1,\ldots,i_k})$ 可以用有限个半径为 r_j 的圆盘 D_j 覆盖，并满足

$$\sum (r_j)^{1+(s-1)/k} \leq 2^{-k}, \tag{9.4}$$

并且，对于命题 9.6 中任意半径为 d、满足 D $(D) \geq d_k$ 的圆盘，我们有

$$\sum_{D \cap E_{i_1,\ldots,i_k} \neq \emptyset} d(E_{i_1,\ldots,i_k})^s \lesssim \left(\prod_{j=1}^{k} a_j \right) d(D)^s. \tag{9.5}$$

现在对集合 $E_{i_1,\ldots,i_n}$中的每一个，使用命题 9.9 和 s 及 $\delta = 1/2^{n+1}$ 。像之前一样，对某个 $a_n > 1$应用引理 6.4，会生成一个环域 $A_{n+1} \subset A_n$ 以及集合 $E_{i_1,\cdots,i_{n+1}}$ ，它们满足方程 (9.3)、(9.4) 和 (9.5)。

如果我们选取序列 $\{a_n\}$，使得 $\prod a_n \leq 2$，那么由命题 9.6 证明中的一个小修改可知，集合

$$E = \bigcap_k \bigcup_{i_1,\ldots,i_k} E_{i_1,\ldots,i_k}$$

的豪斯多夫维数为 s。此外，(9.4) 保证，如果 $\Gamma = \cap A_n$，那么

$$H_{\tilde{s}}(\Gamma \setminus E) = 0$$

对所有 $\tilde{s} \in (1, s)$都成立。因此， $\Gamma \setminus E$ 的豪斯多夫维数为 1，而 Γ 的豪斯多夫维数为 s。

如果在构造集合 E 时，我们还保证 $A_{n+1} \setminus B_{n+1}$，那么推论 9.5 对应的柔性曲线的豪斯多夫维数也为 s。□

备注 9.10。值得一提的是，证明 Γ 和 $H(\Gamma)$ 的豪斯多夫维数相等的另一种方法，是证明 H 在 Γ上是双 Lipschitz 的。然而，刻画哪些贝尔特拉米系数对应双 Lipschitz 映射仍然是一个未解决的问题。已知在某些条件下，对应的拟共形映射在我们区域的一个子集上是双 Lipschitz 的。例如，参见 [AB20，引理 15。1]。

注记 9.11. 对本节论证作适当修改，也可得到：给定一个对数奇异圆周同胚 h，存在一条焊接为 h 的柔性曲线 γ，其豪斯多夫维数为 2，但面积为零。

References

[AB20] Simon Albrecht 和 Christopher J. Bishop，《维数接近一的 Speiser 类 Julia 集》，《数学分析杂志》141 (2020)，第 1 期，49–98。MR 4174037[Ahl06] Lars V. Ahlfors，《拟共形映射讲义》，第二版，大学讲义丛书，第 38 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2006；附有 C. J. Earle、I. Kra、M. Shishikura 和 J. H. Hubbard 撰写的补充章节。MR 2241787[Ahl21] Lars Ahlfors，《复分析——单复变解析函数理论导论》，第三版，AMS Chelsea 出版社，普罗维登斯，罗得岛， [2021]©2021，1978 年原版重印 [0510197]。MR 4506522[AHS23] Morris Ang、Nina Holden 和 Xin Sun，《通过量子圆盘的共形焊接构造 SLE 环》，《电子概率杂志》28 (2023)，无期号，1–20。[AIM09] Kari Astala、Tadeusz Iwaniec 和 Gaven Martin，《平面椭圆型偏微分方程与拟共形映射》，普林斯顿数学丛书，第 48 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009。MR 2472875[AJKS11] Kari Astala、Peter Jones、Antti Kupiainen 和 Eero Saksman，《随机共形焊接》，《数学学报》207 (2011)，第 2 期，203–254。MR 2892610[Ast94] Kari Astala，《拟共形映射的面积畸变》，《数学学报》173 (1994)，第 1 期，37–60。MR 1294669[BB99] Zoltan Balogh 和 Mario Bonk，《单位圆盘共形映射下半径的长度》，《美国数学会会刊》127 (1999)，第 3 期，801–804。MR 1469396[Beu40] Arne Beurling，《例外集》，《数学学报》72 (1940)，1–13。MR 1370[Bis94] Christopher J. Bishop，《球面上一些在曲线之外共形的同胚》，《芬兰科学院学报 A 辑 I：数学》19 (1994)，第 2 期，323–338。MR 1274085[Bis06] ，共形映射的边界插值集，《伦敦数学会通报》38 (2006)，第 4 期，607–616。MR 2250753

