arXiv:2601.14136v1 [math.AG] 20 Jan 2026

交换半环的概形理论

ROBERTOGUALDI、ARNEKUHRS、MAYO MAYOGARCIA 和 XAVIER XARLES

Abstract. 在这篇综述中，我们介绍了为交换半环构造仿射概形的两种不同方法：一种基于素理想，另一种基于素核（也称为减性理想）。随后，我们说明这两种方法如何通过泛赋值理论联系起来。

Contents

引言 1
1. 半环及其理想 2 2. 谱构造 11 3. Spec 的结构层 17 4. Sp 的结构层 28
5. 泛赋值 32 参考文献 38

Introduction

本篇的主要想法是探讨与交换半环相关联的仿射概形可能的定义，这与代数几何中通常的函子性构造相类似，参见例如 [Har77] or[Sta18]。在实际应用中，我们希望将半环 A 关联到一个半环化空间 $(X,\ \mathcal{O}_X)$，并将其视为该半环的几何实现。

然而，与环的情形不同，这一构造存在若干困难。事实上，仅在底层拓扑空间 X这一层面上，就需要作出选择：可以将其定义为 A 的所有素理想构成的集合，也可以改为只取其核的集合（见定义 1.14）。由此得到的拓扑空间分别记为 $\operatorname{Spec} A$ 和 $\operatorname{Sp} A$，二者可能有很大差异；例如，见例 2.2 和例 2.6，以及相关的注记 2.11。

为 X作出选择之后，如何在其上定义半环层$\mathcal{O}_X$ 也并非易事。事实上，对于 $X = \operatorname{Spec} A$，这一构造能够如预期般奏效，而且其局部截面在拓扑的一个基上很容易计算；但对于 $X = \operatorname{Sp} A$，则会出现一些新的障碍。

值得注意的是，使用所有素理想的方法所得到的仿射半概形范畴，与交换半环的对偶范畴等价（命题 3.22）。另一方面，我们不知道仅使用核所得到的仿射概形范畴是否等价于

交换半环的某个有意义的子范畴。我们认为，这可能是第 4.2 节研究的所谓全局半环范畴。

本文的组织结构如下。第 1 节回顾半环及其理想的一些基本定义和性质。第 2 节研究与半环 A 相关联的拓扑空间 X 的两种构造方式。

接着，我们转向结构层的定义。第 3 节给出 $X = \operatorname{Spec} A$ 上 $\mathcal{O}_X$ 的三种不同定义，并证明它们彼此等价。第 4 节研究 $X = \operatorname{Sp} A$ 上的类似问题。

最后，第 5 节研究 G-赋值；它将通常的赋值高度推广到半环的语境，并揭示两种概形理论之间出人意料的联系。

致谢。 本文是第四作者在 2025 年 7 月于巴塞罗那自治大学举办的半环上的几何 会议上所授迷你课程的文字整理与扩充。我们感谢会议组织者 Marc Masdeu 和 Joaquim Ro´e，他们营造了友好且富有启发性的氛围，促进了工作与交流。

最后一位作者还感谢各位参与者提出的诸多评论和建议，特别感谢 Oliver Lorscheid 提供的一些参考文献，并感谢 Stefano Mereta 指出了论文 [BG23] and，并回答了一些问题。

Roberto Gualdi 获得了 MICINN 研究项目 PID2023-147642NB-I00 和 AGAUR 研究项目 2021-SGR-00603 的部分资助。

Arne Kuhrs 获得了德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）项目 TRR 358几何与表示论中的积分结构（项目编号 491392403）的资助，也获得了德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）个人资助项目从黎曼曲面到热带曲线（再回到黎曼曲面）（项目编号 456557832）的资助，以及 DFG 个人资助项目重新思考热带线性代数：建筑、双拟阵及其应用（项目编号 539867663）的资助；该项目属于 SPP 2458组合协同效应。

Mayo Mayo Garc´ıa 获得华威大学数学研究所博士生培训中心的资助，并谨此感谢华威大学提供的资金支持。

Xavier Xarles 获得西班牙国家研究署 MICIU/ AEI / 10.13039/501100011033 的部分资助（项目 PID2020-116542GB-I00 和 PID2024-159095NB-I00）。

1. Semirings and their ideals

本节回顾本文所涉及对象的基础知识。具体而言，我们重新介绍半环及其理想的定义。随后，我们聚焦于半环中的一类特殊理想，即核，并讨论其特点。最后，我们比较半环中可逆性与半可逆性的性质，并引入硬性的概念。关于半环与半模理论的更多细节，参见 [Gol99]。

1.1. 半环与局部化。 半环就是不要求存在加法逆元的环，具体定义如下。

定义 1.1。 A （交换）半环 是一个集合 A ，带有两个二元运算 $+$ 和 $\cdot$，使得 $(A,+)$ 和 $(A,\cdot)$ 都是交换幺半群，单位元分别为 0_A 和 1_A ），并满足乘法对加法的分配律，以及对所有 $a \in A$均有性质 $a\cdot 0_A = 0_A$。

若对所有 $a \in A$均有 $a + a = a$ ，则称半环 A 为幂等 半环。

注意，根据分配律，半环是幂等的当且仅当 $1_A + 1_A = 1_A$。此外，若 A 是幂等半环，则它自然带有一个偏序：当 $a + b = b$ 时定义 $a \preceq b$。

例 1.2。 数学不同领域中的许多代数结构实际上都是半环。例如：

(1) 每个含幺交换环都是半环。当且仅当它是零环时，它才是幂等的。
(2) 自然数集 $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ 配备通常的加法和乘法后构成一个半环；它不是幂等的。(3) 逻辑三元组 $\mathbb{B} = (\{0,1\}、\vee、\wedge)$，或者更一般地，任何布尔代数，例如参见 [DP02，第 4 节。26] 其中给出了精确定义，都是幂等半环。(4)热带半环

$$\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +).$$

是一个幂等半环，这正是撰写这些笔记的主要动机，也是当前代数几何发展趋势的核心。关于热带几何的不同研究方法，另请读者参阅 [BLMV26] 和 [GKMV26] 。

(5) 若 A 是一个半环，则 $A[x_1, \ldots, x_n]$ 上系数取自 A 、以 n 个变量构成的多项式集合自然带有半环结构。当且仅当A 是幂等半环时，多项式半环 $A[x_1, \ldots, x_n]$ 才是幂等半环。

环论中的基本概念可以自然地推广到半环的情形。例如，模理论本质上是相同的（除了关于对子模取商的一些结果；例如参见第 1.3 节中关于半环的子模的讨论）。

给定两个半环 A 和 B，一个同态 $f\colon A \to B$ 是一个保持加法和乘法的映射，并且满足 $f(0_A) = 0_B$ 和 $f(1_A) = 1_B$。半环之间的同构 是既为单射又为满射的半环同态。然而，这并不等价于该态射是满射且其核等于 0 （例如，考虑 $f\colon (\{0, 0.5, 1\}, \max, \min) \to (\{0,1\}, \max, \min)$，其中 $f(0) = 0$ 且$f(1) = f(0.5) = 1$）。

此外，如果半环 A 中的元素 a 存在乘法逆元，则称其为 可逆 元。如果该元素存在，则它是唯一的，记为 a^{-1}。所有非零元素均可逆的半环称为半域。注意，可逆元的子集 $A^\times$ 是 A 的一个乘法子群。

例 1.3。 布尔域 $\mathbb{B}$ 以及更有趣的是例 1.2 中的热带半环 $\mathbb{T}$ 都是幂等半域。

半环的局部化过程是定义良好的。若 A 是一个半环，且 $S \subseteq A$ 是一个乘法子幺半群，则定义

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \;\middle|\; a \in A, s \in S \right\},$$

当且仅当存在$u \in S$ 使得 $a_1 s_2 u = a_2 s_1 u$时，两个分数 a_1/s_1 和 a_2/s_2 被视为相同。与环的情形类似， $S^{-1}A$继承了 A 的半环结构，并带有一个自然同态 $\varphi_S\colon A \to S^{-1}A$ ，满足通常的泛性质。

最后，如果乘法子幺半群 $S \subseteq A$ 满足：对于 A 中任意满足 $ab \in S$的 a， b ，都有 $a \in S$ 和 $b \in S$，则称其为饱和的。对于任意乘法子幺半群 $S \subseteq A$，我们称

$$S^{\mathrm{sat}} = \{b \in A \mid \exists c \in A \text{ such that } bc \in S\}$$

S的饱和。其名称由下面这个初等引理说明是合理的。

引理 1.4。 设 $S \subseteq A$ 是一个乘法子幺半群。那么 S^{sat} 是包含 S的 A 的最小饱和乘法子幺半群。此外，

$$S^{\mathrm{sat}} = \{b \in A \mid \varphi_S(b) \in (S^{-1}A)^\times\}$$

由关于在 S^{sat} 处局部化的泛性质得到的自然态射 $(S^{\mathrm{sat}})^{-1}A \to S^{-1}A$ 是一个同构。

证明。 我们首先证明 S^{sat} 是 A的一个乘法子幺半群。由于$1_A \in S$，我们有 $1_A \in S^{\mathrm{sat}}$。此外，若 b_1， $b_2 \in S^{\mathrm{sat}}$，取 c_1， $c_2 \in A$ 使得 $b_1 c_1$， $b_2 c_2 \in S$。那么 $(b_1 b_2)(c_1 c_2) = (b_1 c_1)(b_2 c_2) \in S$。

此外， S^{sat} 是饱和的。事实上，假设 $ab \in S^{\mathrm{sat}}$。那么存在$c \in A$ 使得 $(ab)c \in S$。若令 $c' = bc$，则 $ac' \in S$，因此 $a \in S^{\mathrm{sat}}$。类似地， $b \in S^{\mathrm{sat}}$。

为说明其极小性，设 $T \subseteq A$ 是任意一个包含 S 的饱和乘法子幺半群。设 $b \in S^{\mathrm{sat}}$，则存在 $c \in A$ 使得 $bc \in S \subseteq T$。由于 T 是饱和的，因此可推出 $b \in T$。于是 $S^{\mathrm{sat}} \subseteq T$。

现在，如果 $b \in S^{\mathrm{sat}}$，则存在 $c \in A$ 使得对于某个 $s \in S$ 有 $bc = s$ ，因此

$$\varphi_S(b)\varphi_S(c) = \frac{bc}{1_A} = \frac{s}{1_A}$$

它在 $S^{-1}A$ 中是可逆的。因此 $\varphi_S(b) \in (S^{-1}A)^\times$。反过来，设 $b \in A$ ，其中 $\varphi_S(b) \in (S^{-1}A)^\times$。于是存在 $a/s \in S^{-1}A$ 使得

$$\frac{1_A}{1_A} = \varphi_S(b)\frac{a}{s} = \frac{ba}{s}.$$

根据定义，存在一个 $u \in S$ 使得 $u(ba) = us$。由于 $b(ua) = us \in S$，我们看到 $b \in S^{\mathrm{sat}}$。

最后，由局部化的泛性质给出的自然态射 $(S^{\mathrm{sat}})^{-1}A \to S^{-1}A$ ，将每个元素 a/b 映射为

$$\varphi_S(a)\varphi_S(b)^{-1} = \frac{ac}{bc},$$

其中， c 是 A 中的任意元素，满足 $bc \in S$。立即可验证，由 $a/s \mapsto a/s$ 定义的 $S^{-1}A \to (S^{\mathrm{sat}})^{-1}A$ 是一个逆态射。□

1.2. **理想与素理想**。 设 A 表示一个半环。与环的情形一样，如何定义 A上的半模是显而易见的。

定义 1.5. 设 A 是一个半环。一个 A-半模 是一个交换幺半群 $(M,+,0_M)$，并配有标量乘法

$$A \times M \longrightarrow M, \qquad (a,m) \longmapsto a \cdot m,$$

使得对所有 $a,b \in A$和 $m,n \in M$,

$$\begin{aligned} &a \cdot (m+n) = a \cdot m + a \cdot n, \\ &(a+b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m, \\ &(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m), \\ &1_A \cdot m = m, \qquad 0_A \cdot m = 0_M, \qquad a \cdot 0_M = 0_M. \end{aligned}$$

-半模之间的态射 $f\colon M \to N$ 是底层加法幺半群之间的态射 $f\colon M \to N$，满足 $f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$，对所有 $a \in A$,$m \in M$均成立。

定义 1.6. 一个 A-子半模 是 A-半模 M 的一个子集$N \subseteq M$，它包含 0_M，并且对加法以及由 A定义的标量乘法封闭。

其中一个特别的实例将是我们讨论的核心。

定义 1.7. I 的理想 是 A 的一个 A-子半模 A。更明确地说， I是 A的一个子集，包含 0_A并满足 $I+I \subseteq I$和 $A \cdot I \subseteq I$。

若 I 是 A 的一个素 理想，则称其为素 理想，当且仅当 $I \neq A$，并且对于满足 $ab \in I$的 $a,b \in A$，有 $a \in I$或 $b \in I$。等价地， I是素理想，当且仅当$A \setminus I$是一个非空（饱和）乘法子幺半群。

显然，当半环 A实际上是一个环时，这些概念与通常的概念一致。相反，在一般情况下，我们会遇到一些令代数几何学家更为惊讶的例子。

例 1.8. 设 $\mathbb{N}$ 为自然数半环，并考虑

$$I = \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{0,2,3,\ldots\}.$$

集合 I 对加法封闭，包含 0，并且 I 的任意自然数倍仍属于 I。此外，任何不等于 1 的自然数都至少有一个非平凡因子。由以上观察可知， I 是半环 $\mathbb{N}$ 的一个素理想。

给定有限个元素 a_1，...， $a_r \in A$，集合

$$\langle a_1,\ldots,a_r\rangle = a_1A + \ldots + a_rA = \{a_1b_1 + \ldots + a_rb_r \mid b_1,\ldots,b_r \in A\}$$

是 A 中的一个理想，称为由 a_1，...， a_r 生成的理想。它是包含 a_1，...， a_r 的 A 中最小的理想。

注 1.9。 元素 $a \in A$ 可逆，当且仅当 $aA = A$。事实上，若 a 可逆，则对所有 $b \in A$，都有 $b = a \cdot a^{-1} \cdot b$，因此 b属于 aA。反过来，若 $aA = A$，则 $1_A \in aA$，因此 a 在 A中有乘法逆元。

注1.10。若 F 是半域，则 F 的唯一理想是 $\{0_F\}$和 F。事实上，设 I 是 F的一个非零理想，并设 $a \neq 0_F$是 I的一个元素。它是可逆的，因此由注 1.9 可知，包含它的 F的最小理想就是 F本身，这迫使 $I = F$成立。还要注意，在这种情况下，$\{0_F\}$ 是 F唯一的素理想。

通常用哥特体字母表示半环 A 的素理想。注意，对于 A 的素理想 $\mathfrak{p}$，由于 $A \setminus \mathfrak{p}$ 是一个饱和乘法子幺半群，我们可以在 $A \setminus \mathfrak{p}$ 处进行局部化。相应的局部化记为 $A_{\mathfrak{p}} = (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$。

下面的陈述，其证明显而易见，反映了理想与素性在取原像时通常具有的稳定性。

引理 1.11. 设 $f\colon A \to B$ 是一个半环态射，且 I 是 B 的一个理想。那么：

(1) $f^{-1}(I)$ 是 A 的一个理想；*(2)* 若 I 是素的，则 $f^{-1}(I)$ 是素的。

最后，我们需要克鲁尔定理的半环版本，该定理说明理想的根等于包含该理想的所有素理想的交集。

定理 1.12。 [Gol99，命题 7。28] 设 I 是半环 A中的一个理想。那么， I 的根定义为

$$\operatorname{rad}(I) = \{a \in A \mid \exists n \geq 0 \ \textit{such that}\ a^n \in I\}$$

是一个理想，并且

$$\operatorname{rad}(I) = \bigcap_{\substack{I \subseteq \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p} \text{ prime ideal}}} \mathfrak{p}.$$

1.3. **减性理想与核**。我们固定半环A，并简要讨论 A 的理想与源为 A的态射之间的关系。

另一方面，若 $f\colon A \to B$ 是一个半环态射，则子集 $\ker(f) = f^{-1}(0_B)$ 是 A 中的一个理想，这是引理 1.11 的结论。我们称它为 f 的核 。

另一方面，半环 A 的任意理想 I 都会导出一个半环态射。为此，我们在 A 上定义同余关系 $\sim_I$，规定对所有 $a,\ b \in A$,

$$a \sim_I b \quad \iff \quad \exists\, i, j \in I \text{ such that } a + i = b + j.$$

于是 $A/{\sim_I}$ 继承了 A 的半环结构，而商映射$\pi_I\colon A \to A/{\sim_I}$ 是一个半环同态。

注 1.13. 在上述记号下，对于所有 $i \in I$，总有 $I \subseteq \ker(\pi_I)$，因为 $i \sim_I 0_A$ 。然而，包含关系有时可能是严格的。例如，考虑例 1.8 中半环 $\mathbb{N}$ 的理想 $I = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ 。它满足

对于某个 m，$\ker(\pi_I) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \sim_I 0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n + m = \ell ,\{1\}\}$ $\ell \in \mathbb{N} \setminus$因此在这种情况下 $I \subsetneq \ker(\pi_I) = \mathbb{N}$。

为避免注 1.13 中所述例子带来的不愉快情形，我们引入以下特殊类别的半环理想。

定义1.14。 半环 A 中的理想 I 称为减性理想（或 k-理想，也称为 核 A），如果对于每个 $a \in A$，只要存在$b, c \in I$使得 $a+b=c$，就有 $a \in I$。

定义1.14中的不同术语由以下等价性得到证明。

命题 1.15。 [Gol99，命题 10。11] 设 I 是半环 A 的一个子集。那么，以下各项等价：

(i) I 是 A 的减性理想；*(ii)* I 是商映射 $\pi_I\colon\ A \to A/\sim_I$ 的核；*(iii)* 存在一个半环态射 $f\colon\ A \to B$，使得

$$I = \ker(f)。$$

证明。 先假设 (i) 成立。正如注 1.13 中所指出的， π_I 的核包含 $I_。$反之，设 $a \in \ker(\pi_I)$。那么$a \sim_I 0_A$，因此存在 $i,\ j \in I$，使得 $a+i=j$。由于 I 是可减的，因此可得 $a \in I$。

显然，(ii) 蕴含 (iii)。因此，现在假设 (iii) 成立，并令 $I = f^{-1}(0_B)$，其中 $f\colon\ A \to B$ 是半环态射。根据引理 1.11，I 是 A 的一个理想。此外，令 $a \in A$ 和 $b,\ c \in I$ 满足 $a+b=c$。将 f 应用于等式两边，我们得到 $f(a) = 0_B$，从而 $a \in I$。□

除了定义1.14之外，前面的结果也为以下术语提供了依据。

定义 1.16。 设 I 是半环 A 中的一个理想，且 $\pi_I\colon\ A \to A/\sim_I$ 是相应的商映射。那么，理想 $I = \ker(\pi_I)$ 称为 I 的减法闭包（也称为 I 的核）。

事实上，对于 A 的任意理想 I，集合 I 是包含 I 的 A 中最小的可减理想。根据命题 1.15，它是可减理想。为证明其最小性，假设 I 包含于 A 的一个可减理想 J 中，并令 $a \in \ker(\pi_I)$。根据定义， $a \sim_I 0_A$，因此存在 $b,\ c \in I \subseteq J$，使得 $a+b=c$。由于 J 是可减的，必有 $a \in J$。因此，任何包含 I 的可减理想 J 都必须包含 $I = \ker(\pi_I)$。

注1.17。 当 A 实际上是一个环时，根据定义1.14以及加法逆元的存在性，显然 A 的所有理想都是可减的。

注1.18。 当半环 A 是幂等的时，定义1.14可以改述为以下稍微简单的形式：A的理想 I 是可减的，当且仅当对于每个 $a \in A$，只要存在 $b \in I$ 使得 $a+b=b$，就有 $a \in I$。显然，对于 a 而言，这一条件蕴含定义1.14中的条件。反之，如果存在 $b,\ c \in I$ 使得 $a+b=c$，我们可以在等式两边都加上$b+c$，从而得到

$$a+(b+c) = b+c,$$

由于 A 是幂等的。

回忆一下，幂等半环 A 关于由以下条件定义的序关系构成一个偏序集：当且仅当 $a+b=b$ 时， $a \preceq b$。由此可得， A 的理想 I 是减性理想，当且仅当它是向下封闭的：若 $a \preceq b$ 且 $b \in I$，则 $a \in I$。

减性理想的以下性质将在后文中用到。

引理 1.19. 设 $f\colon A \to B$ 是一个半环态射。若 $I \subseteq B$ 是 B的一个减性理想，则 $f^{-1}(I)$ 是 A的一个减性理想。

证明. 设 $a \in A$，并假设存在 $b, c \in f^{-1}(I)$ 使得 $a + b = c$。这意味着 $f(a) + f(b) = f(c)$，因此根据定义，$f(a) \in I$。

或者，由命题 1.15 以及观察到 $f^{-1}(I) = \ker(\pi_I \circ f)$，即可得出该结论，其中 $\pi_I\colon B \to B/{\sim_I}$是商映射。□

1.4. **硬半环**。我们通过考察一类特殊的半环来结束代数讨论；对于这类半环，可逆性的概念等价于一个弱得多的概念。

为此，回顾注 1.9：半环 A 的元素 a 可逆，当且仅当 $aA = A$。这一性质与定义 1.16 一起启发了下面这个较为宽松的概念。

定义 1.20。设 A 是一个半环。若元素 $a \in A$ 满足 $aA = A$，则称其为半可逆 。

由于 aA 的减法闭包是 A 的一个理想，因此称 a 半可逆，等价于断言 $1_A \in aA$；更明确地说，存在 $b,\ c \in A$，使得 $1_A + ab = ac$。

注 1.21。利用幂等半环 A 上的偏序，我们可以将其半可逆元描述为满足以下条件的那些 $a \in A$ ：存在 $b \in A$，使得 $1_A \preceq ab$。

这是因为，如果对于 $a,\ b,\ c \in A$，有 $1_A + ac = ab$，那么 $1_A + ab = 1_A + (1_A + ac) = 1_A + ac = ab$，从而 $1_A \preceq ab$。

注 1.22. 如果半环 A 的减性理想 I 包含一个半可逆元，那么 $I = A$。事实上，如果 $a \in I$ 是半可逆的，那么 $A = aA \subseteq I = I$。

显然，根据定义，A 的任何可逆元也是半可逆的；当 A 是一个环时，这两个概念相同。然而，在一般的半环中，半可逆元可能远多于可逆元。

例 1.23. 考虑例 1.2 中布尔半环 $\mathbb{B}$ 上的一元多项式半环 $A = \mathbb{B}[x]$。这个半环中的任意多项式都是系数为 1 的单项式的有限和，而两个这样的多项式之间的乘法可以组合地表示如下：若 $S_1,\ S_2$ 是 $\mathbb{N}$ 的两个有限子集，则

$$\left(\sum_{s \in S_1} x^s\right) \cdot \left(\sum_{s \in S_2} x^s\right) = \sum_{s \in S_1 + S_2} x^s. \tag{1.24}$$

由此可知，A 中唯一的可逆元是常数多项式 1

。相反，A 的一个元素当且仅当可表示为$1 + f$且满足 $f \in A$时，才是半可逆的。事实上，A 是幂等的，因此

$$1 + (1 + f) = 1 + f,$$

这表明，任何形如 $1+f$ 的多项式都是半可逆的。反过来，如果 $a \in A$是半可逆的，则应存在 $b,\ c \in A$，使得 $1 + ab = ac$。由于

这个等式左边是一个常数项非零的多项式，因此右边也必然如此。根据(1.24)， a 和c 都必须有非零常数项。

推广例 1.23，我们得到幂等半域上半可逆多项式的如下刻画。

引理 1.25. 设 F 是一个幂等半域。那么，元素 $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$ 是半可逆的，当且仅当 $f(0_F) \neq 0_F$。

证明. 首先，假设我们有 $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$，满足 $\lambda = f(0_F) \neq 0_F$。那么，对于 $g \in F[x_1, \ldots, x_n]$，有 $\lambda^{-1} f = 1_F + g$，且 $g(0_F) = 0_F$，因此

$$1_F + \lambda^{-1} f = 1_F + (1_F + g) = 1_F + g = \lambda^{-1} f.$$

特别地， f 是半可逆的。

反过来，若 $f(0_F) = 0_F$，则对所有 $g \in F[x_1, \ldots, x_n]$，我们有 $(fg)(0_F) = 0_F$，而 $(1_F + fg)(0_F) = 1_F$。因此 $1_F + fg \neq fg$，故根据注 1.21， f不是半可逆的。□

我们为一类半环专门保留了一个名称：在这类半环中，可逆性与半可逆性的概念没有区别。

定义1.26。 若半环 A 的可逆元集合与半可逆元集合相同，则称其为硬半环。

例 1.27。 下面列举一些硬半环和非硬半环的例子。

(1) 任意环作为半环都是硬的。这直接来自注1.17。(2) 自然数半环 $\mathbb{N}$ 是硬的，因为它唯一的半可逆元是 1。为此，设 $n \in \mathbb{N}$ 是半可逆元。那么存在两个自然数 m, ℓ ，使得

$$1 + nm = n\ell.$$

这个等式的左边是一个模 n 同余于 1 的自然数，而右边是 n 的倍数。除非 $n = 1$，否则这显然不成立。

(3) 任意半域都是硬半环。事实上，非平凡半环中的半可逆元必定不等于零，因此根据半域的定义，它是可逆的。特别地，布尔域 $\mathbb{B}$ 和热带半环 $\mathbb{T}$ 都是硬半环。(4) 半环 $\mathbb{B}[x]$ 不是硬半环，原因见例 1.23。

本文中硬半环的重要性与以下结果有关，该结果刻画了减法闭包等于整个半环的理想。

命题 1.28。 设 A 是一个硬且幂等的半环。那么，如果 I 是 A 的一个理想，且满足 $I = A$，则有 $\overline{I} = A$。

证明。 由关于 I的假设可知， $1_A \in I$。换言之，存在 i， $j \in I$，使得 $1_A + i = j$。由于 A 是幂等的，我们可以写成

$$j = 1_A + i = 1_A + 1_A + i = 1_A + j.$$

特别地， j 是半可逆的，因此根据 A的硬性，它是可逆的。由此可知， I 包含 A中的一个可逆元，进而 $I = A$。□

例 1.29. 命题 1.28 中的蕴含关系对于一般的硬半环并不成立。例如，考虑半环 $\mathbb{N}$，根据例 1.27，它是硬的。例 1.8 中的理想 $I = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ 是真理想，但它满足 $I = \mathbb{N}$，因为 $1 \in I$，而且 $2,\ 3 \in I$。

给定任意半环 A，可以用一种典范方法构造与 A 相关联的硬半环。为此，用 $S(A)$ 表示 A 的半可逆元集合。

引理 1.30。 $S(A)$ 是 A 中半可逆元构成的饱和乘法子幺半群。

证明。显然，$1_A \in S(A)$。此外，若 a 和 b 是半可逆元，则存在 $c,\ d,\ x,\ y \in A$，使得 $1_A + ac = ad$ 且 $1_A + bx = by$。于是，$1_A + ab(cy + dx) = ab(dy + cx)$，因此 ab 也是半可逆元。

反过来，若 ab 是半可逆元，则对某个 $c,\ d \in A$，有 $1_A + abc = abd$。显然，a 和 b 也都是半可逆元，因为 $1_A + a(bc) = a(bd)$，而 b 的情形同理。□

另请参阅引理 4.2，其中给出了引理 1.30 的推广（并附有独立证明）。鉴于后者，考虑局部化

$$A^{\diamondsuit} = (S(A))^{-1}A, \tag{1.31}$$

称为 A 的硬化。以下结果说明了这一术语的合理性。

命题 1.32. 半环 $A^{\diamondsuit}$ 是硬的。此外，局部化同态 $\chi_A\colon A \to A^{\diamondsuit}$ 满足以下泛性质：对于任意满足 B 为硬的同态 $f\colon A \to B$，都存在唯一的同态 $f^{\diamondsuit}\colon A^{\diamondsuit} \to B$，使得 $f = f^{\diamondsuit} \circ \chi_A$。

特别地，对于任意两个半环之间的态射 $f\colon A \to B$，都存在唯一的同态 $f^{\diamondsuit}\colon A^{\diamondsuit} \to B^{\diamondsuit}$，使得 $f^{\diamondsuit} \circ \chi_A = \chi_B \circ f$。

证明。回顾一下，对于乘法子幺半群 $S \subseteq A$，元素 $a/s \in S^{-1}A$ 可逆，当且仅当存在 $b \in A$ 和 $t, u \in S$，使得 $abu = stu$。若 S 是饱和的，这等价于说 $a \in S$，另见引理 1.4。

因此，根据引理 1.30，要证明 $A^{\diamondsuit}$ 是硬的，只需证明 $A^{\diamondsuit} = (S(A))^{-1}A$ 的任意半可逆元 a/s 都满足 $a \in S(A)$。由于 a/s 是半可逆的，存在 $b,\ c \in A$ 和 $u,\ v \in S(A)$，使得

$$\frac{1_A}{1_A} + \frac{a}{s}\frac{b}{u} = \frac{a}{s}\frac{c}{v}.$$

因此，存在 $w \in S(A)$，使得

$$s^2uvw + a(bsvw) = a(csuw).$$

因此，$s^2uvw \in \overline{aA}$。由于 $s^2uvw \in S(A)$，由 a生成的减性理想含有一个半可逆元，因此根据注 1.22，$aA = A$。我们得出结论：a 是半可逆的。

由于半环同态下半可逆元的像仍是半可逆元，其他所有结论都可由局部化的泛性质推出。□

例 1.33. 回顾例 1.27，半环 $\mathbb{B}[x]$ 不是硬的。其硬化满足

$$\mathbb{B}[x]^{\diamondsuit} \cong \big(\mathbb{N}_{\min} \times \mathbb{Z}_{\max}\big) \cup \{(+\infty, -\infty)\}, \tag{1.34}$$

其中右侧的半环，其加法定义为 $(n,\ d) + (m,\ e) = (\min(n,\ m),\ \max(d,\ e))$，乘法定义为 $(n,\ d) \cdot (m,\ e) = (n+m,\ d+e)$，对所有 $n,\ m \in \mathbb{N}$ 和 $d,\ e \in \mathbb{Z}$ 均成立；这些运算也自然延拓到点 $\{(+\infty,\ -\infty)\}$。

(1.34) 中的一个显式同构由映射给出

$$\frac{f}{g} \mapsto \big(\operatorname{ord}_0 f, \deg f - \deg g\big).$$

容易验证这是一个定义良好的满射半环态射；注意，它保持加法这一事实，可由以下观察得出：根据例 1.23 或引理 1.25 中的明确描述，$\mathbb{B}[x]$ 的所有半可逆元在 0 处的消失阶均为 0。

接下来证明单射性。由于恰有一个元素映射到 $(+\infty,\ -\infty)$，我们可以假设 f_1/g_1 和 f_2/g_2 在 $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ 中的像相同。一方面，f_1 和 f_2 在 0 处的消失阶相同，因此存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $h_1,\ h_2 \in \mathbb{B}[x]$，使得

$$f_1 = x^k(1+h_1) \quad \text{and} \quad f_2 = x^k(1+h_2).$$

另一方面，次数之差相等，这意味着

$$\deg(1+h_1) - \deg g_1 = \deg(1+h_2) - \deg g_2.$$

于是，当 d 足够大时，$\mathbb{B}[x]$ 中的半可逆元 $u = 1 + x + \ldots + x^d$ 满足

$$u(1+h_1)g_2 = u(1+h_2)g_1,$$

由此可得 $uf_1g_2 = uf_2g_1$。那么，这两个分数相同。

通过对素核进行局部化，可以得到更多硬半环的例子。

引理 1.35. 设 $\mathfrak{p}$ 是半环 A 的一个素核，$A_{\mathfrak{p}}$ 是相应的局部化。那么 $A_{\mathfrak{p}}$ 是一个硬半环。