[Bis07] ———, 共形焊接与科比定理, 《数学年刊》（第 2 辑）166 (2007), 第 3 期, 613–656。MR 2373370[Bis20] ,共形可去性问题棘手, 预印本（2020）。[BP17] Christopher J. Bishop 和 Yuval Peres, 《概率与分析中的分形》, 剑桥高等数学研究丛书, 第 162 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2017。MR 3616046[Bur20] Jack Burkart, 《一条无法被可求长弧穿越的若尔当曲线, 且这些弧的集合长度为零》。[Car67] Lennart Carleson, 《例外集精选问题》, 范诺斯特兰德数学研究丛书, 第 13 号, D. Van Nostrand Co., Inc., 普林斯顿, 新泽西州—多伦多, 安大略省—伦敦, 1967。MR 225986[DS11] Bertrand Duplantier 和 Scott Sheffield, 《刘维尔量子引力与 KPZ》, 《数学发明》185 (2011), 第 2 期, 333–393。MR 2819163[FS25] Shuo Fan 和 Jinwoo Sung, 《SLE 焊接测度的准不变性》。[GM08] John B. Garnett 和 Donald E. Marshall, 《调和测度》, 新数学专著丛书, 第 2 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2008；2005 年原版重印。MR 2450237[GV73] F. W. Gehring 和 J. V¨ais¨al¨a, 《豪斯多夫维数与拟共形映射》, 《伦敦数学会杂志》（第 2 辑）6 (1973), 504–512。MR 324028[Ham02] D. H. Hamilton, 《共形焊接》, 《复分析手册: 几何函数论》, 第 1 卷, 北荷兰出版社, 阿姆斯特丹, 2002, 第 137–146 页。MR 1966191[HK95] Juha Heinonen 和 Pekka Koskela, 《拟共形性的定义》, 《数学发明》120 (1995), 第 1 期, 61–79。MR 1323982[IM91] Tadeusz Iwaniec 和 Gaven Martin, 《拟共形映射与容量》, 《印第安纳大学数学杂志》40 (1991), 第 1 期, 101–122。MR 1101223[KW96] Robert Kaufman 和 Jang-Mei Wu, 《拟共形映射的可去集》, 《阿克塔数学》34 (1996), 第 1 期, 141–158。MR 1396628[Leh70] Olli Lehto, 《具有给定膨胀的同胚》, 《第十五届斯堪的纳维亚数学大会论文集》（奥斯陆, 1968）, 《数学讲义》, 第 118 卷, 施普林格出版社, 柏林—纽约, 1970, 第 58–73 页。MR 260997[Leh87] , 《单叶函数与 Teichmüller 空间》, 《数学研究生教材》, 第 109 卷, 施普林格出版社, 纽约, 1987。MR 867407[LV60] Olli Lehto 和 K. I. Virtanen, 《关于具有指定复伸缩率的拟共形映射的存在性》, 《芬兰科学院学报 A 辑 I: 数学》274 (1960), 24。MR 125962[LV73] O. Lehto 和 K. I. Virtanen, 《平面拟共形映射》, 第二版, 《数学科学基础丛书》, 第 126 卷, 施普林格出版社, 纽约—海德堡, 1973; K. W. Lucas 从德文译出。MR 344463[Mat95] Pertti Mattila, 《欧几里得空间中集合与测度的几何》, 剑桥高等数学研究丛书, 第 44 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1995, 分形与可求长性。MR 1333890[McM26] Curtis T. McMullen, 《问号函数、焊接与复动力系统》, 《数学发明》（2026）。[Nta24a] Dimitrios Ntalampekos, 《CNED集: 对极值距离可数可忽略的集合》, 《精选数学》（新系列）30 (2024), 第 4 期, 论文编号 61, 57 页。MR 4764611[Nta24b] , 《拟共形性的度量定义与例外集》, 《数学年刊》389 (2024), 第 3 期, 3231–3253。MR 4753085[Oik61] Kˆotaro Oikawa, 《多边形的焊接与黎曼曲面的类型》, 《古代数学研讨会报告》13 (1961), 37–52。MR 125956[Pfl60] Albert Pfluger, 《通过焊接构造黎曼曲面》, 《印度数学会杂志》（新系列）24 (1960), 401–412。MR 132827[Pom92] Ch. Pommerenke, 《共形映射的边界行为》, 《数学科学基础丛书》 [《数学科学基础原理》], 第 299 卷, 施普林格出版社, 柏林, 1992。MR 1217706

[PW12] 查尔斯·皮尤和吴科南，若尔当曲线与漏斗截面，《微分方程杂志》**253** (2012)，第1期，225–243。MR 2917407[Rod25] Alex Rodriguez，每个圆周同胚都是两个焊接的复合。[She16] Scott Sheffield，随机曲面的共形焊接：随机*Loewner*演化与量子引力拉链，《概率年刊》**44** (2016)，第5期，3474–3545。MR 3551203[SM06] E. Sharon 和 D. Mumford，使用共形映射进行二维形状分析，《国际计算机视觉杂志》**70** (2006)，第1期，55–75。[Smi10] 斯坦尼斯拉夫·斯米尔诺夫，拟圆的维数，《数学学报》**205** (2010)，第1期，189–197。MR 2736155[Tol03] 哈维尔·托尔萨，*Painlev´*<style id='34}问题与解析容量的半可加性，《数学学报》**190** (2003)，第1期，105–149。MR 1982794[You15] Malik Younsi，全纯函数的可去集，《EMS数学科学综述》**2**(2015)，第2期，219–254。MR 3429163[You18] , 可去性与共形焊接的非单射性，《芬兰科学院数学年刊》**43** (2018)，第1期，463–473。MR 3753187

Department of Mathematics, Stony Brook University, New York, SA., https://orcid.org/0000-0001-9097-4025电子邮箱：
alex.rodriguez@stonybrook.edu