证明。我们沿用命题 1.32 中的相同论证。假设我们有一个 $A_{\mathfrak{p}}$ 的半可逆元 a/s，并且要证明 $a \notin \mathfrak{p}$。由于 a/s 是半可逆的，存在 $b,\ c \in A$ 和 $u,\ v,\ w \notin \mathfrak{p}$，使得 $s^2uvw + a(bsvw) = a(csuw)$。这意味着 s^2uvw 属于由 a 生成的核。但 $s^2uvw \notin \mathfrak{p}$，因此 $a \notin \mathfrak{p}$，因为 $\mathfrak{p}$ 是可减的。□

2. Spectrum constructions

本节中，我们考察与半环相关的两类谱，并为它们赋予适当的拓扑，以仿照代数几何中的通常构造。

基于素理想的谱所对应的概形理论已在多篇文章中展开研究，包括 [Lor12], [GG16 第 3] 节和 [Jun17 第 2], 节；而 k-谱（或饱和谱）作为拓扑空间，则在 [Les12] 中进行了研究。

按照惯例，我们用哥特体字母表示半环的素理想。

2.1. **谱与 k-谱**。我们先从集合论定义开始。

定义 2.1。设 A 是一个半环。 A 的谱为集合

$$\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p} \subseteq A \mid \mathfrak{p} \text{ is a prime ideal}\}.$$

-谱（或称饱和谱）是 A 的

$$\operatorname{Sp} A = \{\mathfrak{p} \subseteq A \mid \mathfrak{p} \text{ is a prime subtractive ideal}\}.$$

注意，当 A 是一个环时，根据注1.17，这两个概念相同。一般而言，我们有 $\operatorname{Sp} A \subseteq \operatorname{Spec} A$，且如下所示，这种包含关系可能是严格的。

例 2.2. 我们通过列举自然数半环 $\mathbb{N}$ 的所有素理想，来确定它的谱和 k-谱。

由于 $\{0\}$ 显然是一个素理想，设 $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{N}$ 是一个非平凡素理想，并令 $\mathfrak{p}$ 的最小非零元素为 p ：它必定是素数，否则 $\mathfrak{p}$ 将包含 p的一个真素因子，这与其最小性矛盾。特别地，可能出现 $\mathfrak{p} = p\mathbb{N}$的情况，而这实际上很容易验证是一个素理想。假设情况并非如此；因此 $\mathfrak{p}$包含一个不是 p倍数的整数。利用素性，我们推得 $\mathfrak{p}$ 实际上包含一个素数 $q \neq p$。然后，由加法性，

$$\mathfrak{p} \supseteq p\mathbb{N} \cup (q + p\mathbb{N}) \cup (2q + p\mathbb{N}) \cup \ldots \cup \big((p-1)q + p\mathbb{N}\big).$$

由于 p 和 q 互素，集合 $\{0, q, 2q, \ldots, (p-1)q\}$ 穷尽了模 p的所有剩余类，因此理想 $\mathfrak{p}$ 包含所有大于$(p-1)q$的整数。特别地，对于所有 $n \neq 1$ ，我们可以取 n的一个足够大的幂，使其属于 $\mathfrak{p}$ ，再利用素性推得 $n \in \mathfrak{p}$。我们得出结论： $\mathfrak{p} \supseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$。

结合例 1.8，我们得出

$$\operatorname{Spec} \mathbb{N} = \{\{0\}\} \cup \{p\mathbb{N} \mid p \text{ prime}\} \cup \{\mathbb{N} \setminus \{1\}\}.$$

现在来确定 k 的 $\mathbb{N}$谱。理想 $\{0\}$ 显然是可减的。由命题 1.15 可知，形如 $p\mathbb{N}$ 的理想也是可减的，因为它们是自然映射 $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的核，该映射将任意自然数映射为其模 p 的等价类。相反，理想 $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ 不可减，这由注 1.13 和命题 1.15 可知。因此，我们得出

$$\operatorname{Sp} \mathbb{N} = \{\{0\}\} \cup \{p\mathbb{N} \mid p \text{ prime}\}.$$

注2.3。设 F 是一个半域。由注1.10，我们有

$$\operatorname{Spec} F = \operatorname{Sp} F = \{\{0_F\}\}.$$

例如，当 F 是布尔域 $\mathbb{B}$ 或例 1.2 中的热带半环 $\mathbb{T}$ 时，情况就是如此。

谱与 k-谱之间的差异，甚至可能比例 2.2 中的情况更加显著。为此，我们证明以下结果；该结果本身也很有意义，它将幂等半环的 k-谱刻画为其到布尔域的态射集合。

命题 2.4. 若 A 是幂等的，则存在一个双射 $\operatorname{Sp} A \cong \operatorname{Hom}(A, \mathbb{B})$。

证明. 理想 $\{0\}$ 是布尔域 $\mathbb{B}$中的素理想。因此，对于任意态射 $f\colon A \to \mathbb{B}$，由引理 1.11 和命题 1.15 可知，f 的核是 A 的素减法理想。

反过来，给定 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A$，定义映射 $A \to \mathbb{B}$ 如下

$$a \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{if } a \in \mathfrak{p}, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这是一个半环同态；它保持加法这一事实源于以下假设：$\mathfrak{p}$ 是减性理想，且 A 是幂等的。□

推论 2.5. 设 F 是一个幂等半域。则

$$\operatorname{Sp} F[x_1, \dots, x_n] = \{\langle x_j \rangle_{j \in J} \mid J \subseteq \{1, \dots, n\}\}.$$

证明。由于 F 是幂等的，且如例 1.2 所示，半环 $F[x_1, \dots, x_n]$ 也是幂等的。因此，根据命题 2.4 的证明，存在一个双射

$$\operatorname{Hom}(F[x_1, \dots, x_n], \mathbb{B}) \cong \operatorname{Sp} F[x_1, \dots, x_n]$$

将每个态射 $f\colon F[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{B}$ 与其核对应。由于任何半环态射都会将可逆元映射为可逆元，且 F 是一个半域，f 会将 F 的每个非零元素映射为 1。因此可知，$\ker(f)$ 与由集合 $\{x_j \mid f(x_j) = 0\}$ 生成的理想相同。

此外，基于同样的理由，从 $F[x_1, \dots, x_n]$ 到 $\mathbb{B}$ 的态射等价于为 $\mathbb{B}$ 中的每个变量选取一个像，或者等价地，选取 $\{1, \dots, n\}$ 的一个子集。□

设 F 是幂等半域。根据推论 2.5，将子集 $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ 映射为由 $\{x_j \mid j \in J\}$ 生成的理想，可实现 $\{1, \dots, n\}$ 的幂集与 $\operatorname{Sp} F[x_1, \dots, x_n]$ 之间的双射，且这一对应保留包含关系。

特别地，$\operatorname{Sp} F[x_1, \dots, x_n]$ 是基数为 2^n 的有限集。

例 2.6. 根据推论 2.5，我们有 $\operatorname{Sp} \mathbb{B}[x] = \{\{0\}, \langle x \rangle\}$。相比之下，$\operatorname{Spec} \mathbb{B}[x]$ 是无限的，并且确实包含无限递增的素理想序列，参见 [AA94，推论 12]。

关于幂等半环情形下的 k-谱的更多结果，读者可参阅 [Les12]。

2.2. **扎里斯基拓扑**。令 A 为一个半环。现在我们按照经典概形理论中的做法，为定义 2.1 中的 A 的谱定义一个拓扑。为此，对于子集 $S \subseteq A$，我们令

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid S \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

我们有以下性质。

引理 2.7. 采用上述记号：

(1) 对于 A 的子集族 $(S_i)_{i\in I}$，有 $\bigcap_{i\in I} V(S_i) = V\big(\bigcup_{i\in I} S_i\big)$；*(2)* 对任意 S_1、$S_2 \subseteq A$，有 $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 \cdot S_2)$；*(3)* $V(\emptyset) =$ 谱 A，且 $V(A) = \emptyset$。

证明。第一和第三个断言显然成立。对于第二个断言，显然，若 $S_1 \subseteq \mathfrak{p}$ 或 $S_2 \subseteq \mathfrak{p}$，则 $S_1S_2 \subseteq \mathfrak{p}$。反过来，假设 $S_1S_2 \subseteq \mathfrak{p}$，并且例如设 $\mathfrak{p} \notin V(S_1)$。那么，按照 Har77 引理 2.1], 中的论证，存在 $s_1 \in S_1$ 使得 $s_1 \notin \mathfrak{p}_1$。对于所有 $s_2 \in S_2$，我们有$s_1s_2 \in \mathfrak{p}$，因此由素性可得 $s_2 \in \mathfrak{p}$；这意味着 $S_2 \subseteq \mathfrak{p}$。□

特别地，引理 2.7 保证这一集合

$$\{V(S) \mid S \subseteq A\} \tag{2.8}$$

满足自然数半环 Spec A上的拓扑的闭集公理。

定义 2.9。Spec A 上的扎里斯基拓扑是指其闭集为 (2.8) 中 $V(S)$ 形式的集合所组成的拓扑。类似地，Sp $A \subseteq$ Spec A 的子集拓扑称为 Sp A上的扎里斯基拓扑。

在这些笔记中，集合 Spec A 和 Sp A 始终视为赋有扎里斯基拓扑的拓扑空间。

注记 2.10. 设 A 是一个幂等半环。我们可以在集合 Hom$(A, \mathbb{B})$ 上定义一种拓扑：规定一个子集是闭集，当且仅当它具有如下形式

$$\{f \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{B}) \mid f(a) \leq g(a) \text{ for all } a \in A\}$$

其中 $g\colon A \to \mathbb{B}$ 是任意函数，不一定是半环同态。Hom$(A, \mathbb{B})$ 上的这种拓扑选择使命题 2.4 中的双射成为一个同胚。

注记 2.11. 拓扑空间 Spec A 和 Sp A虽然定义相似，却可能大不相同。

例如，考虑自然数半环 $\mathbb{N}$，并用 $\mathfrak{m} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ 表示它唯一的极大素理想。根据例 2.2 中的明确描述，并结合扎里斯基拓扑的定义，Spec $\mathbb{N}$ 的不可约闭子集只有单点集 $\{\mathfrak{m}\}$、某个素 p对应的 $\{p\mathbb{N}, \mathfrak{m}\}$ 形式的子集，以及整个 Spec $\mathbb{N}$。由此可得

$$\dim \operatorname{Spec} \mathbb{N} = 2,$$

其中 dim 表示拓扑维数。相反，Sp $\mathbb{N}$ 与通常的仿射概形 Spec $\mathbb{Z}$ 之间存在典范同胚，因此

$$\dim \operatorname{Sp} \mathbb{N} = 1.$$

对于半环 $\mathbb{B}[x]$，情况则更加极端。事实上，由例 2.6 可知，Sp $\mathbb{B}[x]$ 的拓扑维数为 1，而 Spec $\mathbb{B}[x]$ 的拓扑维数为无穷大。

与通常的代数几何一样，特别是为了在空间 Spec A 和 Sp A上定义结构层，我们需要为其扎里斯基拓扑提供一个开集

基。为此，对于每个 $a \in A$，我们考虑主开集

$$D(a) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid a \notin \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec} A \setminus V(\{a\}).$$

这类集合的重要性源于以下性质。

引理 2.12。族 $\{D(a) \mid a \in A\}$ 是谱 A 扎里斯基拓扑的一个基，并且满足

$$D(ab) = D(a) \cap D(b) \quad and \quad D(a+b) \subseteq D(a) \cup D(b)$$

对任意 $a, b \in A$ 均成立。此外，子集 $S \subseteq A$ 给出了谱 A 的一个由主开集 $\{D(a)\}_{a \in S}$构成的覆盖，即

$$\operatorname{Spec} A = \bigcup_{a \in S} D(a),$$

当且仅当由 S 生成的理想等于 A时成立。特别地：

(1) $D(a) =$ 谱 A 当且仅当 a 可逆；*(2)* 对于任意由主开集构成的谱 $A = \bigcup_{a \in S} D(a)$ 覆盖，存在一个有限子集 $T \subseteq S$，使得谱 $A = \bigcup_{a \in T} D(a)$。

证明。根据定义，这个族中的集合都是开集。为了证明它们构成扎里斯基拓扑的一个基，我们需要证明：对于所有闭子集$Z \subseteq$ 谱 A 以及任意点 $\mathfrak{p} \notin Z$，存在 $a \in A$，使得 $\mathfrak{p} \in D(a)$ 且 $D(a) \cap Z = \emptyset$。根据定义，对于子集$S \subseteq A$ 和 $S \nsubseteq \mathfrak{p}$，有 $Z = V(S)$；因此，只需取 $a \in S \setminus \mathfrak{p}$ 即可得出结论。

$D(ab) = D(a) \cap D(b)$ 以及 $D(a+b) \subseteq D(a) \cup D(b)$ 这些事实可直接由定义和引理 2.7 得出。

如果 S 生成 A，那么没有素理想包含 S，这意味着 $V(S) = \emptyset$。由引理 2.7.(1) 可得，谱 $A = \bigcup_{a \in S} D(a)$。

反过来，根据佐恩引理的一个著名推论，A 的任意真理想都包含于一个极大（因而也是素）理想 A中。若 S 不能生成 A，则存在一个包含 S的素理想 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$。因此，对所有 $a \in S$，都有 $\mathfrak{p} \notin D(a)$，从而 $\operatorname{Spec} A \neq \bigcup_{a \in S} D(a)$。

根据前面的断言，$D(a) = \operatorname{Spec} A$ 等价于等式 $aA = A$，进而根据注 1.9，等价于 a 可逆这一事实。

最后请注意，若 $S \subseteq A$ 生成单位理想，则存在一个生成单位理想的有限子集 $T \subseteq S$：由于 1_A 属于由 S生成的理想，因此存在 $a_i \in S$和 $b_i \in A$，使得对 $i = 1$、.....、n 有$1_A = a_1 b_1 + \cdots a_n b_n$。于是可以取 $T = \{a_1, \ldots, a_n\}$。□

类似地，对于给定的元素 $a \in A$，我们将记为

$$\widetilde{D}(a) = D(a) \cap \operatorname{Sp} A = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A \mid a \notin \mathfrak{p}\}.$$

k-谱版本的引理 2.12 如下所述。

~引理 2.13. 族 $\{D(a) \mid a \in A\}$ 是 $\operatorname{Sp} A$ 的扎里斯基拓扑的一组基，并且满足

$$\widetilde{D}(ab) = \widetilde{D}(a) \cap \widetilde{D}(b) \quad and \quad \widetilde{D}(a+b) \subseteq \widetilde{D}(a) \cup \widetilde{D}(b)$$

对于每个 $a, b \in A$。此外，如果 b 属于由 a,~ ~ 生成的减性理想，那么 $D(b) \subseteq D(a)$。

最后，子集 $S \subseteq A$ 给出 $\operatorname{Sp} A$ 的一个覆盖，其中开主集为 $\{D(a)\}_{a\in S}$，当且仅当由 S 生成的减性理想等于 A。特别地：

(1) $D(a) = \operatorname{Sp} A$ 当且仅当 a 是半可逆的；(2) 对于由主开集构成的任意覆盖 $\operatorname{Sp} A = \bigcup_{a\in S} D(a)$，存在一个有限子集 $T \subseteq S$ 使得 $\operatorname{Sp} A = \bigcup_{a\in T} D(a)$。

证明。 前三个断言直接由引理 2.12 中相应的性质以及将 $\operatorname{Sp} A$ 的拓扑定义为子空间拓扑得出。

若 b 属于由 a生成的减性理想，且 $a \in \mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A$，则$\sim \quad \sim b \in \mathfrak{p}$，因为 $\mathfrak{p}$ 是可减的，这表明 $D(b) \subseteq D(a)$ 。

其余断言可用与理想情形相同的论证证明。特别地，与引理 2.12 的证明类似，需要证明任意真减法理想都包含于某个极大减理想中，因而也包含于某个素减法理想中；这同样要用到佐恩引理。□

最后，对于幂等半环，我们可以利用命题 2.4 来描述其 k-谱中的主开集。

引理 2.14。 设 A 是一个幂等半环。给定任意 $a \in A$，自然双射 $\operatorname{Sp} A \cong \operatorname{Hom}(A, \mathbb{B})$ 诱导出一个双射

$$\widetilde{D}(a) \cong \{f \colon A \to \mathbb{B} \mid f(a) = 1\}.$$

$\sim \quad \sim \quad$ 此外，对于任意 $a, b \in A$，我们有 $D(a) \cup D(b) = D(a+b)$。

证明。 回忆一下，命题 2.4 中的双射 $\operatorname{Sp} A \cong \operatorname{Hom}(A, \mathbb{B})$ 将态射 $f\colon A \to \mathbb{B}$ 与其核对应。因此，与 f 对应的素理想属于 $D(a)$，当且仅当 $f(a) \neq 0$，等价地，$f(a) = 1$。

最后一个结论可由以下事实推出：$f(a+b) = f(a) + f(b) = 1$当且仅当 $f(a)$ 和 $f(b)$ 中至少有一个等于 1。□

2.3. **诱导态射**。 让我们通过从代数对应物构造半环谱之间的态射来结束本节。设 $f\colon A \to B$ 是一个半环态射，并考虑映射

$$\operatorname{Spec}(f) \colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

该映射将 B 的素理想 $\mathfrak{p}$ 映到 $f^{-1}(\mathfrak{p})$。由引理 1.11 可知此映射定义良好，并且根据引理 1.19，它限制为一个映射

$$\operatorname{Sp}(f) \colon \operatorname{Sp} B \longrightarrow \operatorname{Sp} A$$

因为引理 1.19。

引理 2.15。 映射 $\operatorname{Spec}(f)$ 和 $\operatorname{Sp}(f)$ 是连续的。

证明。 由于连续映射在赋予子集拓扑的子集上的限制仍然连续，因此只需验证 $\operatorname{Spec}(f)$ 的连续性。为此，取 A 的任意子集 S，并注意到

$$\big(\operatorname{Spec}(f)\big)^{-1}(V(S)) = \big\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B \mid S \subseteq f^{-1}(\mathfrak{p})\big\} = V(f(S)).$$

换句话说，闭集的原像是闭集，因此 $\operatorname{Spec}(f)$ 是连续的。□

特别地，Spec 和 Sp 给出从半环范畴到拓扑空间范畴的反变函子。

我们可以将引理 2.15 应用于两个特别值得关注的情形。为此，回顾一下，对于半环 A 的乘法子幺半群 S，我们用 $\varphi_S\colon A \to S^{-1}A$ 表示相应的局部化同态。

引理 2.16. 对于任意半环 A 及其乘法子幺半群 S，映射 $\operatorname{Spec}(\varphi_S)$ 诱导一个同胚

$$\operatorname{Spec} S^{-1}A \cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

对于 Sp，同样的性质也成立。

证明。Spec(φ_S) 的连续性由引理 2.15 得出。此外，对于所有 $a \in A$ 和 $s \in S$，容易验证，$S^{-1}A$ 的一个素理想包含 a/s 当且仅当它包含 $\varphi_S(a)$。于是，

$$\operatorname{Spec}(\varphi_S)(D(a/s)) = D(a) \tag{2.17}$$

因此该映射是开映射。显然，它也是单射，其像为 $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$，例如参见 Gol99，命题 11.15]。对于 Sp，证明过程相同。□

引理 2.18. 对于半环 A，考虑硬化态射 $\chi\colon A \to A^{\diamondsuit}$。那么映射 $\operatorname{Sp}(\chi)\colon \operatorname{Sp} A^{\diamondsuit} \to \operatorname{Sp} A$ 是一个同胚。

证明. 在此处应用引理 2.16，可得一个同胚

$$\operatorname{Sp} A^{\diamondsuit} \cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A \mid \mathfrak{p} \cap S(A) = \emptyset\},$$

其中 $S(A)$ 是引理 1.30 中 A 的半可逆元所构成的乘法子幺半群。现在，右侧的集合与 Sp A 相同，因为根据注 1.22，A 的真减法理想不可能包含任何半可逆元。□

3. The structure sheaf for 谱

在本节中，我们固定一个半环 A，并令 $X = \operatorname{Spec} A$ 为其对应的谱，将其视为如第 2 节中那样的拓扑空间。

本节的目标是在 X 上定义一个合适的结构层 $\mathcal{O}_X$。事实上，我们给出这种层的三种等价定义。其在 Sp A 上的对应概念将在第 4 节中研究。

请始终记住，给定一个素理想 $\mathfrak{p} \subseteq A$，我们用 $A_{\mathfrak{p}} = (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$ 表示相应的局部化。

3.1. 三种构造 $\mathcal{O}_X$。给定任意开子集 $U \subseteq X$，我们定义

$$S_U = \{b \in A \mid D(b) \supseteq U\} \subseteq A. \tag{3.1}$$

与通常的代数几何一样，这可以看作 A 中那些元素构成的子集：将它们视为定义在 X 上的函数时，它们在 U 上处处不为零。特别地，若对某个 $a \in A$ 有 $U = D(a)$，我们简记为

$$S_a = S_{D(a)}.$$

下一个引理描述了这个集合的一般代数结构，并具体说明了当 U 是主开集时的情形。

引理 3.2. 对于任意开子集 $U \subseteq X$，集合 S_U 是 A 的饱和乘法子幺半群。此外，对于所有 $a \in A$，我们有

$$S_a = (a^{\mathbb{N}})^{\mathrm{sat}} = \{b \in A \mid \exists c \in A \text{ and } \exists n \in \mathbb{N} \text{ with } bc = a^n\}$$

是由 a 生成的乘法子幺半群的饱和。

证明。首先注意到 $1_A \in S_U$，因为 $D(1_A) = X \supseteq U$。我们需要证明，对所有 a，$b \in A$，有 $ab \in S_U$ 当且仅当 $a \in S_U$ 且 $b \in S_U$。利用引理 2.12 中的等式 $D(ab) = D(a) \cap D(b)$，这等价于

$$D(a) \cap D(b) \supseteq U \iff D(a) \supseteq U \text{ and } D(b) \supseteq U,$$

这显然成立。

为证明最后一个断言，首先显然有 $a \in S_a$。由于 S_a 是一个饱和乘法子幺半群，根据饱和的极小性，有 $a^{\mathbb{N}} \subseteq S_a$，因此 $(a^{\mathbb{N}})^{\mathrm{sat}} \subseteq S_a$；参见引理 1.4。

为了证明反向包含，取 $b \in S_a$，于是 $D(b) \supseteq D(a)$。这等价于说，包含 b 的 A 的素理想也包含 a，或者等价地，

$$a \in \bigcap_{\substack{b \in \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A}} \mathfrak{p} = \operatorname{rad}(bA),$$

其中最后一个等式即为定理 1.12。因此，存在 $n \geq 0$ 和 $c \in A$ 使得 $a^n = bc$，所以 b 属于 $a^{\mathbb{N}}$ 的饱和。□

注意，对由 a 生成的乘法子幺半群进行 A 的局部化，通常称为 $A_a = A[a^{-1}]$。因此，引理 3.2 蕴含 $S_a^{-1}A \cong A_a$ 具有函子性。

下一个结果表明，主开集事实上是仿射开集。

引理 3.3。 对于任意 $a \in A$，令 $\varphi_a\colon A \to S_a^{-1}A$ 为局部化映射。则映射 $\operatorname{Spec}(\varphi_a)$ 诱导一个同胚 $\operatorname{Spec} S_a^{-1}A \cong D(a)$。

证明。根据引理 2.16，我们已经知道，$\operatorname{Spec}(\varphi_a)$ 在 $\operatorname{Spec} S_a^{-1}A$ 与满足 $\mathfrak{p} \cap S_a = \emptyset$ 的素 $\mathfrak{p} \in X$ 的集合之间诱导了一个同胚。但注意，如果 $b \in \mathfrak{p} \cap S_a$，则根据引理 3.2，存在 $c \in A$，使得对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $bc = a^n$。因此 $a^n = bc \in \mathfrak{p}$，所以 $a \in \mathfrak{p}$。于是，$\mathfrak{p} \cap S_a = \emptyset$ 当且仅当 $a \notin \mathfrak{p}$。□

现在我们可以介绍构造 $\mathcal{O}_X$ 上的结构层 X 的三种彼此独立的方法。为此，我们回顾一下：拓扑空间上的一个（半环）预层 $\mathcal{F}$ 是层，当对任意由开集 U_i 覆盖开集 U 的情形（即 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$），其中 $i \in I$，映射

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \operatorname{Eq}\left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)\right)$$

由限制诱导的同构。这里 Eq 表示等化子：作为一个集合，它由满足条件 $f_i = f_j \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ 的元素 $(f_i)_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ 构成，对所有 $i,\ j \in I$ 均成立。

方法 A：局部化预层的层化。考虑半环预层 $\mathcal{F}$ 在 X 上的定义为

$$\mathcal{F}(U) = S_U^{-1}A \tag{3.4}$$

对于所有开子集 $U \subseteq X$，其中 S_U 是与 U相关联的饱和乘法子幺半群，如(3.1)中所定义。直观地说，半环 $\mathcal{F}(U)$是通过将 U上处处非零的所有函数取逆而得到的。

预层 $\mathcal{F}$ 一般不是层（即使对于交换环也是如此，见下文例3.5），因此我们取结构层

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{F}^{\#}$$

为它的层化。

例3.5。设 K 是特征0的代数闭域，令 $A = K[t^2, t^3]$ 为 $K[t]$ 的子环，该子环由t 中次数一次项系数等于0的多项式组成。那么，上文定义的预层 $\mathcal{F}$ 不是这个环的谱上的层。

为说明这一点，考虑点 $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} A$，它由求值态射 $f \mapsto f(1)$的核给出。这是一个极大理想，并且明确地有 $\mathfrak{m} = (t^2-1)A + (t^3-1)A$。考虑开集 $U = \operatorname{Spec} A \setminus \{\mathfrak{m}\}$。

注意，$S_U = K^\times$，如同任何多项式 $f \in S_U$ 一样，其根集都必须包含在 $\{1\}$中，因此它必定具有如下形式：$f = \lambda(t-1)^n$，其中 $n \geq 0$，且 $\lambda \in K^\times$。但是，如果 $n > 0$，那么这种 f 的一次项系数为$\pm\lambda n \neq 0$，因此 f 不会属于 A。

现在，考虑覆盖 $U = D(t^2-1) \cup D(t^3-1)$。我们将给出映射的等化子中的一个元素

$$S_{t^2-1}^{-1}A \times S_{t^3-1}^{-1}A \rightrightarrows S_{(t^2-1)(t^3-1)}^{-1}A$$

它并非来自某个元素 $f \in S_U^{-1}A = A$。这个元素是

$$\left(\frac{t^3+t^2}{t^2-1}, \frac{t^4+t^3+t^2}{t^3-1}\right).$$

显然它属于等化子，因为

$$\frac{t^3+t^2}{t^2-1} = \frac{t^4+t^3+t^2}{t^3-1} \in S_{(t^2-1)(t^3-1)}^{-1}A$$

因为二者都等于 $t^2/(t-1) \in K(t)$。同理，它们都不可能是任一局部环中某个 $f \in A$ 对应的形式 $f/1$。

方法 B：将定义在主开集上的局部化层扩张。这种方法首先在 X 的扎里斯基拓扑的一个基上构造一个层，然后将其扩张为整个谱上的层，正如 [Sta18 第 6 节所述。30]。

为此，我们考虑由主开集构成的 X 拓扑的基，如引理 2.12 所示。由 (3.4) 定义的预层 $\mathcal{F}$ 在这个基上的局部截面为

$$\mathcal{F}(D(a)) = S_a^{-1}A. \tag{3.6}$$

对所有 $a \in A$。

正如我们将在下面的引理 3.9 中看到的，预层 $\mathcal{F}$ 实际上是主开集基上的一个层，随后可通过如下赋值，唯一且函子性地延拓为 X 上的层 $\mathcal{O}_X$，对所有开 $U \subseteq X$

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathrm{Eq}\left(\prod_{i\in I} \mathcal{F}(D(a_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(D(a_i a_j))\right) \tag{3.7}$$

对于任意覆盖 $U = \bigcup_{i\in I} D(a_i)$。由此得到的半环 $\mathcal{O}_X(U)$ 不依赖于所选的覆盖，这由层性质保证。特别地，根据构造，对于所有 $a \in A$，都有 $\mathcal{O}_X(D(a)) = \mathcal{F}(D(a))$，参见 [Sta18，引理 6.30.6]。

注记 3.8. 注意，与直接声明 $\mathcal{F}(D(a)) = A_a$ 相比，(3.6) 中的赋值更适合形式化。实际上，后一种选择取决于所选的 a，而非 $D(a)$；也就是说，若 $D(a) = D(b)$，则 A_a 和 A_b 仅在半环同构意义下相等，而根据定义 $S_a = S_b$。

现在我们详细证明，预层 $\mathcal{F}$ 实际上是 X 的主开集基上的一个层，其意义见 [Sta18，定义 6.30.2]。这归结为证明以下命题。

引理 3.9. 给定满足 $\bigcup_{i\in I} D(a_i) = D(a)$ 的 $i \in I$ 的 $a \in A$ 和 $a_i \in A$，态射

$$S_a^{-1}A \longrightarrow \mathrm{Eq}\left(\prod_{i\in I} S_{a_i}^{-1}A \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} S_{a_i a_j}^{-1}A\right)$$

是一个同构。

我们将把证明分成几个子引理。首先，我们来证明在 $D(a) = X$ 这一特殊情形下，引理 3.9 中的单射性。

子引理 3.10. 给定满足 $\bigcup_{i\in I} D(a_i) =$ 谱 A 的 $i \in I$，态射

$$A \longrightarrow \prod_{i\in I} S_{a_i}^{-1}A$$

是单射。

证明. 取 $x,\ y \in A$，其中对每个 $i,\ x/1_A = y/1_A$ 属于 $S_{a_i}^{-1}A$。那么，对所有 $i \in I$，存在 $u_i \in S_{a_i}$ 使得 $xu_i = yu_i$。

由于 $D(u_i) \supseteq D(a_i)$，且开集 $D(a_i)$ 覆盖了 Spec A，因此我们有 $\bigcup_{i\in I} D(u_i) =$ Spec A。于是，如引理 2.12 的证明中那样，我们可以选取 $b_i \in A$，使得除有限多个 i 外，对所有 $b_i = 0_A$ 都成立，并满足 $1_A = \sum b_i u_i$。然后

$$x = x\sum b_i u_i = \sum b_i x u_i = \sum b_i y u_i = y\sum b_i u_i = y,$$

从而完成证明。 □

为了证明一般情形，我们需要比较主开集 $D(a)$ 上的预层与空间 Spec $S_a^{-1}A$ 上的预层；根据引理 3.3，这两个空间是同胚的。下面给出这一技术性结果。

子引理 3.11. 给定 $a, b \in A$ 使得 $D(a) \supseteq D(b)$，限制态射 $S_a^{-1}A \to S_b^{-1}B$ 诱导出一个同构

$$S_{b/1_A}^{-1}\left(S_a^{-1}A\right) \cong S_b^{-1}A.$$

证明。首先注意，$D(a) \supseteq D(b)$ 蕴含根据定义有 $S_a \subseteq S_b$。因此，S_a 中的元素在局部化态射$A \to S_b^{-1}A$ 下的像是可逆的，故由局部化的泛性质，存在唯一的态射 $S_a^{-1}A \to S_b^{-1}A$，其在 A 上限制为局部化态射。

注意到等式

$$S_{b/1_A} = \left\{ \frac{c}{d} \;\middle|\; c \in S_b \text{ and } d \in S_a \right\} \tag{3.12}$$

子集 $S_a^{-1}A$ 的等式成立。根据引理 3.2 中的显式描述，右边的元素属于左边是显然的。反过来，若元素 $c/d \in S_a^{-1}A$ 属于 $S_{b/1_A}$，则注意到它满足

$$D\left(\frac{c}{d}\right) \supseteq D\left(\frac{b}{1_A}\right)$$

根据定义，因此由于 (2.17)，$D(c) \supseteq D(b)$。特别地，$c \in S_b$。

现在，根据 (3.12)，每个元素$c/d \in S_{b/1_A} \subseteq S_a^{-1}A$ 在 $S_b^{-1}A$ 中的像都是可逆的；再由局部化的泛性质可知，存在一个态射

$$S_{b/1_A}^{-1}(S_a^{-1}A) \to S_b^{-1}A.$$

由局部化映射的复合，根据泛性质可得逆态射

$$A \to S_a^{-1}A \to S_{b/1_A}^{-1}\left(S_a^{-1}A\right)$$

因为元素 $c \in A$ 的像可逆当且仅当 $c/1_A \in S_{b/1_A}$，所以当且仅当 $c \in S_b$。

□

子引理 3.13。给定 $a \in A$ 和 $a_i \in A$，对于满足 $\bigcup_{i\in I} D(a_i) = D(a)$ 的 $i \in I$，态射

$$S_a^{-1}A \longrightarrow \prod_{i\in I} S_{a_i}^{-1}A$$

是单射。

证明。如引理 3.3 所示，存在一个同胚 $D(a) \cong \operatorname{Spec} S_a^{-1}A$，它将 $D(a_i)$ 与 $D(a_i/1_A)$ 识别起来。于是，根据假设

$$\bigcup_{i\in I} D\left(\frac{a_i}{1_A}\right) = \operatorname{Spec} S_a^{-1}A$$

其中 $a_i/1_A \in S_a^{-1}A$。由子引理 3.10 应用于半环 $S_a^{-1}A$ 以及子引理 3.11，即可得出结论。□

回到假设 $D(a) = X$，我们现在着重证明引理 3.9 中的满射性。我们将用到以下技术性结果，它允许以一种更理想的形式表示在不同局部化中相同的元素。

子引理 3.14. 给定 $a_1, \ldots, a_n \in A$ 以及满足 $x_i/s_i = x_j/s_j$ 于 $S_{a_ia_j}^{-1}A$ 中的一组 $x_i/s_i \in S_{a_i}^{-1}A$，存在 $x_i' \in A$ 和 $s_i' \in S_{a_i}$，使得

$$\frac{x_i'}{s_i'} = \frac{x_i}{s_i} \in S_{a_i}^{-1}A$$

对于每个 $i = 1, \dots, n$，以及对于所有 i 和 j，都有 $x'_i s'_j = x'_j s'_i$。

证明。 根据假设，对于每一对指标 i，j 都存在 $u_{ij} \in S_{a_i a_j}$ 使得

$$x_i s_j u_{ij} = x_j s_i u_{ij}. \tag{3.15}$$

由引理 3.2，分别应用于 $s_i \in S_{a_i}$ 和 $u_{ij} \in S_{a_i a_j}$，可得 v_i，$v_{ij} \in A$ 以及 n_i，$n_{ij} \in \mathbb{N}$，使得 $s_i v_i = a_i^{n_i}$ 且 $u_{ij} v_{ij} = (a_i a_j)^{n_{ij}}$。因此，将 (3.15) 的两边乘以 $v_i v_j v_{ij}$，得到

$$(x_i v_i) a_j^{n_j} (a_i a_j)^{n_{ij}} = (x_j v_j) a_i^{n_i} (a_i a_j)^{n_{ij}}.$$

取 $N = \max_{i,\, j} n_{ij}$，由于指标集有限，它也是有限的；再将最后一个等式的两边乘以 $a_i a_j$ 的适当次幂，得到

$$(x_i v_i a_i^N) a_j^{N+n_j} = (x_i v_i) a_j^{n_j} (a_i a_j)^N = (x_j v_j) a_i^{n_i} (a_i a_j)^N = (x_j v_j a_j^N) a_i^{N+n_i}$$

对所有 i，j 均成立。通过定义 $x'_i = x_i v_i a_i^N$ 和 $s'_i = a_i^{N+n_i}$ 即可得到结论。 □

子引理 3.16。 给定 $a_i \in A$，其中 $i \in I$ 满足 $\bigcup_{i \in I} D(a_i) = \operatorname{谱} A$，则该态射

$$A \longrightarrow \operatorname{Eq}\left(\prod_{i \in I} S_{a_i}^{-1} A \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} S_{a_i a_j}^{-1} A \right)$$

是满射。

证明。 假设我们有一个等化子中的元素，即一个元素的集合 $x_i / s_i \in S_{a_i}^{-1} A$，满足对于所有指标对 $i, j \in I$，$x_i / s_i = x_j / s_j$ 属于 $S_{a_i a_j}^{-1} A$。我们希望找到一个元素 $a \in A$，使得对于所有 $i \in I$，等式 $a / 1_A = x_i / s_i$ 在 $S_{a_i}^{-1} A$ 中成立。

由于开集 $D(a_i)$ 覆盖谱 A，根据引理 2.12，我们可以选取一个有限集 $J \subseteq I$，使得 $\bigcup_{j \in J} D(a_j) = \operatorname{谱} A$。

现在，由于 J 是有限的，我们可以利用子引理 3.14 推得存在 $x'_j \in A$，并且对每个 $j \in J$ 都有 $s'_j \in S_{a_j}$，使得

$$\frac{x'_j}{s'_j} = \frac{x_j}{s_j} \in S_{a_j}^{-1} A$$

并且满足对于所有 $j, k \in J$，都有 $x'_j s'_k = x'_k s'_j$。

根据定义，$s'_j \in S_{a_j}$ 这一事实意味着 $D(s'_j) \supseteq D(a_j)$，因此

$$\bigcup_{j \in J} D(s'_j) = \operatorname{Spec} A$$

因为由 $j \in J$ 构成的 $D(a_j)$ 族已经覆盖了谱 A。特别地，由于引理 2.12，存在 $b_j \in A$，使得 $\sum_{j \in J} b_j s'_j = 1_A$。

我们断言，元素 $a = \sum_{j \in J} b_j x'_j \in A$ 正是我们要找的那个。事实上，对所有 $j \in J$，我们都有

$$a s'_j = \sum_{k \in J} b_k x'_k s'_j = \sum_{k \in J} b_k x'_j s'_k = x'_j,$$

因此

$$\frac{a}{1_A} = \frac{x'_j}{s'_j} = \frac{x_j}{s_j} \in S_{a_j}^{-1} A. \tag{3.17}$$

相反，如果 $i \in I \setminus J$ 考虑由下式给出的 $D(a_i)$ 的覆盖

$$D(a_i) = \bigcup_{j\in J}(D(a_i) \cap D(a_j)) = \bigcup_{j\in J} D(a_i a_j),$$

这之所以成立，是因为带有 $j \in J$ 的 $D(a_j)$ 族已经覆盖了 Spec A。为了说明 $a/1_A = x_i/s_i$ 属于 $S_{a_i}^{-1}A$，我们可以使用子引理 3.13，将其归结为对所有 $j \in J$ 证明 $a/1_A = x_i/s_i$ 属于 $S_{a_i a_j}^{-1}A$。但我们有

$$\frac{x_i}{s_i} = \frac{x_j}{s_j} = \frac{a}{1_A} \in S_{a_i a_j}^{-1}A$$

根据（3.17）。 □

现在我们终于可以完成主要论断的证明了。

引理 *3.9* 的证明。 单射性直接由子引理 3.13 得出。关于满射性，我们已经知道整个空间 Spec A 上的结果，即由子引理 3.16 得出；通过将 $D(a)$ 与 Spec $S_a^{-1}A$ 识别，并使用子引理 3.11，便可像子引理 3.13 的证明中那样从这一结果推出一般情形。□

方法 C：截面层。我们关于在 X 上构造结构层的最后一种方法直接遵循 Hartshorne 的著作 [Har77，第 II 节2], ，其优点在于：它直接定义了任意开集上的局部截面半环，而无需依赖任何选择。

设 $U \subseteq X$ 为一个开子集。我们将 $\mathcal{O}_X(U)$ 定义为满足以下条件的函数集合：

$$s\colon U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}}$$

满足：对于每个 $\mathfrak{p} \in U$，有 $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$；并且 s 是 A 中元素的局部商。更准确地说，后一个条件意味着：对于每个 $\mathfrak{p} \in U$，存在包含于 U 中的 $\mathfrak{p}$ 的一个邻域 V，以及元素 a，$f \in A$，使得对于每个 $\mathfrak{q} \in V$，都有 $f \notin \mathfrak{q}$，且在 $A_{\mathfrak{q}}$ 中 $s(\mathfrak{q}) = a/f$。

这类函数的和与积仍然是这类函数，而将每个 $\mathfrak{p}$ 映射到 $1_{A_{\mathfrak{p}}}$ 的函数是一个单位元。因此，$\mathcal{O}_X(U)$ 是一个带单位元的交换半环。若 $V \subseteq U$ 是两个开集，则自然限制映射 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ 是一个半环同态。由定义的局部性质可知，$\mathcal{O}_X$ 是一个层，并且在每个 $\mathfrak{p}$ 处的茎为 $A_{\mathfrak{p}}$。

3.2. **定义的等价性**。 这里我们证明，上一小节中介绍的三种构造 X 上结构层的方法实际上是等价的。

定理 3.18。 第 *3.1* 节中关于 $\mathcal{O}_X$ 的三种定义，在 X 上得到的层彼此同构。特别地：

（*1*）对于任意元素 $a \in A$，自然态射 $A_a \to \mathcal{O}_X$（D（a）是同构。

（*2*） $\mathcal{O}_X$ 的整体截面半环为 $\mathcal{O}_X$（X） $\cong A$。（*3*）对于任意 $\mathfrak{p} \in X$，层 $\mathcal{O}_X$ 在 $\mathfrak{p}$ 处的茎 $\mathcal{O}_{X,\,\mathfrak{p}}$ 同构于局部半环 $A_{\mathfrak{p}}$。

证明。令 $\mathcal{F}$ 为 X 上由下式定义的半环预层

$$\mathcal{F}(U) = S_U^{-1}A$$

对所有开子集 $U \subseteq X$，如同第 3.1 节中的第一种方法。将 $\mathcal{F}$ 限制到 X 的主开集基上，其茎与 $\mathcal{F}$ 相同，并且正如我们在引理 3.9 中证明的，它在这样的基上是一个层。比较 [Sta18 第 6 节.17] 中层化的定义与 [Sta18 引理 6.30.6] 的证明可知，第 3.1 节中的前两种方法在 X 上得到相同的层。

接下来要将 $\mathcal{F}^{\#}$ 与通过第三种方法定义的层 $\mathcal{O}_X$ 进行比较。为此，考虑定义在所有开子集 $U \subseteq X$ 上的预层态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{O}_X$，其定义如下：

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U), \quad a/f \longmapsto (\mathfrak{p} \mapsto a/f) \tag{3.19}$$

对所有 $a/f \in S_U^{-1}A$。由于 $f \in S_U$，可得对所有 $\mathfrak{p} \in U$，都有 $f \notin \mathfrak{p}$，因此 a/f 可视为 $A_{\mathfrak{p}}$ 中的一个元素。容易看出该态射是良定义的。对于所有 $\mathfrak{p} \in X$，茎之间的诱导态射为

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}, \quad [a/f] \longmapsto a/f$$

其中，对某个包含 $\mathfrak{p}$ 的开集 U，有 $a/f \in \mathcal{F}(U)$。注意，这实际上是 $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ 与 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ 之间的一个同构。事实上，对于任意 $a/f \in A_{\mathfrak{p}}$，若有 $f \notin \mathfrak{p}$，我们可以取 $U = D(f) \ni \mathfrak{p}$；元素 $a/f \in \mathcal{F}(D(f))$ 的芽是 a/f 的一个原像，从而证明了满射性。对于单射性，若 $a/f = b/g \in A_{\mathfrak{p}}$，则存在 $u \in A \setminus \mathfrak{p}$ 使得 $agu = bfu$；因此 $a/f = b/g$ 属于 $\mathcal{F}(D(fgu))$，这表明 $[a/f] = [b/g]$。

由于 (3.19) 中定义的态射在所有茎上都诱导出一个同构，其层化实现了 $\mathcal{F}^{\#}$ 与 $\mathcal{O}_X$ 之间所需的同构。

现在，断言 (1) 由第二种方法给出的结构层定义以及引理 3.2 得出。断言 (2) 是 (1) 的一个特例，取 $a = 1_A$ 即可。断言 (3) 已经直接证明。□

例3.20. 考虑自然数半环 $\mathbb{N}$，并将其唯一的极大理想记为$\mathfrak{m} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$。由例 2.2 中的明确描述可知，谱 $\mathbb{N}$ 的非空开子集要么形如$D(N)$，其中 N是某个非零自然数；要么等于 (谱 $\mathbb{N}$) $\setminus \{\mathfrak{m}\}$。由定理 3.18 可得，结构层的局部截面在第一类开集上为

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{N}}(D(N)) = \mathbb{N}[1/N]$$

。对于第二类开集，记 (谱 $\mathbb{N}$) $\setminus \{\mathfrak{m}\} = D(2) \cup D(3)$，由 (3.7) 可推得

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{N}}((\operatorname{Spec}\mathbb{N}) \setminus \{\mathfrak{m}\}) = \mathbb{N}.$$

根据定理 3.18 可立即计算茎，特别地，我们有

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{N},\{0\}} \cong \mathbb{Q}_{\geq 0} \quad \text{and} \quad \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{N},\mathfrak{m}} \cong \mathbb{N}.$$

3.3. **仿射半概形范畴**。 回顾一下，在经典代数几何中，函子 Spec 在交换环范畴与仿射概形范畴之间诱导出一个反等价。我们通过用半环替代环，并用下述局部环化空间的自然类似物替代局部环化空间，将这一对应关系推广到交换半环的情形。

定义 3.21。一个局部半环化空间是一个二元组 $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$，由一个拓扑空间 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{X}$ 上的交换半环层 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 组成，并满足对所有 $x \in \mathfrak{X}$，茎 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$ 都是局部半环。一个局部半环化空间态射

$$(f, f^{\#}) \colon (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \longrightarrow (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$$

是一个连续映射 $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$，以及一个半环层态射

$$f^{\#} \colon \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \longrightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$$

并且对所有 $x \in \mathfrak{X}$，茎上的诱导同态

$$f_x^{\#} \colon (f^{-1}\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})_x = \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}, f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$$

是一个半环局部同态，也就是说，它将$\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},f(x)}$ 的极大理想映入$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$的极大理想。

若（局部）半环化空间 $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ 同构于某个形如 (谱 $A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$) 的空间，其中 A 是交换半环，则称其为仿射半概形。

以下是适用于仿射局部半环化空间情形的 [Har77, 命题 II.2.3] 的范畴论版本。

命题 3.22. 逆变函子

$$\operatorname{Spec} \colon A \longmapsto (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

是交换半环范畴与仿射半概形范畴之间的反等价。

证明。 证明与经典的环情形相同：证明谱函子全忠实且本质满，其准逆为整体截面函子。

首先，对于任意一对半环 A, B，谱函子给出一个映射

$$\text{谱}\colon \operatorname{Hom}(A, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}((\text{谱 } B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}), (\text{谱 } A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})) \tag{3.23}$$

通过将 φ 映射到有序对 $(\operatorname{Spec}(\varphi), \operatorname{Spec}(\varphi)^{\#})$ 得到，其中 $\operatorname{Spec}(\varphi)$ 是引理 2.15 中的连续映射，而 $\operatorname{Spec}(\varphi)^{\#}$ 则是通过第 3.1 节提出的构造结构层的第三种方法，将 φ 的局部化整体化而定义的；关于环情形下的类似构造，参见 [Har77，命题 II.2.3]。注意，这是一个局部半环化空间态射，因为对于任意素理想 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$，所诱导的态射 $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}}$ 是局部半环之间的局部态射。

从仿射半概形的定义可明显看出，谱是本质满的。为证明它是全忠实的，注意到，若我们有一个作为局部半环化空间的态射 $(f, f^{\#}) : (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$，那么特别地，我们有一个半环态射

$$f^{\#}(\operatorname{Spec} A) \colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} A) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B).$$

利用定理 3.18 给出的同构将整体截面与相应的半环等同起来，可得一个态射 $\varphi\colon A \to B$。这给出了 (3.23) 中映射的逆。例如，若取 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$，利用交换图

$$\begin{array}{ccc} A \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A,\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}} \\ \downarrow{\scriptstyle f^{\#}} & & \downarrow \\ B \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B, f(\mathfrak{p})} \cong B_{f(\mathfrak{p})} \end{array}$$

由于右侧的竖直箭头是局部的，我们看到，$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B,\ f(\mathfrak{p})}$ 中的极大理想是 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A,\ \mathfrak{p}}$的极大理想的原像，因此 $\operatorname{Spec}(\varphi)(\mathfrak{p}) = (f^{\#})^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$。这表明连续映射 $\operatorname{Spec}(\varphi)$ 就是原映射 f。要证明相应的层态射也相同，只需在主开集基上验证即可。在这种情况下，首先证明对每个 $a \in A$，$f^{-1}(D(a)) = D(\varphi(a))$，然后利用交换图

$$\begin{array}{ccc} A \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(a)) = S_a^{-1}A \\ \downarrow{\scriptstyle f^{\#}} & & \downarrow \\ B \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(D(\varphi(a))) = S_{\varphi(a)}^{-1}B \end{array}$$

来证明右侧的竖直态射是由局部化的泛性质所诱导的态射。□

这种仿射半概形范畴的构造，应当与通过 To¨enand Vaqui´e 的一般理论 [TV09] 所得到的构造相同；这可以用类似于 [Mar12] 中的论证来证明。

3.4. 半概形的范畴。 于是，半概形范畴可以定义为局部仿射的局部半环化空间范畴的满子范畴。

定义 3.24。 若一个半环化空间（$\mathfrak{X}$，$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$）满足：对每个 $x \in \mathfrak{X}$，都存在 x 的一个开邻域 $U \subseteq \mathfrak{X}$、一个半环 A_x，以及作为（局部）半环化空间的同构，使得（U，（$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$）$|_U$）与（谱 A_x，$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_x}$）同构，则称其为一个（局部）半概形。

注意，如果一个半环化空间与一个局部半环化空间同构，那么它本身就是一个局部半环化空间。

一个通常并非仿射的半概形的首个例子，是仿射半概形的开子半概形。给定任意半概形（$\mathfrak{X}$，$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$）和一个开集 $U \subseteq \mathfrak{X}$，相应的开子半概形 按定义就是（U，（$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$）$|_U$）。注意，根据定义 3.24，（$U$，（$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$）$|_U$）是一个半概形，因为 U 局部包含于某个仿射半概形中，因此它的任意开子集都可以由仿射开集覆盖，例如某些主开集。

下面这个非仿射开子半概形的例子，类似于环情形中的著名构造。

例 3.25。 设 F 是一个半域，令 $A = F[x, y]$ 为系数取自 F 的二元多项式半环。理想 $\mathfrak{m} = xA + yA \subsetneq A$ 是极大的，因此它对应于 $\operatorname{Spec} A$ 中的一个闭点。于是，其补集 $U = \operatorname{Spec} A \setminus \{\mathfrak{m}\}$ 是开的。我们断言，开子半概形 $(U, (\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})|_U)$ 不是仿射的。

事实上，取主开集 $U = D(x) \cup D(y)$ 所构成的覆盖，并使用 (3.7) 和定理 3.18，我们得到

$$(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})_{|U}(U) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U) \cong \operatorname{Eq}(A_x \times A_y \rightrightarrows A_{xy}) \cong A.$$

因此，如果 $(U, (\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})|_U)$ 是仿射的，那么根据命题 3.22，它应当同构于 $\operatorname{Spec} A$，从而产生矛盾。

虽然 $\operatorname{Spec} A$ 的开子集自然继承半概形结构，但对于闭子集 $V(I) \subseteq \operatorname{Spec} A$，其中 I 是 A 的理想，除非 I 是一个核，否则并不总能在其上定义自然的半概形结构。

例 3.26。 考虑例 1.8 中的 $\mathbb{N}$ 的极大理想 $\mathfrak{m} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$。现在我们将证明，闭集 $Z = \{\mathfrak{m}\} = V(\mathfrak{m}) \subseteq \operatorname{Spec} \mathbb{N}$ 不具有仿射子半概形结构。

为此，考虑一个仿射半概形之间的态射

$$(f, f^{\#}) \colon (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \to (\operatorname{Spec} \mathbb{N}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{N}})$$

使得 $f(\operatorname{Spec} A) \subseteq Z = \{\mathfrak{m}\}$，并令 $\varphi \colon \mathbb{N} \to A$ 为命题 3.22 给出的整体截面之间的相应态射。若 $A \neq \{0_A\}$，则存在一个属于 $\operatorname{Spec} A$ 的素核 $\mathfrak{p}$；但这样一来，$\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$，这是不可能成立的，因为根据引理 1.19，$\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 是一个核，而根据注 1.13，$\mathfrak{m}$ 不是。因此 $A = \{0_A\}$，所以 $\operatorname{Spec} A$ 是空半概形。

由此可知，Z 不是某个仿射半概形的像，因此不能赋予其 $\operatorname{Spec} \mathbb{N}$ 的仿射子半概形结构。类似的论证表明，Z 也不能是非仿射子半概形。

环情形中其他众所周知的构造也可以类似地推广到半环。例如，可以通过沿交集粘合 n 维仿射空间，将半域上的射影 n 空间定义为一个半概形，如下所示。

例 3.27. 设 F 是一个半域，并考虑按总次数分次的多项式半环 $F[T_0, \dots, T_n]$。对于每个 $i = 0, \dots, n$，我们取局部化 $F[T_0, \dots, T_n]_{T_i}$ 的零次部分，并将其记为

$$A_i = F\left[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \widehat{\frac{T_i}{T_i}}, \dots, \frac{T_n}{T_i}\right].$$

我们将对应的仿射半概形记为 $U_i = \operatorname{谱} A_i$。对于 $i \neq j$，考虑通过进一步对 T_j/T_i 进行局部化所描述的开子集 $V_{ij} \subseteq U_i$。直观而言，V_{ij} 与交集 $U_i \cap U_j$ 一致，后者被视为 U_i 的开子集，而元素 T_j/T_i 在此交集中可逆。因此

$$V_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}, \qquad A_{ij} = A_i\left[\left(\frac{T_j}{T_i}\right)^{-1}\right].$$

类似地， $V_{ji}=$ 谱 A_{ji} 带有

$$A_{ji}=A_j\left[\left(\frac{T_i}{T_j}\right)^{-1}\right].$$

典范同一识别 $A_{ij}\cong A_{ji}$ 诱导出仿射半概形之间的同构

$$V_{ij}\cong V_{ji}.$$

这些粘合同构在三重交集上满足通常的余循环条件，因此， $n+1$仿射半概形 $U_0,\dots,U_n$唯一地粘合成一个半概形 $\mathbb{P}_F^n$.

在命题 3.22 的证明中，我们证明了，两个仿射半概形之间作为局部半环化空间的态射，与相应半环之间的态射相同。这一结论可推广为以下性质，其证明与环的情形相同，参见 [Sta18，引理 26.6。4]。

命题 3.28。 设 $(\mathfrak{X},\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ 是任意一个局部半环化空间，并设 A是一个半环。那么映射

$$\mathrm{Hom}((\mathfrak{X},\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}),(\mathrm{Spec}\,A,\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,A}))\longrightarrow\mathrm{Hom}(A,\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}))$$

通过将$(f,f^{\#})$映射到 $f^{\#}(\mathrm{Spec}\,A)$，得到一个双射。

4. The structure sheaf for Sp

我们再次固定一个半环 A，并在本节中始终使用它；现在令 $X=\mathrm{Sp}\,A$为相应的 k-谱，并将其视为一个拓扑空间，类似于第 2 节中的做法。

我们的目标是仿照第 3 节中的构造，在 X上得到一个合适的结构层。在此过程中，我们会指出确定主开子集上的局部截面时遇到的一些新困难，这促使我们在第 4.2 节中定义全局半环。

4.1. 结构层的构造。与 (3.1) 中的定义类似，对于任意开子集 $U\subseteq X$，我们定义

$$\widetilde{S}_U=\{b\in A\mid \widetilde{D}(b)\supseteq U\}\subseteq A. \tag{4.1}$$

~在特殊情形下，若 $U=D(a)$ 对某个 $a\in A$ 成立，则简记为

$$\widetilde{S}_a=\widetilde{S}_{\widetilde{D}(a)}.$$

以下命题讨论这类集合的代数性质。

~**引理 4.2.** 集合 S_{1_A} 是 A的半可逆元集合。此外，对于任意开子集 $U\subseteq X$，集合 S_U 是 A 的饱和乘法子幺半群，而局部化 $\widetilde{S}_U^{-1}A$ 是一个硬半环。

证明。第一个断言直接由引理 2.13 得出。第二个断言的第一部分已作为引理 3.2 得到证明，其证明使用引理 2.13 而非引理 2.12。

为证明最后一个结论，我们沿用命题 1.32 和引理 1.35 中的相同论证。只需证明任意半可逆元素 $a/s$of $\widetilde{S}_U^{-1}A$ 满足 $a\in\widetilde{S}_U$，或等价地， $\widetilde{D}(a)\supseteq U$。

~由于 a/s 是半可逆的，存在 $b,c \in A$ 和 $u,v,w \in S_U$，使得 $s^2uvw + a(bsvw) = a(csuw)$。因此， s^2uvw 属于由 a 生成的减性理想，故由引理 2.13 可得 $\widetilde{D}(a) \supseteq \widetilde{D}(s^2uvw) \supseteq U$。□

注 4.3。 对于所有开集 $U \subseteq$ 谱 A ，显然可以验证

$$S_U \subseteq \widetilde{S}_{U\cap X}.$$

~特别地， $S_a \subseteq S_a$ 对于所有 $a \in A$。注意，这个包含关系可能是严格的：例如，由引理 2.12 和 4.2 可知， S_{1_A} 是 A中~可逆元的集合，而 S_{1_A} 则由其中的半可逆元构成。回忆一下，对于诸如 $A = \mathbb{B}[x]$ 这样的非硬半环，这两个集合并不相同，见例 1.23。

现在我们可以沿用第 3.1 节中的相同方法，在 X上构造结构层。

第一种方法是考虑 X 上的半环预层 $\mathcal{L}_A$ ，其定义如下：

$$\mathcal{L}_A(U) = \widetilde{S}_U^{-1}A \tag{4.4}$$

对于所有开子集 $U \subseteq X$，并定义结构层

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{L}_A^{\#}$$

在 X 上将其层化。

例 4.5. 局部化预层也可能已经是一个层。例如，考虑自然数半环 $\mathbb{N}$ ，并回顾例 2.2 中我们看到的自然同一

$$\operatorname{Sp}\mathbb{N} \cong \operatorname{Spec}\mathbb{Z}.$$

Sp $\mathbb{N}$ 上的局部化预层 $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ 已经是一个层。事实上，与~例3.20类似，Sp $\mathbb{N}$ 的任意非空开子集都可写成 $D(N)$ 的形式，其中 N是某个非零自然数，并且容易验证

$$\mathcal{L}_{\mathbb{N}}(\widetilde{D}(N)) = \mathbb{N}[1/N] = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}(D(N)) \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

正有理数半域 $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ 是 $\mathbb{N}$的分式半域，同时也是层 $\mathcal{O}_{\operatorname{Sp}\mathbb{N}} = \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$在 0 处的茎。

或者，也可以按照 [Har77，第 II.2] 节，或[Sta18，第 6.17]节中的做法，重复第 3.1 节的方法 C，直接构造结构层 $\mathcal{O}_X$ 。

如定理 3.18 所述，这两种方法在 X上给出了同构层。

注 4.6。 得益于引理 4.2，半环 $\mathcal{L}_A(U)$ 总是硬的；事实上， [MRX] 中证明了，若 $\chi\colon\ A \to A^{\diamondsuit}$ 表示硬化态射，则 $\operatorname{Sp}(\chi)_*\mathcal{L}_{A^{\diamondsuit}} \cong \mathcal{L}_A$。因此，引理 2.18 中的同胚 $\operatorname{Sp}(\chi)$ 诱导出赋半环空间之间的同构

$$(\operatorname{Sp}A, \mathcal{O}_{\operatorname{Sp}A}) \cong (\operatorname{Sp}A^{\diamondsuit}, \mathcal{O}_{\operatorname{Sp}A^{\diamondsuit}}).$$

因此，研究 k-谱版本的仿射半环概形时，只需将范围限定在硬半环的情形。

为了便于计算，最好能有一个拓扑的基，使得我们已知 X 上 $\mathcal{O}_X$ 的局部截面。在谱情形中，正如第 3.1 节中的第二种方法所示，局部化预层在主开子集上的限制是该基上的一个层，这保证了这一点。

为了使其在 k-谱情形下也成立，我们应检查预层 $\mathcal{L}_A$ 是否是 X的主开集基上的层。更准确地说，类似于引理 3.9，我们需要证明：$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$给定 $a \in A$ 和 $a_i \in A$，对于满足 $\bigcup_{i\in I} D(a_i) = D(a)$的 $i \in I$，态射

$$\widetilde{S}_a^{-1}A \longrightarrow \mathrm{Eq}\left(\prod_{i\in I} \widetilde{S}_{a_i}^{-1}A \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \widetilde{S}_{a_ia_j}^{-1}A\right) \tag{4.7}$$

是一个同构。

注 4.8. 研究整体情形下会发生什么已经颇有趣味，也就是说，当 $a = 1_A$时。在这种情况下，引理 4.2 和 (1.31) 表明

$$\widetilde{S}_{1_A}^{-1}A = A^{\diamondsuit}.$$

$\widetilde{\ }$此外，根据引理 2.13，一族主开集 $D(a_i)$ 是 $\operatorname{Sp} A$ 的覆盖，当且仅当由a_i 生成的减性理想等于 A。

因此，将 $a = 1_A$ 代入 (4.7)，就需要证明：对于任意满足 $i \in I$ 的 a_i 族，只要由 a_i 生成的减性理想是 A，态射

$$A^{\diamondsuit} \longrightarrow \mathrm{Eq}\left(\prod_{i\in I} \widetilde{S}_{a_i}^{-1}A \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \widetilde{S}_{a_ia_j}^{-1}A\right) \tag{4.9}$$

是一个同构。

遗憾的是，(4.7) 中的态射一般并不是同构。事实上，即使在注 4.8 中讨论的整体情形下，它也可能不是单射。

例 4.10 ([MRX])。令 $A = \mathbb{N}[x, y]/(x^2 \sim x,\ y^2 \sim y,\ 1 + x \sim x + y)$。这个半环是硬的，因为它唯一的半可逆元是 1 的等价类。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$注意到 $xA + yA = A$，因此 $\operatorname{Sp} A = D(x) \cup D(y)$。可以证明，$1 + xy$ 和 $x + y$ 经由 $A \to A[x^{-1}] \times A[y^{-1}]$ 的像相同，即 $((1 + y)/1,\ (1 + x)/1)$，但 $1 + xy \neq x + y$ 在 A中，这与 (4.9) 的单射性矛盾。

然而，正如接下来的结果所示，在幂等情形下，(4.9) 中态射的单射性得以保证。

引理 4.11. 若 A 是硬幂等半环，且 $a_i \in A$ 对于 $i \in I$ 满足$\widetilde{\ }\mathrm{Sp}A = \bigcup_{i\in I} D(a_i)$，则态射

$$A^{\diamondsuit} \longrightarrow \prod_{i\in I} \widetilde{S}_{a_i}^{-1}A$$

是单射的。

证明。 由于该半环是硬的，我们有 $A^{\diamondsuit} \cong A$。关键在于，对于困难幂等半环，若一个理想的减法闭包是全集，则由命题 1.28 可知该理想就是全理想。有了这一观察，所需的单射性可按子引理 3.10 中类似的方法证明。□

至于 (4.9) 中态射的满射性，我们没有反例，但怀疑它一般并不成立。不过，在一些重要的初等情形下，它显然成立，例如下一个例子中的情形。

例 4.12。 设 F 是一个幂等半域，并考虑半环 $A = F[x_1, \ldots, x_n]$。那么，对于这样的 A，(4.9) 中的态射是一个同构。这是由以下更强的事实推出的：任意覆盖 $\operatorname{Sp} A = \widetilde{\bigcup_{i\in I} D(a_i)}$ 都是平凡的，即对于某个 $i \in I$，有 $\operatorname{Sp} A = D(a_i)$。

为证明这一最后结论，考虑极大理想 $\mathfrak{m} = x_1 A + \ldots + x_n A$。由于 $\operatorname{Sp} A = \widetilde{\bigcup_{i\in I} D(a_i)}$，存在 $i \in I$ 使得 $\mathfrak{m} \in D(a_i)$。这意味着 $a_i \notin \mathfrak{m}$，因此 a_i 是一个常数项非零的多项式。根据引理 1.25，它是半可逆的，这意味着根据引理 2.13，$D(a_i) = \operatorname{Sp} A$。

请注意，同样的论证适用于任何核-局部半环，即具有唯一极大核的半环。

4.2. **全局半环**。 回顾一下，$\operatorname{Spec} A$ 上结构层的整体截面半环与 A同构，正如定理 3.18所示。

这在 k-谱情形下不再成立，因为自然态射

$$A \longrightarrow \Gamma A = \mathcal{O}_{\operatorname{Sp} A}(\operatorname{Sp} A)$$

可能不是同构。于是，考虑将每个半环 A 映射到其相应的结构层整体截面半环 ΓA 的映射是很有意义的。

引理 4.13。 映射 $A \mapsto \Gamma A$ 是从半环范畴到自身的函子。

证明。 对于任意态射 $f\colon\ A \to B$，我们可以如下构造相应的态射 Γf：$\Gamma A \to \Gamma B$。请注意，对于所有 $a \in A$，我们都有

$$\widetilde{D}(f(a)) = (\operatorname{Sp}(f))^{-1}(\widetilde{D}(a)).$$

利用这一等式，可以推得对于任意开子集 $U \subseteq \operatorname{Sp} A$，

$$f(\widetilde{S}_U) \subseteq \widetilde{S}_{U'},$$

有 $U' = (\operatorname{Sp}(f))^{-1}(U)$。因此，态射 $\varphi \circ f\colon\ A \to \widetilde{S}_{U'}^{-1} B$，其中$\varphi$：$B \to \widetilde{S}_{U'}^{-1} B$ 为局部化态射，可唯一地分解为经过态射 $\mathcal{L}_A(U) = \widetilde{S}_U^{-1} A \to \widetilde{S}_{U'}^{-1} B = \mathcal{L}_B(U')$。层化的标准性质表明，我们有一个态射 $\mathcal{O}_{\operatorname{Sp} A}(U) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Sp} B}(U')$。取 $U = \operatorname{Sp} A$ 后，即得所需的态射。□

我们为这样一类半环保留一个特殊名称：对于它们，k-谱版本的结构层的整体截面与该半环本身一致。

定义 4.14. 若半环 A 的自然态射$A \to \Gamma A$ 是同构，则称其为整体的。

可以证明，任意整体半环都是硬的（参见 [MRX]）。反过来，注 4.6 和例 4.12 表明，在幂等半域上以 $n \geq 0$ 个变量构成的多项式环的硬化是整体的。更一般地，每个核局部半环 A 若具有极大核 $\mathfrak{m}$，则满足

$$\Gamma A^{\diamondsuit} \cong \Gamma A = \mathcal{O}_{\operatorname{Sp} A}(\operatorname{Sp} A) \cong A_{\mathfrak{m}} \cong A^{\diamondsuit},$$

因此， $A^{\diamondsuit}$ 是一个全局半环。

以下结果给出了一个全局化函子的构造，它以一种普适的方式将任意半环赋予一个全局半环。证明很直接，留给读者。

命题 4.15。 设 A 是一个半环，并考虑带有自然态射 $\Gamma^n A \to \Gamma^{n+1} A$的直接系$\{\Gamma^n A \mid n \geq 0\}$ 。那么直接余极限

$$G(A) = \operatorname{colim}_n \Gamma^n A$$

是一个全局半环，并且它带有一个态射 $A \to G(A)$，相对于到全局半环满子范畴的态射而言，该态射具有普适性。

此外，映射 G 给出了一个到全局半环范畴的函子，它是包含函子的左伴随。

注意，对于全局环 A，(4.4) 中的预层 $\mathcal{L}_A$ 原则上并不是 $\operatorname{Sp} A$ 上主开集基上的层。相反，该定义只意味着它对全空间的覆盖满足层性质，正如注 4.8 的特殊情形所示。

5. Universal valuations

现在，我们研究赋值定义在半环情形下的一种推广，该推广取自 [GG16, 2.5]。关于这类对象的更多内容，可参阅文献：其模空间见 [GG22] 和 [Mac20]。

我们将在定理 5.12 中看到，这些一般化的赋值在半环的谱与和它相关联的某个幂等半环的 k-谱之间建立了联系，并在后者上给出一个特征层。

5.1. G-半环上的赋值。

回想一下，任意幂等半环 S 关于如下定义的序关系都是一个偏序集：当且仅当 $s + t = t$ 时， $s \preceq t$ 。

定义 5.1. 半环 A 上取值于幂等半环 S 的 G-赋值 是一个映射 $v\colon A \to S$，满足：

(1) $v(0_A) = 0_S$ 且 $v(1_A) = 1_S$；(2) $v(ab) = v(a)v(b)$；(3) $v(a+b) \preceq v(a) + v(b)$。

我们用 $\operatorname{Val}(A, S)$ 表示 A 中取值于 S 的 G-赋值集合。

注记 5.2. 按照上述约定，取值于热带半域 $\mathbb{T}$ 的域 K 上的 a G-赋值，无非就是 K 上通常的非阿基米德赋值。事实上，设 $v\colon K \to \mathbb{T}$ 是一个 G-赋值。那么第三公理写作 $v(a+b) \preceq \min(v(a), v(b))$，这等价于

$$\min(v(a+b), v(a), v(b)) = \min(v(a), v(b))$$

因而等价于 $v(a+b) \geq \min(v(a)\ v(b))$，由此得到赋值的通常性质。

注意， G-赋值 v 的核 $\ker(v) = v^{-1}(0_S)$ 是 A 的一个理想，但一般而言，它不是一个 k-理想，因为 v 不一定是半环同态。例如，映射 $v\colon \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ （它将所有非 1 自然数映射到 0）是一个 G-赋值，其核为 $\mathbb{N} \setminus \{1\}$；根据注 1.13，它不是一个可减的理想。

给定一个 G-赋值 $v\colon A \to S$，我们定义

$$A_v = \{a \in A \mid v(a) \preceq 1_S\}.$$

我们看到， A_v 是 A 的一个子半环。它推广了与非阿基米德赋值相关联的赋值环的概念。

注 5.3。 到布尔半环 $v\colon A \to \mathbb{B}$ 的 G-赋值与 A 的素理想之间存在一一对应关系。给定 $v \in \mathrm{Val}(A, \mathbb{B})$，其核是一个素理想，因此 $\ker(v) \in \operatorname{Spec} A$。逆向对应通过将 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ 映射到由下式定义的示性函数 $\chi_{\mathfrak{p}}$ 得到

$$\chi_{\mathfrak{p}}(a) = \begin{cases} 0 & \text{if } a \in \mathfrak{p}, \\ 1 & \text{if } a \notin \mathfrak{p}. \end{cases}$$

回顾命题 2.4，若 A 是幂等的，同一映射限制后给出 $\operatorname{Sp} A$ 与 $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{B}) \subseteq \mathrm{Val}(A, \mathbb{B})$ 之间的双射。

下面的陈述将 G-赋值与谱联系起来。

命题 5.4. 设 A 是一个半环， S 是一个幂等半环，且$v\colon A \to S$ 是一个 G-赋值。那么 v 诱导出一个连续映射

$$v^*\colon \operatorname{Sp} S \longrightarrow \operatorname{Spec} A, \qquad \mathfrak{p} \longmapsto v^{-1}(\mathfrak{p}).$$

证明。 在注 5.3 和命题 2.4 的识别下， v^* 对应于映射 $\mathrm{Hom}(S, \mathbb{B}) \to \mathrm{Val}(A, \mathbb{B})$，该映射由 $f \mapsto f \circ v$给出。因此，容易验证 v^* 是良定义的。

此外，对于任意 $a \in A$，我们有

$$\begin{aligned}(v^*)^{-1}(D(a)) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} S \mid v^*(\mathfrak{p}) \in D(a)\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} S \mid a \notin v^{-1}(\mathfrak{p})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} S \mid v(a) \notin \mathfrak{p}\} = \widetilde{D}(v(a)).\end{aligned}$$

因此，$\operatorname{Spec} A$ 中的主开集的原像是 $\operatorname{Sp} S$中的开集。根据引理 2.12，前者构成 $\operatorname{Spec} A$ 的扎里斯基拓扑的一组基，故映射 v^* 是连续的。□

5.2. **泛 G-赋值**。 在本小节中，我们固定一个半环 R 以及一个 R-半代数 A，即一个配备了同态 $\iota\colon R \to A$ 的半环。例如，任意半环都有唯一的 $\mathbb{N}$-代数结构，而任意幂等半环都有唯一的 $\mathbb{B}$-代数结构。

我们考虑集合

$$M_R(A)$$

由 A 的有限生成 R-子半模构成。它是一个幂等半环，其中 $M + N$ 是作为 R-半模的和，且对于任意 M， $M \cdot N = \langle ab \mid a \in M,\ b \in N\rangle$ (A)。加法的单位元是$\langle 0_A\rangle = \{0_A\}$，而乘法的单位元是 $\langle 1_A\rangle_R = \iota$（$R$）。

例 5.5。 当 $A = R$时，我们得到 A 的有限生成理想所构成的幂等半环，其运算为理想的通常和与乘积；戴德金早已在交换环的情形下研究过它，参见 [Gol99, 例 1.4]。这一构造的模版本（针对交换环）也曾在 [BG23]中得到研究。

注意，幂等半环 $M_R(A)$ 上的偏序就是 $\subseteq$；对于两个子模 M，$N \in M_R(A)$，我们有 $M + N = N$ 当且仅当 $M \subseteq N$。此外，任意 R-代数态射 $f\colon A \to B$ 都诱导出一个半环态射

$$M_R(f)\colon M_R(A) \longrightarrow M_R(B) \tag{5.6}$$

它将 A 的有限生成 R-子半模 $\langle a_1, \dots, a_n\rangle_R$ 映射到 $\langle f(a_1) \dots, f(a_n)\rangle_R$。

现在来考虑映射

$$v_R\colon A \longrightarrow M_R(A), \qquad a \longmapsto \langle a\rangle_R. \tag{5.7}$$

以下观察说明了它与前一小节的关系。

引理 5.8。 映射 v_R 是 A 上的一个 G-赋值，且 $\iota(R) \subseteq A_{v_R}$。

证明。 我们有 $v_R(0_A) = \{0_A\}$，它是 $M_R(A)$ 的零元素；并且 $v_R(1_A) = \iota(R)$，它是 $M_R(A)$ 的乘法单位元素。对于所有 $a, b \in A$，我们有

$$v_R(a)v_R(b) = \langle a\rangle_R \cdot \langle b\rangle_R = \langle ab\rangle_R = v_R(ab).$$

此外，

$$v_R(a + b) = \langle a + b\rangle_R \subseteq \langle a\rangle_R + \langle b\rangle_R = v_R(a) + v_R(b).$$

由于 $M_R(A)$ 上的偏序恰好是 $\subseteq$，我们得出 v_R 满足定义 5.1 中的所有公理。最后，对于所有 $r \in R$，我们有 $v_R(\iota(r)) = \langle \iota(r)\rangle_R \subseteq \iota(R)$，因此 $v_R(\iota(r)) \preceq 1_{M_R(A)}$，如所需。□

我们称（5.7）中的映射 v_R 为 R-半代数 A 的泛 G-赋值。以下结果说明了这一术语的合理性：MacPherson 在环的情形下于 [Mac20，例 3.16] 中给出了该结果，而最后一位作者则在 [Xar] 中将其推广到了半环。具体而言，在 $R = \mathbb{Z}$ 的情形下，它明确描述了 [GG16，命题 2.5.4] 中所考察的泛对象。

定理 5.9。 对于每个 G-赋值 $v\colon A \to S$，满足 $\iota(R) \subseteq A_v$，都存在唯一的半环态射 $f\colon M_R(A) \to S$，使得 $v = f \circ v_R$。

证明。 我们定义 f，对每个 $M = \langle a_1, \dots, a_n\rangle_R \in M_R(A)$，取

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} v(a_i).$$

我们首先验证 f是良定义的。为此，设 $M = \langle a_1, \dots, a_n\rangle_R = \langle b_1, \dots, b_m\rangle_R$。那么，每个 a_i 都可以写成有限和 $a_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}b_j$，其中 $r_{ij} \in R$。因此

$$v(a_i) = v\Big(\sum_j r_{ij}b_j\Big) \preceq \sum_j v(r_{ij}b_j) \preceq \sum_j v(\iota(r_{ij}))\, v(b_j) \preceq \sum_j v(b_j), \tag{5.10}$$

由于 $\iota(R) \subseteq A_v$ 意味着 $v(\iota(r_{ij})) \preceq 1_S$，且 S上的偏序与求和和乘积相容，因此成立。出于同样的原因，将 (5.10) 对$i = 1, \dots, n$ 求和，可得 $\sum_i v(a_i) \preceq \sum_j v(b_j)$。交换两者的角色并作同样论证，可得反向关系，故所需等式成立。

容易看出， f 是一个半环态射，并且根据定义，我们有

$$(f \circ v_R)(a) = f(\langle a \rangle_R) = v(a)$$

对所有 $a \in A$ 均成立，从而证明了 $v = f \circ v_R$。从这一最后的要求以及每个 $M = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_R \in M_R(A)$ 都可以写成 $M = \langle a_1 \rangle_R + \dots + \langle a_n \rangle_R$ 这一事实，唯一性显而易见。□

例 5.11. 当 $R = \mathbb{N}$ 时，我们得到半环的一个泛对象；当 $R = \mathbb{B}$ 时，得到幂等半环的一个泛对象；当 $R = A$ 时，得到 A 的有限生成理想的一个泛对象，且其具有最小的 1-有界赋值。

下面的关键结果通过使用 A 的泛 G-赋值，在拓扑上将 A 的谱与相关幂等半环 $M_R(A)$的 k-谱对应起来。对于环和理想，这种关系已在 [BG23，命题 3.10] 中确立。

定理 5.12. 对于任意 R-半代数 A ，态射

$$v_R^* \colon \operatorname{Sp} M_R(A) \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

是一个同胚。

在定理 5.12 的证明中，我们将用到这样一个观察：$\operatorname{Sp} M_R(A)$ 的拓扑可以由远小于所有主开集的一个类生成。具体来说，只需取由单个元素生成的 R-子半模 A 所定义的那些集合。准确结果如下。

引理 5.13. 对于所有 $a_1, \dots, a_n \in A$，我们有

$$\widetilde{D}(\langle a_1, \dots, a_n \rangle_R) = \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{D}(\langle a_i \rangle_R).$$

特别地，族 $\left\{ \widetilde{D}(\langle a \rangle_R) \mid a \in A \right\}$ 是 $\operatorname{Sp} M_R(A)$ 的扎里斯基拓扑的一个基。

证明. 第二个断言由引理 2.13 和第一个断言立即得到。为证明后者，注意到， $M_R(A)$ 的一个素 k-理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $\mathfrak{p} \in \widetilde{D}(\langle a_1, \dots, a_n \rangle_R)$，当且仅当引理 5.3 中与之关联的函数 $\chi_{\mathfrak{p}} \colon M_R(A) \to \mathbb{B}$ 满足 $\chi_{\mathfrak{p}}(\langle a_1, \dots, a_n \rangle_R) = 1$。由于根据命题 2.4 的证明以及 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_R = \langle a_1 \rangle_R + \dots + \langle a_n \rangle_R$，$\chi_{\mathfrak{p}}$ 是一个半环同态，我们可推知前一个等式等价于

$$1 = \chi_{\mathfrak{p}}(\langle a_1, \dots, a_n \rangle_R) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{\mathfrak{p}}(\langle a_i \rangle_R).$$

这个条件等价于存在某个 $i = 1, \dots, n$，使得 $\chi_{\mathfrak{p}}(\langle a_i \rangle_R) = 1$。当且仅当 $\langle a_i \rangle_R \notin \mathfrak{p}$，也就是说当 $\mathfrak{p} \in D(\langle a_i \rangle_R)$ 时，这一条件才成立。□

定理 *5.12* 的证明。 应用命题 5.4 和引理 5.8，我们已经知道映射

$$v_R^*\colon \operatorname{Sp} M_R(A) \longrightarrow \operatorname{Spec} A, \qquad \mathfrak{p} \longmapsto v_R^{-1}(\mathfrak{p})$$

是良定义且连续的。为证明它是双射，对每个 $\mathfrak{q} \in$谱 A 定义集合

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{q} = \{M \in M_R(A) \mid M \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

容易看出， $\mathfrak{p}_\mathfrak{q}$ 是 $M_R(A)$中的减法素理想，并满足$v_R^*(\mathfrak{p}_\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$。反过来，取 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} M_R(A)$。对于所有 $M = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle_R \in M_R(A)$，有

$$\mathfrak{p} \notin \widetilde{D}(M) \iff \mathfrak{p} \notin \widetilde{D}(\langle a_i\rangle_R)\ \forall i = 1, \ldots, n$$

根据引理 5.13。因此，当且仅当对所有 $i = 1, \ldots, n$， $M \in \mathfrak{p}$ 时， $\langle a_i\rangle_R \in \mathfrak{p}$ 。但最后这个条件等价于对所有 $a \in M$， $\langle a\rangle_R \in \mathfrak{p}$，因为

$$\langle a\rangle_R + \langle a_1\rangle_R + \ldots + \langle a_n\rangle_R = \langle a_1\rangle_R + \ldots + \langle a_n\rangle_R$$

且 $\mathfrak{p}$ 是可减的。我们推得，当且仅当对所有$a \in M$， $M \in \mathfrak{p}$ 为 $v_R(a) \in \mathfrak{p}$ ，因此

$$\mathfrak{p}_{v_R^*(\mathfrak{p})} = \{M \in M_R(A) \mid v_R(M) \subseteq \mathfrak{p}\} = \mathfrak{p},$$

从而完成双射性的证明。

最后，我们需要验证 v_R^* 是一个开映射。为此，注意对所有 $a \in A$ ，都有

$$\mathfrak{p} \in \widetilde{D}(\langle a\rangle_R) \iff v_R(a) \notin \mathfrak{p} \iff a \notin v_R^{-1}(\mathfrak{p}) \iff v_R^*(\mathfrak{p}) \in D(a).$$

因此，

$$v_R^*(\widetilde{D}(\langle a\rangle_R)) = D(a), \tag{5.14}$$

这是 $\operatorname{Spec} A$ 中的一个开集。由引理 5.13 可知，这足以得出 v_R^* 是一个开映射，从而完成证明。□

注记 5.15. 定理 5.12 中的双射也可以从另一个角度来看：回顾一下，在与命题 5.4 的证明相同的识别下，映射 v_R^* 对应于

$$\operatorname{Hom}(M_R(A), \mathbb{B}) \longrightarrow \operatorname{Val}(A, \mathbb{B}), \qquad f \longmapsto f \circ v_R.$$

由于任何取值于 $\mathbb{B}$ 的 G-赋值的像都是整的，因此，根据定理 5.9 的泛性质，这种对应是一个双射。

5.3. **与普适赋值相关的预层。** 我们再次考虑一个半环 R 和一个 R-半代数 A。定理 5.12 中的同胚启发我们在 $\operatorname{Sp} M_R(A)$ 上定义一个特定的预层 $\mathcal{F}$。具体来说，对于任意开集 $U \subseteq \operatorname{Sp} M_R(A)$，我们可以考虑相应的开集 $v_R^*(U) \subseteq \operatorname{Spec} A$，并定义

$$\mathcal{F}(U) = M_R(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(v_R^*(U))).$$

这很有意义，因为 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(v_R^*(U))$ 自然是一个 A-半代数，因此也是一个 R-半代数。

注 5.16. 请注意，即使在 $A = R$ 的情形下，我们考虑的也不是将每个开 U 映到 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(v_R^*(U))$ 中有限生成理想所构成的幂等半环的预层（如 [BG23 第 4 节.2], 中所做的那样），而是将其有限生成 A-子半模所构成的更大的幂等半环。

引理 5.13 给出的拓扑的基上，预层 $\mathcal{F}$ 具有良好的性质。事实上，由于 (5.14) 和定理 3.18，对于所有 $a \in A$，我们有

$$\mathcal{F}(\widetilde{D}(\langle a\rangle_R)) \cong M_R(A[a^{-1}]).$$

特别地，如所期望的，它的整体截面为

$$\mathcal{F}(\operatorname{Sp} M_R(A)) \cong M_R(A).$$

此外，由于下述结果，$\mathcal{F}$ 在这些主开集上的局部截面的半环是整体截面半环的局部化。

引理 5.17. 对于所有 $a \in A$，存在一个同构

$$M_R(A[a^{-1}]) \cong M_R(A)\big[v_R(a)^{-1}\big].$$

证明. 回顾一下，局部化 $A[a^{-1}]$ 带有一个自然同态 $\varphi_a\colon A \to A[a^{-1}]$。如同 (5.6), 这诱导出一个半环同态 $M_R(\varphi_a)\colon M_R(A) \to M_R(A[a^{-1}])$，将 $v_R(a)$ 映射为

$$M_R(\varphi_a)(v_R(a)) = M_R(\varphi_a)(\langle a\rangle_R) = \langle \varphi_a(a)\rangle_R.$$

这个元素在 $M_R(A[a^{-1}])$ 中可逆，逆元为 $\langle 1_A/a\rangle_R$。因此，局部化的泛性质给出了唯一的态射

$$M_R(A)\big[v_R(a)^{-1}\big] \longrightarrow M_R(A[a^{-1}])$$

从局部化态射恢复 $M_R(\varphi_a)$。

反过来，借助引理 5.8 很容易验证，映射$v\colon A[a^{-1}] \to M_R(A)\big[v(a)^{-1}\big]$ 由 $v(b/a^n) = v_R(b)/v_R(a)^n$ 对所有$b \in A$ 定义，是一个 G-赋值，其中 R 的所有元素都是整的。因此，根据定理 5.9，存在唯一的半环同态

$$M_R(A[a^{-1}]) \longrightarrow M_R(A)\big[v_R(a)^{-1}\big]$$

从 $A[a^{-1}]$的泛 G-赋值恢复 v。

由于这两个映射都来自泛性质，可以看出它们的复合是单位映射，由此完成证明。 □

然而，给定满足$\bigcup_{i\in I} D(\langle a_i\rangle_R) = \operatorname{Sp} M_R(A)$ 的 $i \in I$ 上的 $a_i \in A$，态射

$$M_R(A) \longrightarrow \operatorname{Eq}\left(\prod_{i\in I} M_R(A[a_i^{-1}]) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} M_R(A[(a_ia_j)^{-1}])\right) \tag{5.18}$$

不必是同构。这意味着预层 $\mathcal{F}$ 通常不是引理 5.13 中所描述的开集基上的层。

注 5.19. 这种方法应当与 [GKMV26] 提出的方法等价，并对弯曲关系作了重新诠释。式 (5.18) 中的态射不是同构这一问题，与从不同视角看待的 [GKMV26], 中的整体化问题相同。

最后，我们指出，此处定义的预层 $\mathcal{F}$ 通常不等于第 4 节中定义的预层 $\mathcal{L}_{M_R(A)}$。事实上，它们在主开集上的截面可能不同，因为可能出现这样的情况：

$$M_R(A)\big[v_R(a)^{-1}\big] \ncong \widetilde{S}^{-1}_{v_R(a)} M_R(A)$$

对于某个 $a \in A$，正如下面的例子所示。

例 5.20. 考虑域 K 上二元多项式构成的环 $R = K[x, y]$，并设 $A = R$。那么，$M_R(R)$ 是 R 的（有限生成）理想半环。再考虑 R 中的多项式 x 以及极大理想 $\mathfrak{m} = \langle x,\ y\rangle_R = xR + yR$。

另一方面，由引理 5.13

$$\widetilde{D}(\mathfrak{m}) = \widetilde{D}(\langle x\rangle_R) \cup \widetilde{D}(\langle y\rangle_R) \supseteq \widetilde{D}(\langle x\rangle_R) = \widetilde{D}(v_R(x)).$$

因此，将其视为 $M_R(R)$ 的一个元素，我们有 $\mathfrak{m} \in S_{v_R(x)}$，故其像在局部化 $\widetilde{S}^{-1}_{v_R(x)} M_R(R)$ 中可逆。

另一方面，由 $M_R(R)$ 中由 $v_R(x)$ 生成的乘法子幺半群是饱和的可知，$M_R(R)\big[v_R(x)^{-1}\big]$ 中唯一可逆的元素是 $v_R(x)$ 的幂的像，这是由引理 1.4 得出的。特别地，$\mathfrak{m}$ 的像在 $M_R(R)\big[v_R(x)^{-1}\big]$ 中不可逆。

5.4. **整体化 G-赋值**。第 3.4 节中定义的半概形情形可以推广前面各小节中的构造。

定义 5.21。半概形（$\mathfrak{X}$，$\mathcal{O}_\mathfrak{X}$）上的 G-赋值是由一个幂等半环化空间（$\mathfrak{S}$，$\mathcal{V}_\mathfrak{S}$）（即配备了幂等半环层的拓扑空间）以及一个态射 $v\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{X}$组成的数据，使得

$$v^\#(U)\colon \mathcal{O}_\mathfrak{X}(U) \to \mathcal{O}_\mathfrak{S}(v^{-1}(U))$$

对于每个开集 $U \subseteq \mathfrak{X}$，它都是一个 G-赋值。

如果对于每个开集 $U \subseteq \mathfrak{X}$，上述映射都是一个 1-有界 G-赋值，我们还称该 G-赋值是 1-有界的。

根据这个定义，给定任意半概形态射 $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$，可以构造一个符合下图的相对泛 G-赋值$v_\mathfrak{Y}$

$$\begin{array}{ccc} M_\mathfrak{Y}(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{v_\mathfrak{Y}} & \mathfrak{X} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathfrak{Y} \end{array}$$

其中对角箭头是一个 1-有界的 G-赋值，并满足类似于定理 5.9 的泛性质。

详情请参阅最后一位作者即将发表的论文 [Xar]。

References

[AA94] Francisco Alarcon 和 Daniel D. Anderson。《交换半环及其理想格》。*Houston J. Math*，20(4):571–590，1994。

[BG23] F´elix Baril Boudreau 和 Cristhian Garay。《仿射概形与层的幂等化》。 *ArXiv e-print* 可在 https://arxiv.org/abs/ 2304.04872 获取，2023年。[BLMV26] Sourayan Banerjee、Oliver Lorscheid、Alejandro Mart´ınez M´endez 和 Alejandro Vargas。《代数几何学家工具包》。即将出版，2026。[DP02] Brian A. Davey 和 Hilary A. Priestley。 *Introduction to Lattices and Order*。剑桥大学出版社，纽约，第二版，2002年。[GG16] Jeffrey Giansiracusa 和 Noah Giansiracusa。《热带簇的方程》。*Duke Math. J.*，165(18):3379–3433，2016年。[GG22] Jeffrey Giansiracusa 和 Noah Giansiracusa。《通用热带化与贝尔科维奇解析化》。 *Kybernetika (Prague)*，58(5):790–815，2022年。[GKMV26] Jeffrey Giansiracusa、Kevin K¨uhn、Stefano Mereta 和 Eduardo Vital。《热带代数》。即将出版，2026。[Gol99] Jonathan S. Golan。 *Semirings and their applications*。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1999年。为 *The theory of semirings with applications to mathematics and theoretical computer science* 的更新扩充版本，[1992 1163371 93 16085] Longman Sci. Tech.，哈洛，；MR (b:)。[Har77] Robin Hartshorne。 *Algebraic Geometry*。施普林格出版社，纽约-海德堡，1977年。《数学研究生教材》第52卷。[Jun17] Jaiung Jun。《半环概形的切赫上同调》。 *Journal of Algebra*，483 306 328，2017年：–。[Les12] Paul Lescot。《绝对代数 III——饱和谱》。 *Journal of Pure and Applied Algebra* 216 5 1004 1015, 2012 ，( ): –。[Lor12] Oliver Lorscheid。《蓝图的几何：第一部分：代数背景与概形理论》。 *Advances in Mathematics*，229(3):1804–1846，2012年。[Mac20] Andrew W. Macpherson。《非阿基米德几何与热带几何中的骨架》。*Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*，29(2):431–506，2020年。[Mar12] Florian Marty。《相对扎里斯基开对象》。 *Journal of K-Theory* 10 1 9 39, , ( ): –。[MRX] 2012 Marc Masdeu、Joaquim Ro´e 和 Xavier Xarles。《使用核理想的交换半环概形理论》。准备中。[Sta18] Stacks Project 作者。 *Stacks Project*。https://stacks.math. columbia.edu，2018年。[TV09] Bertrand To¨en 和 Michel Vaqui´e。《Au-dessous de Spec $\mathbb{Z}$》。 *J. K-Theory*，3 3 437 500，2009年 ( ): –。[Xar] Xavier Xarles。《半概形的通用赋值》。准备中。

Roberto Gualdi，加泰罗尼亚理工大学数学系，08034 巴塞罗那，西班牙
Email address: roberto.gualdi@upc.edu

Arne Kuhrs ，数学研究所 ，帕德博恩大学 ，33098 帕德博恩 ，Germany
Email address: kuhrs@math.uni-paderborn.de

Mayo Mayo Garcia，英国考文垂 CV4 7AL 华威大学
Email address: mayo.mayo-garcia@warwick.ac.uk

Xavier Xarles，数学系，巴塞罗那自治大学，08193 贝拉特拉，巴塞罗那，加泰罗尼亚
Email address: xavier.xarles@uab.cat